



№40/2020

Znanstvena misel journal

The journal is registered and published in Slovenia.

ISSN 3124-1123

VOL.1

The frequency of publication – 12 times per year.

Journal is published in Slovenian, English, Polish, Russian, Ukrainian.

The format of the journal is A4, coated paper, matte laminated cover.

All articles are reviewed

Edition of journal does not carry responsibility for the materials published in a journal.

Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws

Free access to the electronic version of journal

Chief Editor – Christoph Machek

The executive secretary - Damian Gerbec

Dragan TsallaeV — PhD, senior researcher, professor

Dorothea Sabash — PhD, senior researcher

Vatsdav Blažek — candidate of philological sciences

Philip Matoušek — doctor of pedagogical sciences, professor

Alicja Antczak — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Katarzyna Brzozowski — PhD, associate professor

Roman Guryev — MD, Professor

Stepan Filippov — Doctor of Social Sciences, Associate Professor

Dmytro Teliga — Senior Lecturer, Department of Humanitarian and Economic Sciences

Anastasia Plahtiy — Doctor of Economics, professor

Znanstvena misel journal

Slovenska cesta 8, 1000 Ljubljana, Slovenia

Email: info@znanstvena-journal.com

Website: www.znanstvena-journal.com

CONTENT

AGRICULTURAL SCIENCES

- Aleksanyan A.,
Yeghiazaryan G., Barseghyan R.**
IDENTIFYING OPPORTUNITIES FOR THE EFFICIENT USE
OF WATER AND LAND IN THE EXPANDED GLADZOR
COMMUNITY IN VAYOTS DZOR..... 3

BIOLOGICAL SCIENCES

- Asanova E., Maigulakova L.**
MORPHOMETRIC INDICATORS WHITE FISH LAKES
ISSYK-KUL 8

CHEMISTRY

- Nasibova Sh.**
SYNTHESIS AND PROPERTIES OF NEW PETROLEUM-
COLLECTING AND PETROLEUM-DISPERSING
REAGENTS OF IONIC LIQUID TYPE BASED ON 2-
DIALKYIAMINOETHANOL AND DODESYLBROMIDE ... 11

PHYSICS AND MATHEMATICS

- Kiseleva E., Prytomanova O.**
AN ALGORITHM FOR SOLVING FUZZY OPTIMAL
PARTITIONING OF SET PROBLEM WITH LOCATION OF
CENTERS OF THE SUBSETS 19

- Yurov V., Shelpyakov B., Guchenko S.**
ANTIFRICTIONAL PROPERTIES OF HIGH-ENTROPY
TURBINE SHOVEL COATINGS..... 31

- Yurov V., Zhanabergenov T., Guchenko S.**
THICKNESS OF THE SURFACE LAYER OF SOME
REFRIGERANT METALS 27

TECHNICAL SCIENCES

- Alexseev V., Horbach A., Khutarnaya K.**
PCB SIGNAL INTEGRITY ANALYSIS USING
HYPERLYNX..... 40

- Semkiv O., Shevchenko S.**
COMPUTER MODEL OF A TRAJECTORY FOR THE
MOVEMENT OF A LOAD OF SWINGING SPRING WITH
MOVABLE MOUNTING POINT 54

- Grushun A., Grushun T.**
COMPUTER-ORIENTED EVALUATION THE STABILITY
MARGIN OF LINEAR AUTOMATIC CONTROL SYSTEM
BASED ON THE MIKHAILOV CRITERION 50

Т.А. Грушун // Динамические системы. – К.: Лыбидь, 1994. – №13 – С.16 – 20.

13. Пряшников Ф.Д. Машинно-ориентированный метод построения областей качества в пространстве параметров динамических систем / Ф.Д.

Пряшников, А.И. Грушун, Т.А. Грушун // Вестник СевГТУ: сб. науч. тр. – Севастополь: изд-во СевГТУ, 1995. – Вып. 1. – С.20 – 22.

14. Юревич Е.И. Теория автоматического управления / Е.И. Юревич. – Л.: Энергия, 1975.

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ З РУХОМОЮ ТОЧКОЮ ПІДВІСКИ

Семків О.М.

доктор технічних наук, професор

Шевченко С.М.

Національний університет цивільного захисту України

COMPUTER MODEL OF A TRAJECTORY FOR THE MOVEMENT OF A LOAD OF SWINGING SPRING WITH MOVABLE MOUNTING POINT

Semkiv O.

Doctor of Technical Sciences, Professor

Shevchenko S.

National University of Civil Defense of Ukraine, Kharkov city

Анотація

Наведено геометричне моделювання нехаотичної періодичної траєкторії руху маятникового коливання у вертикальній площині вантажу підвішеної невагомої пружини, яка зберігає прямолінійність своєї осі. В літературі такий вид маятника називають хитною пружиною (swinging spring). Шукана траєкторія вантажу хитної пружини за допомогою комп'ютера моделюється з використанням значень маси вантажу, жорсткості пружини та її довжини в ненавантаженому стані. Крім того, використовуються такі початкові величини параметрів ініціювання коливань хитної пружини: кут відхилення осі пружини від вертикалі, швидкість зміни величини цього кута, а також параметр подовження пружини та швидкість зміни подовження. Розрахунки виконано за допомогою рівняння Лагранжа другого роду. Також розглянуто варіанти знаходження періодичних траєкторій точкового вантажу хитної пружини з рухомою (вздовж координатних осей) точкою кріплення.

Abstract

The geometric modeling of the non-chaotic periodic trajectory of motion of the pendulum oscillation in the vertical plane of load of the suspended weightless spring, which preserves the straightness of its axis, is presented. In the literature, this kind of pendulum is called swinging spring. The desired trajectory of loading a swinging spring by computer is simulated using the values of the weight of the load, the stiffness of the spring and its length in the unloaded state. In addition, the following initial values of the oscillation spring oscillation parameters are used: the angle of deviation of the spring axis from the vertical, the rate of change of this angle, as well as the parameter of elongation of the spring and the rate of change of elongation. The calculations were made using the second-order Lagrange equation. The variants of finding periodic trajectories of a point load of a swinging spring with a movable point (along the coordinate axes) are also considered.

Ключові слова: маятникові коливання з рухомою точкою підвісу, періодичної траєкторії руху, хитна пружина, рівняння Лагранжа другого роду

Keywords: pendulum oscillations with movable suspension point, periodic trajectory, swinging spring, second-order Lagrange equation

Постановка проблеми

Для пояснення складних процесів, що відбуваються в природі, часто застосовують наочні механічні інтерпретації. Зокрема, для коливальних процесів у якості моделей використовують маятникові аналоги [1]. Класичним прикладом вважається модель оберненого маятника з віброуючою точкою кріплення. Фізичну модель цього маятника покладено в основу теорії динамічної стабілізації. Ключова ідея теорії полягає у необхідності розділяти рух на «швидкі» і «повільні» складові, що нашло відображення у понятті ефективного потенціалу. За допомогою методу ефективного потенціалу пояснено принцип стійкості високочастотного генератора «ніготронома» [2]. До речі, для того щоб не виникало проблем з секретністю при публікації методу,

було залучено фізичну модель маятника з віброуючим підвісом, яка б ілюструвала принцип стійкості генератора. Цим самим було розпочате математичне дослідження маятника з віброуючим підвісом.

Не менш вражаючі механічні інтерпретації пов'язані з іншим видом маятника. У ідеалізованому вигляді маятник має вигляд вертикально підвішеної невагомої пружини, до кінця якої прикріплено точковий вантаж. Пружина крім подовжніх коливань здійснює коливання подібно маятнику у вертикальній площині, зберігаючи при цьому прямолінійність своєї осі. Помічено, що якщо вантаж одночасно здійснює коливання вздовж осі пружини і маятникові коливання, то зазначена дія відкриває феномен коливань пружини із зовсім несподіваної сторони. У поведженні такої коливальної системи

були виявлені цікаві й глибокі фізичні закономірності [3].

Модель пружини, що коливається подібно маятнику, – в літературі її називають хитною пружиною (swinging spring) – знаходить широке застосування у якості механічної моделі більш складних процесів у природі й техніці. Мова йде про процеси із внутрішніми нелінійно пов'язаними системами надання різних коливальних компонентів. При цьому, що істотно, складові компоненти системи обмінюються енергією між собою. У роботі [1] представлено аналіз таких енергетичних обмінів з метою з'ясування того, як це залежить від параметрів керування системою. Для ілюстрації автори ви-



Рис. 1 Аналогія між кутовими коливаннями:
а – хитної пружини; б – математичного параметричного маятника.

Для параметричного маятника вплив параметра проявляються в зміні довжини маятника, який здійснюється завдяки зовнішньому джерелу енергії. При цьому цікавим є випадок, коли у нижнім положенні довжину небагато збільшувати, а в крайніх положеннях її небагато скорочувати. Тоді максимальне розгойдування досягатиметься у випадку, коли частота зміни параметра системи (довжини підвісу) у два рази перевищуватиме власну частоту коливань системи. Прикладом є коливання дитячих гойдалок. Для тривалої підтримки їхніх коливань необхідно швидко присідати в момент найбільшого відхилення гойдалок від положення рівноваги й також швидко вставати при проходженні нижнього положення.

Однак існує принципова відмінність між маятником «хитна пружина» і маятником «гойдалка». У хитній пружині відсутнє зовнішнє джерело енергії, і маятники такого виду повинні самі «забезпечувати» існування подібних коливань. З дослідів слідує, що наростання кутових коливань хитної пружини супроводжуються загасанням подовжніх коливань. Потім відбувається зворотне явище – розгойдування подовжніх коливань за рахунок зменшення енергії кутових коливань. Далі весь процес постійно повторюється. Повторюване послідовне перекачування енергії від одних коливань до інших відбувається доти, поки всі коливання не загаснуть через тертя.

Нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами присутні в багатьох областях – від фізики й техніки до біології й соціальних наук. Прик-

користують хитну пружину як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Для хитної пружини ідентифікуються три енергетичні компоненти, схожі на рухи пружини, маятника, а також зв'язку між ними. Представлена процедура може бути застосована, в принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередкує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.

Особливість феномена хитної пружини проілюструємо графічно. Для цього порівняємо траєкторії переміщення точкового вантажу у двох випадках - хитної пружини (рис. 1, а) й параметричного маятника (рис. 1, б).

лади зв'язаних систем містять у собі хвильове об'єднання у фізиці плазми, накачки лазерів, біологічних осциляторних мережах, нейронних мережах і генетичних ланцюгах (відповідні посилання на літературу наведено в роботі [1]).

Для практичних впроваджень інтерес представляє дослідження особливостей коливань хитної пружини. Наприклад, з використанням моделі хитної пружини в роботі [4] досліджується атмосферний баланс планети, в роботі [5] – коливання молекули вуглекислого газу, в роботі [6] – коливання високовольтних проводів, а в роботі [7] моделюються вібрації гелікоптера. Опис коливань пружини подібний рівнянням задач «хижак-жертва» [8]. Список можна продовжувати. При цьому у всіх на перший погляд розрізнених впровадженнях є спільна особливість – можливість їх дослідження на основі моделі хитної пружини. При цьому ключовим моментом є визначення умов забезпечення нехаотичних періодичних траєкторій вантажу хитної пружини. Такі дослідження дозволяють відмежуватися від хаотичних рухів елементів механічних пристроїв, до складу яких входять пружинні елементи. Періодична траєкторія переміщення вантажу хитної пружини ілюструє розв'язок відповідних диференціальних рівнянь, що описують її коливання. Адже ці рівняння мають природу, аналогічну диференціальними рівняннями суміжних за змістом впроваджень. Одержана геометрична форма періодичної траєкторії переміщення вантажу хитної пружини у просторі параметрів конкретної задачі допоможе ілюструвати розв'язки цієї задачі. Тобто розгляд

моделі хитної пружини дозволить аналізувати характер розв'язків в суміжних за змістом задачах, і виявляти серед них, у певному розумінні, оптимальні варіанти. Подібно тому, як в механіці для аналізу коливальних процесів механізмів застосовують фігури Ліссажу.

Отже, на актуальність обраної теми вказує необхідність розробки інженерного способу знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини та її різновидів.

Огляд літературних джерел

Історія виникнення досліджень, присвячених колюванням хитної пружини, розпочалася із квантово-механічного пояснення ефекту розщеплення ліній у спектрі комбінаційного розсіювання на молекулі C_2 . Тоді ж було висловлено припущення, що ефект має не квантову, а класичну механічну природу колювань. А саме – ефект обумовлений внутрішніми особливостями колювань молекули, де частота колювань одного типу приблизно вдвічі перевищує частоту колювань другого типу. Вчені вирішили перевірити це на моделі хитної пружини. Розрахований рух такої системи показав, що при співвідношенні частот 2:1 повинно наставати періодично повне перекачування енергії з вертикальних колювань у горизонтальні й назад.

Доцільність дослідження хитної пружини виникла у зв'язку з виявленими можливостями їх «нестандартних» використань як в теоретичному плані, так і на практиці. Однак більшість досліджень зосереджуються на аналітичних апроксимаціях для слабозв'язаних систем і енергетичних об'єктів, які виникають, коли підсистеми перебувають у резонансі. Ефективним механізмом енергообміну є параметричний механізм [9]. Зокрема, хитна пружина із двома ступенями свободи є автопараметричною системою, що являє собою основу для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Крім того, хитна пружина має значення завдяки можливості якісного подання багатьох нелінійних сполучених систем. Серед цих подань назвемо класичний аналог для коливальних мод трьохатомних молекул, який реалізує резонанс Фермі в інфрачервоному й комбінаційному спектрах [1].

Колювання хитних пружин мають безпосереднє відношення до динаміки літаків і кораблів. Були виявлені ефекти порушення стійкості й керуваності швидкохідних кораблів і надзвукових літаків. Виявилося, що найбільш інтенсивне розгойдування бічних колювань має місце, коли колювання за кутом атаки відбуваються із частотою вдвічі більшої частоти бічних колювань [10]. У будівельній механіці важливу роль грає видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки. Гнучка нитка – це своєрідна пружина, що діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні колювання у своїй площині (аналог кутових колювань хитної пружини з вантажем) і маятникові колювання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних колювань) [6, 11]. При співвідношенні частот цих колювань 1:2 відбувається втрата динамічної

стійкості, коли виникають поперечні колювання нитки, амплітуда яких може досягати досить великих значень. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій (висячих мостів, вантово-балкових систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різних космічних тросових системи для втримання об'єктів, гнучких шлангів, різноманітних антен, тощо) [3]. В роботах [12, 13] наведено теоретичне дослідження плоских малих нелінійних колювань хитної пружини з нелінійною залежністю натягу пружини від її подовження. Використовується метод гамільтонової нормальної форми. Рішення гамільтонових рівнянь нормальної форми показали, що періодична перебудова колювань між вертикальною й горизонтальною модами відбувається тільки у випадку резонансів 1:1 і 2:1. У всіх інших випадках, як при наявності резонансу, так і при його відсутності, колювання відбуваються із двома постійними частотами.

У роботі [14] вивчаються зміни в поведінці хитної пружини, коли під контролем параметра один відгук стає нестійким і замінюється іншим. Вибірка Пуанкаре використовується для зведення проблеми опису стійкості граничного циклу до більш простої задачі визначення стійкості нерухомої точки відображенням Пуанкаре. В роботі [15] розглянуто зв'язок нормальних мод колювань хитного маятника. Наводяться коментарі про експерименти, пов'язані з порушенням нормальних режимів. В роботі [16] досліджено системи хитної пружини поблизу резонансу за допомогою «повільного флукуаційного» наближення, яке полягає в застосуванні тригонометричних поліномів і збереженні тільки члена з найповільнішої частотою. У роботі [17] показано, що інтегральне наближення просторової хитної пружини, налаштованої на резонанс 1:1:2, має монохромію, а ступінчастий кут прецесії площини колювання резонансного пружинного маятника є числом обертання інтегрального наближення. Стаття [18] присвячена колюванням хитного маятника, точка підвісу якого рухома уздовж вертикальної лінії. Періодичні рішення рівняння одержують з використанням детермінантів Хілла. Розроблена обчислювальна процедура використовується для визначення комбінацій параметрів системи, для яких можливі періодичні рішення. У роботі [19] досліджується просторова хитна пружина, яка має резонанс 2:1:1, наближено описаний лагранжіаном. В описах використано гамільтонові скорочення та методи виведення зразків. В результаті отримано формулу, яка описує ступінчасту прецесію азимутального кута. У роботі [20] перетікання енергії між подовжніми і маятниковими колюваннями розглядається як пульсація. Пульсація і ступінчаста прецесія є характерними особливостями динаміки хитної пружини. Для визначення повного аналітичного рішення використано гамільтонову редукцію. У статті [21] динаміка пружинного маятника досліджується з використанням асимптотичних методів. Методи теорії нелінійних нормальних форм колювань дозволили дослідити динаміку маятника не

тільки для малих, але і для значних амплітуд коливань.

Але всі наведені роботи мають переважно теоретичне спрямування. Для інженерної практики необхідні способи побудови реальних нехаотичних періодичних траєкторій вантажів хитних пружин. Деякі з них описані в роботі [22], де наведено приклади періодичних траєкторій, а також в [23], де проведено дослідження умов побудови періодичних траєкторій. У роботі [24] наведено програму мовою Математика, за допомогою якої можна будувати періодичні траєкторії подвійного маятника. Робота [25] присвячена дослідженню зв'язку можливої траєкторії вантажу хитної пружини з фігурами Ліссажу. В роботі [26] наведено Maple-програму побудови траєкторії вантажу хитної пружини. Інший спосіб побудови траєкторій руху вантажу хитної пружини запропоновано в роботі [27]. В роботі [28] наведені приклади періодичних траєкторій хитних пружин. В роботі [29] досліджуються коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Але у відомих роботах відсутній універсальний підхід до побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Також відсутні аналізи коливань за допомогою фазових траєкторій функцій, які входять до опису узагальнених координат відповідної коливальної системи.

В роботі [30] для побудови періодичних траєкторій вантажів різновидів математичних маятників наведено спосіб проєкційного фокусування. В роботі [31] розглянуті приклади реалізації цього способу.

Окреслення кола нерозв'язаних частин проблеми

В результаті огляду літературних джерел [1–29] були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступну проблему досліджень. Розробити спосіб визначення набору параметрів для забезпечення умовно періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення, а також побудувати фазові траєкторії функцій узагальнених координат хитної пружини (значень кутів відхилення осі пружини від вертикалі та подовження) з метою оцінки діапазону змін зазначених величин та їх швидкостей.

Мета та задачі дослідження

Метою досліджень є розробка способу комп'ютерного моделювання періодичної траєкторії переміщення точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення (підвісу).

Основний матеріал

Розглянемо розрахунок періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Для цього наведемо спосіб визначення траєкторії переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу хитної пружини залежно від маси m вантажу, початкової довжини h пружини у

ненавантаженому стані, жорсткості k пружини і початкових умов для виникнення коливань.

Задамо умови ідеалізації коливань хитної пружини:

- коливання здійснюється у вертикальній площині, якій належить точка кріплення (підвісу);
- маса вантажу зосереджена в одній точці, розташованій на осі пружини з незакріпленого кінця;
- пружина є невагомою і вісь пружини залишається прямолінійною в процесі коливань;
- опори у вузлах і опір повітря під час коливань відсутні;
- процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу (коливальна система є консервативною);
- параметри і початкові умови задаються в умовних числових одиницях.

Опис закону руху точки підвісу оберемо у вигляді функції $f(t)$. Зазначимо, що у випадку рухомої точки підвісу з причини суттєвої нелінійності коливальної системи можна очікувати не лише строгих періодичних траєкторій вантажу хитної пружини, а і умовно періодичних. Тобто таких траєкторій переміщення вантажу, які не виходитимуть за межі певної смуги на площині Oxy .

Для опису коливань хитної пружини у якості першої узагальненої координатної функції $u(t)$ оберемо значення кута, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю Oy . Другу узагальнену координатну функцію $v(t)$ пов'яжемо з подовженням пружини в часі; через h позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані (рис. 2).

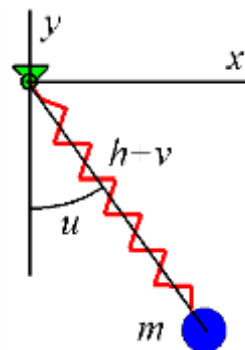


Рис. 2 Схема хитної пружини

В даній роботі розглянуто два випадки руху точки підвісу – вздовж осі Ox та вздовж осі Oy .

Випадок 1. Нехай точка підвісу хитної пружини рухається вздовж осі Ox за законом $x=f(t)$. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами

$$x = (h + v) \sin u, \quad y = -(h + v) \cos u. \quad (1)$$

Лагранжіан задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій ($g=9.81$):

$$\begin{aligned}
L = & 0.5m \left(\left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + (h+v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) + \\
& + m \frac{df}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \sin u + (h+v) \frac{du}{dt} \sin u \right) - \\
& - 0.5kv^2 + mg(h+v) \cos u.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тоді систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dt^2} \sin u - \\
& - (h+v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + kv - g \cos u = 0; \\
& (h+v) \frac{d^2 u}{dt^2} - \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \cos u + \\
& + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \sin u = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Приклад 1. Визначимо значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю k і її довжиною h у ненавантаженому стані. У початковому положенні хитна пружина розташована вертикально, тобто $u(0)=0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у напрямку осі Ox : $du(0)=1$. Це значення можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута u . Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0)=2$; $dv(0)=0$. Нехай $k=50$ і $h=2$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $f(t)=\sin(2t)$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'яжемо систему рівнянь (3) із початковими умовами $u(0)=0$; $du(0)=1$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$. На рис. 3 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=5,142$. Час інтегрування $T=16$.

На рис. 4 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Бачимо, що фазові траєкторії не вдається "сфокусувати" як у попередніх прикладах. Тому для коректності одержані далі траєкторії руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичними.

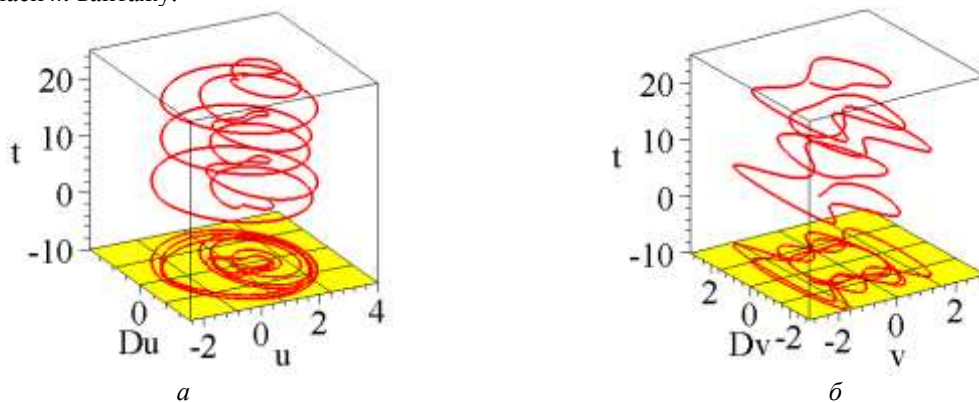
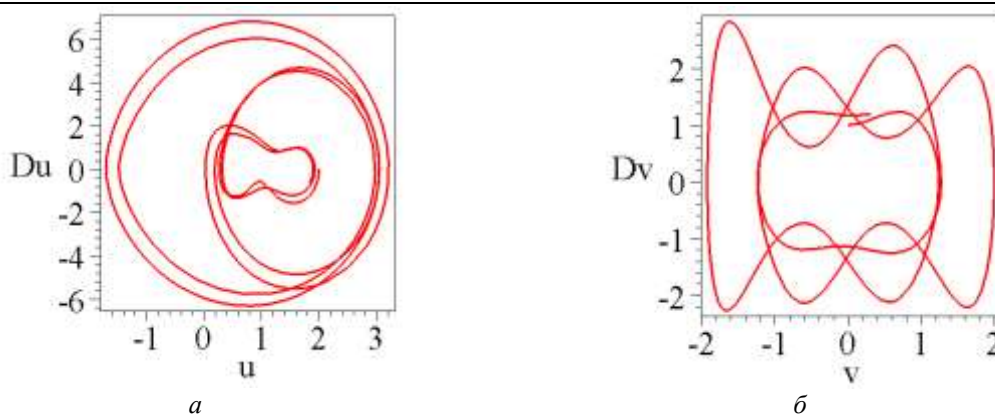


Рис. 3 Інтегральні криві для критичного значення $m=5,142$ у фазових просторах: а – $\{u, Du, t\}$; б – $\{v, Dv, t\}$



*Рис. 4. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:
 а – координатної функції $u(t)$; б – координатної функції $v(t)$*

Для підтвердження значення $m=5,142$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 5). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=5,142$.

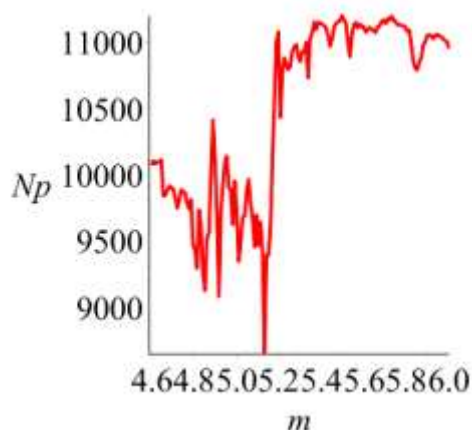


Рис. 5 Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення $m_0=5,142$. необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (3) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1...S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо набли-

жене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 1 (рис. 6). Оскільки фазові траєкторії не вдалося "сфокусувати" як у попередніх прикладах, то одержану траєкторію руху вантажу хитної пружини будемо вважати умовно періодичною. Зоровий аналізатор підтверджує природність коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу, у чому можна переконатися з комп'ютерних анімацій на сайті [32].

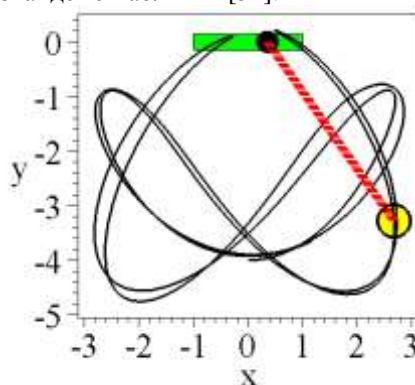


Рис. 6 Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 1

Приклад 2. Змінимо напрямок дії імпульсу ініціювання руху хитної пружини на протилежний, тобто оберемо $du(0) = -1$. Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (3) з початковими умовами $u(0)=0$; $du(0)=-1$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$.

На рис. 7 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=16,571$. Час інтегрування $T=16,7$. На рис. 8 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін.

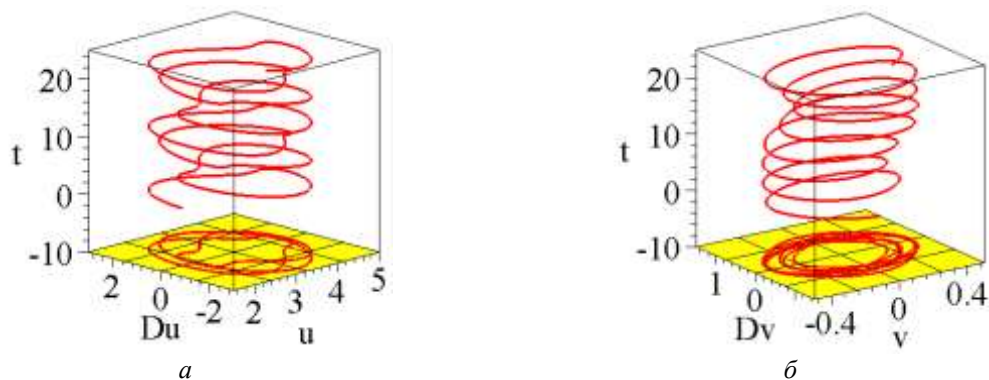


Рис. 7. Інтегральні криві для критичного значення $m=16,571$ у фазових просторах: а – $\{u, Du, t\}$; б – $\{v, Dv, t\}$

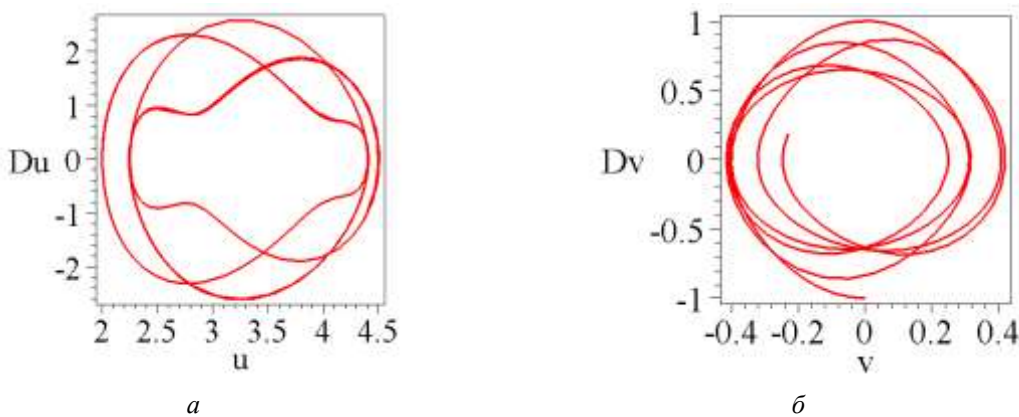


Рис. 8. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$: а – координатної функції $u(t)$; б – координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=16,571$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії

фазової траєкторії (рис. 9). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=16,571$.

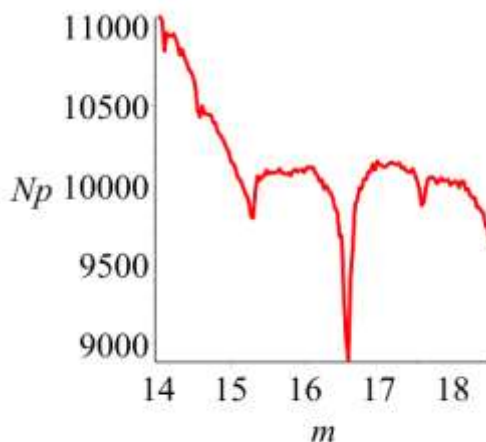


Рис. 9 Графік залежності кількості пікселів Np зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення $m_0=16,571$. необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (3) і чисельно розв'язати її

методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де

$i=1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у виразі (1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно

сполучити ланкою. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 1 (рис. 10).

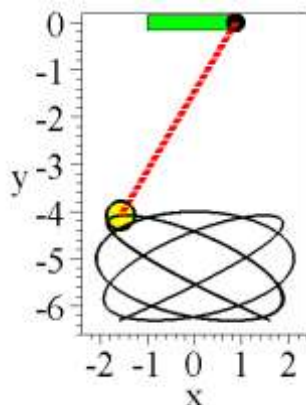


Рис. 10 Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 2

Таким чином можна констатувати, що змінюючи напрямок дії імпульсу ініціювання руху хитної пружини з $du(0)=1$ на протилежний $du(0)=-1$ можна одержати періодичну або умовно періодичну траєкторію.

Випадок 2. Нехай точка підвісу хитної пружини рухається вздовж осі Oy за законом $y=f(t)$. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами (1). Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій ($g=9.81$):

$$L = 0.5m \left(\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + v^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) - 0.5k(v-h)^2 - m \left(g + \frac{d^2 f}{dt^2} \right) v \cos u. \tag{4}$$

Систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$2m \frac{d^2 v}{dt^2} + m \frac{d^2 f}{dt^2} \cos u - 2mv \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + k(v-h) + mg \cos u = 0; \tag{5}$$

$$-2v \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dt^2} \sin u - 4 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \sin u = 0.$$

Визначимо значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю k і її довжиною h у ненавантаженому стані.

Приклад 3. Нехай початкове положення хитної пружини визначається кутом $-\pi/4$, тобто $u(0)=-\pi/4$. Швидкість зміни величини кута $du(0)=0$. Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0)=2$; $dv(0)=0$. Оберемо $k=450$ і $h=2.5$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $y=0.5\cos(4t)$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (5) із початковими умовами $u(0)=-\pi/4$; $du(0)=0$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$. На рис. 11 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=22,57$. Час інтегрування $T=17,2$. На рис. 12 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Фазові траєкторії не вдається "сфокусувати" як у попередніх прикладах. Тому траєкторію руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичною.

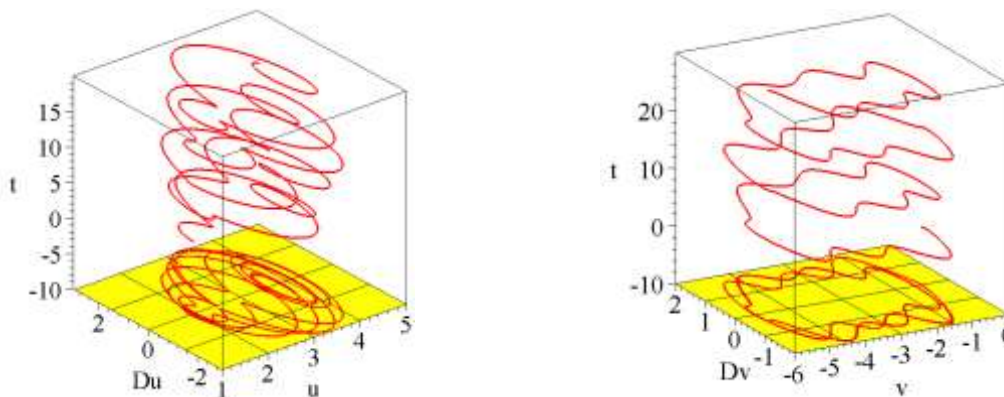
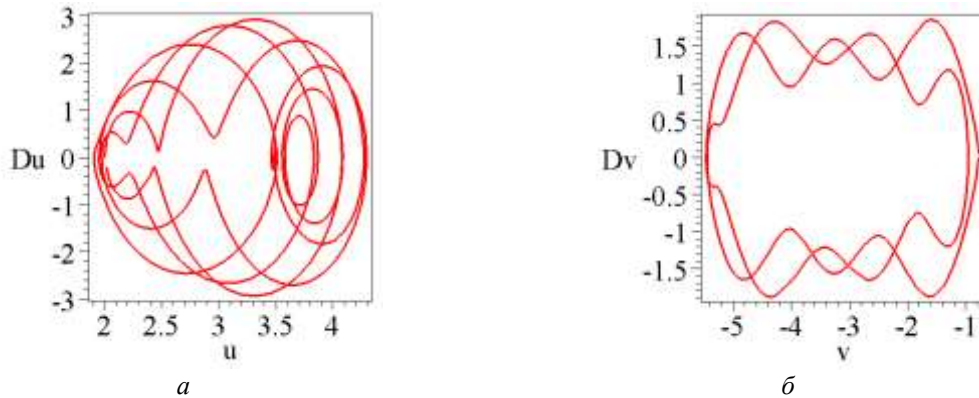


Рис. 11 Інтегральні криві для критичного значення $m=22,57$ у фазових просторах: а – $\{u, Du, t\}$; б – $\{v, Dv, t\}$



а *б*
Рис. 12 Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:
а – координатної функції $u(t)$; *б* – координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=22,57$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фа-

зової траєкторії (рис. 13). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=22,57$.

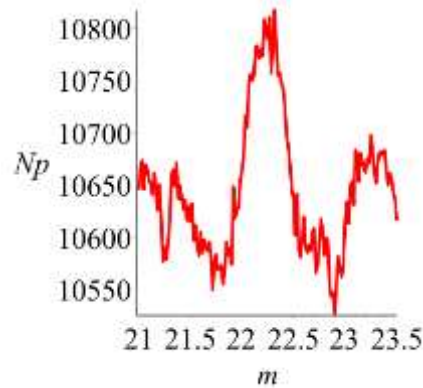


Рис. 13 Графік залежності кількості пікселів Np зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення $m_0=22,57$ необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (5) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хи-

тної пружини на площині Oxy слід у вирази (1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 2 (рис. 14).

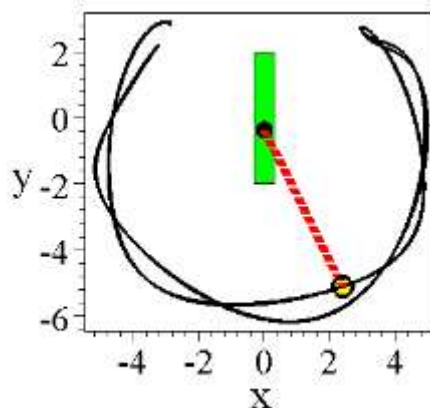


Рис. 14. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 3

Приклад 4. Розглянемо другий варіант, коли у початковому положенні хитна пружина розташована під кутом $\pi/3$, тобто $u(0)=\pi/3$. Швидкість зміни кута $du(0)=0$. Початкові значення для параметра v

подовження пружини мають вигляд $v(0)=2$; $dv(0)=0$. Нехай $k=50$ і $h=2.5$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $y=\cos(3t)$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення

маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (5) із початковими умовами $u(0)=\pi/3$; $du(0)=1$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$. На рис. 15 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=5,7557$. Час інтегрування $T=25,3$. На рис.

16 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Бачимо, що фазові траєкторії не вдається "сфокусувати" як у попередніх прикладах. Тому треба очікувати траєкторію руху вантажу хитної пружини умовно періодичною.

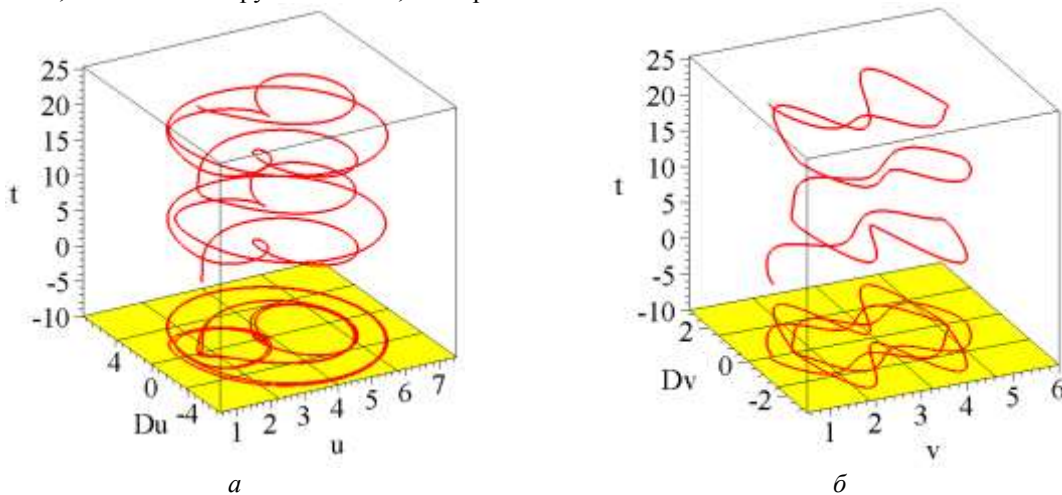


Рис. 15 Інтегральні криві для критичного значення $m=5,7557$ у фазових просторах: а – $\{u, Du, t\}$; б – $\{v, Dv, t\}$

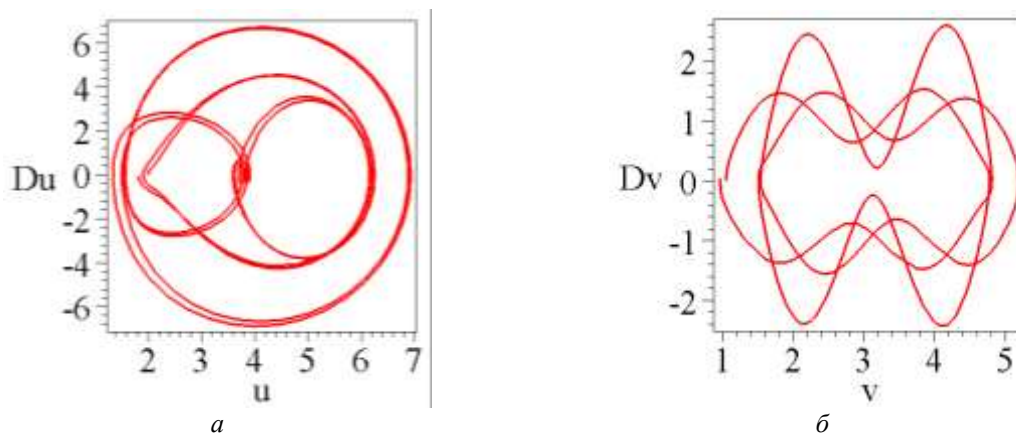


Рис. 16 Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$: а – координатної функції $u(t)$; б – координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=5,7557$ можна скористатися графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 17). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=5,7557$.

Після обчислення $m_0=5,7557$. необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (5) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$.

Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для прикладу 7 (рис. 18).

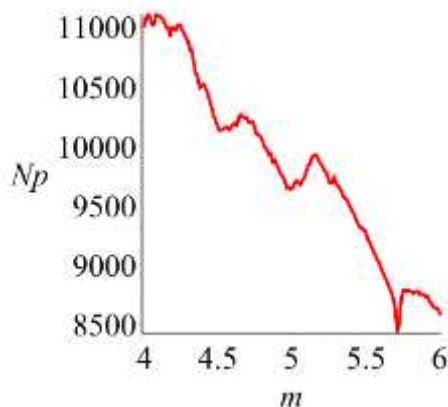


Рис. 17. Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення t

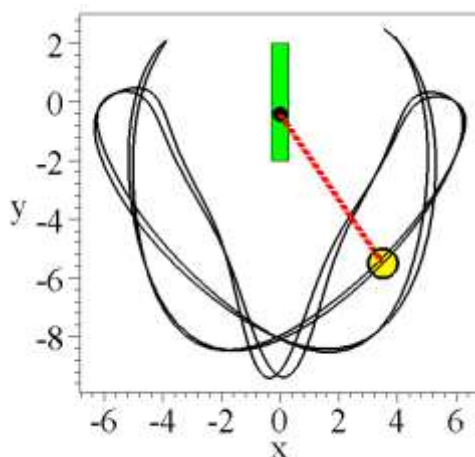


Рис. 18. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 4

Одержані у цьому і попередньому приклади умовно періодичні траєкторії можна пояснити суттєвою нелінійністю задачі про коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Залучаючи зоровий аналізатор в процесі унаочнення коливань, одержаних за допомогою комп'ютерної анімації, можна переконатися у природному характері коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Підтвердження цього можна знайти на сайті [32], де наведені комп'ютерні анімації коливань різновидів хитних пружин.

Обговорення одержаних результатів

Отримані результати можна пояснити можливістю застосування варіаційного принципу Лагранжа до розрахунку механічних коливань типу хитної пружини. Це дозволило використати рівняння Лагранжа другого роду для опису руху її вантажу.

До можливих досліджень належить розгляд

співвідношення $\frac{mg}{kl} = \frac{1}{4}$. Тут m – маса вантажу, k

– жорсткість пружини, l – довжина пружини у ненавантаженому стані, $g=9,81$. За умови виконання зазначеного співвідношення між параметрами коливальної системи найбільш ефективно відбувається кутове розгойдування хитної пружини за рахунок енергії цієї пружини. Розвиток випадкового поперечного збурення проходитиме до фіксованого

значення амплітуди, оскільки запаси енергії пружини кінечні. Після досягнення такої амплітуди в ході коливань хитної пружини знову відбувається розтягування (або стискання) пружини. Це періодичне перекачування енергії пружини в енергію поперечних коливань вантажу і назад виявляється можливим в досить вузькому діапазоні варіювання параметрів з максимумом, що відповідає зазначеному співвідношенню. Необхідно перевірити, за яких умов виконується це співвідношення з прийнятною точністю і як це впливає на зображення періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини. Необхідно дослідити кількість можливих періодичних траєкторій для певного набору вхідних параметрів, а також класифікувати зображення періодичних траєкторій та виконати градацію з врахуванням збільшення їх довжин.

Крім того, необхідно продовжити дослідження у напрямку використання хитної пружини як моделі для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Адже для хитної пружини ідентифікуються необхідні для цього три енергетичні компоненти, подібні рухам пружини, рухам маятника, а також зв'язку між ними. Такий підхід може бути застосований, в принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередкує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.

Висновки

В роботі наведено спосіб визначення значення параметрів для забезпечення умовно періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення, (наприклад, $m=16.571$; $k=50$; $h=2$; $u_0=2$; $Du_0=0$; $v_0=0$; $Dv_0=-1$; $x=\sin(2*t)$; $T=16.7$).

Для кожного варіанта розрахунків хитної пружини побудовані фазові траєкторії функцій узагальнених координат (значень кутів відхилення та подовження), що дозволило здійснювати оцінки діапазону змін зазначених величин та їх швидкостей.

Достовірність одержаних результатів ілюструються комп'ютерними анімація коливань відповідних хитних пружин, наведених на сайті [32], де, залучаючи зоровий аналізатор, можна перекоонатися у природному характері коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу.

Список літератури

- De Sousa M.C., Marcus F.A., Caldas I.L., Viana R.L. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm // *Physica A*. Vol. 509, 1 November, 2018. P.1110-1119
- Власов В.Н. Величайшая Революция в Механике 4. (2014) URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2114-vls.pdf>
- Булдакова Д.А., Кирюшин А.В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники. Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ» // 2015, Том 6, № 2, С. 238 – 243
- Lynch P. The swinging spring: a simple model for atmospheric balance. *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol. II: Geometric Methods and Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. 50 p.
- Алдошин Г.Т., Яковлев С.П. Аналитическая модель колебаний молекулы углекислого газа. Резонанс Ферми // *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 1. С. 42-53.
- Peng Zhang, Liang Ren, Hongnan Li, Ziguang Jia, Tao Jiang. Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum // *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Article ID 671632. P. 1-10
- Castillo-Rivera S., Tomas-Rodriguez M. Helicopter flap/lag energy exchange study, *Nonlinear Dynam*. 2017. Issue 88, P. 1-23.
- Богданов К.Ю. Хищник и жертва – URL: <http://bio.fizteh.ru/student/files/biology/biopharticles/bioph15-arpfelurcdc.pdf>
- Gendelman O.V., Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators, *Nonlinear Dynam*. 2001. Issue 25, P. 237-253
- Алдошин Г.Т. Замечания к методу линеаризации нелинейных уравнений с двумя степенями свободы. В сб. «Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе» / Труды международной научно-практической конференции. Т. 1. 2009. М.: МФЮФ. С. 227
- Бубнович Э.В., Молдагананова А.Г. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити. URL: <http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагананова%20.pdf>
- Петров, А.Г. О вынужденных колебаниях качающейся пружины при резонансе // *Доклады Академии наук*. 2015 г. Т. 464 № 5 - С. 553-557.
- Петров А.Г., Шундерюк М.М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 2. С. 27-40.
- Bayly P.V., Virgin L.N. An Empirical Study of the Stability of Periodic Motion in the Forced Spring-Pendulum. // *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*. Vol. 443, Issue 1918 (Nov. 8, 1993), P. 391-408
- Duka B., Duka R. On the elastic pendulum, parametric resonance and "pumping" swings. // *European Journal of Physics*. Accepted Manuscript online 15 November 2018
- Breitenberger E., Mueller RD. The elastic pendulum: A nonlinear paradigm. // *Journal of Mathematical Physics* 1981. Issue 22, P.1196-1210
- Dullin H., Giacobbe A., Cushman R. Monodromy in the resonant swing spring // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004, Vol. 190, Issues 1–2, 15 March P.15-37
- Ryland III.G., Meirovitch L. Stability boundaries of a swinging spring with oscillating. // *Journal of Sound and Vibration*. 1977, Vol. 51, Issue 4, 22 April P.547-560
- Holm D.D., Lynch P. Stepwise Precession of the Resonant Swinging Spring. // *SIAM J. Applied dynamical systems*. 2002. Vol. 1, Issue 1, P. 44–64
- Lynch Peter, Houghton Conon. Pulsation and precession of the resonant swinging spring. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004, Vol. 190, Issues 1–2, 15 March P.38-62
- Клименко А.А., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика пружинного маятника // *Динамические системы*, 2009. Вып 27. С. 51–65.
- Broucke R, Ваха P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system. // *Celestial mechanics*. September 1973, Vol. 8, Issue 2, P. 261-267
- Hitzl D.L. The swinging spring invariant curves formed by quasi-periodic solution. III. // *Astron and Astrophys*. 1975, Issue 41, P.187-198
- 24 Моделирование движения двойного маятника в Декартовой системе координат URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/advanced-hybrid-and-differential-algebraic-equations/double-pendulum.html>
- The Spring Pendulum (Optional) URL: <http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/46/index.htm>
- Gavin H.P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints // *CEE 541. Structural Dynamics*. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University. 2014. 23 p.
- Van der Weele J.P., de Kleine E. The order-chaos-order sequence in the spring pendulum // *Physica A* 228. 1996. P. 245-272

28. Chen Y.F. Scientific computing and visualization. Spring pendulum system, top.4. (2011).

URL:

<http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209054703145981.pdf>

29. Алдошин Г.Т., Яковлев С.П. Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом // Вестник СПбГУ. 2012. Сер. 1. Вып. 4. С. 45-52

30. Development of Projection Technique for Determining the Non-Chaotic Oscillation Trajectories in the Conservative Pendulum Systems / O. Semkiv, O. Shoman, E. Sukharkova, A. Zhurilo, H. Fedchenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Mathematics and Cybernetics – Applied Aspects. – №

2, Issue 4 (86). – 2017. – P. 48–57.

31. Geometric modeling of the unfolding of a rod structure in the form of a double spherical pendulum in weightlessness / Kutsenko L., Semkiv O., Asotskyi V., Zapolskiy L., Shoman O., Ismailova N., Danylenko V., Vinogradov S, Sivak E. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies: Applied mechanics. 2018. Issue 4, No 7 (94) . P. 13-24

32. Куценко, Л.М. Піксов М.М., Запольський Л.Л. Ілюстрації до статті «Геометричне моделювання періодичної траєкторії вантажу хитної пружини» (2018) URL: <http://repositc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>

VOL.1

№40/2020

Znanstvena misel journal

The journal is registered and published in Slovenia.

ISSN 3124-1123

The frequency of publication – 12 times per year.

Journal is published in Slovenian, English, Polish, Russian, Ukrainian.

The format of the journal is A4, coated paper, matte laminated cover.

All articles are reviewed

Edition of journal does not carry responsibility for the materials published in a journal.

Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws

Free access to the electronic version of journal

Chief Editor – Christoph Machek

The executive secretary - Damian Gerbec

Dragan Tsallaeu — PhD, senior researcher, professor

Dorothea Sabash — PhD, senior researcher

Vatsdav Blažek — candidate of philological sciences

Philip Matoušek — doctor of pedagogical sciences, professor

Alicja Antczak — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Katarzyna Brzozowski — PhD, associate professor

Roman Guryev — MD, Professor

Stepan Filippov — Doctor of Social Sciences, Associate Professor

Dmytro Teliga — Senior Lecturer, Department of Humanitarian and Economic Sciences

Anastasia Plahtiy — Doctor of Economics, professor

Znanstvena misel journal

Slovenska cesta 8, 1000 Ljubljana, Slovenia

Email: info@znanstvena-journal.com

Website: www.znanstvena-journal.com