УДК 515.24.521

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ МЕТОДА ПАРАЛЕЛЬНОГО ПРОЕЦІЮВАННЯ

Черниш І.О., к.т.н.
Максимова М.О., к.т.н.
Національний технічний університет "ХПІ" (м. Харків)
Тел. (0572) 707-64-31

Анотація – досліджується аналітична модель методу паралельного проеціювання. Розглядаються зв'язки між параметрами моделі.

Ключові слова – паралельне проеціювання, [illegible], аксонометричні зображення.

Постановка проблеми. Застосування машинної графіки для побудови наочних зображень потребує розробки аналітичних моделей відомих графічних методів, [illegible] визначення меж зміни параметрів цих методів, їх переваг та недоліків, рекомендацій щодо їх раціонального використання. Для вирішення цієї [illegible] геометричного моделювання доцільно застосовувати аналітичні методи проеціювання і, [illegible] косокутне проеціювання. В роботі розглянута аналітична модель косокутного проеціювання, аналізуються зв'язки між його різними параметрами.

Аналіз останніх досліджень. Графічні моделі побудови наочних зображень та їх аналіз достатньо докладно розглянуті у роботах [illegible] [1]. Графо-аналітичні моделі побудови зображень розглянуто в роботі Д. [illegible] та [illegible] [2]. Однак, в цих роботах основна увага приділена методам центрального та ортогонального проеціювання. Аналітична модель методу косокутного проеціювання залишається розробленою недостатньо і потребує подальшого дослідження.

Постановка завдання. В роботі наведені рівняння косокутного проеціювання, досліджується аналітична модель найбільш розповсюджених косокутних аксонометричних проекцій, визначені межі зміни основних параметрів побудови наочних зображень.

Основна частина. Апарат паралельного проеціювання складається з картинної площини Π_k: $x\cos\alpha_k + y\cos\beta_k + z\cos\gamma_k - p_k = 0$, (де $\bar{n}\{\cos\alpha_k, \cos\beta_k, \cos\gamma_k \mid \cos^2\alpha_k + \cos^2\beta_k + \cos^2\gamma_k = 1\}$ вектор, перпендикулярний до площини Π_k) та напрямку проеціювання, що заданий вектором $\bar{s}\{\cos\alpha_s, \cos\beta_s, \cos\gamma_s \mid \cos\alpha_s + \cos\beta_s + \cos\gamma_s = 1\}$.

Сутність методу полягає в наступному: крізь будь-яку точку $A(x_a, y_a, z_a)$ проводиться проеціюючий промінь:

$$AA_k : \frac{x - x_a}{\cos\alpha_s} = \frac{y - y_a}{\cos\beta_s} = \frac{z - z_a}{\cos\gamma_s}$$

до перетину з картинною площиною Π_k у точці $A_k(x_{ak}, y_{ak}, z_{ak})$ - паралельній проекції точки A.

Виходячи з умов $A_k \in AA_k$ та $A_k \in \Pi_k$ визначаємо координати точки A_k:

$$x_{ak} = x_a - \rho_a \frac{\cos\alpha_s}{\sin\varphi}; \quad y_{ak} = y_a - \rho_a \frac{\cos\beta_s}{\sin\varphi}; \quad z_{ak} = z_a - \rho_a \frac{\cos\gamma_s}{\sin\varphi}, \quad (1)$$

де $\rho_a = x_a\cos\alpha_k + y_a\cos\beta_k + z_a\cos\gamma_k - p_k$ - відстань від точки A до площини Π_k;

$\angle\varphi$ - кут між напрямком проеціювання $\bar{s}$ та площиною Π_k;

$\sin\varphi = \cos\alpha_k\cos\alpha_s + \cos\beta_k\cos\beta_s + \cos\gamma_k\cos\gamma_s$.

Зв'язок між довжиною відрізка d прямої AB та довжиною проекції d_k цього відрізка визначається з формули:

$$d_k = d\left[1 - 2\frac{\sin\varphi_a}{\sin\varphi}\cos\varphi_{sa} + \left(\frac{\sin\varphi_a}{\sin\varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

де $\angle\varphi_a$ - кут між прямою AB та площиною проекцій Π_k;

$\sin\varphi_a = \cos\alpha_a\cos\alpha_k + \cos\beta_a\cos\beta_k + \cos\gamma_a\cos\gamma_k$;

$(\cos\alpha_a, \cos\beta_a, \cos\gamma_a)$ - напрямні косинуси прямої AB;

$\angle\varphi_{sa}$ - кут між напрямком проеціювання $\bar{s}$ та прямою AB;

$\cos\varphi_{sa} = \cos\alpha_a\cos\alpha_s + \cos\beta_a\cos\beta_s + \cos\gamma_a\cos\gamma_s$.

Після проеціювання системи координат на площину Π_k отримаємо пласку аксонометричну систему координат $O_k x' y' z'$, причому точка $O(0,0,0)$ спроеціюється у $O_k\left(\frac{p_k\cos\alpha_s}{\sin\varphi}, \frac{p_k\cos\beta_s}{\sin\varphi}, \frac{p_k\cos\gamma_s}{\sin\varphi}\right)$, а проекції осей Ox, Oy, Oz отримаємо з'єднавши з точками:

$$D = Ox \cap \Pi_k;\ D \equiv D_k(x_D, 0, 0);$$
$$E = Oy \cap \Pi_k;\ E \equiv E_k(0, y_E, 0);$$
$$F = Oz \cap \Pi_k;\ F \equiv F_k(0, 0, z_F).$$

Використавши формулу (2), визначимо коефіцієнти викривлення за аксонометричними осями:

$$u = \frac{l'x}{lx},\; u = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\alpha_s\cos\alpha_k + \cos^2\alpha_k\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$v = \frac{l'y}{ly},\; v = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\beta_s\cos\beta_k + \cos^2\beta_k\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (3)$$

$$w = \frac{l'z}{lz},\; w = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\gamma_s\cos\gamma_k + \cos^2\gamma_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

причому $u^2+v^2+w^2=2+ctg^2\varphi$.

Хоча зображення на площині Π_k не залежить від того, як введена система координат, а залежить тільки від взаємо розташування картинної площини Π_k та напрямку проеціювання вектора $\bar{s}$, формули (1) – (3) суттєво залежать від того, яким чином обрана система координат.

Не порушуючи спільності, з'єднаємо картинну площину Π_k з координатною площиною xOz. Тоді вісь Ox співпаде з аксонометричною віссю Ox', а вісь Oz - з віссю Oz'. Аксонометричні осі Ox' та Oz' завдають на площині Π_k прямокутну пласку Декартову систему координат $Ox'z'$. В такому разі вирази (1) приймуть вигляд:

$$\Pi_k: y=0 \Rightarrow \rho_a = y_a;\; \cos\alpha_k = \cos\gamma_k = 0;\; \cos\beta_k = 1;\; \sin\varphi = \cos\beta,$$

та
$$x'_a = x_a - y_a\frac{\cos\alpha_s}{\cos\beta_s},\; z'_a = z_a - y_a\frac{\cos\gamma_s}{\cos\beta_s}, \qquad (4)$$

а коефіцієнти викривлення $u=w=1$.

Для визначення положення аксонометричної осі Oy' спроеціюємо точку $E(0,\ y_E,\ 0)$ на площину Π_k:

$$E'\left(-y_E\frac{\cos\alpha_s}{\cos\beta_s}, -y_E\frac{\cos\gamma_s}{\cos\beta_s}\right); \quad Oy': \frac{x'}{-y_E\dfrac{\cos\alpha_s}{\cos\beta_s}} = \frac{z'}{-y_E\dfrac{\cos\gamma_s}{\cos\beta_s}}$$

Кут $\varphi_{x'y'}$ між аксонометричними осями Ox' та Oy' дорівнює:

$$tg\varphi_{x'y'} = \frac{\cos\alpha_s}{\cos\gamma_s},$$

а коефіцієнт викривлення вздовж напрямку аксонометричної осі Oy': $v=ctg\beta_s$.

Останнє рівняння показує, що шляхом завдання напрямку проеціювання (вектору $\bar{s}$) можна керувати як коефіцієнтом викривлення у напрямку осі Oy, так і положенням цієї осі на площині Π_k, тобто кутом $\varphi_{x'y'}$.

В задачах геометричного моделювання напрямок проеціювання $\bar{s}$ може відповідати напрямку освітлення (наприклад при побудові тіней в ортогональних проекціях), вітровому навантаженню та т. і. При побудові зображень методом паралельного проеціювання природно прийняти $v=1$, а $\angle\varphi_{x'y'}=45°$ (що відповідає $\angle\alpha_s=\angle\beta_s=\angle\gamma_s=45°$). У такому випадку формула (2) прийме вигляд:

$$d_k=d[1-2\cos\beta_a(\cos\alpha_a+\cos\beta_a+\cos\gamma_a)+\cos^2\beta_a]^{1/2}.$$

Особливу цікавість представляє проеціювання прямих, що лежать у площинах, паралельних координатним xOy та yOz.
Розглянемо ці випадки:

$$xOy\ \{z=0\},\ \cos\gamma_a=0,\ \gamma_a=\frac{\pi}{2},\ \angle\alpha_a=\angle(90°-\beta_a);$$

$$yOz\ \{x=0\},\ \cos\alpha_a=0,\ \alpha_a=\frac{\pi}{2},\ \angle\gamma_a=\angle(90°-\beta_a).$$

В обох випадках

$$d_k = d[\sin^2\beta_a + 2\sin\beta_a\cos\beta_a]^{1/2}$$

Висновки. Отримані формули (2) можуть бути використані у геометричному моделюванні, а формули (4) можуть бути використані для побудови наочних зображень методом паралельного проеціювання.

Література
1. *Котов И.И.* Вопросы теории изображений. Изд-во Киевского университета, 1972. -160с.
2. *Форсайт Д., Понс Ж.* Компьютерное зрение. Современный подход. – М. Изд-во «Вильямс», 2004.- 928с.

THE ANALYTICAL MODEL OF METHOD FOR PARALLEL PROJECTION

I. Chermnih, M. Maximova

Summary

The analytical model of method for parallel projection is investigated. Connection between model parameters is considered.