

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА УКРАЇНИ З НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

Ю.С. Безугла, О.М. Соболю

МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ НЕОРІЄНТОВАНИХ
ОБ'ЄКТІВ З КУСОЧНО-НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ У
БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

Монографія

Харків – 2020

ЗМІСТ

Вступ	5
1 Постановка задачі оптимального розміщення неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях	7
1.1 Огляд методів розв'язання актуальних задач прикладної геометрії	7
1.2 Огляд методів розв'язання задач оптимізаційного геометричного проектування	11
1.3 Постановка задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях	21
2 Метод геометричного моделювання перерізів поверхні дотику плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями	31
2.1 Загальна модель оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у заданих областях та її особливості	31
2.2 Розробка методу геометричного моделювання перерізів поверхні дотику двох плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями	39
2.3 Розробка методу геометричного моделювання перерізів поверхні дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та прямокутної багатозв'язної області розміщення змінної довжини	50
3 Методи оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях	63
3.1 Розробка модифікованого методу гілок та меж для оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з	

кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях	64
3.2 Розробка модифікованого методу імітації відпалу для оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях	75
4 Комп'ютерне моделювання оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях	90
4.1 Алгоритм оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини	90
4.2 Моделювання оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних однозв'язних областях змінної довжини	97
4.3 Моделювання оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини	112
Висновки	121
Список використаних джерел	124

ВСТУП

Задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів відносяться до класу задач оптимізаційного геометричного проектування. Незважаючи на велику кількість досліджень, даний клас задач залишається актуальним, оскільки до нього можуть бути зведеними в своїх постановках практичні задачі з таких галузей діяльності людини, як машинобудування, цивільний захист, радіоелектроніка, приладобудування, легка промисловість, меблева промисловість тощо. Наукова та практична значущість класу задач оптимізаційного геометричного проектування і, зокрема, задач оптимального розміщення об'єктів, постійно зростає, що пов'язано із розробкою та впровадженням в різних галузях систем автоматизації проектування.

Слід відзначити, що серед задач розглянутого класу існують такі, що до теперішнього часу не були розв'язаними, наприклад, задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях. Дані задачі мають важливе значення, оскільки при розкрою матеріалів є необхідність у максимально повному їх використанні. Якщо не існує технологічних обмежень на орієнтацію об'єктів відносно матеріалу, то представлення їх за допомогою неорієнтованих об'єктів, які можуть здійснювати поворот відносно власної системи координат, дозволить збільшити коефіцієнт заповнення, тобто більш економно використовувати матеріал. Розгляд у якості області розміщення багатозв'язного об'єкта дозволить уникнути розміщення відповідних об'єктів в областях з наявністю дефектів або розв'язати задачу, в якій існує задана кількість об'єктів, що розміщуються на фіксованих місцях. Таким чином, враховуючи вищевикладене, можна зробити висновок, що розробка моделей та методів оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях є актуальною науково-

прикладною задачею.

Теоретичною базою досліджень є наукові роботи вчених: Н.М. Аушевої, Ю.І. Бадаєва, В.Д. Борисенка, В.В. Ваніна, В.М. Верещаги, В.В. Гнатушенка, М.С. Гумена, І.С. Дмитрієвої, С.М. Ковальова, Ю.М. Ковальова, В.М. Корчинського, Л.М. Куценка, Є.В. Мартина, В.Є. Михайленка, В.М. Найдиша, А.В. Найдиша, В.М. Несвідоміна, В.С. Обухової, А.В. Павлова, С.Ф. Пилипаки, О.Л. Підгорного, А.М. Підкоритова, В.О. Плоского, Є.В. Пугачова, С.В. Росохи, К.О. Сазонова, І.А. Скідана, Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченка, О.В. Шоман, В.П. Юрчука та їх учнів.

Дослідженню та розробці методів розв'язання класу задач оптимізаційного геометричного проектування присвячено наукові праці:

– вітчизняних вчених: М.І. Гіля, В.М. Комяк, О.В. Панкратова, Е.Г. Петрова, В.П. Путятіна, В.Л. Рвачова, Т.Є. Романової, О.М. Соболя, Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева та їх учнів;

– зарубіжних вчених: R. Alvarez-Valdes, J.A. Bennell, E. Birgin, A. Bortfeldt, M.A. Boschetti, E. Burke, J. Carlier, S.G. Christensen, M. Dell'Amico, K.A. Dowsland, J. Egeblad, O. Faroe, G. Fuellerer, M. Gendreau, J.M. Gentil, M. Hifi, E. Hopper, S. Imahori, G. Kendall, G. Martins, T.C. Martins, J.F. Oliveira, D. Pisinger, A. Pott, M. Sigurd, K. Wang, Z. Wang та ін.

Монографія складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ НЕОРІЄНТОВАНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З КУСОЧНО-НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

1.1 Огляд методів розв'язання актуальних задач прикладної геометрії

Моделі та методи прикладної геометрії використовуються у різних галузях діяльності людини, оскільки вони є тією базою, що забезпечує розробку нових інтегрованих інформаційних технологій процесів автоматизованого проектування та виробництва, модернізацію існуючих технологій та створення нових машин і механізмів.

В Україні функціонують наукові школи з прикладної геометрії, які досліджують проблеми дискретного геометричного моделювання, питання конструювання кривих та поверхонь, геометричні перетворення, моделі та методи багатовимірної прикладної геометрії, геометричні методи оптимізації, методи побудови двовимірних та тривимірних комп'ютерних моделей тощо.

Теоретичним та практичним аспектам прикладної геометрії присвячено роботи вчених: Н.М. Аушевої, Ю.І. Бадаєва, В.Д. Борисенка, В.В. Ваніна, В.М. Верещаги, В.В. Гнатушенка, М.С. Гумена, О.М. Гумен, І.С. Дмитрієвої, С.М. Ковальова, Ю.М. Ковальова, В.М. Корчинського, Л.М. Куценка, Є.В. Мартина, В.Є. Михайленка, В.М. Найдиша, А.В. Найдиша, В.М. Несвідоміна, В.С. Обухової, А.В. Павлова, С.Ф. Пилипаки, О.Л. Підгорного, А.М. Підкоритова, В.О. Плоского, Є.В. Пугачова, С.І. Пустюльги, К.О. Сазонова, О.В. Сергейчука, І.А. Свідана, Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченка, О.В. Шоман, В.П. Юрчука та їх учнів.

Розглянемо більш докладніше основні результати досліджень

наукових шкіл з прикладної геометрії з метою виявлення моделей та методів геометричного моделювання розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях. Так, дослідження наукових шкіл з прикладної геометрії Київського національного університету будівництва і архітектури присвячені:

- геометричному моделюванню архітектурних конструкцій, дослідженню сучасного стану геометричного та комп'ютерного моделювання та напрямкам їх розвитку, аналізу розвитку методів прикладної геометрії в Україні, досягненням і задачам Української асоціації з прикладної геометрії, еволюції нарисної геометрії [1 – 7];

- геометричному моделюванню просторових конструкцій, розв'язанню задач архітектурно-будівельної фізики [8 – 12];

- дискретному геометричному моделюванню поверхонь в просторових архітектурних конструкціях, питанням параметризації, основним напрямкам розвитку дискретної прикладної геометрії кривих ліній та поверхонь, застосуванню статико-геометричного методу [13 – 20];

- принципам системності в прикладній геометрії [21 – 24];

- автоматизації проектування в архітектурі та будівництві [25 – 28];

- геометричному моделюванню фізичних процесів при оптимізації форми енергоефективних будинків [29 – 33].

У наукових роботах вчених Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» досліджуються:

- теоретичні основи геометричного моделювання в машинобудівних САПР [34];

- структурно-параметричні моделі прикладної геометрії [35 – 38];

- моделі та методи багатовимірної прикладної геометрії [39 – 41];

- питання геометричного моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик, графічного, геометричного моделювання та інтерактивні системи [42 – 46].

Роботи вчених наукової школи з прикладної геометрії у

Національному університеті біоресурсів і природокористування України присвячені:

- конструюванню кривих та поверхонь на основі управління натуральними параметрами [47 – 53];

- комп'ютерним моделям синтетичної геометрії [54 – 56].

Наукова школа у Київській державній академії водного транспорту імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного розглядає проблеми прикладної геометрії, пов'язані з управлінням формою інтегральної кривої, геометричним перетворенням [57 – 60].

Дослідження наукової школи з прикладної геометрії у Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара присвячені:

- інваріантним геометричним моделям ідентифікації та аналізу проєкційних зображень; багатомірному векторному представленню розподілів яскравості багатоспектральних растрових зображень дистанційного зондування землі [62 – 66];

- ідентифікації та аналізу багатокомпонентних фотограмметричних зображень проєкційної природи; геометричним моделям формування та попередньої обробки цифрових фотограмметричних зображень високого просторового розрізнення [67 – 70];

- моделюванню фізичних процесів, дослідженню задач кінематики, розрахунку параметрів технічних систем [71 – 74].

У роботах вчених Харківської наукової школи з прикладної геометрії досліджуються:

- геометричне моделювання коливань багатоланкових маятників [75, 76];

- фазові портрети поведінки динамічних систем [77, 78];

- геометричне моделювання узагальнених паралельних множин [79];

- геометричне моделювання та оптимізація процесу теплової променевої обробки харчових продуктів [80];

- геометричне та комп'ютерне моделювання динаміки процесів зміни об'єктів під впливом заданих чинників [81, 82];

- комп'ютерно-геометричні моделі роторно-планетарних трохоїдних гідромашин [83].

У наукових роботах Мелітопольської школи прикладної геометрії розглядаються питання:

- моделювання процесів та явищ методами та засобами варіативного геометричного моделювання [84 – 87];

- розробки дискретно-параметричних методів геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь [88, 89].

Роботи представників наукових шкіл Львова, Рівного та Луцька з прикладної геометрії присвячені:

- геометрії комплексного простору стосовно формування областей стійкості та оптимізації параметрів регульованих систем [91];

- дискретному геометричному моделюванню скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки [91 – 93];

- дискретному визначенню геометричних об'єктів числовими послідовностями [94 – 96].

У роботах вчених наукових шкіл Херсона, Миколаєва та Одеси з прикладної геометрії досліджуються питання:

- геометричного моделювання на дискретних елементах, математичного та комп'ютерного моделювання [97 – 101];

- геометричного моделювання лопатних апаратів нагнітальних і розширювальних турбомашин різного конструктивного оформлення [102, 103];

- параметричного геометричного моделювання спряжених поверхонь [104].

Таким чином, аналіз моделей та методів прикладної геометрії, розроблених різними науковими школами, не виявив таких, що дозволили б розв'язувати задачі геометричного моделювання оптимального

розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях. У зв'язку з цим, розглянемо існуючі методи розв'язання задач оптимізаційного геометричного проектування.

1.2 Огляд методів розв'язання задач оптимізаційного геометричного проектування

Задачі оптимізаційного геометричного проектування пов'язані із оптимізаційним перетворенням геометричної інформації. Даний клас становлять такі задачі:

- оптимального розміщення геометричних об'єктів;
- оптимального покриття геометричних об'єктів;
- оптимального розбиття геометричних об'єктів;
- проведення оптимальних трас.

Великий внесок у створення напряму наукових досліджень, пов'язаного із розв'язанням оптимізаційних задач розміщення об'єктів, було зроблено у 60-х роках минулого століття академіком В.Л. Рвачовим, причому основою для зазначеного напряму стала теорія R-функцій [105, 106]. Розвитку моделей та методів розв'язання задач оптимального розміщення об'єктів, а також створенню теорії оптимізаційного геометричного проектування, присвячено наукові дослідження академіка Ю.Г. Стояна.

У загальному випадку, задача оптимального розміщення полягає в пошуку такого варіанта розміщення об'єктів, при якому заданий критерій якості досягає екстремального значення, а для геометричних об'єктів, що підлягають розміщенню в заданій області, виконуються умови взаємного неперетину та належності заданій області [107 – 109].

Задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів умовно поділяють на два класи: задачі нерегулярного розміщення та задачі

регулярного розміщення.

Так, задачам нерегулярного оптимального розміщення геометричних об'єктів, а також розробці конструктивного апарату для формалізації обмежень даних задач, присвячено переважну більшість робіт наукової школи Ю.Г. Стояна, наприклад [110 – 124]. Серед цих задач окремо виділимо деякі задачі упаковки у тривимірному просторі [117, 118].

Розробці моделей та методів розв'язання задач регулярного розміщення геометричних об'єктів присвячено, наприклад, роботи [125, 126] (сітчасте розміщення) та [127, 128] (періодичне розміщення).

Серед закордонних досліджень стосовно розв'язання задач оптимального розміщення геометричних об'єктів слід виділити роботи таких вчених, як B. Addis, A. De Almeida, R. Alvarez-Valdes, O.C.B. de Araujo, R. Baldacci, J.A. Bennell, K.J. Binkley, E. Birgin, A. Bortfeldt, M.A. Boschetti, E. Burke, J. Carlier, C. Charalambous, M. Chen, S.G. Christensen, F. Clautiaux, J.R. Correa, Y. Cui, M. Dell'Amico, T. Dereli, K.A. Dowsland, J. Egeblad, O. Faroe, G. Fuellerer, M. Gendreau, J.M. Gentil, H. Glaab, A.M. Gomes, J. Goncalves, R. Hellier, M. Hifi, E. Hopper, W. Huang, T. Ibaraki, S. Imahori, K. Jansen, B. Kaminski, G. Kendall, G. Koloch, G. Martins, T.C. Martins, F.K. Miyazawa, R. Morabito, S.M. Morales, J.F. Oliveira, D. Pisinger, A. Pott, T.A. de Queiroz, A. Sciomachen, M. Sigurd, B.C.H. Turton, K. Wang, Z. Wang, G. Whitwell, J.A. Widmer, Y. Wu, M. Yagiura, M. Zachariasen.

Наукові дослідження перерахованих вище вчених стосовно розв'язання задач упаковки та розкрою у двовимірному просторі мають наступні особливості:

- розміщення прямокутних об'єктів у заданих областях [129 – 134];
- розміщення орієнтованих опуклих та неопуклих багатокутників [135];
- нерегулярне та регулярне розміщення об'єктів [136 – 141];
- упаковка кіл у заданих областях [142 – 147];

- ортогональний гільйотинний розкрій [148 – 151];
- розміщення неорієнтованих прямокутників та багатокутників [152 – 154].

Для розв’язання зазначених задач упаковки та розкрою було використано як евристичні алгоритми [155 – 159], так і методи гілок та меж [160, 161], імітації відпалу [162 – 164], лінійного та нелінійного програмування [165 – 167].

Останнім часом спостерігається тенденція до збільшення наукових публікацій, присвячених розв’язанню задач упаковки у тривимірному просторі, а саме:

- оптимальній упаковці паралелепіпедів (у тому числі при завантаженні автомобілів) [168 – 175];
- врахуванню додаткових обмежень при розв’язанні даного класу задач [176 – 179];
- розміщенню неорієнтованих паралелепіпедів [180].

При цьому також використовувалися методи лінійного програмування, імітації відпалу та змішані стратегії.

Наступні задачі, які відносяться до класу оптимізаційного геометричного проектування, це задачі оптимального покриття заданої області деяким набором геометричних об’єктів.

Сутність даних задач полягає в тому, що необхідно повністю покрити мінімальною кількістю геометричних об’єктів задану область, при цьому площі взаємного перетину об’єктів покриття, а також об’єктів покриття та доповнення заданої області до відповідного простору, мають бути мінімальними.

Розв’язанню задач оптимального покриття присвячено, наприклад, роботи [181 – 187]. При цьому формалізація обмежень у даних задачах здійснюється за допомогою конструктивного апарату ω - функцій [181].

Що стосується задач оптимального розбиття, то вони полягають у такому: необхідно розбити задану множину (область) на мінімальну

кількість підмножин (об'єктів) таким чином, щоб критерій якості досягав екстремуму, а одержані підмножини розбиття не перетиналися між собою та належали заданій області.

У роботі [188] вказано що всі задачі розбиття поділяються на 2 класи:

- дискретні задачі розбиття, в яких задана множина розбиття складається з кінцевої кількості елементів [189-192];
- неперервні (континуальні) задачі розбиття [193].

Разом з тим, існують наукові дослідження, наприклад, робота [194], у яких здійснюється оптимізація розбиття заданих областей з урахуванням як неперервних, так і дискретних обмежень. Також у роботі [194] досліджено взаємозв'язок між задачами оптимального розміщення, покриття та розбиття геометричних об'єктів.

Задачам проведення оптимальних трас присвячено, наприклад, роботу [195]. До даних задач у своїх постановках можуть бути зведеними такі, як визначення оптимальних шляхів евакуації із висотних будівель, проектування мереж водопостачання тощо.

Слід відзначити, що значна кількість задач геометричного проектування має комбінаторну структуру та описується дискретними оптимізаційними моделями [196].

Комбінаторна структура задач геометричного проектування в багатьох випадках визначається тим, що в процесі розв'язання необхідно впорядкувати об'єкти, що підлягають розміщенню (покриттю, розбиттю) в заданій області. При цьому порядок розміщення (покриття, розбиття) впливає на значення критерію якості.

Оскільки задача оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях відноситься до задач упаковки та розкрою, то окрему увагу приділимо роботам М.В. Злотника [197, 198] та А.В. Попової [199, 200].

Дослідження М.В. Злотника присвячені створенню конструктивних

засобів математичного моделювання взаємодії неорієнтованих, у загальному випадку, неопуклих геометричних об'єктів, а також побудові математичної моделі та розв'язанню оптимізаційної задачі розміщення неорієнтованих багатокутників та кіл.

Слід відзначити, що у роботі [198] наведено метод побудови Φ -функції неорієнтованих геометричних 2D об'єктів, побудовано повний клас Φ -функцій неорієнтованих геометричних об'єктів, що мають форму кола, прямокутника, опуклого чи неопуклого багатокутника та їх доповнення до всього простору R^2 . Досліджено особливості побудованих Φ -функцій, спрощено вигляд Φ -функції двох неорієнтованих опуклих багатокутників.

Базуючись на методі побудови Φ -функцій для орієнтованих об'єктів, у роботі [198] запропоновано метод побудови Φ -функцій неорієнтованих об'єктів, який полягає у такому:

– вважається, що один з об'єктів зафіксовано та всі його параметри розміщення дорівнюють нулю;

– будується рівняння $\Phi(u) = 0$ нульового рівня Φ -функції, яке залежить від параметрів розміщення другого об'єкту при умові, що параметри розміщення першого об'єкту фіксовані;

– задається орієнтація рівняння $\Phi(u) = 0$ таким чином, що $\Phi(u^*) < 0$, якщо $u^* \in \text{int } T_{12}(\theta)$ та $\Phi(u^*) > 0$, якщо $u^* \in R^3 \setminus T_{12}(\theta)$, де $T_{12}(u) = T_{12}(0,0,0)$

$$T_{12}(\theta) = T_1(0,0,0) \oplus (-1) \cdot T_2(0,0,\theta);$$

– вважається $\Phi_{12}(0,u_2) = \Phi(u)$;

– заміною змінної u на відповідні різниці параметрів розміщення, що залежать від кутових параметрів, здійснюється побудова Φ -функції

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) = \Phi(x_2' - x_1', y_2' - y_1', \theta_2 - \theta_1), \quad \text{де} \quad x_i' = x_i \cos \theta_1 - y_i \sin \theta_1,$$

$$y_i' = x_i \sin \theta_1 + y_i \cos \theta_1, \quad i = 1, 2.$$

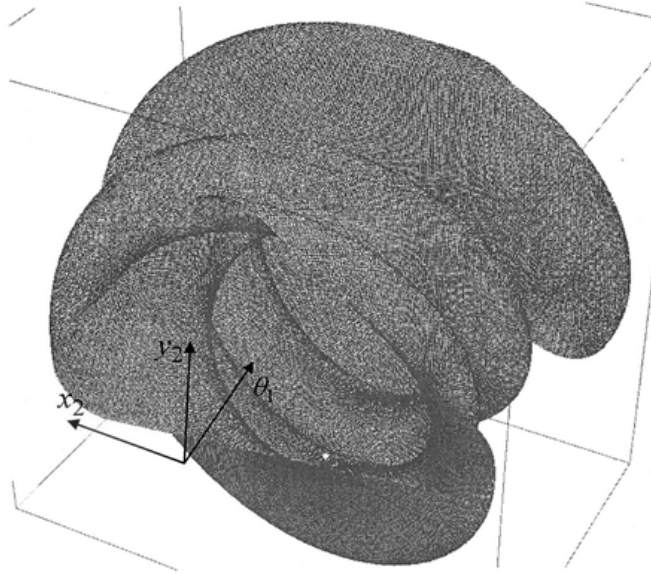


Рисунок 1.1 – Φ -поверхня нульового рівня для трикутника та кола

На рис. 1.1 наведено приклад Φ -поверхні нульового рівня для трикутника та кола. Аналогічно було одержано відповідні поверхні для опуклого багатокутника та кола, прямокутника та кола, двох багатокутників тощо. Також було побудовано Φ -функцію для неорієнтованих неопуклих багатокутників та неорієнтованих базових об'єктів (коло, прямокутник, опуклий багатокутник).

Виявлено такі властивості побудованих Φ -функцій:

- неперервні;
- кусково-гладкі;
- періодичні відносно кутових змінних;
- майже всюди диференційовані;
- у точках, де не існує градієнт Φ -функції, завжди можна знайти вектор, що вказує напрямок зростання (спаду) функції;
- поверхні, визначені цими Φ -функціями, носять яружний характер.

У роботі [198] розроблено математичні моделі та методи розв'язання задач оптимізаційного розміщення кіл, неорієнтованих прямокутників, неорієнтованих опуклих багатокутників, неорієнтованих неопуклих

багатокутників (рис. 1.2), неорієнтованих різноманітних об'єктів (рис. 1.3).

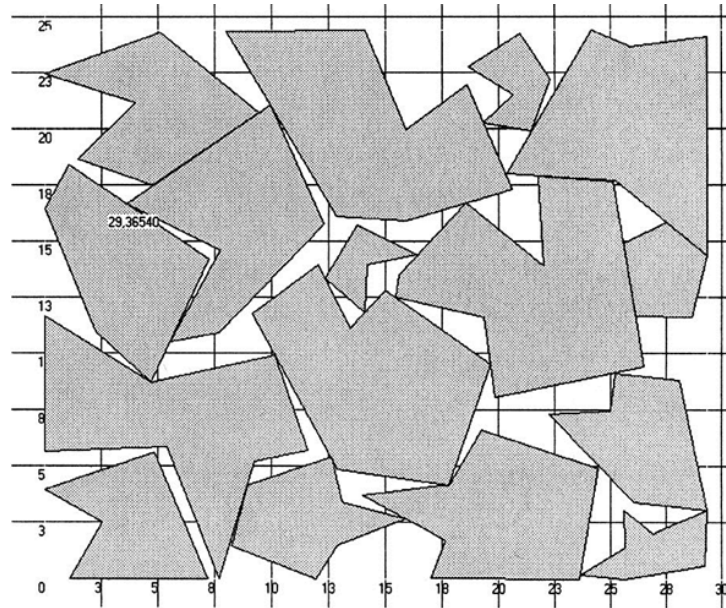


Рисунок 1.2 – Приклад розміщення неорієнтованих неопуклих багатокутників

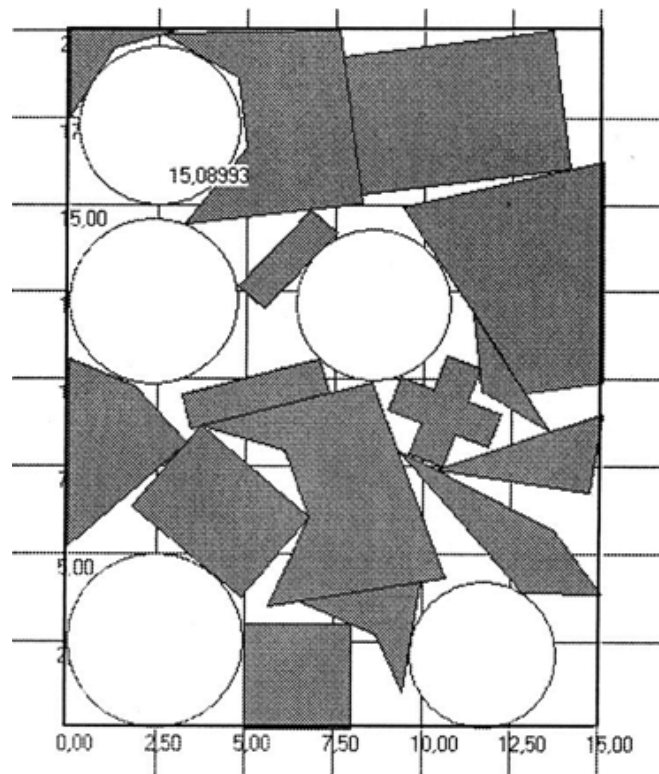


Рисунок 1.3 – Приклад розміщення неорієнтованих різноманітних об'єктів

Разом з тим, слід відзначити, що методи оптимального розміщення розроблено для:

- об'єктів з кусочно-лінійними границями та кіл;
- однозв'язних прямокутних областей змінної довжини.

Таким чином, застосування розроблених у роботі [198] моделей та методів є неможливим для розв'язання задач оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях.

У роботі А.В. Попової [200] надано визначення плоского геометричного об'єкта з кусочно-нелінійними границями: геометричним об'єктом з кусочно-нелінійною границею називається ϕ -об'єкт, вершини якого з'єднуються як фрагментами кривих, так і відрізками прямих ліній (у окремому випадку – лише фрагментами кривих ліній).

Тут під ϕ -об'єктом слід розуміти об'єкт, який не має самоперетину або асимптотичного поведіння границь, не містить ізольованих точок тощо.

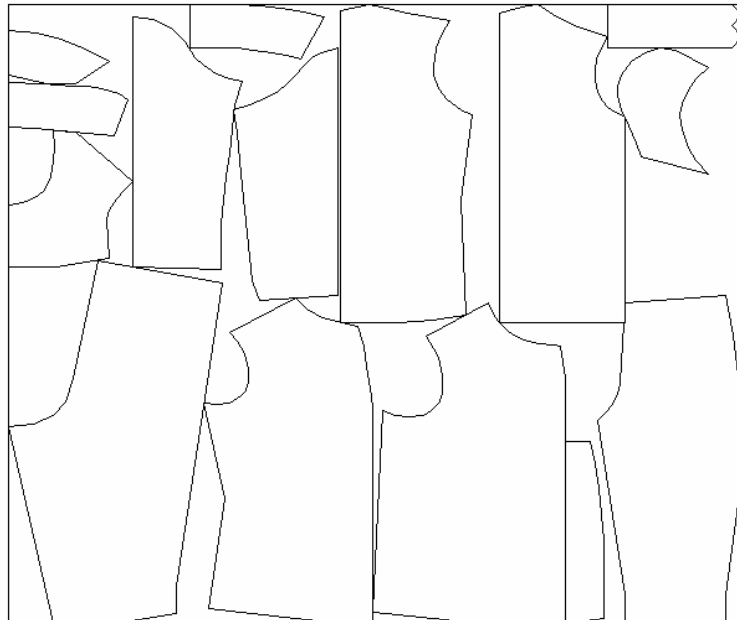
В науковому дослідженні А.В. Попової було записано геометричну інформацію стосовно плоского орієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та однозв'язної прямокутної області розміщення змінної довжини, сформульовано постановку задачі оптимального розміщення орієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у заданих областях.

Для формалізації обмежень задачі було досліджено трансляцію з дотиком двох фрагментів кривих другого порядку, що являють собою елементи границь об'єктів розміщення, а саме: дуги кола відносно іншої дуги кола, дуги кола відносно фрагменту параболи та навпаки, фрагменту параболи відносно фрагменту гіперболи тощо. Це дозволило автору розробити метод геометричного моделювання замкненого контуру дотику двох плоских орієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями, контуру дотику об'єкта та області розміщення. Складовими

даного методу є спосіб формування фрагментів контуру дотику двох плоских геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями, який дозволяє враховувати довільну орієнтацію елементів границь об'єктів розміщення, що представлені за допомогою квадратичних форм, та спосіб збирання контуру, що описує 0-рівень Φ -функції для двох плоских геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями.

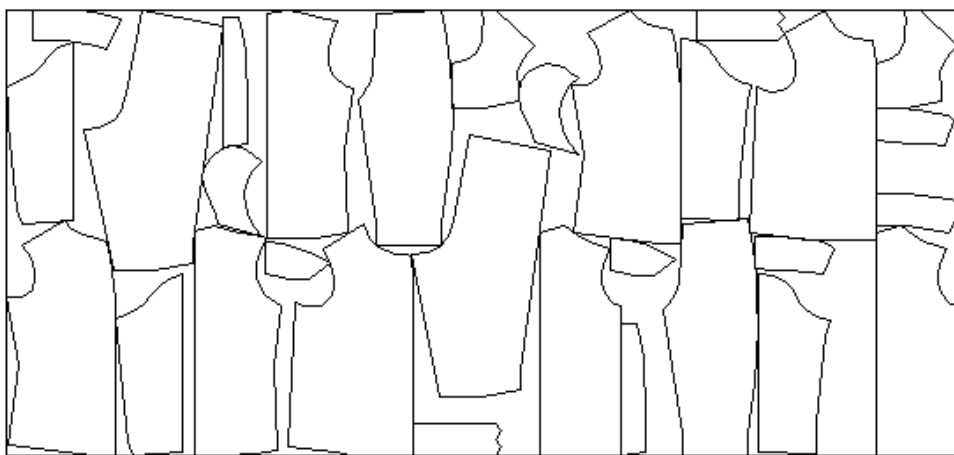
Подальша формалізація обмежень та побудова загальної моделі оптимального розміщення об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних областях змінної довжини, дослідження особливостей даної моделі дозволили розробити обґрунтовані методи оптимізації розміщення зазначених об'єктів та здійснити комп'ютерне моделювання практичних задач.

Так, на рис. 1.4 наведено результат розв'язання практичної задачі, яка характерна для швейного виробництва, тобто здійснено комп'ютерне моделювання оптимального розміщення 15 геометричних об'єктів (викройок спортивного костюму).



1526.699821
15

Рисунок 1.4 – Результат оптимального розміщення 15 викройок



3046.463596

30

Рисунок 1.5 – Оптимальне розміщення двох комплектів викройок

На рис. 1.5 наведено результат оптимального розміщення двох комплектів викройок.

Незважаючи на створені моделі та методи оптимального розміщення плоских орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями, застосувати їх для розв'язання задач оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів, тобто які можуть здійснювати поворот, неможливо, оскільки розроблений метод геометричного моделювання контуру дотику двох об'єктів розміщення не припускає наявності точок екстремуму всередині сторін геометричного об'єкта. Разом з тим, при здійсненні повороту власної системи координат об'єкта розміщення зазначені точки будуть з'являтися, що призведе до постійного зростання кількості вершин даного об'єкта (виникає потреба у постійному додаванні вершин при кожній зміні кута повороту об'єкта) і, як наслідок, часу, потрібного на розв'язання задачі оптимізації. Таким чином, існує необхідність у розробці методу геометричного моделювання умови дотику двох неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями, що має виключити зазначений недолік. Більш того, у дослідженні А.В. Попової розглядалася лише однозв'язна прямокутна область розміщення змінної

довжини, що також унеможлиблює використання розроблених методів оптимізації для задачі розміщення неорієнтованих об'єктів у багатозв'язних областях.

Висновок: аналіз існуючих моделей та методів розв'язання задач оптимізаційного геометричного проектування не виявив таких, які можливо було б використати для розв'язання задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях.

У зв'язку з цим, розглянемо постановку даної задачі.

1.3 Постановка задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях

Для формулювання постановки задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях необхідно, перш за все, здійснити завдання геометричної інформації про об'єкти та область розміщення.

У загальному вигляді геометрична інформація про φ -об'єкт може бути представлена так [181]:

$$G = (\{s\}, \{m\}, \{u\}), \quad (1.1)$$

де $\{s\}$ – форма геометричного об'єкта;

$\{m\}$ – метричні характеристики (розміри) геометричного об'єкта;

$\{u\}$ – параметри розміщення об'єкта (положення об'єкта у відповідному просторі).

Оскільки у даній роботі розглядаються плоскі неорієнтовані геометричні об'єкти, то $\{u\} = \{x, y, \theta\}$, тобто їх положення у двовимірному

просторі визначається місцем знаходження початку локальної системи координат (x, y) та її кутом повороту θ .

Нехай задано багатозв'язну область розміщення S_0 (рис. 1.6), геометрична інформація про яку має такий вигляд:

$$G_0 = (\{s_0\}, \{m_0\}, \{u_0\}), \quad (1.2)$$

де $\{s_0\}$ – прямокутник;

$\{m_0\} = (l, b)$ – метричні характеристики, причому l – змінна довжина області, b – ширина області;

$\{u_0\} = \{0, 0, 0\}$ – параметри розміщення області. У даному випадку область розміщення задана у глобальній системі координат і є орієнтованою, тобто виключає можливість повороту.

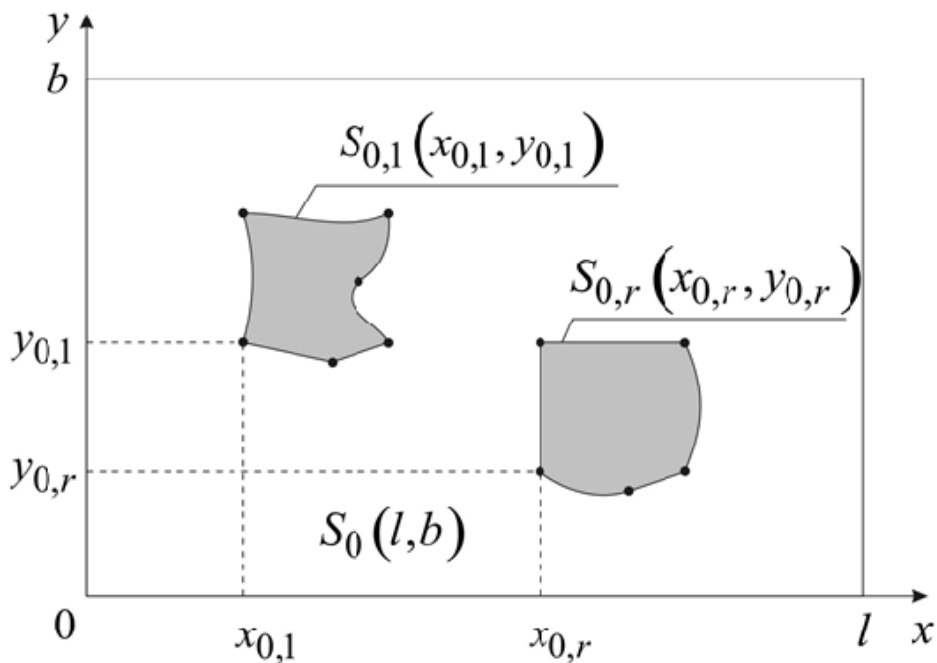


Рисунок 1.6 - Багатозв'язна область розміщення

Даній області розміщення належать області «заборони» $S_{0,r}$, $r = 1, \dots, N_R$ (дефекти матеріалу, вже розміщені об'єкти тощо), геометрична інформація про які має вигляд:

$$G_{0,r} = (\{s_{0,r}\}, \{m_{0,r}\}, \{u_{0,r}\}), \quad (1.3)$$

де $\{s_{0,r}\}$ – об'єкт з кусочно-нелінійними границями;

$\{m_{0,r}\} = \{v_{0,r,q}; a_{0,r,qq+1,c}\}$, $v_{0,r,q} = (x_{0,r,q}, y_{0,r,q})$, $q = 1, 2, \dots, n_{0,r}$ – координати вершин в локальній системі координат, $a_{0,r,qq+1,c}$, $c = 1, \dots, 6$ – параметри кривої другого порядку, що описує фрагмент границі між вершинами $v_{0,r,q}$ та $v_{0,r,q+1}$:

$$a_{0,r,qq+1,1}x_i^2 + a_{0,r,qq+1,2}x_i y_i + a_{0,r,qq+1,3}y_i^2 + a_{0,r,qq+1,4}x_i + a_{0,r,qq+1,5}y_i + a_{0,r,qq+1,6} = 0; \quad (1.4)$$

$$\{u_{0,r}\} = \{x_{0,r}, y_{0,r}, 0\}.$$

Слід зазначити, що області «заборони» являють собою орієнтовані геометричні об'єкти з кусочно-нелінійними границями, про що свідчить $\theta_{0,r} = 0$, $r = 1, \dots, N_R$. Також відмітимо, що нумерація вершин даних областей здійснюється за годинниковою стрілкою, що дозволить відрізнити їх від об'єктів розміщення.

Таким чином, геометрична інформація про прямокутну багатозв'язну область змінної довжини може бути представленою за допомогою виразів (1.2) та (1.3).

Властивість 1.1. У даній роботі криволінійні елементи границь геометричних об'єктів являють собою фрагменти кривих другого порядку.

Властивість 1.2. Якщо елемент границі між вершинами $v_{0,r,q}$ та $v_{0,r,q+1}$ є лінійним, то у виразі (1.4) $a_{0,r,qq+1,1} = a_{0,r,qq+1,2} = a_{0,r,qq+1,3} = 0$.

Властивість 1.3. Для однозв'язної прямокутної області змінної довжини геометрична інформація буде мати вигляд (1.2).

Геометрична інформація для об'єктів розміщення $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ (рис. 1.7), має такий вигляд:

$$G_i = (\{s_i\}, \{m_i\}, \{u_i\}), \quad (1.5)$$

де $\{s_i\}$ – об'єкт з кусочно-нелінійною границею;

$$\{m_i\} = \{v_{ip}(\theta_i); a_{i,pp+1,c}(\theta_i)\}, \quad v_{ip}(\theta_i) = (x_{ip}(\theta_i), y_{ip}(\theta_i)), \quad p = 1, \dots, n_i -$$

координати вершин в локальній системі координат:

$$x_{ip}(\theta_i) = x_{ip}(0) \cdot \cos \theta_i + y_{ip}(0) \cdot \sin \theta_i;$$

$$y_{ip}(\theta_i) = -x_{ip}(0) \cdot \sin \theta_i + y_{ip}(0) \cdot \cos \theta_i;$$

$a_{i,pp+1,c}(\theta_i)$, $c = 1, \dots, 6$ – параметри кривої другого порядку, що описує фрагмент границі між вершинами $v_{ip}(\theta_i)$ та $v_{ip+1}(\theta_i)$:

$$\begin{aligned} & a_{i,pp+1,1}(\theta_i)x_i^2 + a_{i,pp+1,2}(\theta_i)x_i y_i + a_{i,pp+1,3}(\theta_i)y_i^2 + \\ & + a_{i,pp+1,4}(\theta_i)x_i + a_{i,pp+1,5}(\theta_i)y_i + a_{i,pp+1,6}(\theta_i) = 0; \end{aligned} \quad (1.6)$$

причому при $p = n_i$, $p + 1 = 1$; $\theta_i = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, $n_d > 0$ –

параметр дискретизації кута повороту об'єкта;

$$\{u_i\} = \{x_i, y_i, \theta_i\}.$$

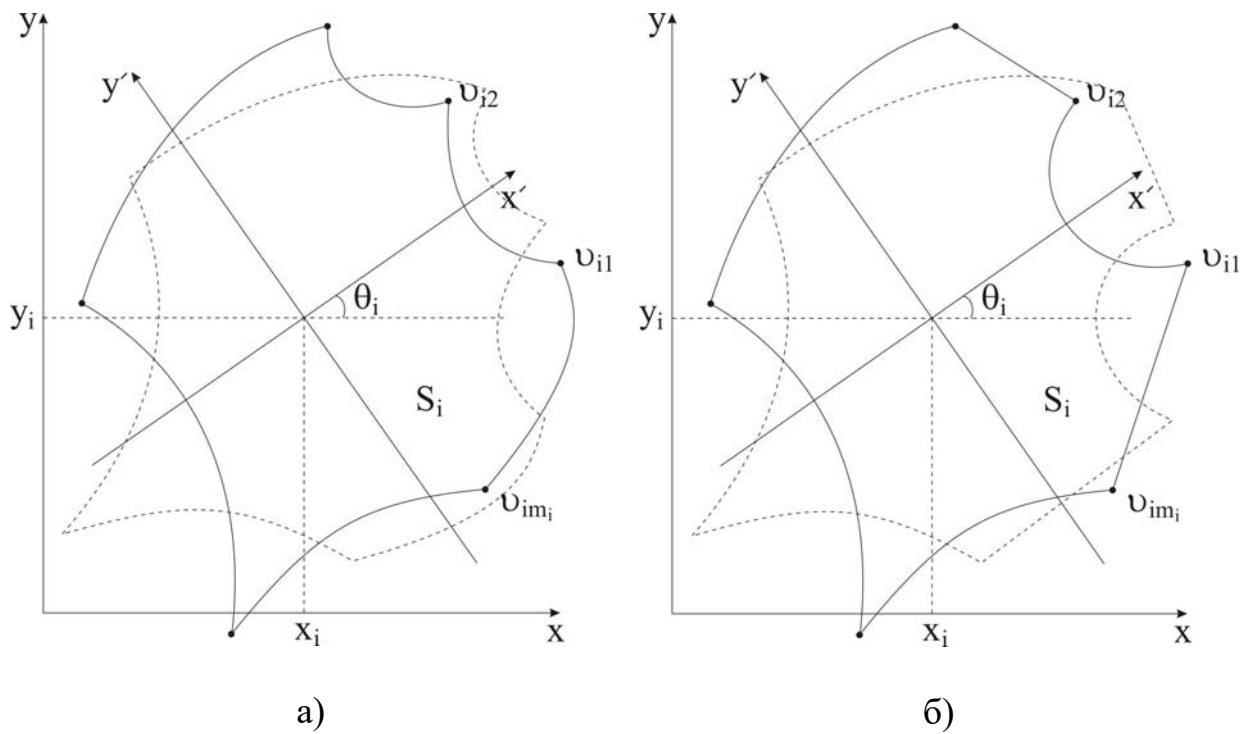


Рисунок 1.7 – Об'єкти розміщення

Слід зазначити, що нумерація вершин об'єктів розміщення здійснюється проти годинникової стрілки.

Властивість 1.4. Для орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями в геометричній інформації (1.5) $\theta_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Розглянемо загальну постановку задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях.

Задача 1. Нехай задано багатозв'язну область розміщення $S_0(0,0,0)$ за допомогою геометричної інформації (1.2) та (1.3). Необхідно розмістити у даній області неорієнтовані об'єкти з кусочно-нелінійними границями $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, таким чином, щоб довжина зайнятої частини $S_0(0,0,0)$ була мінімальною і виконувалися умови:

- взаємного неперетину об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$; $j = i+1, \dots, N$;
- неперетину об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, та областей

«заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$;

– належності об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, області $S_0(0, 0, 0)$.

Введемо вектор параметрів $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $u \in R^\xi$, $\xi = 3N$.

Вектор всіх змінних задачі позначимо $Z = Z(u, l) \in R^{\xi+1}$. Необхідно визначити вектор Z , що забезпечує розміщення об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, в області $S_0(0, 0, 0)$ з урахуванням наведених вище обмежень, причому параметр l має приймати мінімальне значення:

$$l^* = \arg \min_{u \in W} Z(u, l), \quad (1.7)$$

де W :

$$S_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap S_j(x_j, y_j, \theta_j) = \emptyset; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = i+1, \dots, N; \quad (1.8)$$

$$S_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0) = \emptyset; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (1.9)$$

$$S_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap cS_0(0, 0, 0) = \emptyset; \quad S_0(0, 0, 0) \cup cS_0(0, 0, 0) = R^2. \quad (1.10)$$

Тут $cS_0(0, 0, 0)$ – доповнення $S_0(0, 0, 0)$ до простору R^2 . Вираз (1.7) являє собою цільову функцію задачі, а (1.8)÷(1.10) – обмеження задачі на, відповідно, взаємний неперетин об'єктів розміщення, неперетин об'єктів розміщення з областями «заборони» та належність об'єктів розміщення заданій області.

Із загальної постановки задачі (1.7)÷(1.10) випливають такі окремі.

Задача 2. Нехай задано багатозв'язну область розміщення $S_0(0, 0, 0)$.

Необхідно розмістити у даній області як неорієнтовані $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, так й орієнтовані геометричні об'єкти $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, з кусочно-нелінійними границями таким чином, щоб довжина зайнятої частини $S_0(0, 0, 0)$ була мінімальною і виконувалися умови:

- взаємного неперетину неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$, $i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$; $j = i + 1, \dots, n_1$;
- взаємного неперетину орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$ та $S_t(x_t, y_t, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N - 1$; $t = k + 1, \dots, N$;
- неперетину неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, та орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$;
- неперетину неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, з областями «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$;
- неперетину орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, з областями «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$;
- належності неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, області $S_0(0, 0, 0)$;
- належності орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, області $S_0(0, 0, 0)$.

Очевидно, що розташування об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$ визначається вектором параметрів $u_k = (x_k, y_k)$. Тоді вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n_1}, u_{n_1+1}, \dots, u_N) \in R^\xi$, $\xi = 2N + n_1$. Вектор всіх змінних задачі позначимо $Z = Z(u, l) \in R^{\xi+1}$. Необхідно визначити вектор Z , що забезпечує розміщення об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, та $S_k(x_k, y_k, 0)$,

$k = n_1 + 1, \dots, N$, в області $S_0(0,0,0)$, при якому параметр l має приймати мінімальне значення (1.7) і будуть виконуватись наступні умови:

$$S_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap S_j(x_j, y_j, \theta_j) = \emptyset; \quad i = 1, 2, \dots, n_1 - 1; \quad j = i + 1, \dots, n_1; \quad (1.11)$$

$$S_k(x_k, y_k, 0) \cap S_t(x_t, y_t, 0) = \emptyset; \quad k = n_1 + 1, \dots, N - 1; \quad t = k + 1, \dots, N; \quad (1.12)$$

$$S_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap S_k(x_k, y_k, 0) = \emptyset; \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad k = n_1 + 1, \dots, N; \quad (1.13)$$

$$S_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0) = \emptyset; \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (1.14)$$

$$S_k(x_k, y_k, 0) \cap S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0) = \emptyset; \quad k = n_1 + 1, \dots, N; \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (1.15)$$

$$S_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap cS_0(0,0,0) = \emptyset; \quad (1.16)$$

$$S_k(x_k, y_k, 0) \cap cS_0(0,0,0) = \emptyset; \quad S_0(0,0,0) \cup cS_0(0,0,0) = R^2. \quad (1.17)$$

Задача 3. Нехай задано багатозв'язну область розміщення $S_0(0,0,0)$. Необхідно розмістити у даній області орієнтовані геометричні об'єкти $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, з кусочно-нелінійними границями таким чином, щоб довжина зайнятої частини $S_0(0,0,0)$ була мінімальною і виконувалися умови:

– взаємного неперетину об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$ та $S_t(x_t, y_t, 0)$,
 $k = 1, \dots, N - 1; \quad t = k + 1, \dots, N;$

– неперетину об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, з областями «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R;$

– належності об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, області $S_0(0, 0, 0)$.

Розміщення об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$ визначається вектором параметрів $u_k = (x_k, y_k)$. Тоді, вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in R^\xi$, $\xi = 2N$. Вектор всіх змінних задачі позначимо $Z = Z(u, l) \in R^{\xi+1}$. Необхідно визначити вектор Z , що забезпечує розміщення об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, в області $S_0(0, 0, 0)$, при якому параметр l має приймати мінімальне значення (1.7) і будуть виконуватись наступні умови:

$$S_k(x_k, y_k, 0) \cap S_t(x_t, y_t, 0) = \emptyset; \quad k = 1, \dots, N-1; \quad t = k+1, \dots, N; \quad (1.18)$$

$$S_k(x_k, y_k, 0) \cap S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0) = \emptyset; \quad k = 1, \dots, N; \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (1.19)$$

$$S_k(x_k, y_k, 0) \cap cS_0(0, 0, 0) = \emptyset; \quad S_0(0, 0, 0) \cup cS_0(0, 0, 0) = R^2. \quad (1.20)$$

Властивість 1.5. При розв'язанні задачі розміщення в однозв'язній області $S_0(0, 0, 0)$:

- неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, серед обмежень (1.8)÷(1.10) буде відсутнім (1.9);
- неорієнтованих $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, та орієнтованих $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, об'єктів з кусочно-нелінійними границями серед обмежень (1.11)÷(1.17) будуть відсутніми (1.14) та (1.15);
- орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, серед обмежень (1.18)÷(1.20) буде відсутнім (1.19).

Таким чином, із загальної постановки задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-

нелінійними границями у багатозв'язній області впливають 5 окремих. У зв'язку з цим, необхідно побудувати моделі оптимального розміщення зазначеного класу об'єктів у відповідних областях та здійснити формалізацію обмежень даних моделей.

РОЗДІЛ 2

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕРІЗІВ

ПОВЕРХНІ ДОТИКУ ПЛОСКИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З

КУСОЧНО-НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ

2.1 Загальна модель оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у заданих областях та її особливості

У п. 1.3 сформульовано загальну постановку задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини. Для побудови загальної моделі оптимального розміщення зазначених об'єктів у відповідних областях необхідно, перш за все, здійснити формалізацію обмежень задачі. Слід відзначити, що для аналітичного подання обмежень в задачах оптимального розміщення геометричних об'єктів у заданих областях використовується клас Φ -функцій, введений у роботах професора Ю.Г. Стояна [181]. Розглянемо властивості Φ -функцій та нормалізованих Φ -функцій більш детально.

Визначення 2.1 [181]. Неперервна, всюди визначена функція в R^k називається Φ -функцією об'єктів $S_1(u_1)$ і $S_2(u_2)$, якщо вона задовольняє наступним характеристичним властивостям:

$$\Phi(u_1, u_2) > 0, \text{ якщо } clS_1(u_1) \cap clS_2(u_2) = \emptyset,$$

$$\Phi(u_1, u_2) = 0, \text{ якщо } int S_1(u_1) \cap int S_2(u_2) = \emptyset \text{ і}$$

$$frS_1(u_1) \cap frS_2(u_2) \neq \emptyset,$$

$$\Phi(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо } \text{int } S_1(u_1) \cap \text{int } S_2(u_2) \neq \emptyset,$$

де $\text{int } S$ – внутрішність множини S ;

clS – замикання множини S ;

frS – границя множини S .

Таким чином, характеристична властивість Φ -функції дозволяє говорити про перетин ($\Phi(u_1, u_2) < 0$), неперетин ($\Phi(u_1, u_2) > 0$) і дотик ($\Phi(u_1, u_2) = 0$) відповідних геометричних об'єктів.

З метою визначення відстаней між геометричними об'єктами було введено поняття нормалізованої Φ -функції.

Визначення 2.2 [201]. Φ -функція називається нормалізованою, якщо її значення дорівнюють евклідовим відстаням між об'єктами $S_1(u_1)$ і $S_2(u_2)$, за умови, що $(u_1, u_2) \in U$, $U = \{(u_1, u_2) \mid \text{int } S(u_1) \cap \text{int } S(u_2) = \emptyset\}$.

Враховуючи наведені вище визначення загальна модель оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній прямокутній області змінної довжини має такий вигляд.

Задача 1.

$$\min_W l(x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_N, y_N, \theta_N), \quad (2.1)$$

де W :

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N; \quad (2.2)$$

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_{0,r}, y_{0,r}, 0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (2.3)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_i, y_i, \theta_i, 0, 0, 0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

В моделі (2.1)÷(2.4) вираз (2.1) являє собою цільову функцію задачі, тобто необхідно знайти мінімум довжини зайнятої частини багатозв'язної області розміщення $S_0(0,0,0)$ з урахуванням обмежень на: взаємний неперетин неорієнтованих об'єктів розміщення $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$, з кусочно-нелінійними границями (2.1); неперетин неорієнтованих об'єктів розміщення $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$, з областями «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$, (2.3); належність об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$, області розміщення, причому $cS_0(0,0,0)$ – доповнення $S_0(0,0,0)$ до простору R^2 .

Особливості загальної моделі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній прямокутній області змінної довжини такі:

– цільова функція задачі (2.1) є неаналітичною, тобто неможливо записати аналітичну залежність довжини l зайнятої частини області $S_0(0,0,0)$ від параметрів розміщення об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$. Значення цільової функції (2.1) можна одержати лише тільки після розміщення заданих неорієнтованих об'єктів, тобто у результаті роботи певного алгоритму;

– обмеження моделі (2.2) та (2.3) є, у загальному випадку, кусочно-нелійними, а обмеження (2.4) – кусочно-лінійними;

– загальна кількість обмежень (2.2)÷(2.4) дорівнює $C_N^2 + N \cdot (1 + N_R)$;

– область припустимих розв'язків задачі визначається обмеженнями (2.1)÷(2.4) у багатовимірному просторі R^{3N+1} і є обмеженою та незв'язною.

Слід зазначити, що із загальної моделі оптимального розміщення

плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній прямокутній області змінної довжини (2.1)÷(2.4) впливають такі окремі.

Задача 2. Оптимальне розміщення неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, з кусочно-нелінійними границями та орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, з кусочно-нелінійними границями у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини $S_0(0, 0, 0)$. Модель у даному випадку матиме такий вид:

$$\min_W l(x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_{n_1}, y_{n_1}, \theta_{n_1}, x_{n_1+1}, y_{n_1+1}, \dots, x_N, y_N), \quad (2.5)$$

де W :

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_1 - 1; \quad j = i + 1, \dots, n_1; \quad (2.6)$$

$$\Phi(x_k, y_k, 0, x_t, y_t, 0) \geq 0; \quad k = n_1 + 1, \dots, N - 1; \quad t = k + 1, \dots, N; \quad (2.7)$$

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_k, y_k, 0) \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad k = n_1 + 1, \dots, N; \quad (2.8)$$

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_{0,r}, y_{0,r}, 0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (2.9)$$

$$\Phi(x_k, y_k, 0, x_{0,r}, y_{0,r}, 0) \geq 0, \quad k = n_1 + 1, \dots, N, \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (2.10)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_i, y_i, \theta_i, 0, 0) \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad (2.11)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_k, y_k, 0, 0, 0) \geq 0; \quad k = n_1 + 1, \dots, N. \quad (2.12)$$

У даній моделі цільова функція має вид (2.5), а область припустимих розв'язків визначається у просторі R^{2N+n_1+1} такою системою обмежень: умова (2.6) взаємного неперетину неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$, та $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$, $j = i + 1, \dots, n_1$; умова (2.7) взаємного неперетину орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N - 1$, та $S_t(x_t, y_t, 0)$, $t = k + 1, \dots, N$; умова (2.8) неперетину неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, та орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, з кусочно-нелінійними границями; умова (2.9) неперетину неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, з областями «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$; умова (2.10) неперетину орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, з областями «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$; умова (2.11) належності неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, області розміщення $S_0(0, 0, 0)$; умова (2.12) належності орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, області розміщення $S_0(0, 0, 0)$.

Слід зауважити, що обмеження (2.6)÷(2.10) є у загальному вигляді кусочно-нелійними, а (2.11) та (2.12) – кусочно-лінійними, причому їх загальна кількість дорівнює $C_{n_1}^2 + C_{N-n_1}^2 + n_1 \cdot (N - n_1) + N \cdot (1 + N_R)$.

Задача 3. Оптимальне розміщення орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини $S_0(0, 0, 0)$. Тоді модель оптимального розміщення запишемо так:

$$\min_W l(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N), \quad (2.13)$$

де W :

$$\Phi(x_k, y_k, 0, x_t, y_t, 0) \geq 0; \quad k = 1, \dots, N-1; \quad t = k+1, \dots, N; \quad (2.14)$$

$$\Phi(x_k, y_k, 0, x_{0,r}, y_{0,r}, 0) \geq 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad r = 1, \dots, N_R; \quad (2.15)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_k, y_k, 0, 0, 0) \geq 0; \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

У моделі (2.13)÷(2.16) цільова функція (2.13) є також неаналітичною, а область припустимих розв'язків являє собою обмежений та незв'язний геометричний об'єкт у просторі R^{2N+1} , тобто визначається за допомогою обмежень на: взаємний неперетин орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N-1$, та $S_t(x_t, y_t, 0)$, $t = k+1, \dots, N$ (2.14); неперетин орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, та областей «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$, (2.15); належності орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, області розміщення $S_0(0,0,0)$ (2.16).

В моделі (2.13)÷(2.16) обмеження (2.14) та (2.15) є, у загальному випадку, кусочно-нелінійними, а (2.16) – кусочно-лінійними. Загальна кількість обмежень (2.14)÷(2.16) становить $C_N^2 + N \cdot (1 + N_R)$.

Задача 4. Оптимальне розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$, у прямокутній однозв'язній області $S_0(0,0,0)$ змінної довжини. У даному випадку цільова функція має вигляд (2.1), а обмеження моделі записуються так:

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N; \quad (2.17)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_i, y_i, \theta_i, 0, 0, 0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

Обмеження (2.17) являє собою умову взаємного неперетину плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями, а обмеження (2.18) – умову належності неорієнтованих об'єктів прямокутній однозв'язній області змінної довжини. При цьому загальна кількість обмежень виду (2.17) та (2.18) становить $C_N^2 + N$.

Задача 5. Розглянемо оптимальне розміщення неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, з кусочно-нелінійними границями та орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, з кусочно-нелінійними границями у прямокутній однозв'язній області змінної довжини $S_0(0, 0, 0)$. Цільова функція у даному випадку записується у вигляді виразу (2.5), а обмеження мають такий вигляд

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_1 - 1; \quad j = i + 1, \dots, n_1; \quad (2.19)$$

$$\Phi(x_k, y_k, 0, x_t, y_t, 0) \geq 0; \quad k = n_1 + 1, \dots, N - 1; \quad t = k + 1, \dots, N; \quad (2.20)$$

$$\Phi(x_i, y_i, \theta_i, x_k, y_k, 0) \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad k = n_1 + 1, \dots, N; \quad (2.21)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_i, y_i, \theta_i, 0, 0, 0) \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad (2.22)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_k, y_k, 0, 0, 0, 0) \geq 0; \quad k = n_1 + 1, \dots, N. \quad (2.23)$$

Область припустимих розв'язків визначається у просторі R^{2N+n_1+1}

такою системою обмежень: умова (2.19) взаємного неперетину неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$, та $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$, $j = i + 1, \dots, n_1$; умова (2.20) взаємного неперетину орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N - 1$, та $S_t(x_t, y_t, 0)$, $t = k + 1, \dots, N$; умова (2.21) неперетину неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, та орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, з кусочно-нелінійними границями; умова (2.22) належності неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, області розміщення $S_0(0, 0, 0)$; умова (2.23) належності орієнтованих об'єктів $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = n_1 + 1, \dots, N$, області розміщення $S_0(0, 0, 0)$.

Слід зауважити, що обмеження (2.19)÷(2.21) є у загальному вигляді кусочно-нелінійними, а (2.22) та (2.23) – кусочно-лінійними, причому їх загальна кількість дорівнює $C_{n_1}^2 + C_{N-n_1}^2 + n_1 \cdot (N - n_1) + N$.

Задача 6. Розглянемо оптимальне розміщення орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_k(x_k, y_k, 0)$, $k = 1, \dots, N$, у прямокутній однозв'язній області змінної довжини $S_0(0, 0, 0)$. Цільова функція має вигляд (2.13), а обмеження записуються так:

$$\Phi(x_k, y_k, 0, x_t, y_t, 0) \geq 0; \quad k = 1, \dots, N - 1; \quad t = k + 1, \dots, N; \quad (2.24)$$

$$\Phi_{cS_0}(x_k, y_k, 0, 0, 0) \geq 0; \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.25)$$

У даному випадку обмеження (2.24) являє собою умову взаємного неперетину орієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями, а (2.25) – умову належності зазначених вище об'єктів області

розміщення, причому загальна кількість обмежень дорівнює $C_N^2 + N$. Слід зазначити, що задача 6 розв'язана у роботі [200].

Таким чином, розроблено загальну модель оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини. Дослідження особливостей побудованої загальної моделі виявило, що з неї випливають ще 5 окремих. Разом з тим, на теперішній час не існує методів розв'язання задач 1–5, що потребує проведення наукових досліджень у даному напрямі. Але для цього, перш за все, необхідно надати геометричну інтерпретацію обмеженням загальної моделі, що дозволить розробити обґрунтовані методи геометричного моделювання оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини.

2.2 Розробка методу геометричного моделювання перерізів поверхні дотику двох плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями

У роботі [200] розроблено метод побудови замкненого контуру дотику двох плоских орієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями. Разом з тим, задача оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях має такі особливості:

- кількість параметрів розміщення об'єкта S_i дорівнює 3, тобто $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$, а загальна кількість невідомих параметрів задачі – $3N + 1$;
- при зміні кута повороту θ_i власної системи координат об'єкта S_i на криволінійних елементах його границі будуть з'являтися точки екстремуму, що знаходяться всередині відповідної сторони.

Таким чином, зазначені особливості унеможливають застосування

розробленого у роботі [200] методу для опису дотику двох плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями. Слід зазначити, що геометрична інтерпретація умов дотику двох об'єктів розміщення $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ здійснюється за умови, що параметри розміщення одного з об'єктів фіксуються $S_i(0,0,0)$, а інший об'єкт $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ є рухомим. У даному випадку кількість параметрів розміщення рухомого об'єкта дорівнює 3, тому умова дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями в системі координат нерухомого об'єкта може бути представленою за допомогою поверхні. Зазначена поверхня задається перерізами, причому кожний переріз являє собою замкнений контур дотику двох об'єктів, побудований для відповідного значення кута повороту θ_j . Таке завдання поверхні обумовлено тим, що у кожному перерізі кількість вершин замкненого контуру, а також послідовність нелінійних та лінійних елементів границі контуру буде змінюватись, що унеможлиблює побудову неперервної поверхні дотику.

Таким чином, розглянемо загальну структуру методу побудови перерізів поверхні дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями:

1. Фіксація параметрів розміщення об'єкта $S_i(0,0,0)$, при цьому об'єкт $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ є рухомим. Завдання параметру дискретизації n_d , який визначає кількість перерізів поверхні дотику та значення кута повороту θ_j власної системи координат рухомого об'єкта.

2. Для кожного $\theta_{j,d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, $n_d > 0$, здійснюється

побудова множини фрагментів (враховуються можливі точки екстремуму

всередині сторін об'єктів) перерізу $\gamma_{ji,d+1}$ поверхні дотику об'єктів $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(0,0,0)$.

3. Формування множини перерізів $\gamma_{ji,d+1}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, поверхні дотику двох плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями.

Розглянемо побудову перерізу поверхні дотику об'єктів $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(0,0,0)$. Для цього, перш за все, необхідно сформувати множину фрагментів контуру дотику зазначених об'єктів для відповідного кута повороту θ_j , а потім, використовуючи одержані фрагменти, зібрати замкнений контур, що буде являти собою переріз поверхні дотику.

Нехай елемент границі об'єкта $S_i(0,0,0)$ заданий за допомогою фрагменту кривої другого порядку A_1A_2 , а елемент границі об'єкта $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ – за допомогою фрагмента кривої другого порядку B_1B_2 .

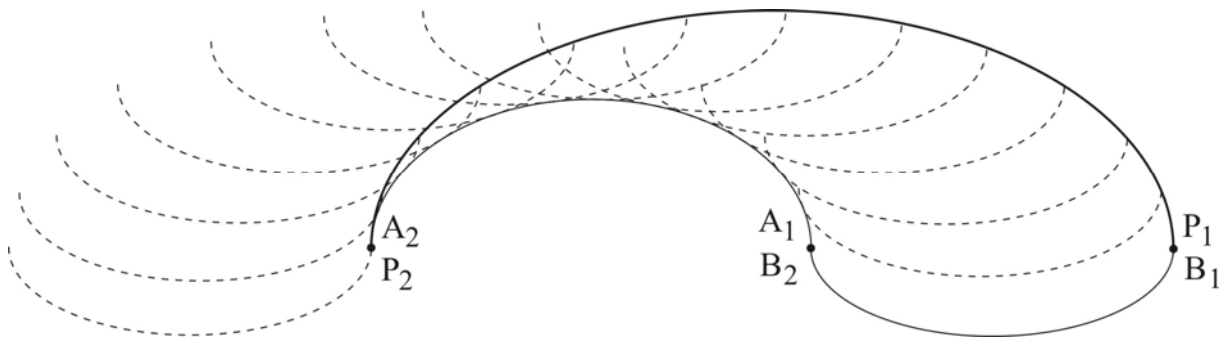
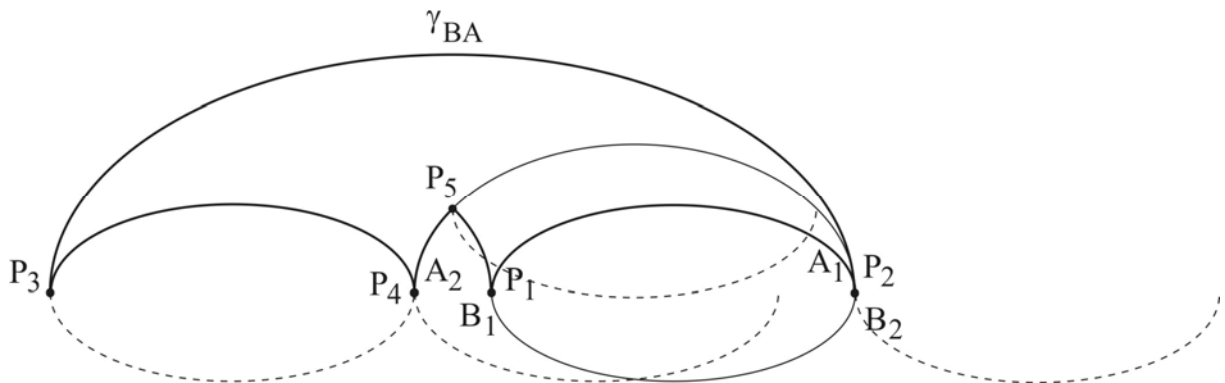


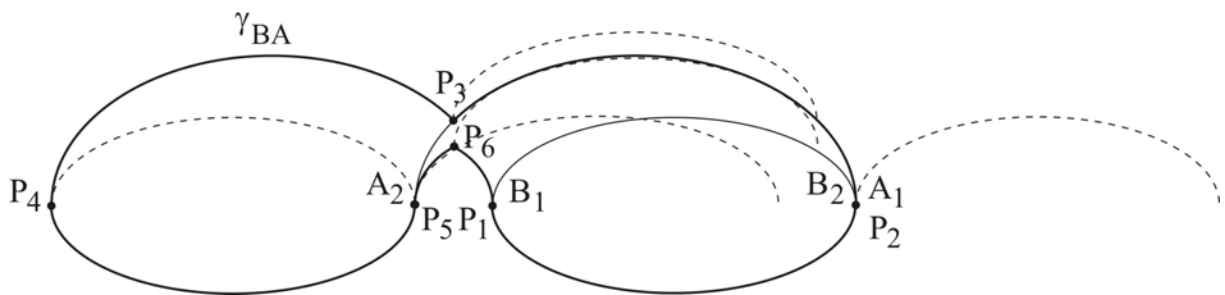
Рисунок 2.1 – Елементи границь фіксованого та рухомого об'єктів

Необхідно побудувати контур дотику, що утворюється під час руху сторони B_1B_2 відносно сторони A_1A_2 . Слід зауважити, що умови завершення побудови такого контуру не завжди є очевидними. Наприклад, якщо обрати за дану умову досягнення вершиною B_1 вершини A_2 , то у випадку, наведеному на рис. 2.1, така умова може бути виконаною. Разом з

тим, у випадку, наведеному на рис. 2.2, зазначена умова не виконується, оскільки з вершиною A_2 спочатку відбудеться суміщення вершини B_2 .



а)



б)

Рисунок 2.2 – Побудова контуру дотику γ_{BA} сторони рухомого об'єкта B_1B_2 відносно сторони нерухомого об'єкта A_1A_2

У зв'язку з цим, у даній роботі було запропоновано здійснювати побудову замкненого контуру дотику сторін рухомого та нерухомого об'єктів з кусочно-нелінійними границями. Так, на рис. 2.2 наведено приклад формування зазначеного контуру, при цьому на рис. 2.2 а) контур γ_{BA} складається з криволінійних фрагментів P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_5 , P_5P_1 , а на рис. 2.2 б) – з криволінійних фрагментів P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_5 , P_5P_6 ,

P_6P_1 .

Очевидно, що геометрична інтерпретація контуру γ_{BA} залежить від взаємного положення сторін B_1B_2 та A_1A_2 . Наприклад, на рис. 2.3 наведено побудову замкненого контуру дотику сторін двох неорієнтованих об'єктів для випадку, коли сторону B_1B_2 повернуто на відповідний кут θ_j .

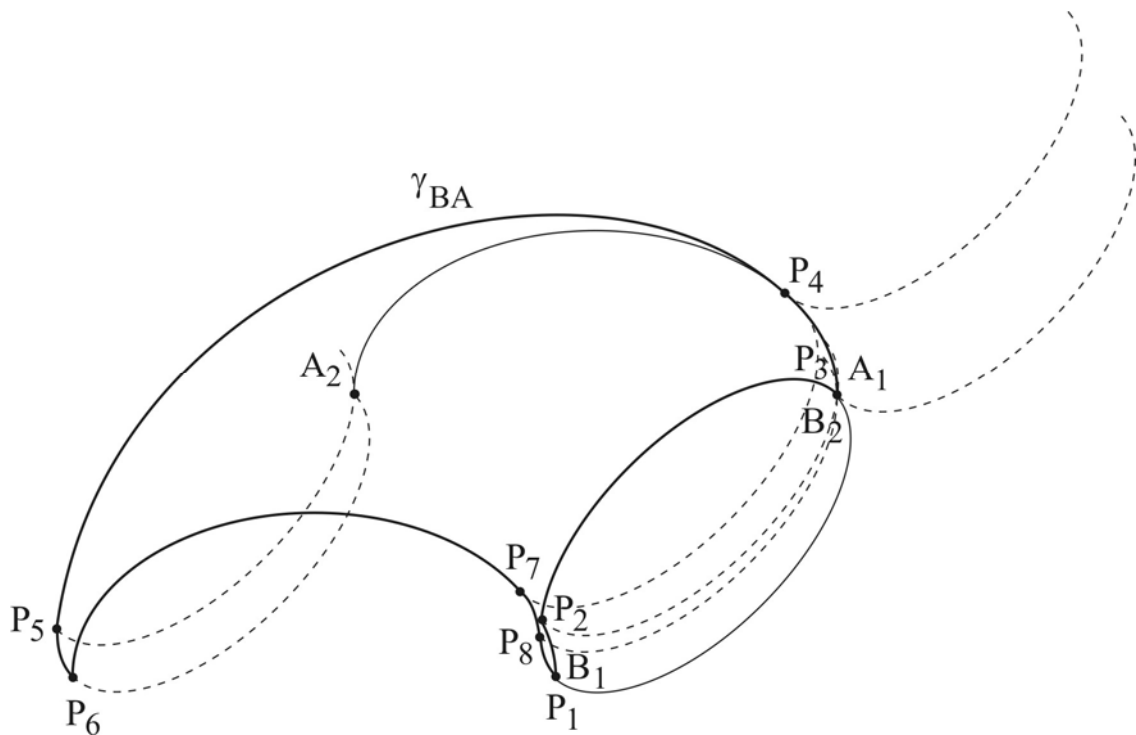


Рисунок 2.3 – Побудова контуру дотику γ_{BA} повернутої на кут θ_j сторони рухомого об'єкта B_1B_2 відносно сторони нерухомого об'єкта A_1A_2

Слід відзначити, що криволінійні елементи контуру γ_{BA} можуть бути представлені за допомогою виразу, аналогічного (1.6). Таким чином, здійснюється побудова контурів дотику кожної сторони рухомого об'єкта $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ відносно кожної сторони нерухомого об'єкта $S_i(0, 0, 0)$. Після одержання множини контурів дотику сторін об'єктів $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(0, 0, 0)$ здійснюється формування перерізу $\gamma_{ji,1}$ поверхні їх дотику

так, як це показано на рис. 2.4.

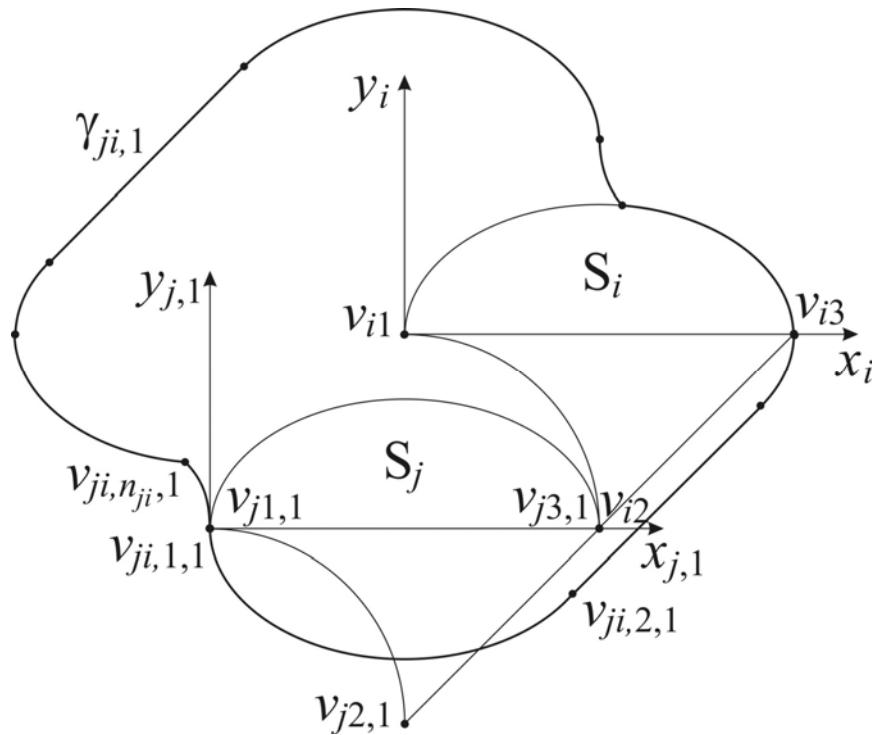


Рисунок 2.4 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,1}$ поверхні дотику об'єктів

$$S_j(x_j, y_j, \theta_j) \text{ та } S_i(0,0,0) \text{ при } \theta_{j,1} = 0$$

Необхідно відмітити, що переріз $\gamma_{ji,1}$ поверхні дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(0,0,0)$ побудовано у нерухомій системі координат $x_i 0 y_i$ при $\theta_{j,1} = 0$. Кількість вершин у перерізі дорівнює 10 і, при цьому, переріз містить 2 лінійних елементи границі.

Нехай параметр дискретизації $n_d = 8$. Тоді переріз $\gamma_{ji,2}$ поверхні дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(0,0,0)$ при $\theta_{j,2} = \frac{\pi}{4}$ наведено на рис. 2.5.

Очевидно, що кількість вершин у перерізі також дорівнює 10.

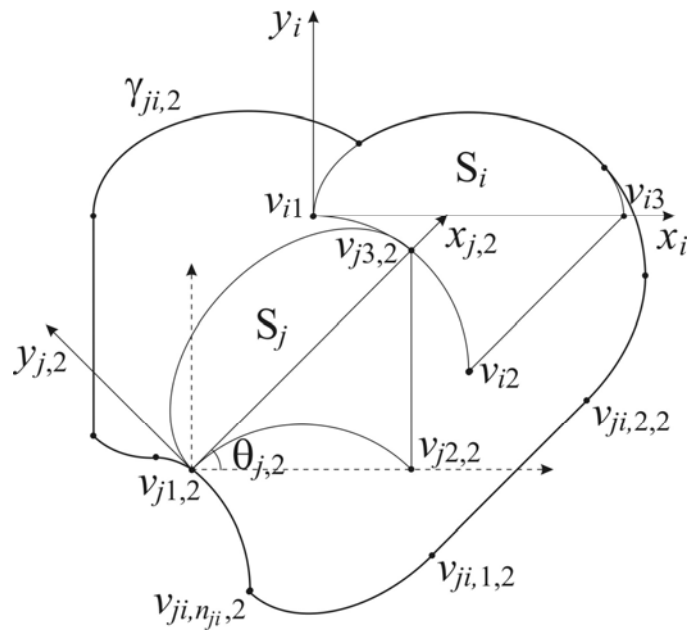


Рисунок 2.5 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,2}$ при $\theta_{j,2} = \frac{\pi}{4}$

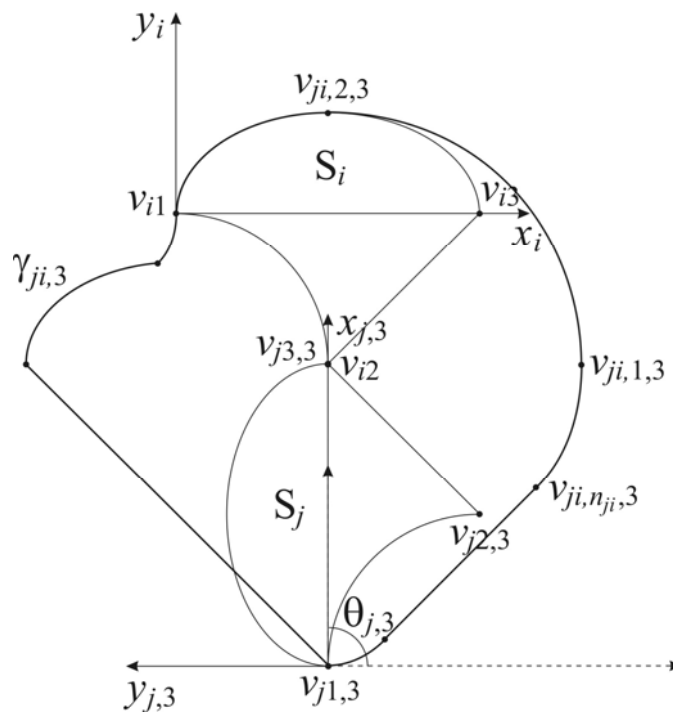


Рисунок 2.6 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,3}$ при $\theta_{j,3} = \frac{\pi}{2}$

Очевидно, що при $\theta_{j,3} = \frac{\pi}{2}$ кількість вершин у перерізі $\gamma_{ji,3}$ буде

дорівнювати 8 (рис. 2.6) і, при цьому, змінилася послідовність криволінійних та прямолінійних елементів границь замкненого контуру порівняно із випадком, наведеним на рис. 2.5.

На рис. 2.7 наведено переріз $\gamma_{ji,4}$ поверхні дотику рухомого $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та нерухомого $S_i(0,0,0)$ об'єктів при $\theta_{j,4} = \frac{3\pi}{4}$.

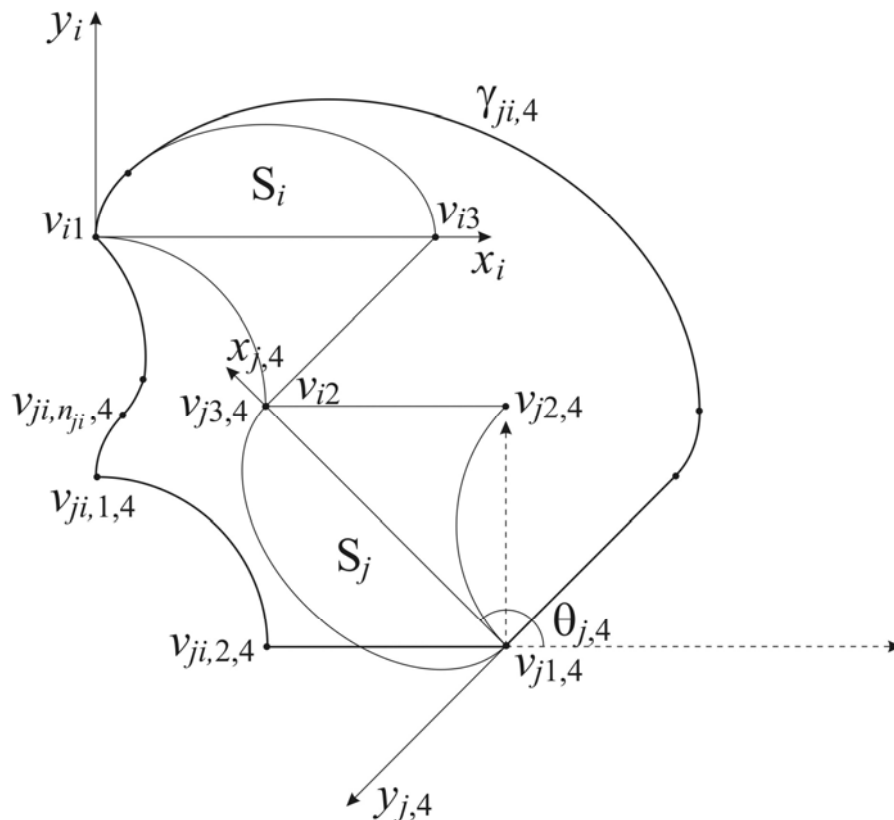


Рисунок 2.7 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,4}$ поверхні дотику об'єктів

$$S_j(x_j, y_j, \theta_j) \text{ та } S_i(0,0,0) \text{ при } \theta_{j,4} = \frac{3\pi}{4}$$

У даному випадку кількість вершин у перерізі $\gamma_{ji,4}$ дорівнює 9, причому два лінійних фрагменти контуру утворюють суміжні сторони.

На рис. 2.8 та 2.9 наведено, відповідно, перерізи $\gamma_{ji,5}$ та $\gamma_{ji,6}$ поверхні дотику двох плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з

кусочно-нелінійними границями при $\theta_{j,5} = \pi$ та $\theta_{j,6} = \frac{5\pi}{4}$.

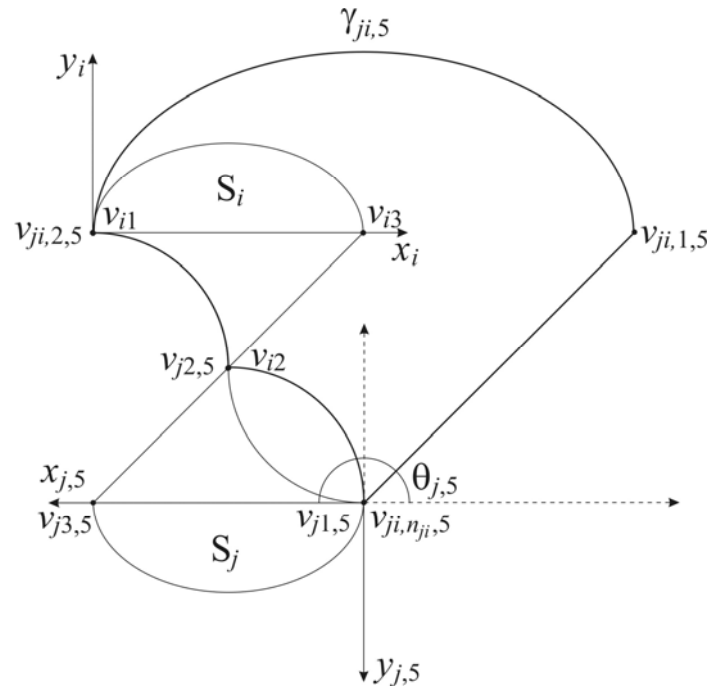


Рисунок 2.8 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,5}$ при $\theta_{j,5} = \pi$

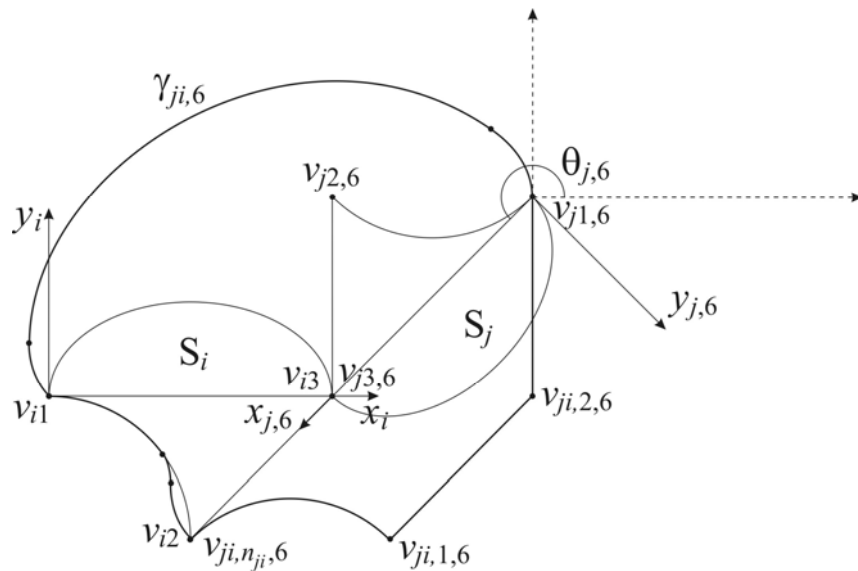


Рисунок 2.9 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,6}$ при $\theta_{j,6} = \frac{5\pi}{4}$

Очевидно, що кількість вершин у перерізі $\gamma_{ji,5}$ дорівнює 4 при

одному лінійному елементі границі замкненого контуру дотику об'єктів.

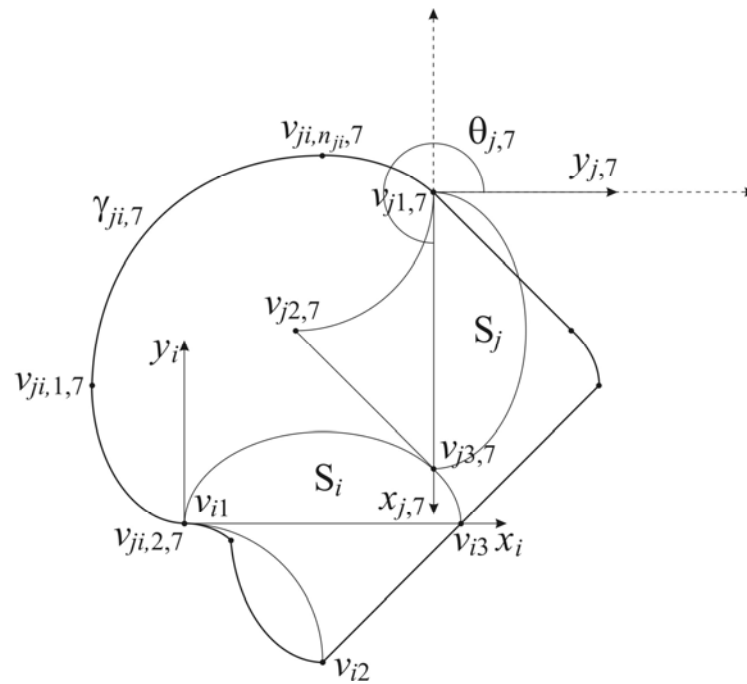


Рисунок 2.10 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,7}$ при $\theta_{j,7} = \frac{3\pi}{2}$

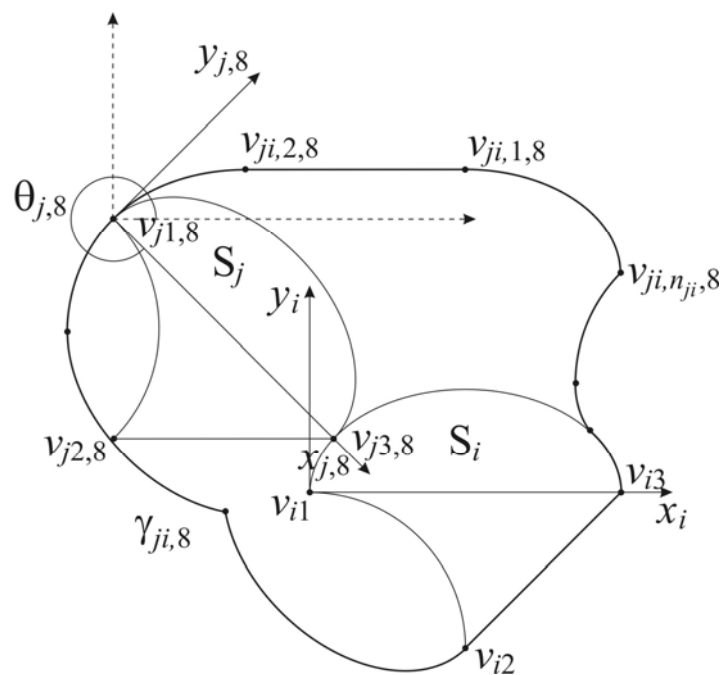


Рисунок 2.11 – Побудова перерізу $\gamma_{ji,8}$ при $\theta_{j,8} = \frac{7\pi}{4}$

На рис. 2.10 та 2.11 наведено замкнені контури дотику неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями при, відповідно, $\theta_{j,7} = \frac{3\pi}{2}$ та $\theta_{j,8} = \frac{7\pi}{4}$.

Остаточно фрагмент поверхні дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(0, 0, 0)$, представленої за допомогою перерізів, наведено на рис. 2.12.

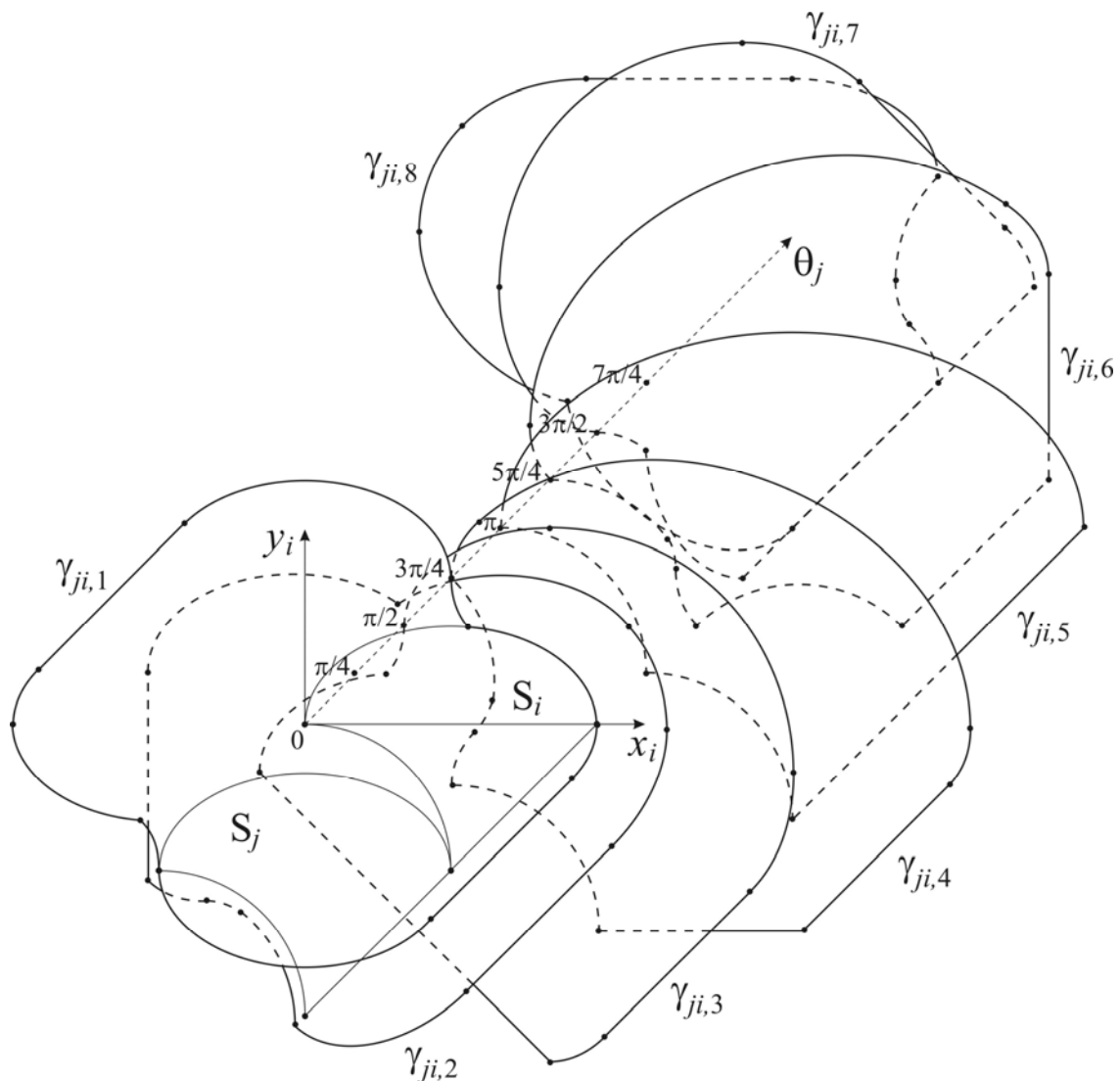


Рисунок 2.12 – Множина перерізів $\gamma_{ji,d+1}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, поверхні дотику двох плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями для $n_d = 8$

Таким чином, можна зробити висновок, що поверхня дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями має яружний характер, при цьому дана поверхня є геометричною інтерпретацією обмежень (2.2) загальної моделі оптимального розміщення зазначених об'єктів у багатозв'язних областях.

Розглянемо геометричну інтерпретацію обмежень (2.3) та (2.4) загальної моделі, тобто здійснимо побудову перерізів поверхні, що описує дотик плоского неорієнтованого геометричного об'єкта з кусочно-нелінійними границями та прямокутної багатозв'язної області змінної довжини.

2.3 Розробка методу геометричного моделювання перерізів поверхні дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та прямокутної багатозв'язної області розміщення змінної довжини

Для того, щоб розробити метод геометричного моделювання перерізів поверхні дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та прямокутної багатозв'язної області розміщення змінної довжини розглянемо, перш за все, побудову перерізів поверхні дотику зазначених об'єктів та прямокутної однозв'язної області змінної довжини.

Нехай параметр дискретизації кута повороту θ_i неорієнтованого геометричного об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ з кусочно-нелінійними границями $n_d = 8$. Тоді переріз $\gamma_{i0,1}$ поверхні дотику даного об'єкта та прямокутної однозв'язної області змінної довжини $S_0(0, 0, 0)$, що відповідає $\theta_{i,1} = 0$, наведено на рис. 2.13.

На рис. 2.14 наведено переріз $\gamma_{i0,2}$ поверхні дотику плоского неорієнтованого геометричного об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ з кусочно-

нелінійними границями та області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,2} = \frac{\pi}{4}$.

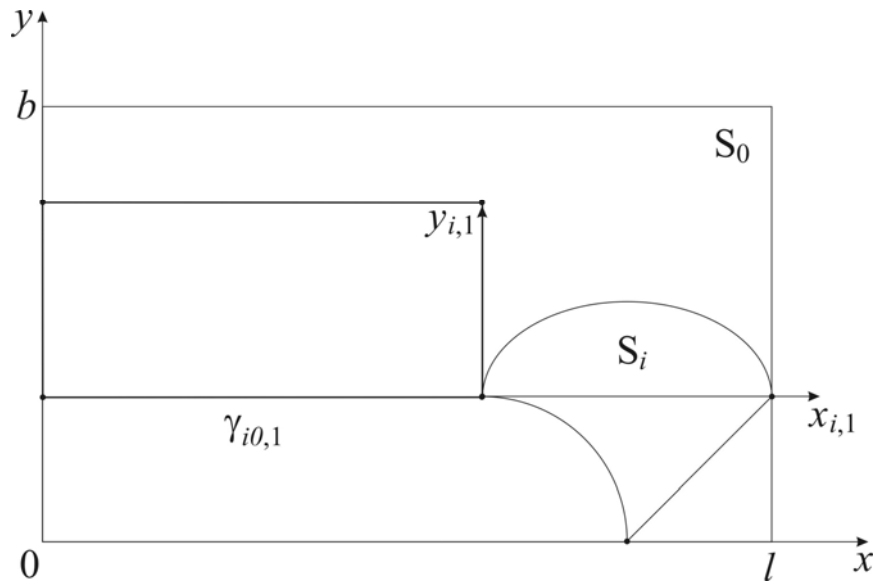


Рисунок 2.13 – Побудова перерізу $\gamma_{i0,1}$ при $\theta_{i,1} = 0$

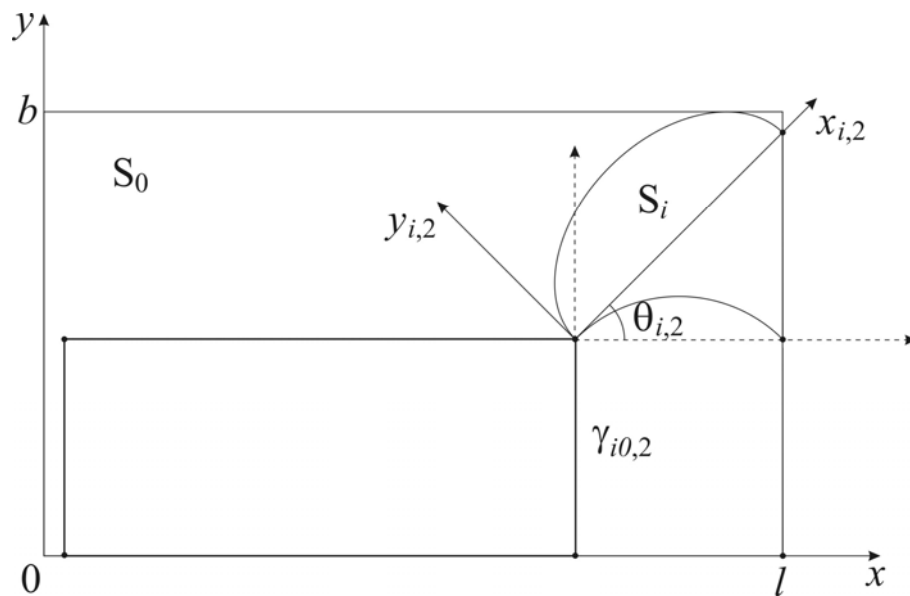


Рисунок 2.14 – Побудова перерізу $\gamma_{i0,2}$ при $\theta_{i,2} = \frac{\pi}{4}$

На рис. 2.15 та 2.16 наведено приклади побудови перерізів $\gamma_{i0,3}$ та

$\gamma_{i0,4}$ при, відповідно, $\theta_{i,3} = \frac{\pi}{2}$ та $\theta_{i,4} = \frac{3\pi}{4}$.

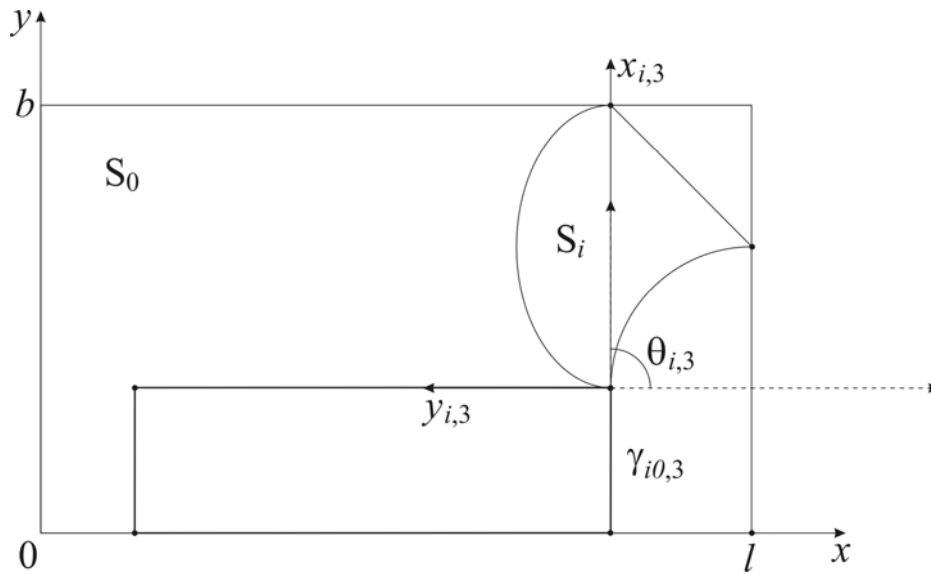


Рисунок 2.15 – Побудова перерізу $\gamma_{i0,3}$ при $\theta_{i,3} = \frac{\pi}{2}$

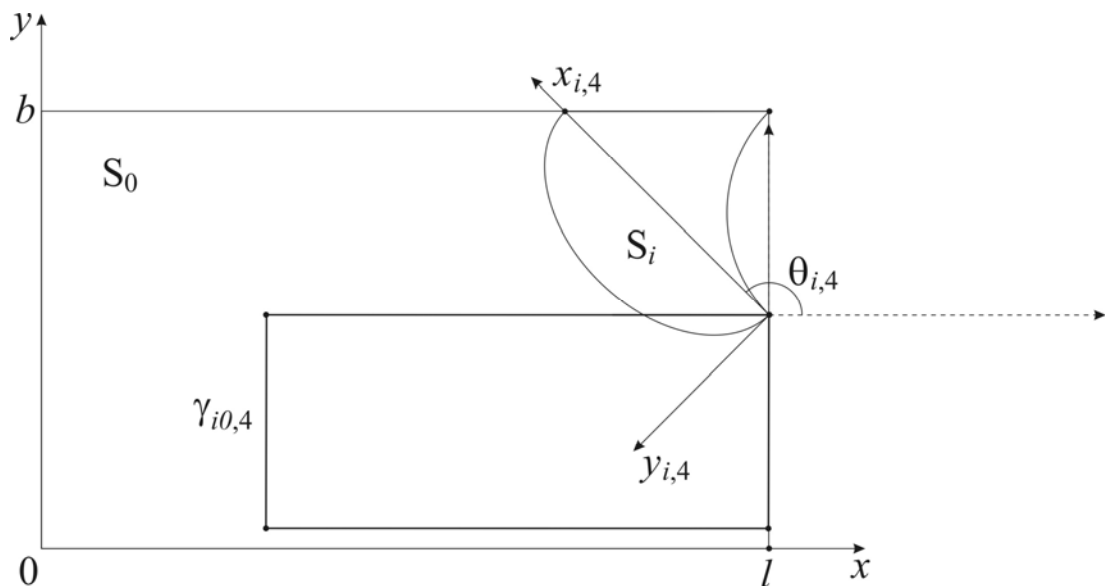


Рисунок 2.16 – Побудова перерізу $\gamma_{i0,4}$ при $\theta_{i,4} = \frac{3\pi}{4}$

Аналогічно можна побудувати перерізи для інших значень кута

повороту об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$. Очевидно, що перерізи поверхні дотику неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та прямокутної однозв'язної області змінної довжини являють собою прямокутники незалежно від значення кута повороту θ_i . Тоді множина перерізів, за допомогою яких представлено поверхню дотику об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та області $S_0(0, 0, 0)$, має вигляд, наведений на рис. 2.17.

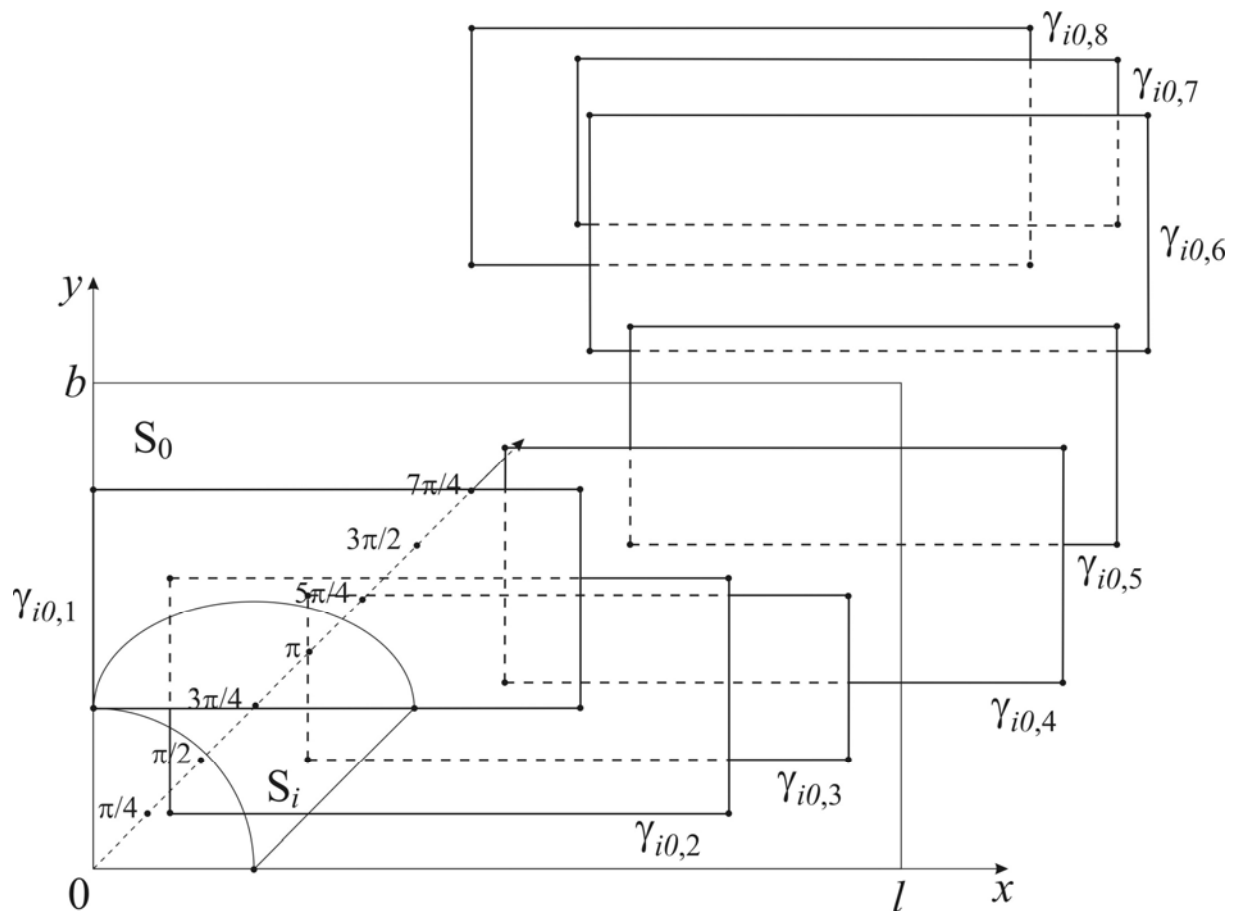


Рисунок 2.17 – Множина перерізів $\gamma_{i0,d+1}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, поверхні дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та області розміщення для $n_d = 8$

Якщо область розміщення $S_0(0, 0, 0)$ є багатозв'язною, то побудова перерізу поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ з кусочно-

нелінійними границями з даною областю здійснюється так.

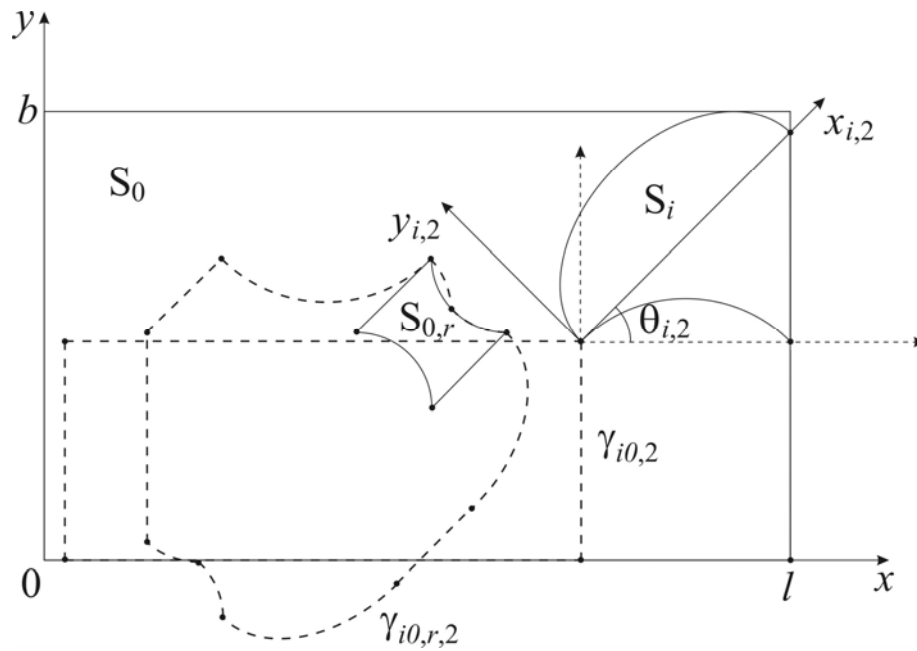


Рисунок 2.18 – Побудова перерізу поверхні дотику об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та області розміщення $S_0(0, 0, 0)$ для відповідного значення $\theta_{i,d+1}$ з урахуванням області «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$

Перш за все, необхідно побудувати контур дотику об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ з однозв'язною областю (рис. 2.18, контур $\gamma_{i0,2}$). Наступний крок – побудова контуру дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та області «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$ так, як це наведено у п. 2.2 (рис. 2.18, контур $\gamma_{i0,r,2}$). Таким чином, з одного боку початок локальної системи координат об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ має знаходитись всередині або на границі контуру $\gamma_{i0,2}$, а з іншого боку – зовні або на границі контуру $\gamma_{i0,r,2}$. Це призводить до того, що переріз поверхні дотику об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ утворюється шляхом перетину контурів $\gamma_{i0,2}$ та $\gamma_{i0,r,2}$ (рис. 2.19), причому початок локальної системи координат

неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ має належати незв'язній області, компонентами зв'язності якої є $\gamma_{i0,1,2}$ та $\gamma_{i0,2,2}$.

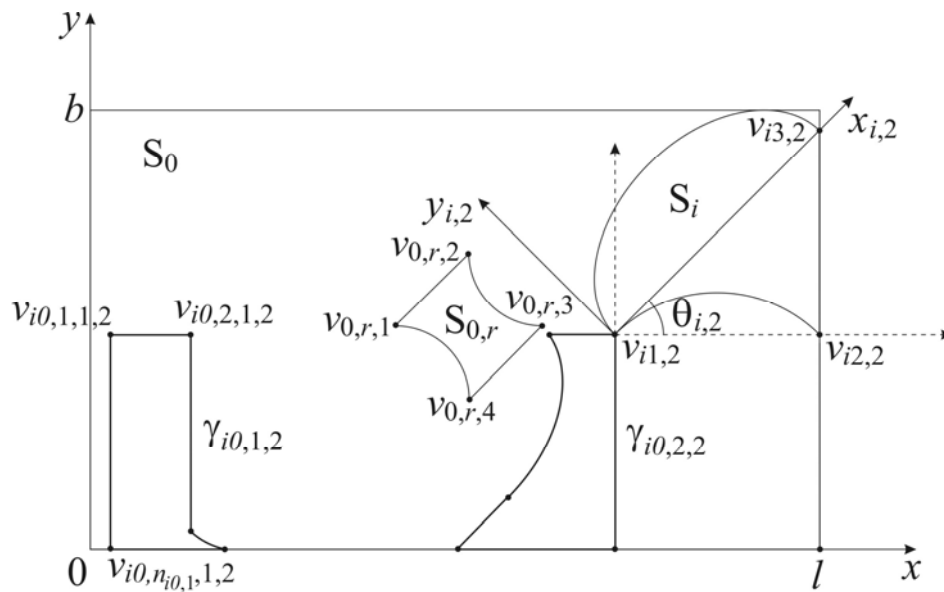


Рисунок 2.19 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$

Нехай параметр дискретизації кута повороту θ_i неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ з кусочно-нелінійними границями $n_d = 8$. Тоді переріз поверхні дотику об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та прямокутної багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ змінної довжини при $\theta_{i,1} = 0$ має вигляд, наведений на рис. 2.20.

Очевидно, що даний переріз являє собою незв'язну область з трьома компонентами зв'язності $\gamma_{i0,1,1}$, $\gamma_{i0,2,1}$, $\gamma_{i0,3,1}$. Слід відзначити, що дана незв'язна область також має кусочно-нелінійні границі.

На рис. 2.21 наведено переріз поверхні дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та області

$S_0(0, 0, 0)$ для $\theta_{i,3} = \frac{\pi}{2}$.

Можна зробити висновок, що одержано незв'язну область з двома компонентами зв'язності $\gamma_{i0,1,3}$ та $\gamma_{i0,2,3}$.

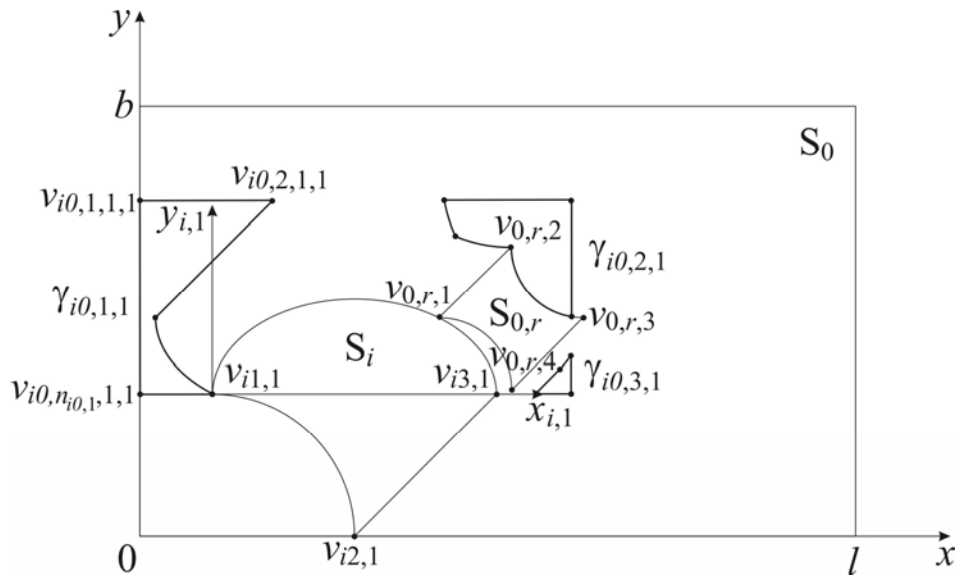


Рисунок 2.20 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,1} = 0$

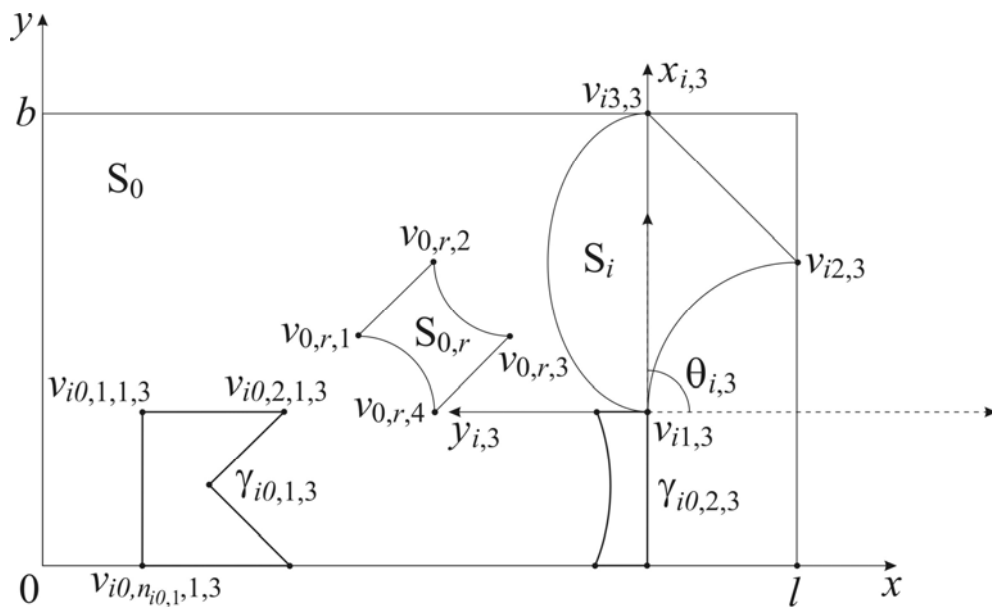


Рисунок 2.21 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,3} = \frac{\pi}{2}$

На рис. 2.22 та 2.23 наведено побудову перерізів поверхні дотику об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_0(0, 0, 0)$, відповідно, для $\theta_{i,4} = \frac{3\pi}{4}$ та $\theta_{i,5} = \pi$.

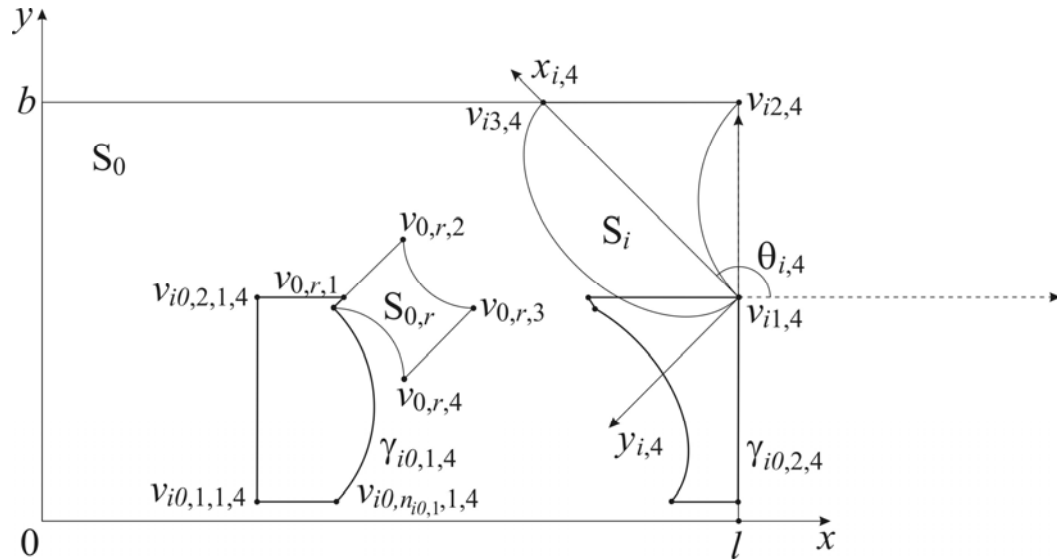


Рисунок 2.22 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,4} = \frac{3\pi}{4}$

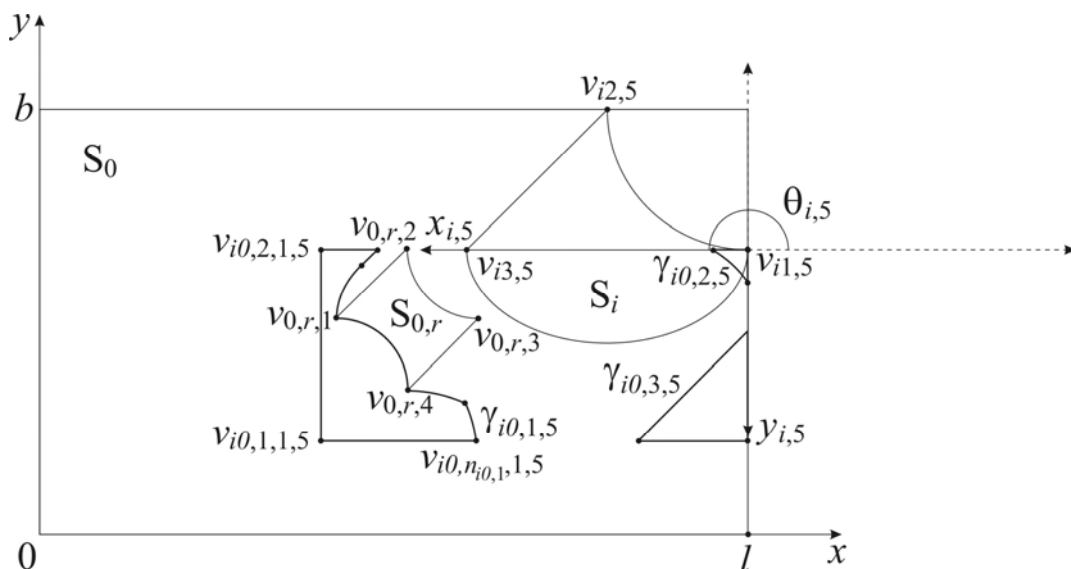


Рисунок 2.23 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,5} = \pi$

На рис. 2.24 та 2.25 наведено побудову перерізів дотику об'єктів

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_0(0, 0, 0)$, відповідно, для $\theta_{i,6} = \frac{5\pi}{4}$ та $\theta_{i,7} = \frac{3\pi}{2}$.

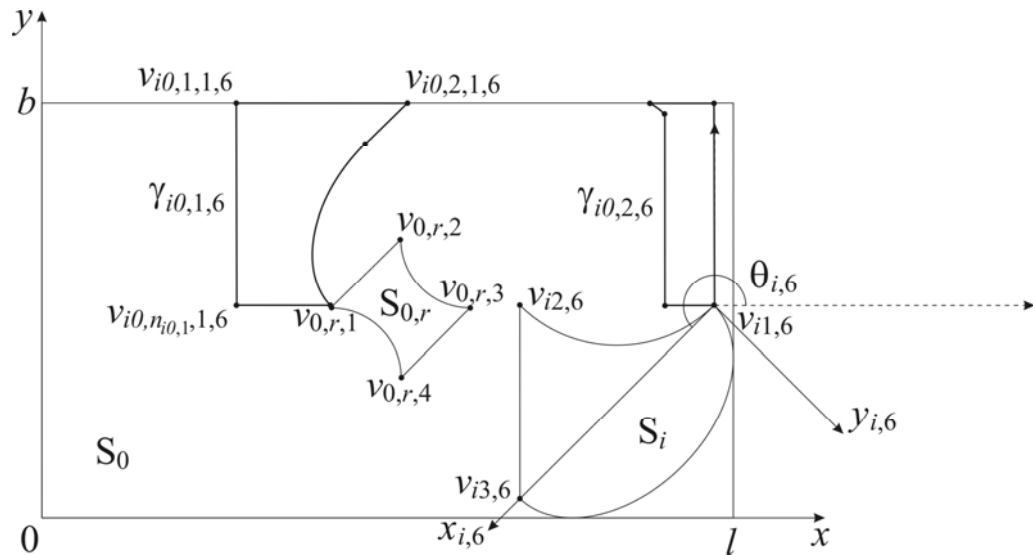


Рисунок 2.24 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,6} = \frac{5\pi}{4}$

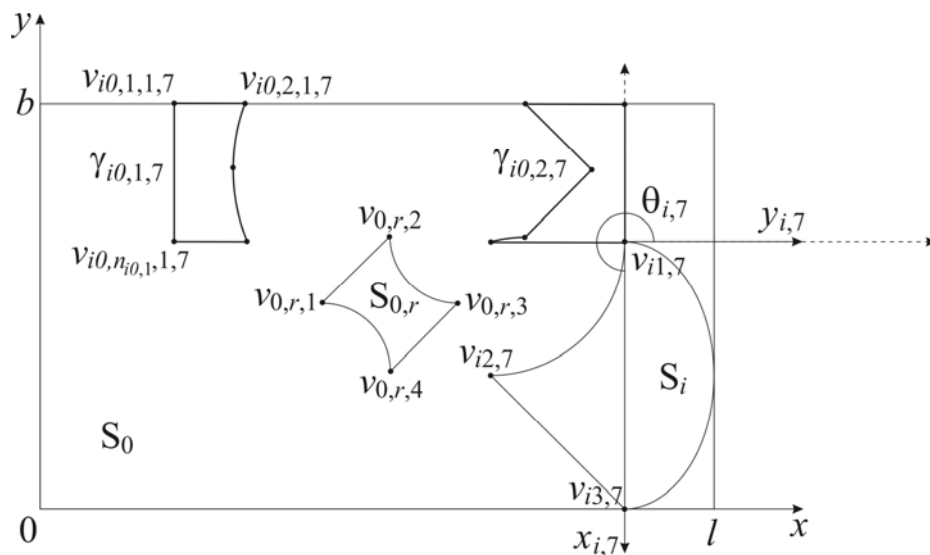


Рисунок 2.25 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,7} = \frac{3\pi}{2}$

На рис. 2.26 наведено побудову перерізу поверхні дотику плоского неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ з кусочно-нелінійними границями та прямокутної багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ змінної довжини при

$$\theta_{i,8} = \frac{7\pi}{4}.$$

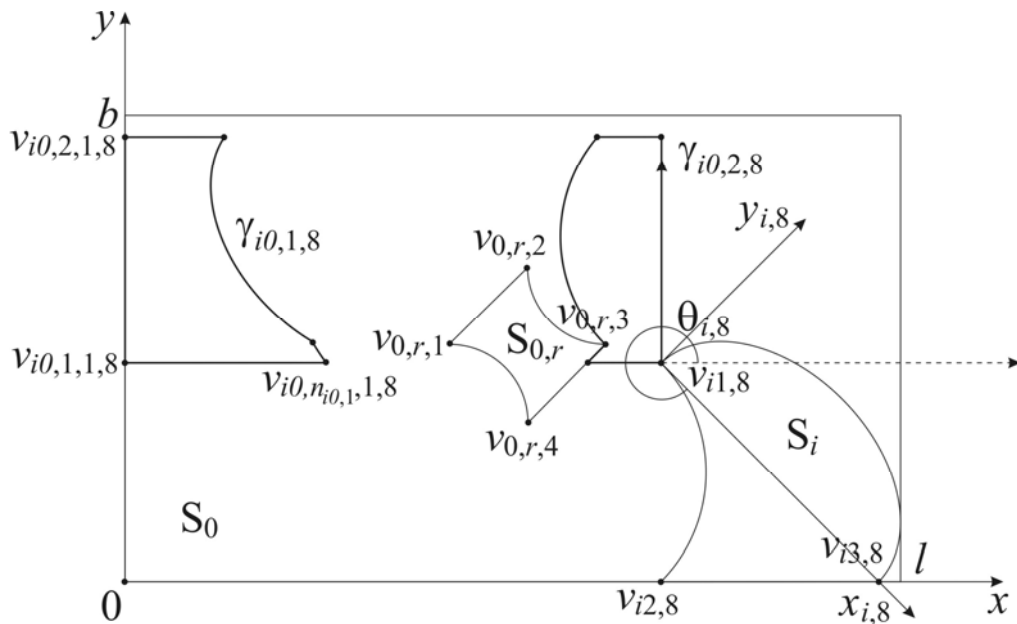


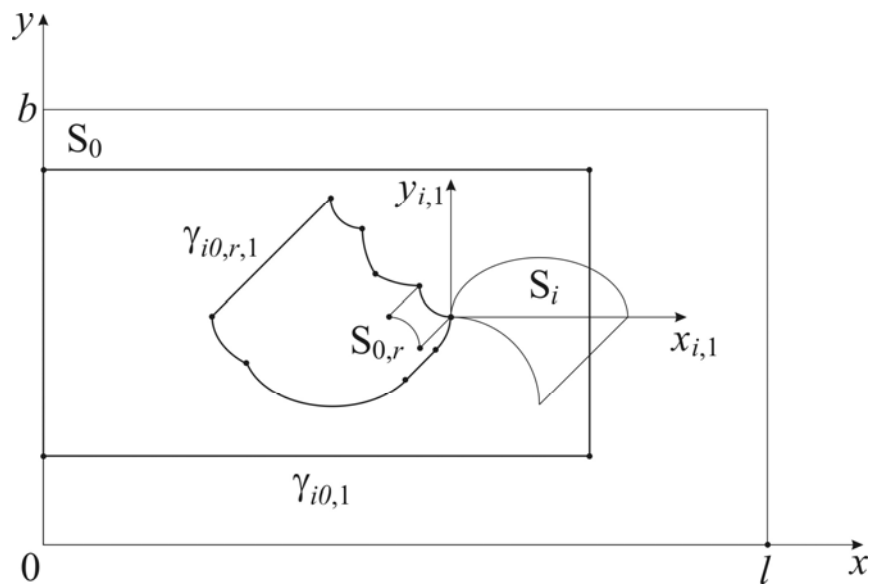
Рисунок 2.26 – Переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та багатозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$ при $\theta_{i,8} = \frac{7\pi}{4}$

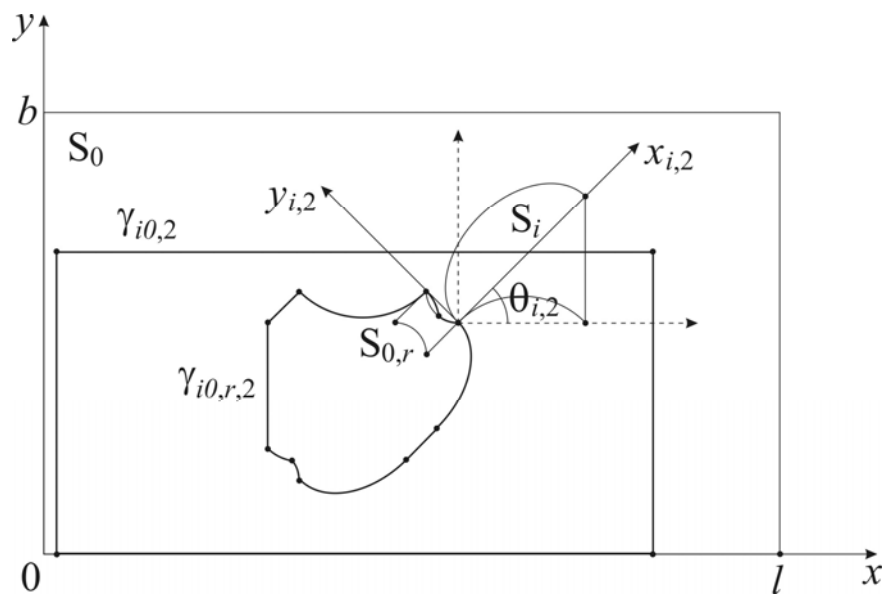
Можна зробити висновок, що поверхня дотику об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_0(0, 0, 0)$ є незв'язною, причому кількість компонент зв'язності буде змінюватись у різних перерізах.

Разом з тим, існують також інші приклади побудови поверхонь дотику плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями та прямокутних багатозв'язних областей змінної довжини.

Так, на рис. 2.27 наведено побудову перерізів багатозв'язної поверхні дотику об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_0(0, 0, 0)$ для різних кутів повороту неорієнтованого об'єкта.



a)

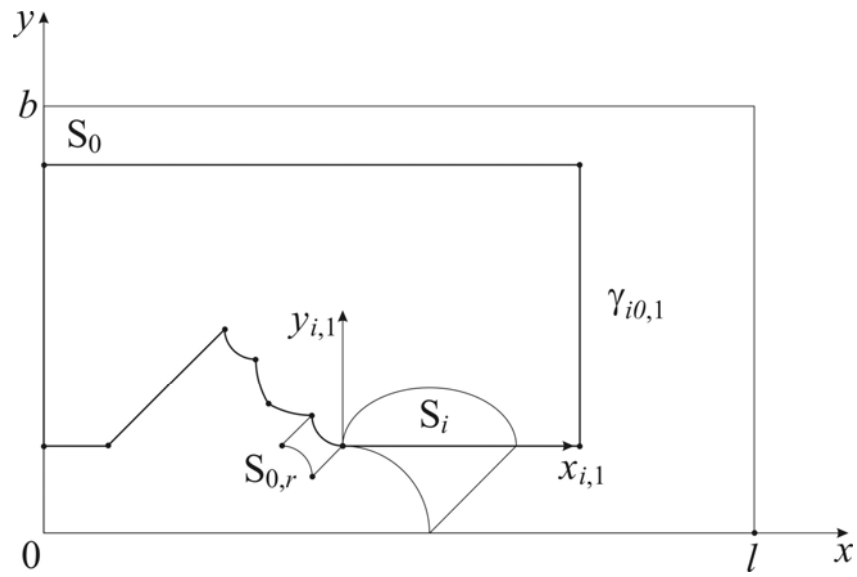


б)

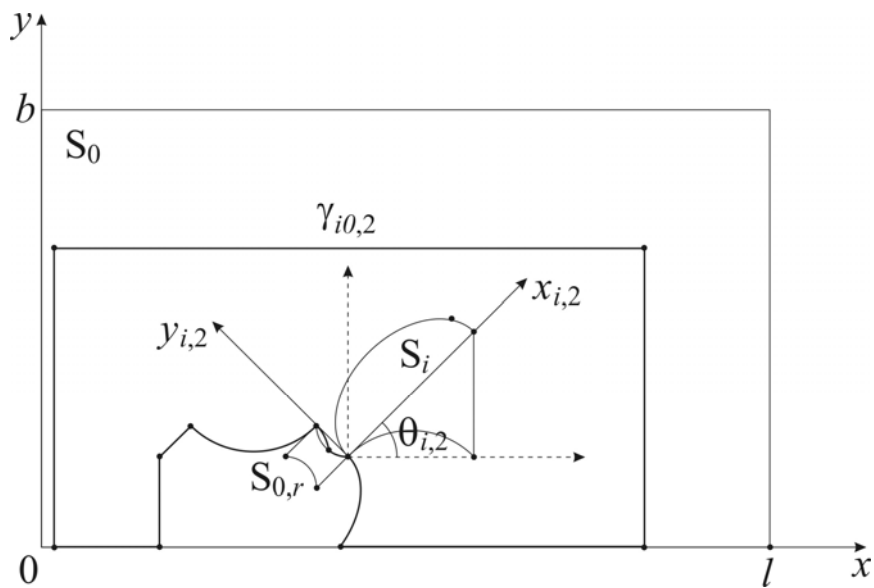
Рисунок 2.27 – Перерізи багатозв'язної поверхні дотику $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_0(0, 0, 0)$

На рис. 2.28 наведено приклад побудови перерізів однозв'язної поверхні дотику об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_0(0, 0, 0)$ для різних кутів

повороту неорієнтованого об'єкта.



а)



б)

Рисунок 2.28 – Перерізи однозв'язної поверхні дотику $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_0(0, 0, 0)$

Проведені дослідження дозволили сформулювати такі твердження та

властивість.

Твердження 2.1. При $n_d \rightarrow \infty$ множина перерізів перетворюється у неперервну поверхню дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями (неорієнтованого об'єкта та області розміщення).

Твердження 2.2. Поверхня дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та однозв'язної області розміщення є однозв'язною. Поверхня дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та багатозв'язної області розміщення може бути, у залежності від кількості, параметрів розміщення та метричних характеристик областей «заборони», однозв'язною, багатозв'язною або незв'язною, причому кількість компонент зв'язності у різних перерізах може змінюватись.

Сформульоване твердження доводиться за побудовою.

Властивість 2.1. У загальному випадку, при відсутності фіксації параметрів розміщення неорієнтованих об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$, їх дотик може бути представлений гіперповерхнею у просторі R^6 .

Слід відзначити, що одержані перерізи поверхні дотику плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями та прямокутної багатозв'язної області розміщення змінної довжини являють собою геометричну інтерпретацію обмежень (2.3) та (2.4) оптимізаційної моделі і дозволяють розробити обґрунтовані методи оптимального розміщення вказаного класу об'єктів у заданих областях.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ПЛОСКИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З КУСОЧНО-НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

Задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів відносяться до класу задач комбінаторної оптимізації, для розв'язання яких використовуються [202, 203]:

– ітераційні методи та алгоритми, що ґрунтуються на переборі варіантів;

– методи та алгоритми, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації. Їх ще називають евристичними, такими, в яких моделюються правила вибору оптимального рішення людини в ручному режимі [202].

До ітераційних методів та алгоритмів відносяться як універсальні методи математичного програмування, так і спеціальні, які ураховують специфіку проблеми (точні та наближені). Це методи лінійного, цілочислового, динамічного, нелінійного, квадратичного, стохастичного програмування, градієнтні методи, метод гілок та меж, послідовний аналіз варіантів (оптимізація за групами змінних), методи локального пошуку, метод імітації відпалу та алгоритми: генетичні, гібридні, тощо [202].

До групи методів та алгоритмів, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації відносяться метод найближчого сусіда, «жадібний» алгоритм, метод північно-західного кута, деякі алгоритми розв'язання задач із штучного інтелекту [202]. Як правило, відомі методи та алгоритми, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації, ефективні за швидкодією, але результат розв'язання при цьому може бути далекий від оптимального.

Що стосується задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних

багатозв'язних областях змінної довжини, то для їх розв'язання необхідно розробити методи, в основі яких лежать наведені вище і, при цьому, врахувати особливості поставленої задачі.

У зв'язку з цим, розглянемо спочатку метод гілок та меж, який дозволяє одержати глобальний екстремум цільової функції задачі.

3.1 Розробка модифікованого методу гілок та меж для оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях

Суть методу полягає в упорядкованому переборі варіантів і розгляді лише тих з них, які виявляються за певними ознаками корисними для знаходження оптимального розв'язку.

Для реалізації методу гілок та меж необхідно побудувати дерево розв'язків, за яким аналізуються припустимі варіанти розміщення геометричних об'єктів у заданій області і здійснюється пошук глобального екстремуму цільової функції (2.1).

Кількість рівнів дерева розв'язків у задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини дорівнює $3N + 1$, тобто кількості незалежних змінних задачі (x_i, y_i, θ_i) , $i = 1, \dots, N, l$.

Кожен рівень дерева розв'язків відповідає вказаній незалежній змінній задачі, при цьому на певному рівні записуються рівняння, до яких входить дана незалежна змінна. Слід зазначити, що рівняння, які знаходяться на рівнях дерева розв'язків, описують елементи границь замкнених контурів, що утворюються у відповідних перерізах поверхонь дотику кожної пари неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями, а також поверхонь дотику неорієнтованих об'єктів та багатозв'язної області розміщення.

Таким чином, дерево розв'язків для задачі 1 (п. 2.1) має вигляд,

наведений на рис. 3.1.

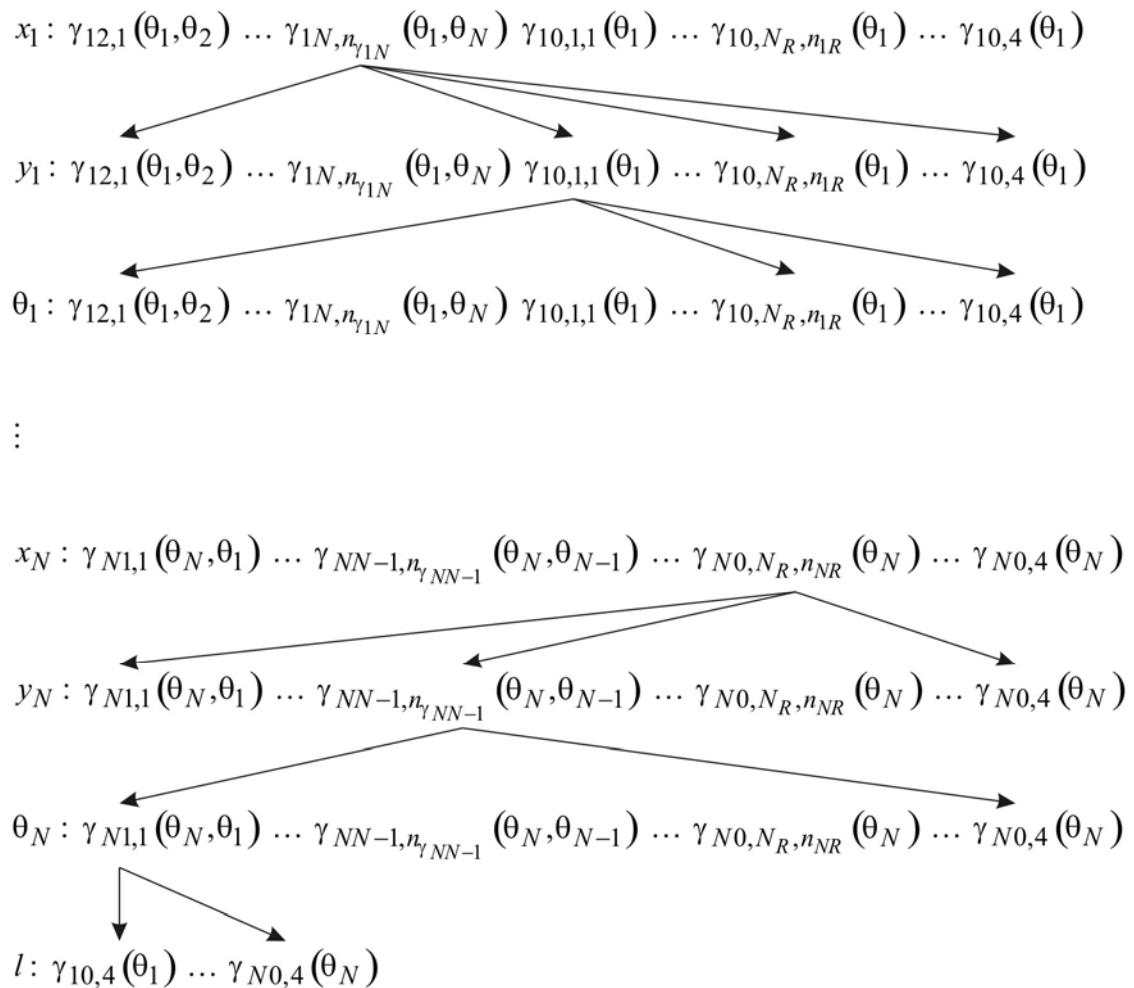


Рисунок 3.1 – Дерево розв'язків для задачі 1

Компонентами даного дерева розв'язків є:

– $\gamma_{ji,k}(\theta_j, \theta_i)$ – елемент границі замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, $i \neq j$, причому $k = 1, \dots, n_{\gamma_{ji}}$, де $n_{\gamma_{ji}}$ – кількість сторін замкненого контуру γ_{ji} ;

– $\gamma_{i0,r,m}(\theta_i)$ – елемент границі замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$,

та області «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$, причому $m = 1, \dots, n_{ir}$, де n_{ir} – кількість сторін замкненого контуру $\gamma_{i0,r}$;

– $\gamma_{i0,q}(\theta_i)$ – елемент границі замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$, та однозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$, причому $q = 1, \dots, 4$.

Повний перебір гілок дерева розв'язків, що наведене на рис. 3.1, дозволить визначити глобальний екстремум цільової функції (2.1). Для одержання припустимих значень змінних задачі необхідно розв'язати систему з $3N + 1$ рівнянь (як лінійних, так і нелінійних), причому фрагмент контуру $\gamma_{ji,k}(\theta_j, \theta_i)$ описується рівнянням виду (3.1), $\gamma_{i0,r,m}(\theta_i)$ – рівнянням виду (3.2), $\gamma_{i0,q}(\theta_i)$ – рівнянням виду (3.3).

$$\begin{aligned} & a_{ji,kk+1,1}(\theta_j, \theta_i)x^2 + a_{ji,kk+1,2}(\theta_j, \theta_i)xy + a_{ji,kk+1,3}(\theta_j, \theta_i)y^2 + \\ & + a_{ji,kk+1,4}(\theta_j, \theta_i)x + a_{ji,kk+1,5}(\theta_j, \theta_i)y + a_{ji,kk+1,6}(\theta_j, \theta_i) = 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & a_{i0,r,mm+1,1}(\theta_i)x^2 + a_{i0,r,mm+1,2}(\theta_i)xy + a_{i0,r,mm+1,3}(\theta_i)y^2 + \\ & + a_{i0,r,mm+1,4}(\theta_i)x + a_{i0,r,mm+1,5}(\theta_i)y + a_{i0,r,mm+1,6}(\theta_i) = 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$a_{i0,q}(\theta_i)x + b_{i0,q}(\theta_i)y + c_{i0,q}(\theta_i) = 0; \quad (3.3)$$

де $a_{ji,kk+1,t}(\theta_j, \theta_i)$, $t = 1, \dots, 6$ – параметри кривої другого порядку (рис. 3.2), що описує фрагмент між k та $(k+1)$ вершинами замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику об'єктів $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N-1$, $j = i+1, \dots, N$;

$a_{i0,r,mm+1,t}(\theta_i)$, $t = 1, \dots, 6$ – параметри кривої другого порядку, що описує фрагмент між m та $(m+1)$ вершинами замкненого контуру у

відповідному перерізі поверхні дотику об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, N$, та області «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$;

$q = 1, \dots, 4$.

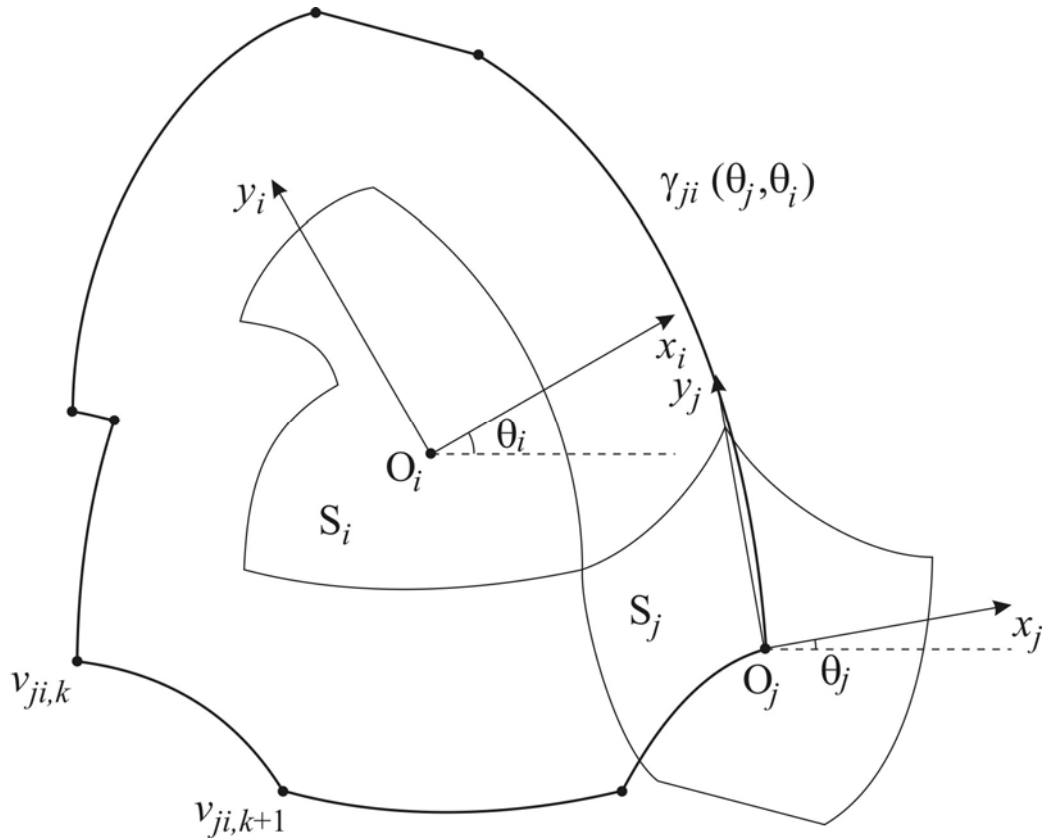


Рисунок 3.2 – Переріз поверхні дотику об'єктів

$S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$

Неприпустимі гілки дерева розв'язків відсікаються за допомогою відповідних правил.

Верхня оцінка складності методу (кількості систем рівнянь, які необхідно розв'язати для визначення параметрів розміщення відповідних геометричних об'єктів) з урахуванням дерева розв'язків, наведеного на рис. 3.1, дорівнює:

$$O_{1.1} = N \cdot \prod_{i=1}^N \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N n_{\gamma_{ij}} + \sum_{r=1}^{N_R} n_{ir} + 4 \right)^3; \quad (3.4)$$

де N – кількість неорієнтованих об'єктів розміщення;

N_R – кількість областей «заборони».

Для задачі одночасного розміщення неорієнтованих та орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях (задача 2) дерево розв'язків наведено на рис. 3.3.

Компонентами даного дерева є такі:

– $\gamma_{ji,k}(\theta_j, \theta_i)$ – елемент границі замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику неорієнтованих об'єктів $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$ та $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_1$, $i \neq j$, причому $k = 1, \dots, n_{\gamma_{ji}}$, де $n_{\gamma_{ji}}$ – кількість сторін замкненого контуру γ_{ji} ;

– $\gamma_{i\eta,\lambda}(\theta_i)$ – елемент границі замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику неорієнтованого $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, n_1$, та орієнтованого $S_\eta(x_\eta, y_\eta, 0)$, $\eta = n_1 + 1, \dots, N$, об'єктів, причому $\lambda = 1, \dots, n_{\gamma_{i\eta}}$, де $n_{\gamma_{i\eta}}$ – кількість сторін замкненого контуру $\gamma_{i\eta}$;

– $\gamma_{\eta\mu,\rho}$ – елемент границі замкненого контуру дотику орієнтованих об'єктів $S_\eta(x_\eta, y_\eta, 0)$ та $S_\mu(x_\mu, y_\mu, 0)$, $\eta = n_1 + 1, \dots, N$, $\mu = n_1 + 1, \dots, N$, $\eta \neq \mu$, причому $\rho = 1, \dots, n_{\gamma_{\eta\mu}}$, де $n_{\gamma_{\eta\mu}}$ – кількість сторін замкненого контуру $\gamma_{\eta\mu}$;

– $\gamma_{i0,r,m}(\theta_i)$ – елемент границі замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, n_1$,

та області «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$, причому $m = 1, \dots, n_{ir}$, де n_{ir} – кількість сторін замкненого контуру $\gamma_{i0,r}$;

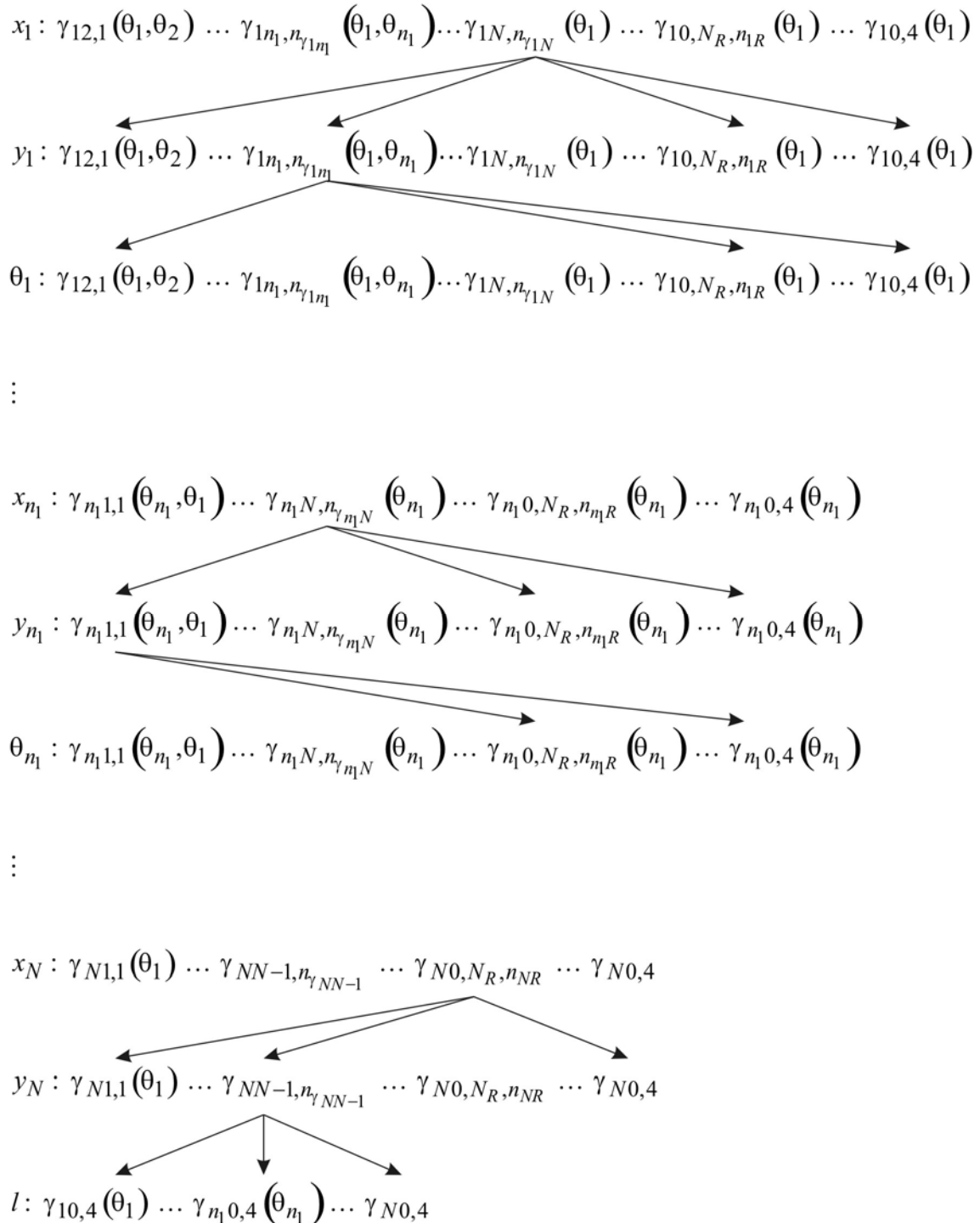


Рисунок 3.3 – Дерево розв'язків для задачі 2

– $\gamma_{\eta 0, r, \beta}$ – елемент границі замкненого контуру дотику орієнтованого об'єкта $S_{\eta}(x_{\eta}, y_{\eta}, 0)$, $\eta = n_1 + 1, \dots, N$, та області «заборони» $S_{0, r}(x_{0, r}, y_{0, r}, 0)$, $r = 1, \dots, N_R$, причому $\beta = 1, \dots, n_{\eta r}$, де $n_{\eta r}$ – кількість сторін замкненого контуру $\gamma_{\eta 0, r}$;

– $\gamma_{i 0, q}(\theta_i)$ – елемент границі замкненого контуру у відповідному перерізі поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, \dots, n_1$, та однозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$, причому $q = 1, \dots, 4$;

– $\gamma_{\eta 0, q}$ – елемент границі замкненого контуру дотику орієнтованого об'єкта $S_{\eta}(x_{\eta}, y_{\eta}, 0)$, $\eta = n_1 + 1, \dots, N$, та однозв'язної області $S_0(0, 0, 0)$, причому $q = 1, \dots, 4$.

Аналітичні вирази даних компонент дерева розв'язків можуть бути записані аналогічно до (3.1)÷(3.3).

Для одержання припустимих значень цільової функції задачі необхідно розв'язати систему з $2N + n_1 + 1$ рівнянь, верхня оцінка кількості яких дорівнює:

$$O_{1.2} = N \cdot \prod_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N n_{\gamma_{ij}} + \sum_{r=1}^{N_R} n_{ir} + 4 \right)^3 \cdot \prod_{\eta=n_1+1}^N \left(\sum_{\substack{\mu=1, \\ \mu \neq \eta}}^N n_{\gamma_{\eta\mu}} + \sum_{r=1}^{N_R} n_{\eta r} + 4 \right)^2; \quad (3.5)$$

де N – загальна кількість об'єктів розміщення;

n_1 – кількість неорієнтованих об'єктів розміщення.

Для задачі оптимального розміщення орієнтованих об'єктів у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини (задача 3), дерево розв'язків матиме вигляд, наведений на рис. 3.4.

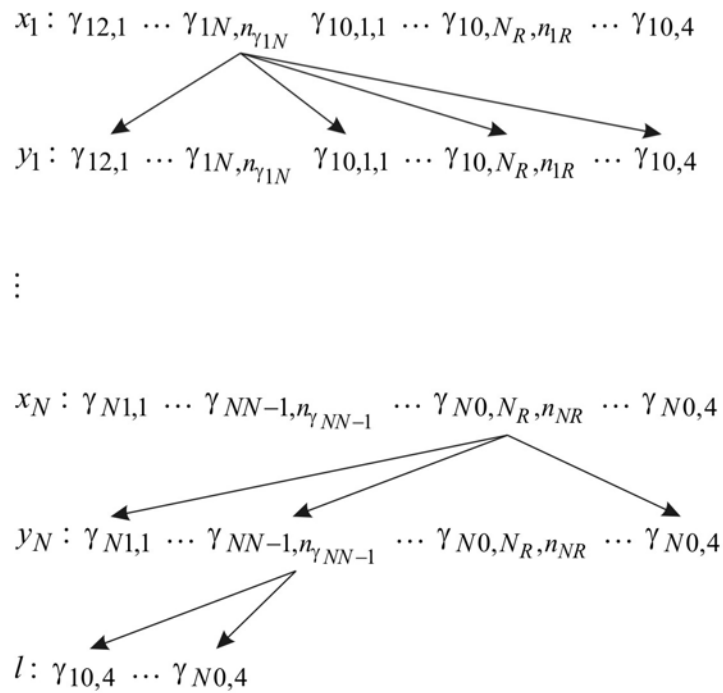


Рисунок 3.4 – Дерево розв’язків для задачі 3

Компонентами даного дерева розв’язків є елементи сторін замкнених контурів дотику орієнтованих об’єктів, елементи сторін замкнених контурів дотику орієнтованих об’єктів з областями «заборони», а також елементи замкнених контурів дотику орієнтованих об’єктів та однозв’язної області розміщення.

Верхня оцінка складності модифікованого методу гілок та меж з урахуванням дерева розв’язків, наведеного на рис. 3.4, дорівнює:

$$O_{1.3} = N \cdot \prod_{i=1}^N \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N n_{\gamma_{ij}} + \sum_{r=1}^{N_R} n_{ir} + 4 \right)^2. \quad (3.6)$$

При розміщенні плоских неорієнтованих геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних однозв’язних областях змінної довжини (задача 4) дерево розв’язків записується так, як це наведено на рис. 3.5.

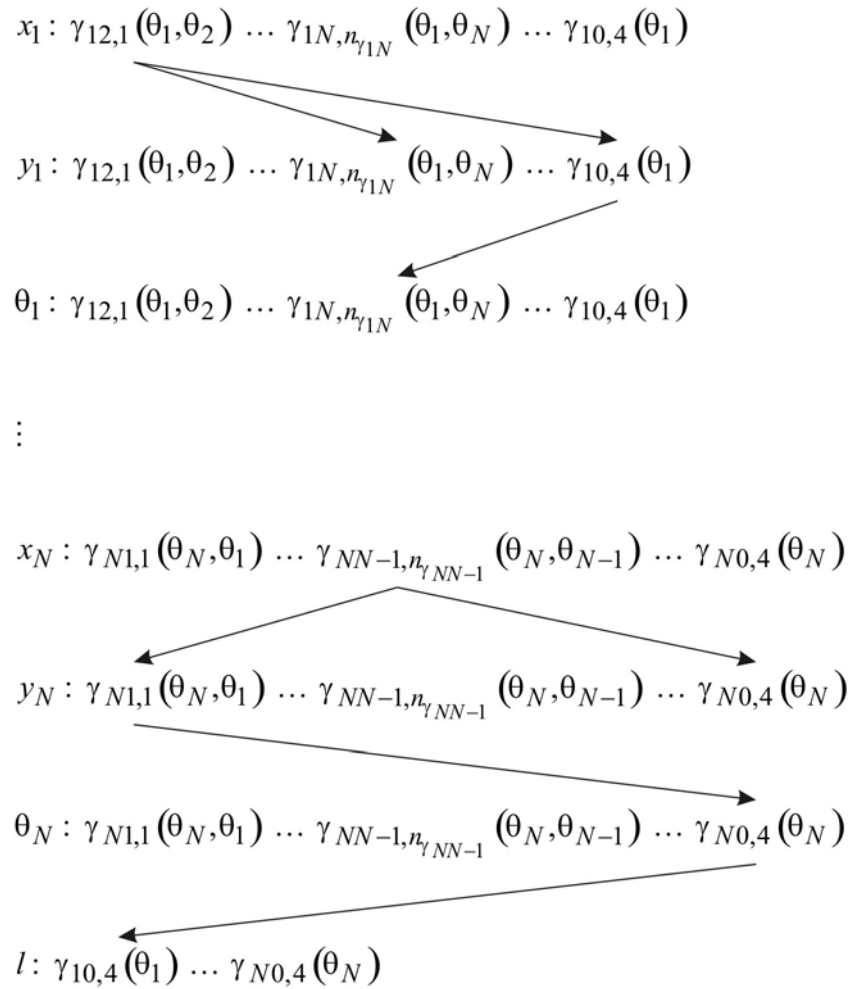


Рисунок 3.5 – Дерево розв'язків для задачі 4

Верхня оцінка складності методу у даному випадку записується так:

$$Q_{1,4} = N \cdot \prod_{i=1}^N \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N n_{\gamma_{ij}} + 4 \right)^3. \quad (3.7)$$

На рис. 3.6 наведено дерево розв'язків для задачі оптимального розміщення неорієнтованих та орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних однозв'язних областях змінної довжини (задача 5).

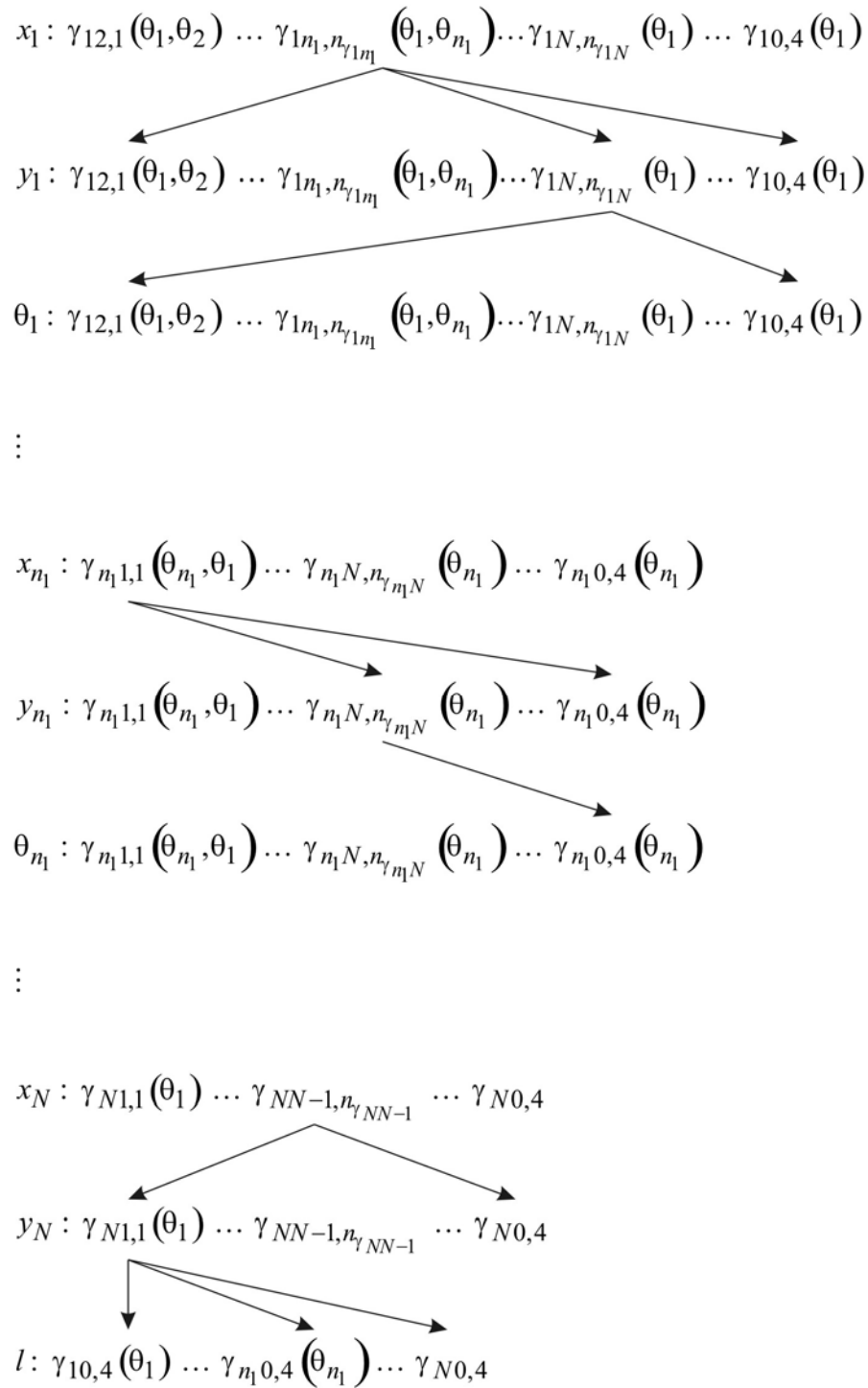


Рисунок 3.6 – Дерево розв'язків для задачі 5

Верхня оцінка складності модифікованого методу гілок та меж у даному випадку має вигляд:

$$O_{1.5} = N \cdot \prod_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N n_{\gamma_{ij}} + 4 \right)^3 \cdot \prod_{\eta=n_1+1}^N \left(\sum_{\substack{\mu=1, \\ \mu \neq \eta}}^N n_{\gamma_{\eta\mu}} + 4 \right)^2. \quad (3.8)$$

Що стосується задачі 6, тобто задачі оптимального розміщення орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних однозв'язних областях змінної довжини, то дерево розв'язків для неї наведено на рис. 3.7.

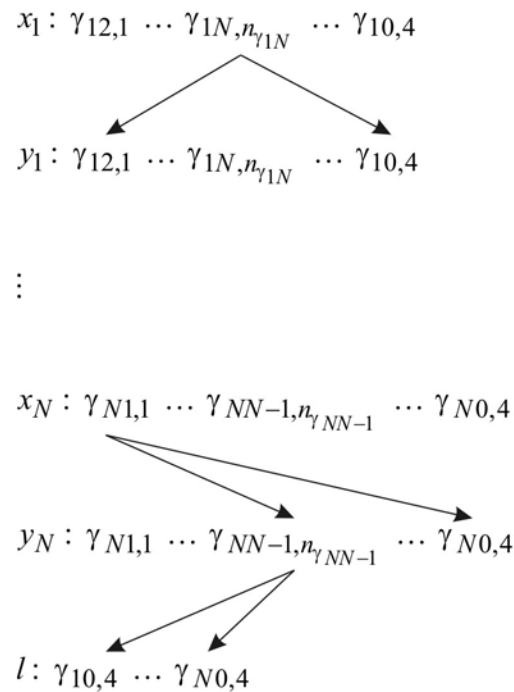


Рисунок 3.7 – Дерево розв'язків для задачі 6

Тут оцінка складності буде дорівнювати:

$$O_{1.6} = N \cdot \prod_{i=1}^N \left(\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N n_{\gamma_{ij}} + 4 \right)^2. \quad (3.9)$$

Таким чином, розроблено модифікований метод гілок та меж для всіх задач, що впливають із загальної задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини. До переваг даного методу відноситься те, що він дозволяє одержати глобальний екстремум цільової функції задачі. Недоліки методу:

– визначити, що одержано саме глобальний екстремум цільової функції можливо тільки після повного перебору відповідного дерева розв'язків (рис. 3.1, 3.3 – 3.7);

– виходячи із оцінок складності (3.4)÷(3.9) можна зробити висновок, що даний метод можливо застосувати тільки для задач невеликої розмірності і неможливо використати для розв'язання практичних задач упаковки та розкрою.

Для подолання даних недоліків, як правило, використовуються методи локальної оптимізації, наприклад, метод оптимізації за групами змінних, метод звужуючих околів, різноманітні евристичні методи. Разом з тим, існують методи, які поєднують у собі швидкість роботи методів локальної оптимізації і, при цьому, існує ймовірність знаходження глобального екстремуму цільової функції. Прикладом таких методів є метод імітації відпалу (simulated annealing).

3.2 Розробка модифікованого методу імітації відпалу для оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних областях

Метод імітації відпалу являє собою аналог фізичного процесу керованого охолодження і використовує упорядкований випадковий пошук нових станів системи з більш низькою температурою [204, 205].

У процесі повільного керованого охолодження розплавленого матеріалу, який називається відпалом, кристалізація розплаву

супроводжується глобальним зменшенням його енергії E , але при цьому припускаються ситуації, в яких вона може на деякий час зростати (зокрема, при підігріві розплаву для запобігання занадто швидкого його охолодження). Завдяки припустимості короткострокового підвищення енергетичного рівня, можливий вихід з пасток локальних мінімумів енергії, які виникають при реалізації процесу. Тільки зниження температури T до абсолютного нуля робить неможливим будь-яких самостійне підвищення енергетичного рівня розплаву.

Таким чином, для розробки модифікованого методу імітації відпалу необхідно визначитися із:

- функцією енергії E системи;
- функцією, яка описує зниження температури T протягом часу;
- функцією (правилом), що утворює новий стан системи.

Розглянемо задачу 1 (оптимальне розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини).

У даному випадку цільова функція задачі (2.1) буде являти собою енергію системи, тобто:

$$E = l(X), \quad (3.10)$$

де $X = \{x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_N, y_N, \theta_N\}$ – поточний стан системи.

Що стосується вибору функції, яка описує зниження температури T протягом часу, то історично першою схемою імітації відпалу була схема больцманівського відпалу, в якій зміна температури має вигляд:

$$T = \frac{T_0}{\ln(1+t)}, \quad (3.11)$$

де T_0 – початкове значення температури; t – час, $t > 0$.

Для даної схеми доведено, що при достатньо великих значеннях T_0 та кількості кроків гарантується знаходження глобального мінімуму функції (3.10) [205].

Недоліком больцманівського відпалу є повільне зменшення температури T . Розв'язання даної проблеми можливе шляхом заміни закону зміни температури (3.11), наприклад, на наступний:

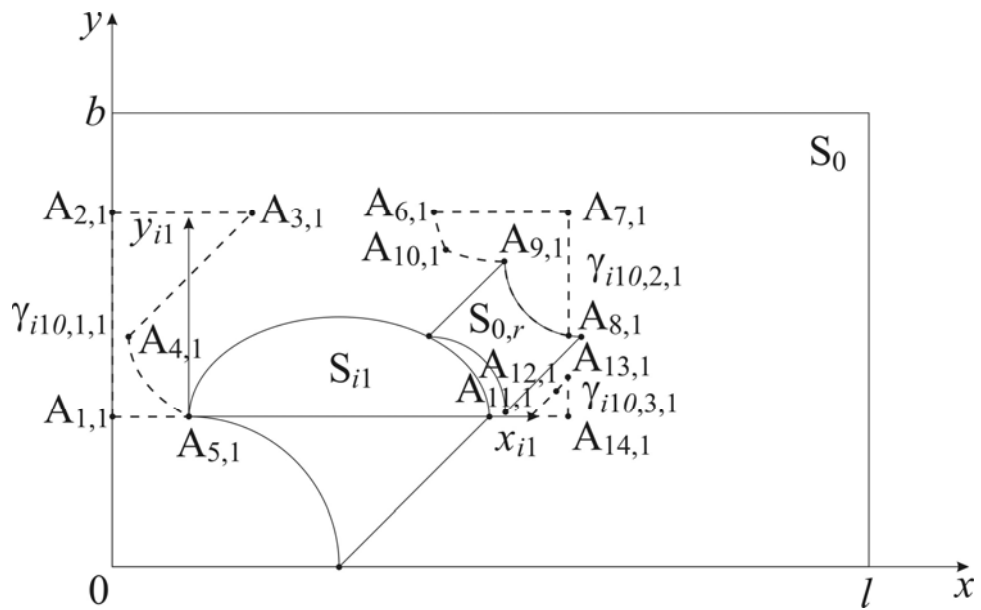
$$T_m = q \cdot T_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

де температурний коефіцієнт q обирається, як правило, у межах $0,7 \div 0,99$. Дана схема імітації відпалу дозволяє економити обчислювальні ресурси, але, при цьому, не гарантується знаходження глобального мінімуму функції (3.10).

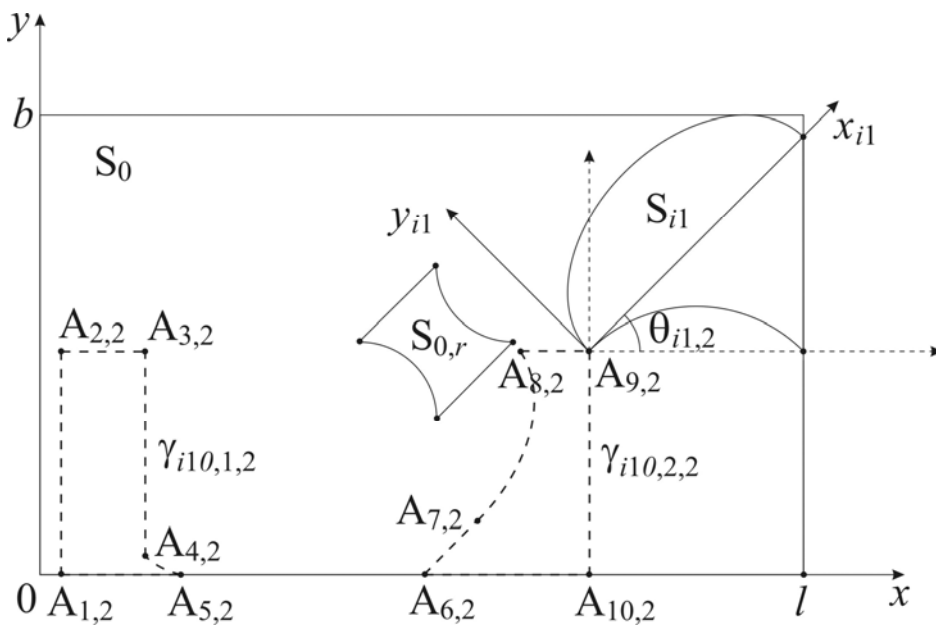
Що стосується утворення нового стану системи, то, по-перше, здійснюється випадкова перестановка номерів об'єктів розміщення $\{i_1, i_2, \dots, i_N\} \in \{1, \dots, N\}$ і визначається поточний стан системи $X = \{x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}, \dots, x_{i_N}, y_{i_N}, \theta_{i_N}\}$ шляхом послідовного розміщення об'єктів відповідно до перестановки їх номерів та з урахуванням обмежень (2.2)–(2.4).

Розглянемо утворення поточного стану системи більш детально. На рис. 3.8 наведено спосіб розміщення геометричного об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$. Оскільки номер даного об'єкта є першим у перестановці, то для визначення припустимих місць його розміщення у багатозв'язній області $S_0(0, 0, 0)$ використовуються тільки обмеження виду (2.3) та (2.4), тобто умови належності багатозв'язній області. Так, на рис. 3.8 а) наведено припустимі точки розміщення $A_{1,1}, \dots, A_{14,1}$ початку локальної системи

координат об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$ при $\theta_{i_1,1} = 0$.



a) $\theta_{i_1,1} = 0$



б) $\theta_{i_1,2} = \frac{\pi}{4}$

Рисунок 3.8 – Розміщення об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$

Очевидно, що з точки зору мінімізації цільової функції (3.10) початок локальної системи координат об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$ необхідно розмістити у т. $A_{1,1}$ або т. $A_{2,1}$. Із технологічної точки зору обираємо т. $A_{1,1}$, тобто $A_{i_1,1}^* = A_{1,1}$.

Оскільки об'єкти розміщення є неорієнтованими, то необхідно визначити точки $A_{i_1,d+1}^*$ для кожного $\theta_{i_1,d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, $n_d > 0$. Наприклад, на рис. 3.8 б) при $\theta_{i_1,2} = \frac{\pi}{4}$ $A_{i_1,2}^* = A_{1,2}$ і т.д.

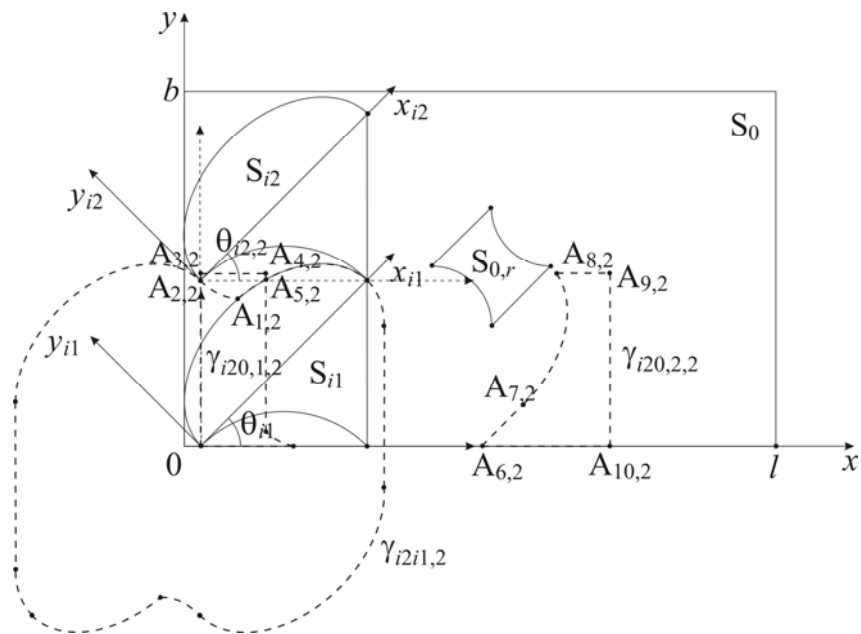
Таким чином, із одержаних точок $A_{i_1,d+1}^*$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, необхідно обрати для розміщення початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$ таку, при якій значення цільової функції (3.10) буде мінімальним. У випадку, наведеному на рис. 3.8, це т. $A_{1,2}$, тобто $S_{i_1}\left(x_{A_{1,2}}, y_{A_{1,2}}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Розміщення наступного об'єкта $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ здійснюється з урахуванням обмежень (2.2)÷(2.4) так, як це наведено на рис. 3.9. Наприклад, при $\theta_{i_2,2} = \frac{\pi}{4}$ для визначення припустимих місць розміщення початку локальної системи координат даного об'єкта використовуються:

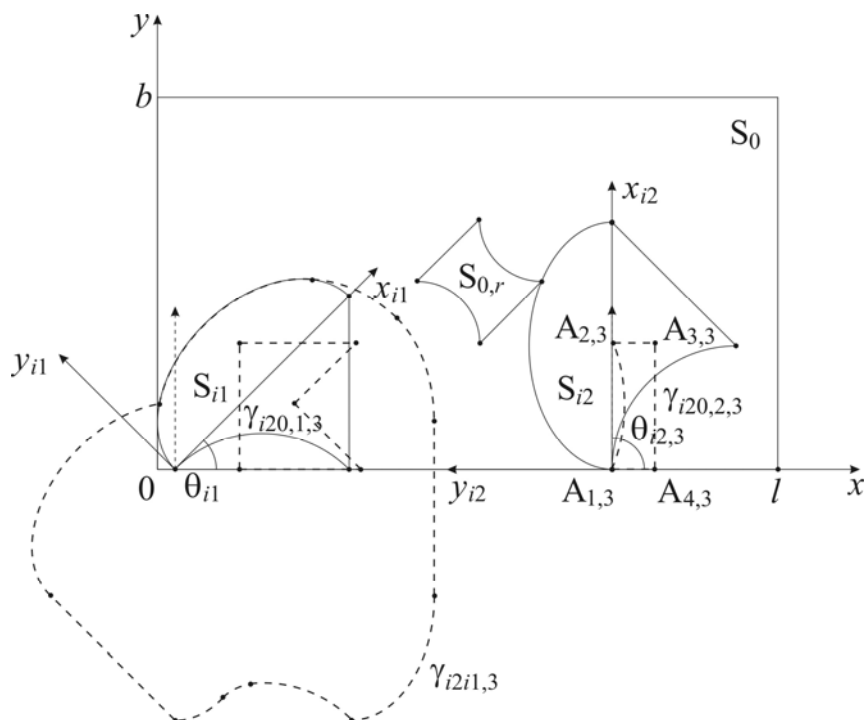
- переріз $\gamma_{i_2 i_1, 2}$ поверхні дотику двох неорієнтованих об'єктів $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ та $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$;
- переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ та прямокутної багатозв'язної області розміщення $S_0(0, 0, 0)$, який є незв'язним і складається з компонент $\gamma_{i_2 0, 1, 2}$ та $\gamma_{i_2 0, 2, 2}$.

У результаті перетину двох перерізів одержуємо припустимі точки

розміщення $A_{1,2}, \dots, A_{10,2}$ початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$.



$$a) \theta_{i_2,2} = \frac{\pi}{4}$$



$$b) \theta_{i_2,3} = \frac{\pi}{2}$$

Рисунок 3.9 – Розміщення об'єкта $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$

Очевидно, що з точки зору мінімізації цільової функції (3.10) початок локальної системи координат об'єкта $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ необхідно розмістити у т. $A_{2,2}$ або т. $A_{3,2}$. Із технологічної точки зору обираємо т. $A_{2,2}$, тобто $A_{i_2,2}^* = A_{2,2}$.

Аналогічно визначаємо точки $A_{i_2,d+1}^*$ для кожного $\theta_{i_2,d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, $n_d > 0$. Так, якщо розглянути випадок, коли $\theta_{i_2,3} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 3.9 б), то слід зазначити, що компонента зв'язності $\gamma_{i_2 0,1,3}$ (переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ та багатозв'язної області розміщення) повністю належить перерізу $\gamma_{i_2 i_1,3}$ поверхні дотику об'єктів $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ та $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$. Оскільки, з одного боку, початок локальної системи координат об'єкта $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ має знаходитись всередині або на границі $\gamma_{i_2 0,1,3}$, а з іншого боку – на границі або ззовні $\gamma_{i_2 i_1,3}$, то припустимими точками розміщення локальної системи координат даного об'єкта є т. $A_{1,3}, \dots, A_{4,3}$, які належать компоненті зв'язності $\gamma_{i_2 0,2,3}$. Таким чином, з метою мінімізації цільової функції (3.10) $A_{i_2,3}^* = A_{1,3}$.

Серед одержаних точок $A_{i_2,d+1}^*$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, обираємо т. $A_{2,2}$, тобто $S_{i_2}\left(x_{A_{2,2}}, y_{A_{2,2}}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Необхідно зауважити, що при знаходженні припустимих точок розміщення початку локальної системи координат неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$ було розв'язано системи рівнянь другого порядку, причому дані системи склалися з:

- нелінійних рівнянь (перетин фрагментів кривих 2-го порядку);
- нелінійного та лінійного рівнянь (перетин фрагменту кривої 2-го порядку та відрізка прямої);
- лінійних рівнянь (перетин відрізків прямих).

Розглянемо процес розміщення плоского неорієнтованого об'єкта з кусочно-нелінійними границями $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$, геометричну інтерпретацію якого наведено на рис. 3.10.

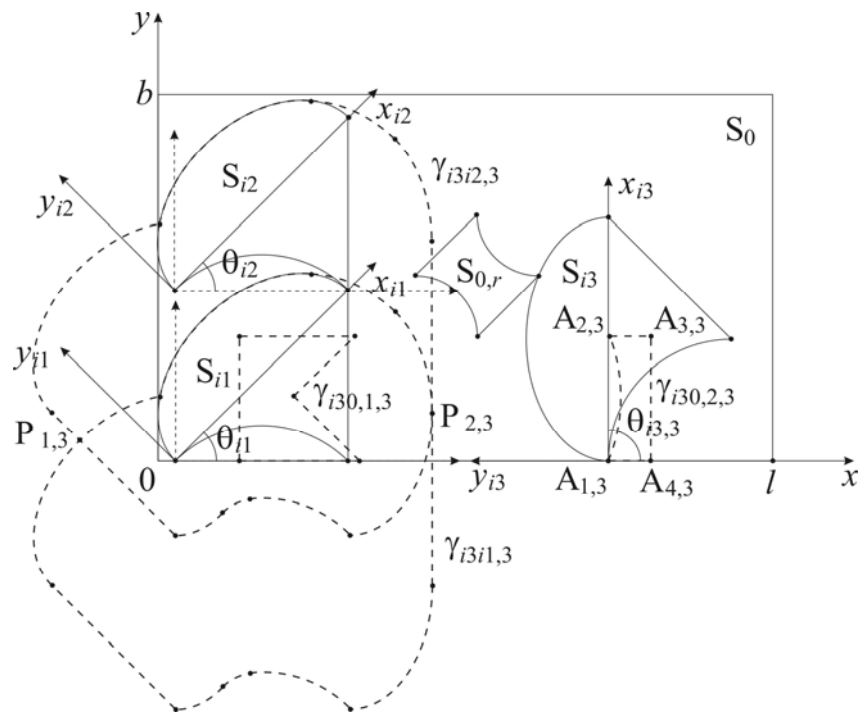
Для визначення припустимих місць розміщення локальної системи координат даного об'єкта (рис. 3.10 а) використовуються:

- переріз $\gamma_{i_3 i_1, 3}$ поверхні дотику двох неорієнтованих об'єктів $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$ та $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$;
- переріз $\gamma_{i_3 i_2, 3}$ поверхні дотику двох об'єктів $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$ та $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2})$;
- переріз поверхні дотику неорієнтованого об'єкта $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$ та прямокутної багатозв'язної області розміщення $S_0(0, 0, 0)$, який є незв'язним і складається з компонент $\gamma_{i_3 0, 1, 3}$ та $\gamma_{i_3 0, 2, 3}$.

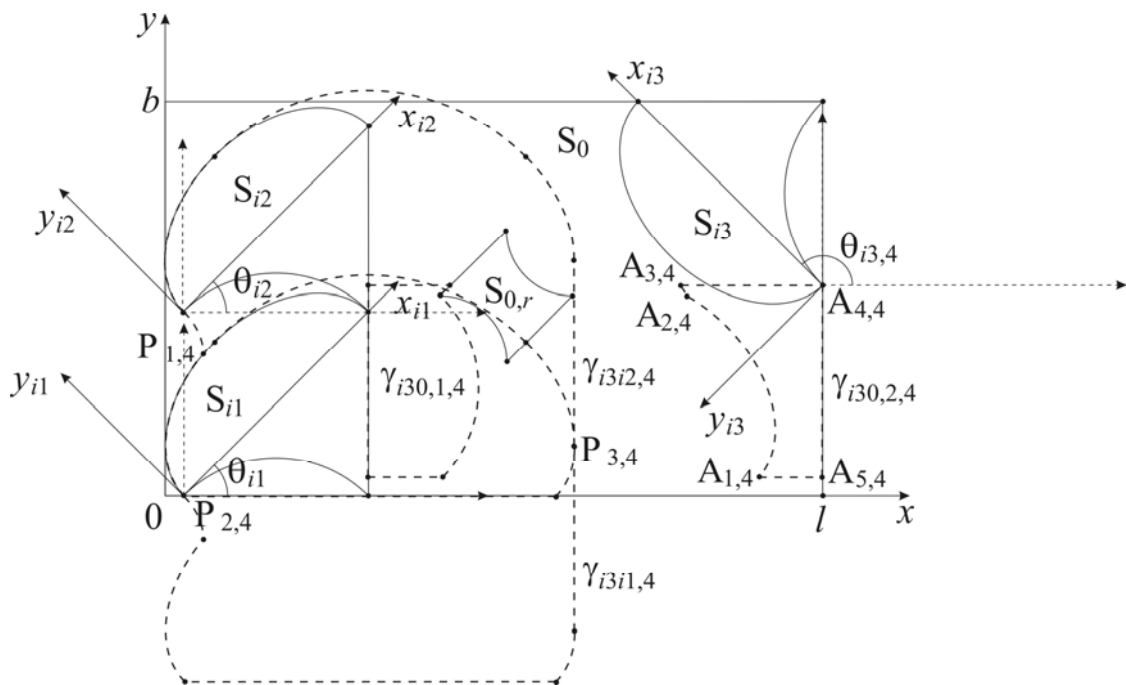
У результаті перетину перерізів $\gamma_{i_3 i_1, 3}$ та $\gamma_{i_3 i_2, 3}$ одержано точки $P_{1,3}$ та $P_{2,3}$, але т. $P_{1,3}$ знаходиться зовні області розміщення $S_0(0, 0, 0)$, а т. $P_{2,3}$ – зовні компоненти зв'язності $\gamma_{i_3 0, 1, 3}$. Таким чином, припустимими точками для розміщення початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$ є т. $A_{1,3}, \dots, A_{4,3}$, а $A_{i_3,3}^* = A_{1,3}$.

При $\theta_{i_3,4} = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 3.10 б) у результаті перетину перерізів $\gamma_{i_3 i_1, 4}$ та $\gamma_{i_3 i_2, 4}$ одержано точки $P_{1,4}$, $P_{2,4}$ і $P_{3,4}$, які з вищенаведених причин також не можуть бути припустимими для розміщення початку локальної системи

координат об'єкта $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$.



a) $\theta_{i_3,3} = \frac{\pi}{2}$



б) $\theta_{i_3,4} = \frac{3\pi}{4}$

Рисунок 3.10 – Розміщення об'єкта $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$

Таким чином, $A_{i_3,4}^* = A_{3,4}$. Аналогічно визначаються всі точки $A_{i_3,d+1}^*$ для кожного $\theta_{i_3,d+1} = d \cdot \frac{2\pi}{n_d}$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, з яких для розміщення початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_3}(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3})$ обирається та, яка забезпечує мінімізацію цільової функції (3.10).

Розроблений спосіб дозволив одержати поточний стан системи $X = \{x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}, \dots, x_{i_N}, y_{i_N}, \theta_{i_N}\}$, при цьому обчислюється значення цільової функції $l(X)$.

Для утворення нового стану системи $X^* = \{x_1^*, y_1^*, \theta_1^*, \dots, x_N^*, y_N^*, \theta_N^*\}$ можна, наприклад, здійснювати перестановку номерів двох будь-яких об'єктів і проводити процес розміщення відповідно до нової перестановки з урахуванням обмежень (2.2)÷(2.4). Надалі обчислюється приріст енергії системи $\Delta E = l(X^*) - l(X)$. Якщо $\Delta E < 0$, то система здійснює перехід із стану X у стан X^* . У протилежному випадку перехід до стану X^* здійснюється із ймовірністю $p\left(\frac{\Delta E}{T}\right)$, яка обчислюється за допомогою виразу:

$$p\left(\frac{\Delta E}{T}\right) = e^{-\frac{\Delta E}{T}}. \quad (3.13)$$

Таким чином, обираючи початкове T_0 та кінцеве T_{\min} значення температури T , яка знижується протягом часу, здійснюється оптимізація цільової функції задачі (3.10), при цьому генерація кожного наступного стану системи відбувається із урахуванням обмежень (2.2)÷(2.4).

Оцінка складності розробленого модифікованого методу імітації відпалу для задачі 1 (розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-

нелінійними границями у багатозв'язній області) є такою:

$$O_{2.1} = N_p(T_0, T_{\min}, q) \cdot \sum_{i=1}^N n_d \cdot \left(2 + 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{i-1} n_{\gamma_{ik}} + \sum_{r=1}^{N_R} n_{\gamma_{i0,r}} \right) + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} n_{\gamma_{ij}} \cdot n_{\gamma_{ik}} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{r=1}^{N_R} n_{\gamma_{ik}} \cdot n_{\gamma_{i0,r}} \right); \quad (3.14)$$

де $N_p(T_0, T_{\min}, q)$ – кількість станів системи;

N – кількість об'єктів розміщення;

N_R – кількість областей «заборони»;

n_d – параметр дискретизації кута повороту i -го об'єкта;

$n_{\gamma_{ij}}$ – кількість фрагментів контуру, що описує дотик об'єктів

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_j(x_j, y_j, \theta_j)$;

$n_{\gamma_{ik}}$ – кількість фрагментів контуру, що описує дотик об'єктів

$S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та $S_k(x_k, y_k, \theta_k)$;

$n_{\gamma_{i0,r}}$ – кількість фрагментів контуру дотику об'єктів $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ та

областей «заборони» $S_{0,r}(x_{0,r}, y_{0,r}, 0)$.

Оцінка складності $O_{2.1}$ являє собою верхню оцінку кількості систем рівнянь, які необхідно розв'язати для знаходження мінімуму цільової функції (3.10).

На рис. 3.11 наведено геометричну інтерпретацію даної оцінки складності, причому у виразі (3.14) для спрощення розрахунків значення параметрів дорівнювали:

$$- N_p(T_0, T_{\min}, q) = 1;$$

$$- N = 1, \dots, 5;$$

$$- N_R = 1;$$

- $n_d = 2$;
- $n_{\gamma_{ij}} = n_{\gamma_{ik}} = n_{\gamma_{i0,r}} = 4$.

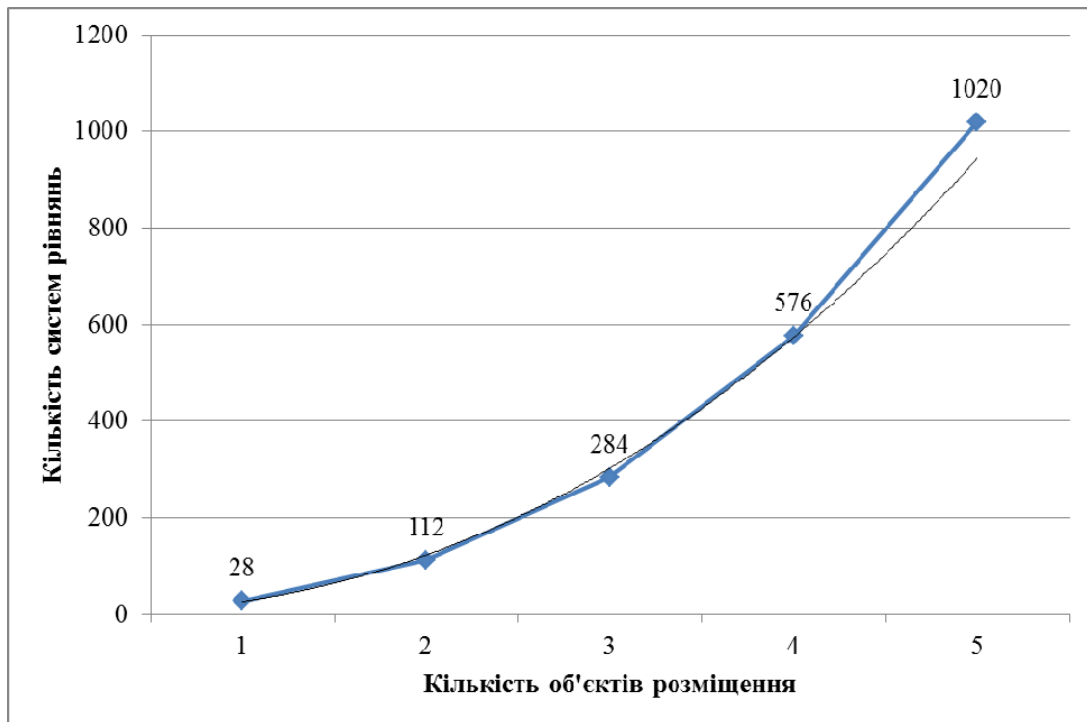


Рисунок 3.11 – геометрична інтерпретація оцінки складності $O_{2.1}$

Розглянемо особливості розробленого модифікованого методу імітації відпалу для інших задач, що впливають із загальної постановки.

Задача 2. При одночасному розміщенні неорієнтованих та орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини для неорієнтованих об'єктів при побудові відповідного стану системи використовується спосіб, наведений на рис. 3.8 – 3.10, а для орієнтованих розглядається не n_d можливих точок A_{d+1}^* , $d = 0, \dots, n_d - 1$, а лише одна. Оцінка складності $O_{2.2}$ у даному випадку співпадає з (3.14), при цьому для орієнтованого об'єкта приймається $n_d = 1$.

Задача 3. При оптимізації розміщення орієнтованих об'єктів з

кусочно-нелінійними границями у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини відповідний стан системи утворюється з урахуванням параметра дискретизації кута повороту $n_d = 1$, а оцінка складності методу дорівнює:

$$O_{2.3} = N_p(T_0, T_{\min}, q) \cdot \sum_{i=1}^N \left(2 + 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{i-1} n_{\gamma_{ik}} + \sum_{r=1}^{N_R} n_{\gamma_{i0,r}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} n_{\gamma_{ij}} \cdot n_{\gamma_{ik}} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{r=1}^{N_R} n_{\gamma_{ik}} \cdot n_{\gamma_{i0,r}} \right). \quad (3.15)$$

Задача 4. Оптимальне розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній однозв'язній області змінної довжини.

При утворенні відповідного (поточного або нового) стану системи розміщення першого об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$ здійснюється у спосіб, який наведено на рис. 3.12.

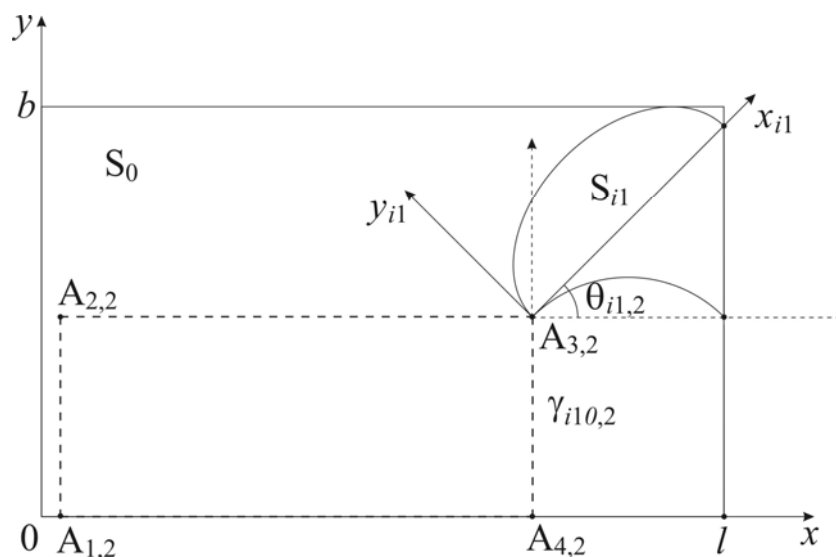


Рисунок 3.12 – Розміщення об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$ у однозв'язній області

Очевидно, що для відповідного $\theta_{i,2}$ припустимими точками розміщення початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_1}(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1})$ є точки $A_{1,2}, \dots, A_{4,2}$, причому $A_{i_1,2}^* = A_{1,2}$. Аналогічно можна одержати всі точки $A_{i_1,d+1}^*$, $d = 0, \dots, n_d - 1$, причому точку для розміщення початку локальної системи координат даного об'єкта обираємо виходячи із умови мінімізації цільової функції (3.10).

Розміщення інших об'єктів $S_{i_2}(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}), \dots, S_{i_N}(x_{i_N}, y_{i_N}, \theta_{i_N})$ здійснюється так, як це наведено для задачі 1.

Оцінка складності методу в цьому випадку така:

$$O_{2.4} = N_p(T_0, T_{\min}, q) \cdot \sum_{i=1}^N n_d \cdot \left(2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{i-1} n_{\gamma_{ik}} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} n_{\gamma_{ij}} \cdot n_{\gamma_{ik}} \right). \quad (3.16)$$

Задача 5. Для задачі оптимального розміщення неорієнтованих та орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній однозв'язній області змінної довжини характерні особливості, що наведені для задачі 2. Оцінка складності $O_{2.5}$ співпадає з (3.16) за умови, що для орієнтованих об'єктів параметр дискретизації кута повороту $n_d = 1$.

Задача 6. При оптимізації розміщення орієнтованих об'єктів у прямокутній однозв'язній області змінної довжини оцінка складності модифікованого методу імітації відпалу дорівнює:

$$O_{2.6} = N_p(T_0, T_{\min}, q) \cdot \sum_{i=1}^N \left(2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{i-1} n_{\gamma_{ik}} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} n_{\gamma_{ij}} \cdot n_{\gamma_{ik}} \right). \quad (3.17)$$

Дана оцінка практично співпадає з наведеною у роботі [200].

Таким чином, проведені дослідження стосовно розробки методів

оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини зробити висновок, що для розв'язання практичних задач доцільно використовувати модифікований метод імітації відпалу, про що свідчать одержані оцінки складності даних методів.

РОЗДІЛ 4

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ПЛОСКИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З КУСОЧНО-НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

4.1 Алгоритм оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини

У розділі 3 було розроблено модифікований метод гілок та меж, а також модифікований метод імітації відпалу. Порівняння оцінок складності даних методів дозволило зробити висновок про доцільність використання для розв'язання прикладних задач саме методу імітації відпалу. У зв'язку з цим, розглянемо алгоритм розв'язання задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини, основою якого є зазначений вище метод.

Алгоритм 1.

Крок 1. Завдання кількості об'єктів розміщення N .

Крок 2. $i = 1$.

Крок 3. Введення геометричної інформації про об'єкт розміщення S_i так, як це наведено у п. 1.3.

Крок 4. Якщо об'єкт S_i є неорієтованим, то $G_i = 1$, інакше – $G_i = 0$.

Крок 5. Якщо $i < N$, то $i = i + 1$, Крок 3, інакше – Крок 6.

Крок 6. Введення геометричної інформації про прямокутну область розміщення S_0 (п. 1.3). Якщо S_0 є багатозв'язною, то $B = 1$, Крок 7, інакше

(область є однозв'язною, $B = 0$) – Крок 11.

Крок 7. Завдання кількості областей «заборони» N_R .

Крок 8. $r = 1$.

Крок 9. Введення геометричної інформації про область заборони $S_{0,r}$ так, як це наведено у п. 1.3.

Крок 10. Якщо $r < N_R$, то $r = r + 1$, Крок 9, інакше – Крок 11.

Крок 11. Завдання параметра дискретизації n_d ; початкового T_0 та кінцевого T_{\min} значення температури; температурного коефіцієнта q ; значення ймовірності переходу системи у новий стан P .

Крок 12. $i = 1$.

Крок 13. $j = 1$.

Крок 14. Якщо $i \neq j$, то Крок 15, інакше – Крок 37.

Крок 15. Якщо $G_i = 0$, то Крок 25, інакше – Крок 16.

Крок 16. Якщо $G_j = 0$, то Крок 31, інакше – Крок 17.

Крок 17. Побудова перерізів поверхні дотику неорієнтованих об'єктів S_j та S_i .

Крок 18. $d_i = 0$.

Крок 19. $\theta_{i,d_i+1} = d_i \cdot \frac{2\pi}{n_d}$.

Крок 20. $d_j = 0$.

Крок 21. $\theta_{j,d_j+1} = d_j \cdot \frac{2\pi}{n_d}$.

Крок 22. Побудова перерізу $\gamma_{ji;d_j+1,d_i+1}$ так, як це наведено у п. 2.2.

Крок 23. Якщо $d_j < n_d - 1$, то $d_j = d_j + 1$, Крок 21, інакше – Крок 24.

Крок 24. Якщо $d_i < n_d - 1$, то $d_i = d_i + 1$, Крок 19, інакше – Крок 37.

Крок 25. Якщо $G_j = 0$, то Крок 36, інакше – Крок 26.

Крок 26. Побудова перерізів поверхні дотику неорієнтованого S_j та

орієнтованого S_i об'єктів.

Крок 27. $d_j = 0$.

Крок 28. $\theta_{j,d_j+1} = d_j \cdot \frac{2\pi}{n_d}$.

Крок 29. Побудова перерізу $\gamma_{ji;d_j+1,1}$ так, як це наведено у п. 2.2.

Крок 30. Якщо $d_j < n_d - 1$, то $d_j = d_j + 1$, Крок 28, інакше – Крок 37.

Крок 31. Побудова перерізів поверхні дотику орієнтованого S_j та неорієнтованого S_i об'єктів.

Крок 32. $d_i = 0$.

Крок 33. $\theta_{i,d_i+1} = d_i \cdot \frac{2\pi}{n_d}$.

Крок 34. Побудова перерізу $\gamma_{ji;1,d_i+1}$ так, як це наведено у п. 2.2.

Крок 35. Якщо $d_i < n_d - 1$, то $d_i = d_i + 1$, Крок 33, інакше – Крок 37.

Крок 36. Побудова замкненого контуру дотику $\gamma_{ji;1,1}$ орієнтованих об'єктів S_j та S_i об'єктів.

Крок 37. Якщо $j < N$, то $j = j + 1$, Крок 14, інакше – Крок 38.

Крок 38. Якщо $i < N$, то $i = i + 1$, Крок 13, інакше – Крок 39.

Крок 39. $i = 1$.

Крок 40. Якщо $G_i = 0$, то Крок 45, інакше – Крок 41.

Крок 41. $d_i = 0$.

Крок 42. $\theta_{i,d_i+1} = d_i \cdot \frac{2\pi}{n_d}$.

Крок 43. Побудова перерізу $\gamma_{i0;d_i+1}$ поверхні дотику неорієнтованого об'єкта S_i та області розміщення S_0 так, як це наведено у п. 2.3.

Крок 44. Якщо $d_i < n_d - 1$, то $d_i = d_i + 1$, Крок 42, інакше – Крок 46.

Крок 45. Побудова замкненого контуру дотику $\gamma_{i0;1}$ орієнтованого об'єкта S_i та області розміщення S_0 .

Крок 46. Якщо $i < N$, то $i = i + 1$, Крок 40, інакше – Крок 47.

Крок 47. Якщо $B = 1$, то Крок 48, інакше – Крок 58.

Крок 48. $i = 1$.

Крок 49. $r = 1$.

Крок 50. Якщо $G_i = 0$, то Крок 55, інакше – Крок 51.

Крок 51. $d_i = 0$.

$$\text{Крок 52. } \theta_{i,d_i+1} = d_i \cdot \frac{2\pi}{n_d}.$$

Крок 53. Побудова перерізу $\gamma_{i0,r;d_i+1}$ поверхні дотику неорієнтованого об'єкта S_i та області «заборони» $S_{0,r}$ так, як це наведено у п. 2.3.

Крок 54. Якщо $d_i < n_d - 1$, то $d_i = d_i + 1$, Крок 52, інакше – Крок 56.

Крок 55. Побудова замкненого контуру дотику $\gamma_{i0,r;1}$ орієнтованого об'єкта S_i та області «заборони» $S_{0,r}$.

Крок 56. Якщо $r < N_R$, то $r = r + 1$, Крок 50, інакше – Крок 57.

Крок 57. Якщо $i < N$, то $i = i + 1$, Крок 49, інакше – Крок 58.

Крок 58. Одержання випадкової перестановки номерів об'єктів розміщення $\{i_1, i_2, \dots, i_N\} \in \{1, \dots, N\}$.

Крок 59. $i = 1$.

Крок 60. Формування i -го стану системи. $j = 1$.

Крок 61. Якщо $G_{i_j} = 0$, то $n_{d_{i_j}} = 1$, інакше – $n_{d_{i_j}} = n_d$.

Крок 62. $d_{i_j} = 0$, $m = 0$.

$$\text{Крок 63. } \theta_{i_j,d_{i_j}+1} = d_{i_j} \cdot \frac{2\pi}{n_{d_{i_j}}}.$$

Крок 64. Визначення припустимих точок $A_{m,d_{i_j}+1}$ (збільшення m) розміщення початку локальної системи координат об'єкта S_{i_j} за допомогою перерізу (замкненого контуру) $\gamma_{i_j 0; d_{i_j}+1}$ (п. 3.2).

Крок 65. Якщо $j > 1$, то Крок 66, інакше – Крок 75.

Крок 66. $k = 1$.

Крок 67 Визначення припустимих точок $A_{m,d_{i_j}+1}$ (збільшення m) розміщення початку локальної системи координат об'єкта S_{i_j} за допомогою перетину перерізів (замкнених контурів) $\gamma_{i_j 0; d_{i_j}+1}$, $\gamma_{i_j i_k; d_{i_j}+1, d_{i_k}+1}$ (п. 3.2).

Крок 68. Якщо $k < j - 1$, то $k = k + 1$, Крок 67, інакше – Крок 69.

Крок 69. Якщо $j > 2$, то Крок 70, інакше – Крок 75.

Крок 70. $k = 1$.

Крок 71. $v = k + 1$.

Крок 72. Визначення припустимих точок $A_{m,d_{i_j}+1}$ (збільшення m) розміщення початку локальної системи координат об'єкта S_{i_j} за допомогою перетину перерізів (замкнених контурів) $\gamma_{i_j i_k; d_{i_j}+1, d_{i_k}+1}$ та $\gamma_{i_j i_v; d_{i_j}+1, d_{i_v}+1}$ (п. 3.2).

Крок 73. Якщо $v < j - 1$, то $v = v + 1$, Крок 72, інакше – Крок 74.

Крок 74. Якщо $k < j - 2$, то $k = k + 1$, Крок 71, інакше – Крок 75.

Крок 75. Якщо $B = 1$, то Крок 76, інакше – Крок 85.

Крок 76. $r = 1$.

Крок 77. Визначення припустимих точок $A_{m,d_{i_j}+1}$ (збільшення m) розміщення початку локальної системи координат об'єкта S_{i_j} за

допомогою перетину перерізів (замкнених контурів) $\gamma_{i_j 0; d_{i_j} + 1}$, $\gamma_{i_j 0, r; d_{i_j} + 1}$ (п. 3.2).

Крок 78. Якщо $r < N_R$, то $r = r + 1$, Крок 77, інакше – Крок 79.

Крок 79. Якщо $j > 1$, то Крок 80, інакше – Крок 85.

Крок 80. $k = 1$.

Крок 81. $r = 1$.

Крок 82. Визначення припустимих точок $A_{m, d_{i_j} + 1}$ (збільшення m) розміщення початку локальної системи координат об'єкта S_{i_j} за допомогою перетину перерізів (замкнених контурів) $\gamma_{i_j i_k; d_{i_j} + 1, d_{i_k} + 1}$ та $\gamma_{i_j 0, r; d_{i_j} + 1}$ (п. 3.2).

Крок 83. Якщо $r < N_R$, то $r = r + 1$, Крок 82, інакше – Крок 84.

Крок 84. Якщо $k < j - 1$, то $k = k + 1$, Крок 81, інакше – Крок 85.

Крок 85. Якщо $N_m < 1$ (кількість припустимих точок $A_{m, d_{i_j} + 1}$), то задача не має розв'язку, Крок 103, інакше – Крок 86.

Крок 86. $m = 1$.

Крок 87. Якщо $m = 1$, то $l_{i_j, d_{i_j} + 1}^* \left(A_{i_j, d_{i_j} + 1}^* \right) = l_{i_j, d_{i_j} + 1} \left(A_{m, d_{i_j} + 1} \right)$,

$A_{i_j, d_{i_j} + 1}^* = A_{m, d_{i_j} + 1}$, Крок 89, інакше – Крок 88.

Крок 88. Якщо $l_{i_j, d_{i_j} + 1} \left(A_{m, d_{i_j} + 1} \right) < l_{i_j, d_{i_j} + 1}^* \left(A_{i_j, d_{i_j} + 1}^* \right)$, то

$A_{i_j, d_{i_j} + 1}^* = A_{m, d_{i_j} + 1}$, $l_{i_j, d_{i_j} + 1}^* \left(A_{i_j, d_{i_j} + 1}^* \right) = l_{i_j, d_{i_j} + 1} \left(A_{m, d_{i_j} + 1} \right)$.

Крок 89. Якщо $m < N_m$, то $m = m + 1$, Крок 88, інакше – Крок 90.

Крок 90. Якщо $d_{i_j} < n_{d_{i_j}} - 1$, то $d_{i_j} = d_{i_j} + 1$, Крок 63, інакше –

Крок 91.

Крок 91. $d_{i_j} = 0$.

Крок 92. Якщо $d_{ij} = 0$, то фіксуємо d_{ij} , $l_{ij}^*(A_{ij}^*) = l_{ij, d_{ij}+1}^*(A_{ij, d_{ij}+1}^*)$,
 $A_{ij}^* = A_{ij, d_{ij}+1}^*$, Крок 94, інакше – Крок 93.

Крок 93. Якщо $l_{ij, d_{ij}+1}^*(A_{ij, d_{ij}+1}^*) < l_{ij}^*(A_{ij}^*)$, то фіксуємо d_{ij} ,
 $l_{ij}^*(A_{ij}^*) = l_{ij, d_{ij}+1}^*(A_{ij, d_{ij}+1}^*)$, $A_{ij}^* = A_{ij, d_{ij}+1}^*$.

Крок 94. Якщо $d_{ij} < n_{d_{ij}} - 1$, то $d_{ij} = d_{ij} + 1$, Крок 93, інакше –
 Крок 95.

Крок 95. Якщо $j < N$, то $j = j + 1$, Крок – 61, інакше – Крок 96.

Крок 96. Обчислення цільової функції для i -го стану:

$$l_i = \max_{j=1, \dots, N} l_{ij}^*(A_{ij}^*).$$

Крок 97. Якщо $i = 1$, то $l^* = l_i$, Крок 100, інакше – Крок 98.

Крок 98. $E = l_i - l^*$. Якщо $E < 0$, то $l^* = l_i$, Крок 100, інакше –
 Крок 99.

$$\text{Крок 99. } p\left(\frac{E}{T_0}\right) = e^{-\frac{E}{T_0}}. \text{ Якщо } p\left(\frac{E}{T_0}\right) > P, \text{ то } l^* = l_i.$$

$$\text{Крок 100. } T_0 = T_0 \cdot q.$$

Крок 101. Якщо $T_0 > T_{\min}$, то $i = i + 1$, одержання нової перестановки номерів об'єктів розміщення $\{i_1, i_2, \dots, i_N\} \in \{1, \dots, N\}$ шляхом випадкової заміни будь-яких двох, Крок 60, інакше – Крок 102.

Крок 102. Зберігання інформації стосовно цільової функції l^* та параметрів розміщення геометричних об'єктів S_{ij} .

Крок 103. Кінець алгоритму.

Таким чином, розроблено алгоритм, який дозволяє розв'язувати не

тільки загальну задачу оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини, але й відповідні окремі задачі.

4.2 Моделювання оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних однозв'язних областях змінної довжини

Для здійснення моделювання оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних та однозв'язних областях змінної довжини було розроблено програмне забезпечення у середовищі Visual C++, деякі елементи якого наведено у Додатку Б.

Для обґрунтування вірогідності розробленого модифікованого методу імітації відпалу було розв'язано таку задачу, характерну для меблевої промисловості. Область розміщення (лист фанери) являє собою прямокутник $S_0(l,b)$, який заданий у глобальній системі координат. Довжина та ширина прямокутника дорівнюють, відповідно, $l=1250$ мм, $b=2500$ мм.

Задано неорієнтовані об'єкти розміщення S_i , $i=1,\dots,18$, з кусочно-нелінійними границями (криволінійні елементи границь – дуги кіл). Дані об'єкти представляють собою 6 комплектів стільців, які складаються з 3-х елементів:

- сидіння з габаритними розмірами 330x330 мм;
- 2 конструкції ніжок з габаритними розмірами 468x385,7 мм.

Для розв'язання задачі оптимального розміщення 6 комплектів стільців у заданій прямокутній області було застосовано програмне забезпечення OptiNest 2.25b. Результати побудови карти розкрою наведено на рис. 4.1.

На рис. 4.2 наведено результат оптимального розміщення 6

комплектів стільців за допомогою розробленого програмного забезпечення, причому параметр дискретизації кута повороту об'єктів розміщення дорівнював $n_d = 3$.

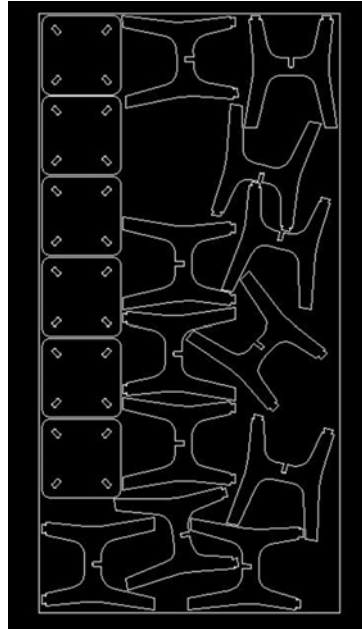


Рис. 4.1 – Карта розкрою, побудована за допомогою OptiNest 2.25b

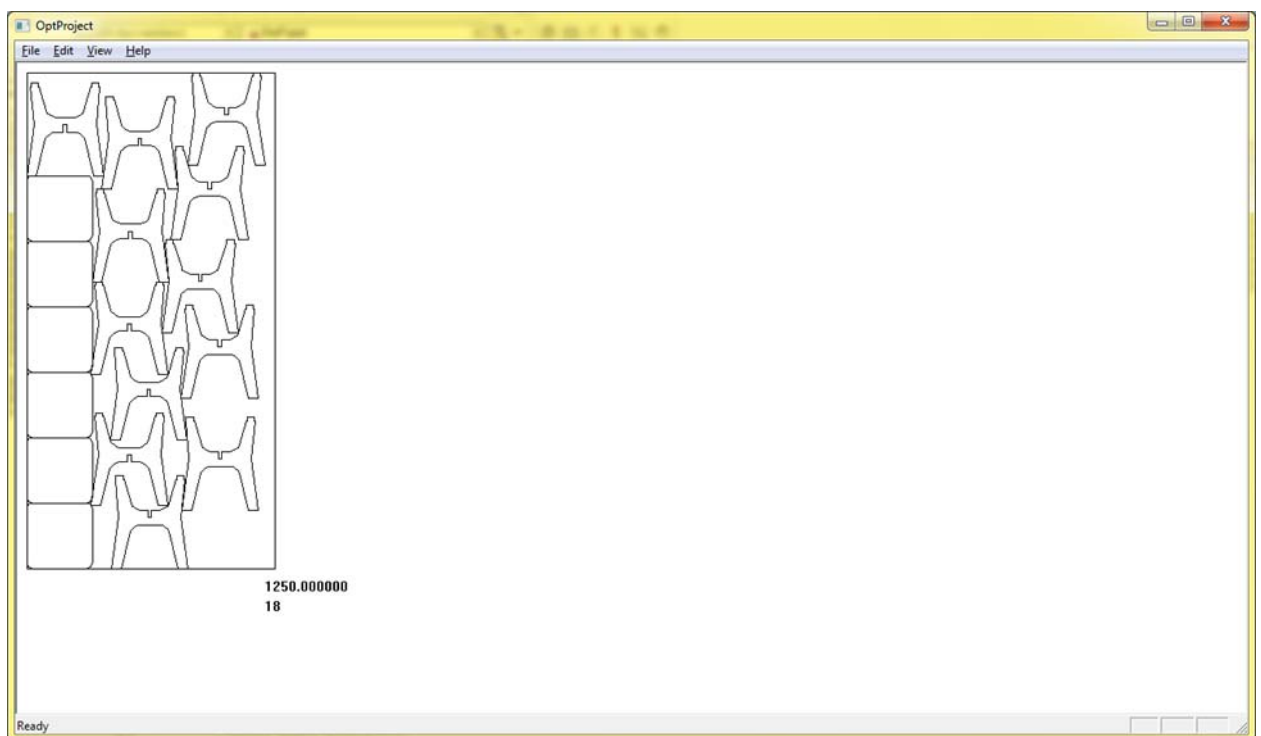


Рис. 4.2 – Результат оптимального розміщення 6 комплектів стільців
при $n_d = 3$

На рис. 4.3 наведено результат оптимального розміщення заданих об'єктів у прямокутній області з такими метричними характеристиками: $l = 2500$ мм, $b = 1250$ мм. Значення параметра дискретизації кута повороту об'єктів розміщення $n_d = 7$.

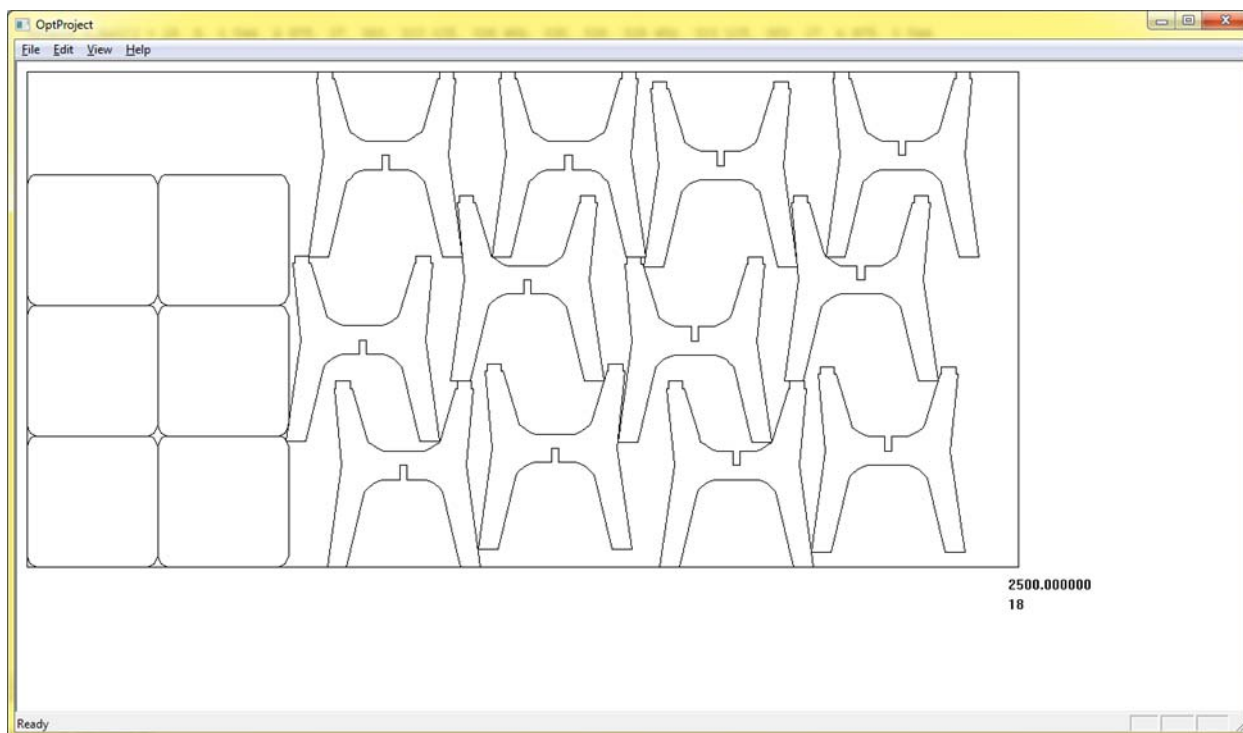


Рис. 4.3 – Результат оптимального розміщення 6 комплектів стільців при $n_d = 7$

Очевидно, що за допомогою розробленого програмного забезпечення досягається збільшення коефіцієнту заповнення матеріалу. Більш того, OptiNest 2.25b, порівняно із зазначеним програмним забезпеченням, не дозволяє розміщувати задані геометричні об'єкти у прямокутниках змінної довжини та багатозв'язних областях.

Розглянемо задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних однозв'язних областях змінної довжини, при цьому об'єкти розміщення задані так.

Об'єкт 1. Даний об'єкт представлений на рис. 4.4.

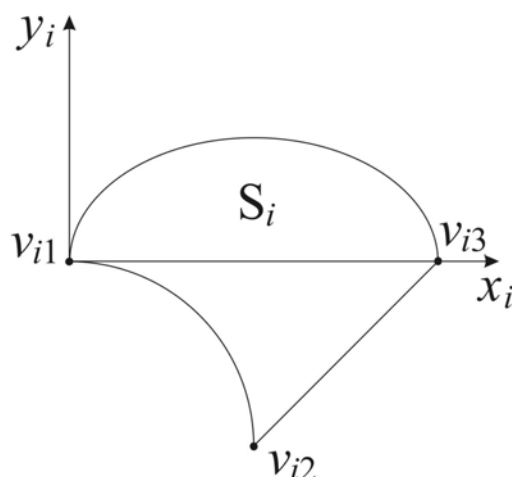


Рисунок 4.4 – Об'єкт розміщення 1

Об'єкт $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ задано координатами вершин у локальній системі координат, нумерація яких здійснюється проти годинникової стрілки: $v_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, \theta_{i1})$, $v_{i2}(x_{i2}, y_{i2}, \theta_{i2})$, $v_{i3}(x_{i3}, y_{i3}, \theta_{i3})$.

Вершини v_{i1} та v_{i2} з'єднані дугою кола:

$$x_i^2 + (y_i + a)^2 = a^2. \quad (4.1)$$

У свою чергу вершини v_{i2} та v_{i3} з'єднані відрізком прямої, а вершини v_{i3} та v_{i1} – дугою еліпса:

$$\frac{(x_i - a)^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} = 1. \quad (4.2)$$

Об'єкт 2. Об'єкт $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ представлений на рис. 4.5 і також заданий координатами вершин у локальній системі координат, нумерація яких здійснюється проти годинникової стрілки: $v_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, \theta_{i1})$,

$v_{i2}(x_{i2}, y_{i2}, \theta_{i2}), v_{i3}(x_{i3}, y_{i3}, \theta_{i3})$.

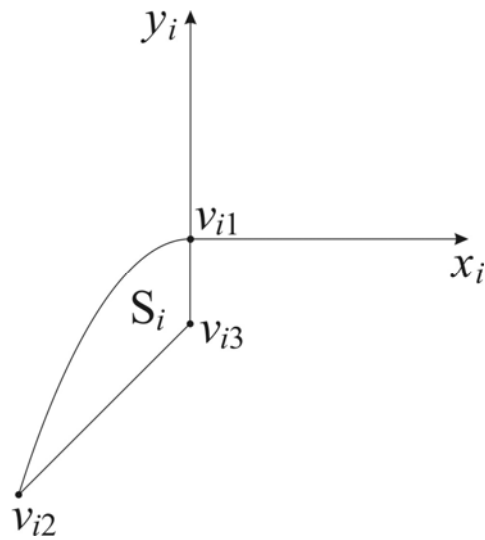


Рисунок 4.5 – Об'єкт розміщення 2

Вершини v_{i1} та v_{i2} з'єднані фрагментом параболи:

$$y_i = -ax_i^2. \quad (4.3)$$

Вершини v_{i2} та v_{i3} , v_{i3} та v_{i1} з'єднані відрізками прямих.

Об'єкт 3. Даний об'єкт представлений на рис. 4.6.

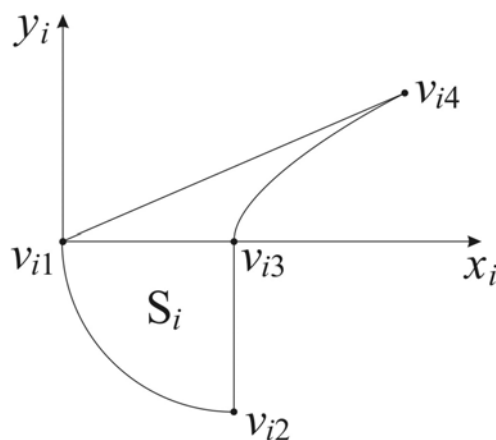


Рисунок 4.6 – Об'єкт розміщення 3

Об'єкт $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ задано координатами вершин у локальній системі координат, нумерація яких здійснюється проти годинникової стрілки: $v_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, \theta_{i1})$, $v_{i2}(x_{i2}, y_{i2}, \theta_{i2})$, $v_{i3}(x_{i3}, y_{i3}, \theta_{i3})$, $v_{i4}(x_{i4}, y_{i4}, \theta_{i4})$.

Вершини v_{i1} та v_{i2} з'єднані дугою кола:

$$(x_i - a)^2 + y_i^2 = a^2. \quad (4.4)$$

Вершини v_{i3} та v_{i4} з'єднані фрагментом гіперболи:

$$\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{y_i^2}{b^2} = 1. \quad (4.5)$$

Вершини v_{i2} та v_{i3} , v_{i4} та v_{i1} з'єднані відрізками прямих.

Об'єкт 4. Об'єкт $S_i(x_i, y_i, \theta_i)$ представлений на рис. 4.7 і також заданий координатами вершин у локальній системі координат, нумерація яких здійснюється проти годинникової стрілки: $v_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, \theta_{i1})$, $v_{i2}(x_{i2}, y_{i2}, \theta_{i2})$, $v_{i3}(x_{i3}, y_{i3}, \theta_{i3})$, $v_{i4}(x_{i4}, y_{i4}, \theta_{i4})$.

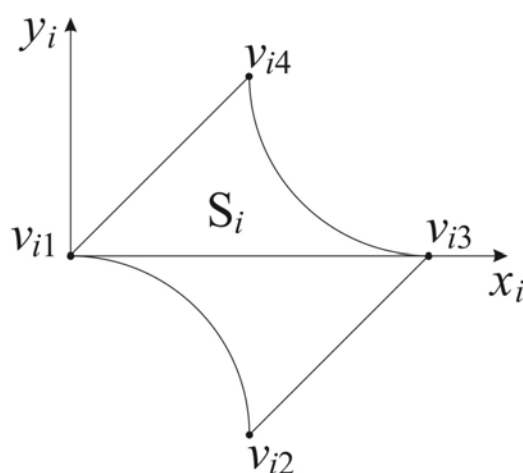


Рисунок 4.7 – Об'єкт розміщення 4

Вершини v_{i1} та v_{i2} з'єднані дугою кола, рівняння якого має вигляд (4.1). Вершини v_{i3} та v_{i4} з'єднані такою дугою кола:

$$(x_i - 2a)^2 + (y_i - a)^2 = a^2. \quad (4.6)$$

Розглянемо задачу розміщення плоских орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній однозв'язній області змінної довжини, причому ширина області дорівнює 300 (задача б).

Загальна кількість об'єктів розміщення $N = 20$, тобто розглядається по 5 об'єктів кожного типу, які наведені вище.

Для об'єктів 1-го типу (рис. 4.4) $a = 120$, $b = 60$ (параметри рівнянь (4.1), (4.2)), а координати вершин у локальній системі координат при $\theta = 0$ дорівнюють: $v_1(0, 0)$, $v_2(120, -120)$, $v_3(240, 0)$.

Для об'єктів 2-го типу (рис. 4.5) $a = \frac{1}{40}$, а координати вершин у локальній системі координат при $\theta = 0$ дорівнюють: $v_1(0, 0)$, $v_2(-60, -90)$, $v_3(0, -30)$.

Для об'єктів 3-го типу (рис. 4.6) $a = 60$, $b = 30$ (параметри рівнянь (4.4), (4.5)), а координати вершин у локальній системі координат при $\theta = 0$ дорівнюють: $v_1(0, 0)$, $v_2(60, -60)$, $v_3(60, 0)$, $v_4(120, 51,96)$.

Для об'єктів 4-го типу (рис. 4.7) $a = 30$, а координати вершин у локальній системі координат при $\theta = 0$ дорівнюють: $v_1(0, 0)$, $v_2(30, -30)$, $v_3(60, 0)$, $v_4(30, 30)$.

Розв'язання даної задачі наведено на рис. 4.8. Значення цільової функції (довжина зайнятої частини області розміщення) дорівнює $l = 851,18$.

Очевидно, що виконуються всі обмеження задачі, тобто обмеження на взаємний неперетин об'єктів розміщення та належність даних об'єктів прямокутній однозв'язній області змінної довжини.



Рисунок 4.8 – Результат розв’язання задачі 6

Розглянемо результати моделювання оптимального розміщення орієнтованих та неорієнтованих об’єктів з кусочно-нелінійними границями ($N = 20$), метричні характеристики яких наведені вище, у прямокутних однозв’язних областях змінної довжини (задача 5). Слід зазначити, що у якості орієнтованих об’єктів розміщення розглядалися об’єкти третього типу (рис. 4.6).

На рис. 4.9 наведено розв’язання задачі 5 при значенні параметра дискретизації кутів повороту локальних систем координат неорієнтованих об’єктів розміщення $n_d = 2$, при цьому орієнтовані об’єкти розміщення виділено темним кольором.

Значення цільової функції задачі у цьому випадку дорівнює $l = 735,35$, тобто спостерігається її зменшення порівняно із задачею 6 на 13,6%.

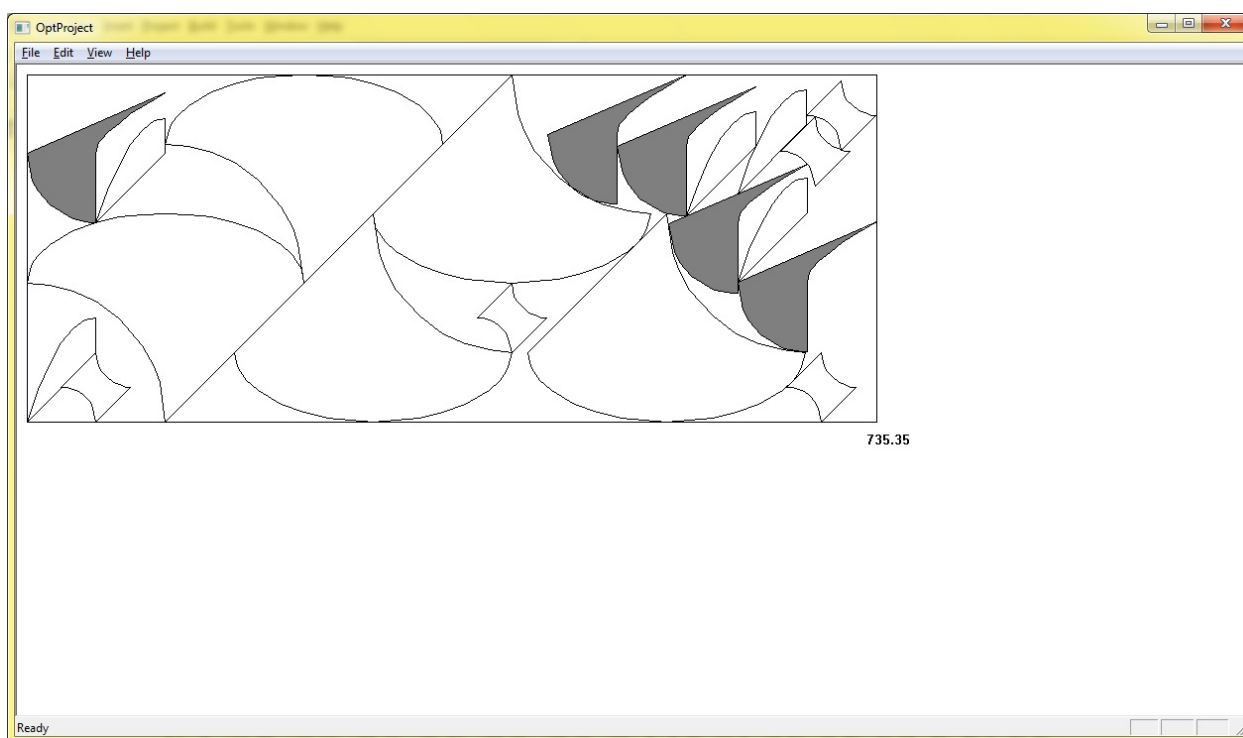


Рисунок 4.9 – Результат розв’язання задачі 5 при $n_d = 2$

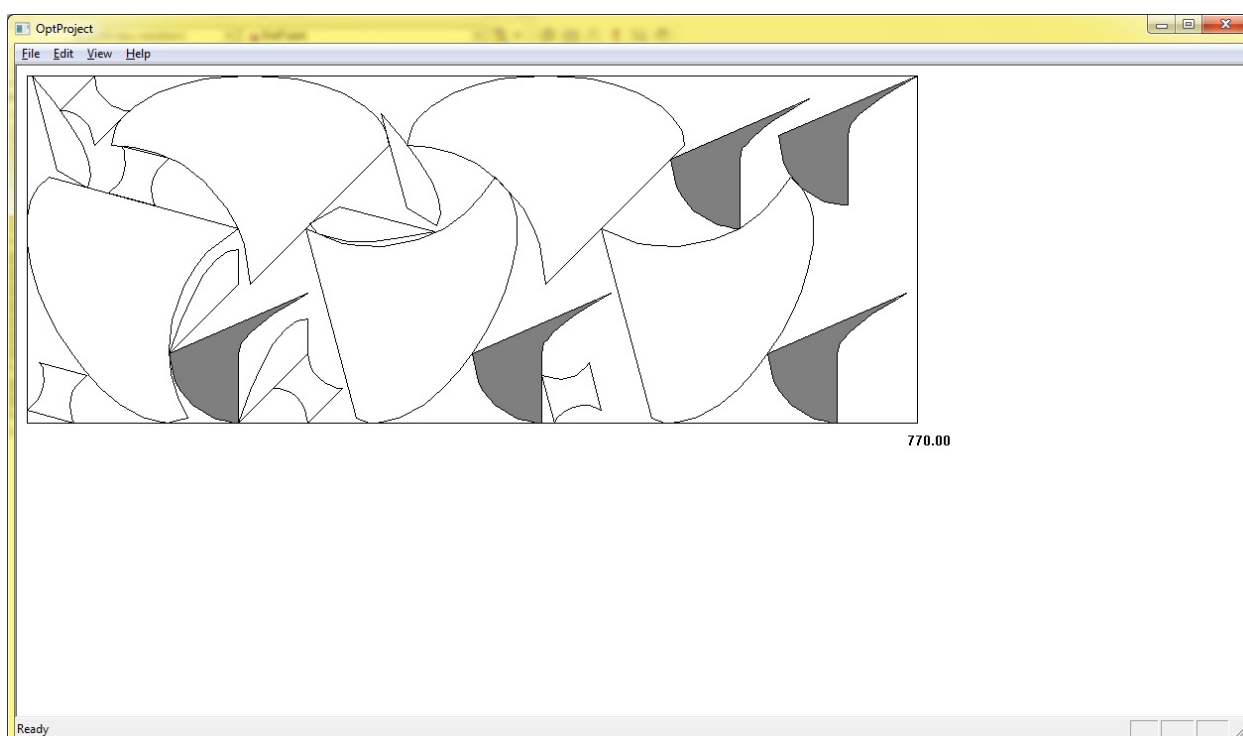


Рисунок 4.10 – Результат розв’язання задачі 5 при $n_d = 3$

На рис. 4.10 наведено результат розв’язання даної задачі при $n_d = 3$.
Очевидно, що у даному випадку цільова функція має значення на 9,4%

менше, ніж для задачі 6, але на 4,7% більше, ніж при $n_d = 2$.



Рисунок 4.11 – Результат розв’язання задачі 5 при $n_d = 4$



Рисунок 4.12 – Результат розв’язання задачі 5 при $n_d = 5$

На рис. 4.11 – 4.14 наведено результати розв'язання задачі 5 для $n_d = 4, \dots, 7$.

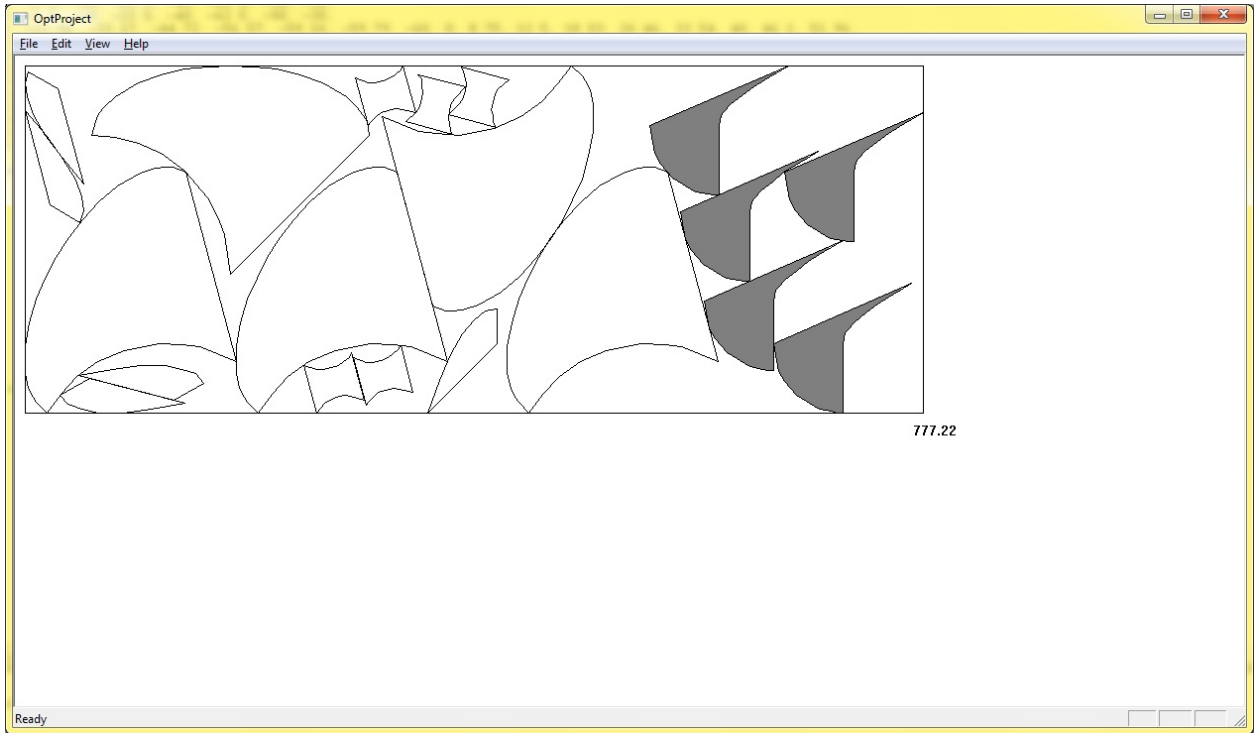


Рисунок 4.13 – Результат розв'язання задачі 5 при $n_d = 6$

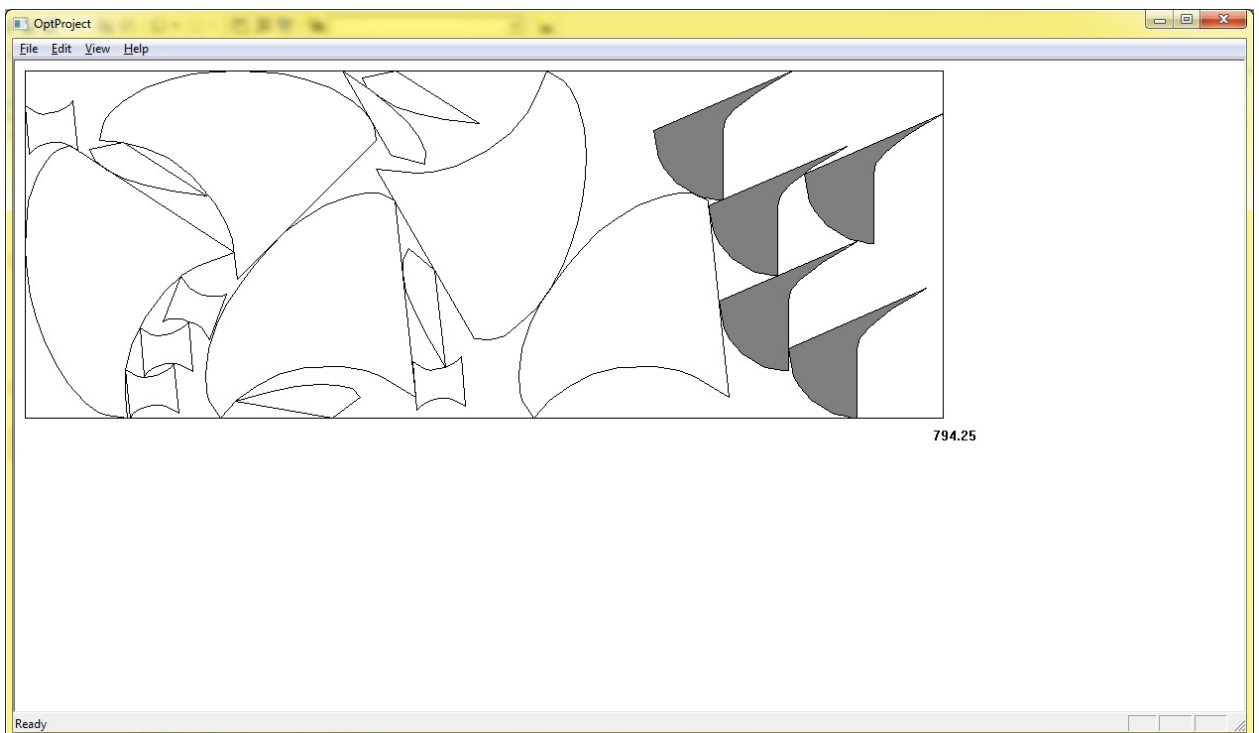


Рисунок 4.14 – Результат розв'язання задачі 5 при $n_d = 7$

Можна також зробити висновок, що постійне збільшення значення параметра дискретизації кута повороту локальних систем координат неорієнтованих об'єктів розміщення не призводить до постійного зменшення значень цільової функції задачі.

Для розглянутих випадків краще значення цільової функції $l = 735,35$ досягається при $n_d = 2$.

Розглянемо *задачу 4*, тобто оптимальне розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями ($N = 20$), метричні характеристики яких наведені при дослідженні задачі 6, у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини, ширина якої дорівнює 300.

На рис. 4.15 наведено результат комп'ютерного моделювання при значенні параметра дискретизації $n_d = 2$.

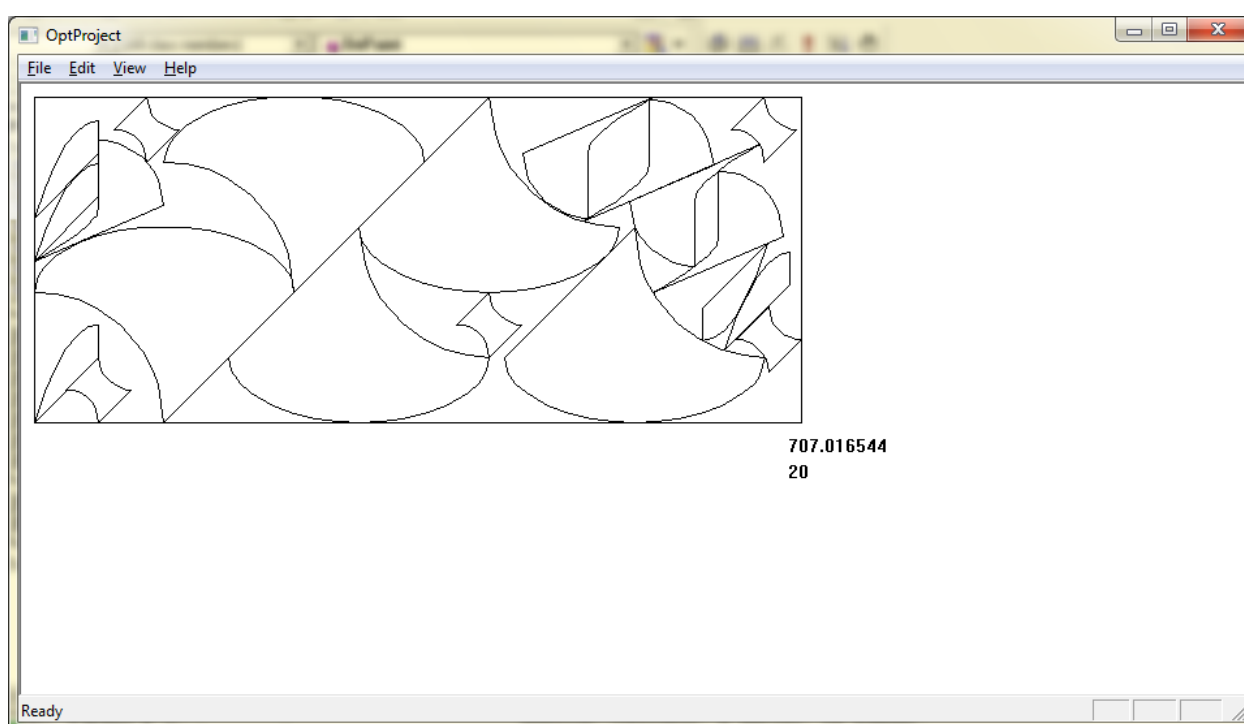


Рисунок 4.15 – Результат розв'язання задачі 4 при $n_d = 2$

У даному випадку значення цільової функції дорівнює $l = 707,02$, що на 16,9% менше, ніж у задачі 6, та на 3,9% менше, ніж краще значення

цільової функції у задачі 5.



Рисунок 4.16 – Результат розв’язання задачі 4 при $n_d = 3$



Рисунок 4.17 – Результат розв’язання задачі 4 при $n_d = 4$

На рис. 4.16 – 4.20 наведено результати розв'язання задачі 4 при $n_d = 3, \dots, 7$.

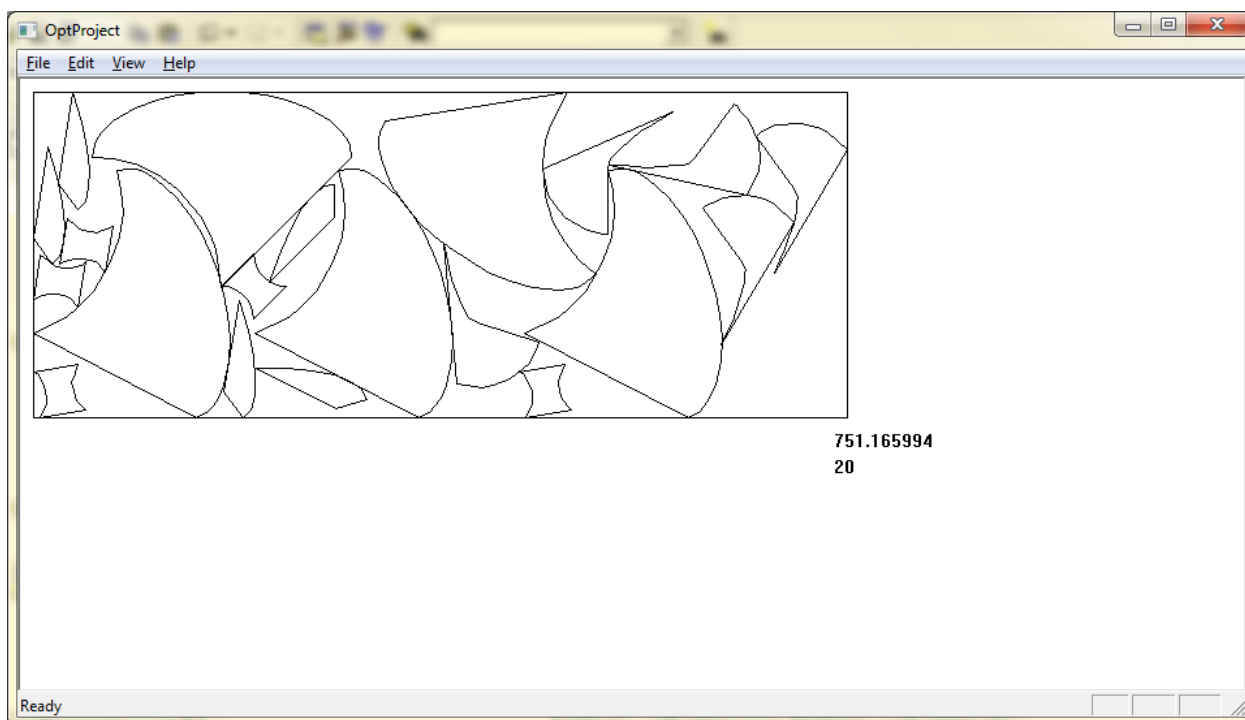


Рисунок 4.18 – Результат розв'язання задачі 4 при $n_d = 5$

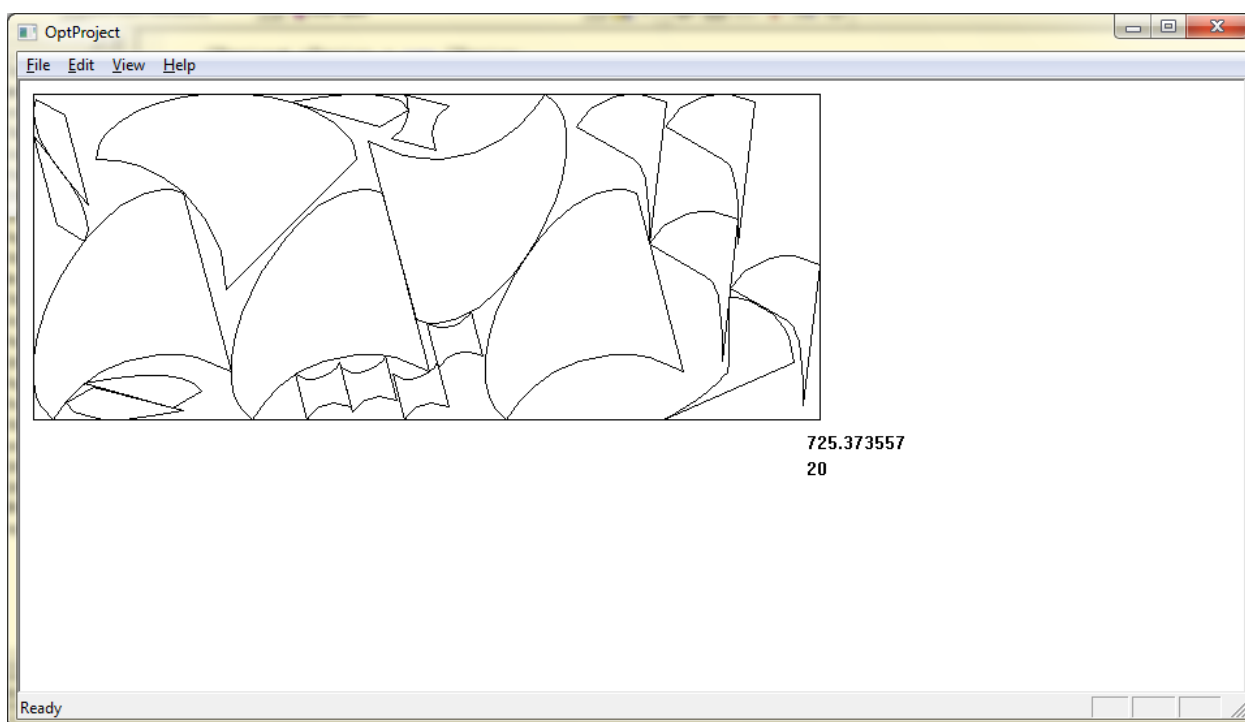


Рисунок 4.19 – Результат розв'язання задачі 4 при $n_d = 6$

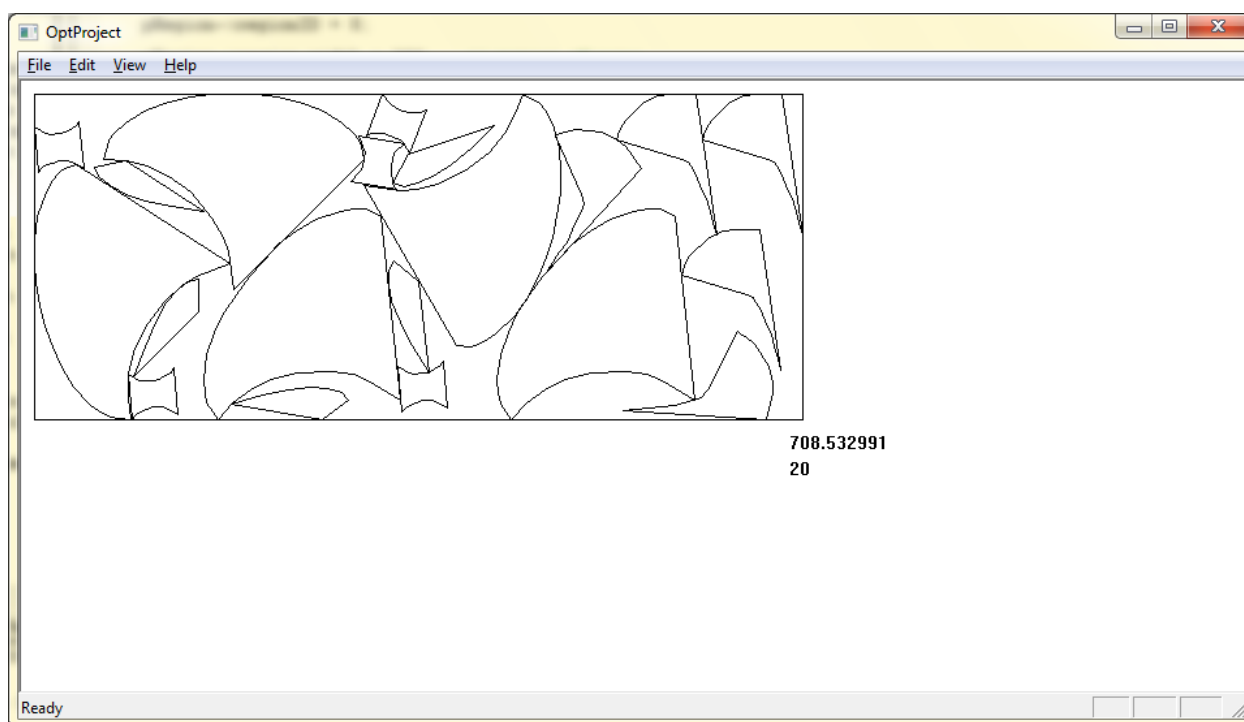


Рисунок 4.20 – Результат розв’язання задачі 4 при $n_d = 7$

Таким чином, краще (найменше) значення цільової функції для випадків розв’язання задачі 4, наведених на рис. 4.15 – 4.20, становить $l = 703$ при $n_d = 4$, що на 17,4% менше, ніж для задачі 6, та на 4,4% менше, ніж для задачі 5.

Можна зробити висновок, що використання неорієнтованих об’єктів з кусочно-нелінійними границями (порівняно з орієнтованими об’єктами) у якості об’єктів розміщення призводить до зменшення цільової функції задачі (довжини зайнятої частини області розміщення). Тобто при розв’язанні прикладних задач за відсутності жорстких обмежень на орієнтацію реальних об’єктів їх доцільно представляти за допомогою саме класу неорієнтованих об’єктів, або розглядати змішані задачі, де певні об’єкти розміщення можуть бути представленими за допомогою орієнтованих об’єктів, а деякі – за допомогою неорієнтованих.

4.3 Моделювання оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини

Розглянемо результати моделювання оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини.

Разом з тим, для дослідження ефективності використання неорієнтованих об'єктів розглянемо спочатку *задачу 3*, тобто задачу оптимального розміщення орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини.

У даному випадку ширина прямокутної області дорівнює 300, причому у якості областей «заборони» розглядаються 3 об'єкта 4-го типу (рис. 4.7), метричні характеристики яких задані аналогічно до задачі 6 (п. 4.2). Параметри розміщення даних об'єктів є такими: $S_{0,1}(100,100)$, $S_{0,2}(300,200)$, $S_{0,3}(500,150)$.

Необхідно розмістити множину орієнтованих об'єктів ($N=15$), яка складається з 5-ти об'єктів 1-го, 2-го та 3-го типів, таким чином, щоб довжина зайнятої частини заданої області була мінімальною.

Розв'язок даної задачі наведено на рис. 4.21, при цьому цільова функція дорівнює $l=908,25$.

Розглянемо задачу одночасного розміщення у заданій багатозв'язній області орієнтованих та неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями (*задача 2*). Слід зазначити, що орієнтованими об'єктами є об'єкти 3-го типу.

Так, при значенні параметра дискретизації кутів повороту локальних систем координат неорієнтованих об'єктів $n_d=2$ одержано цільову функцію задачі (рис. 4.22), яка дорівнює $l=804,41$, що на 11,4% менше, ніж у задачі 3.

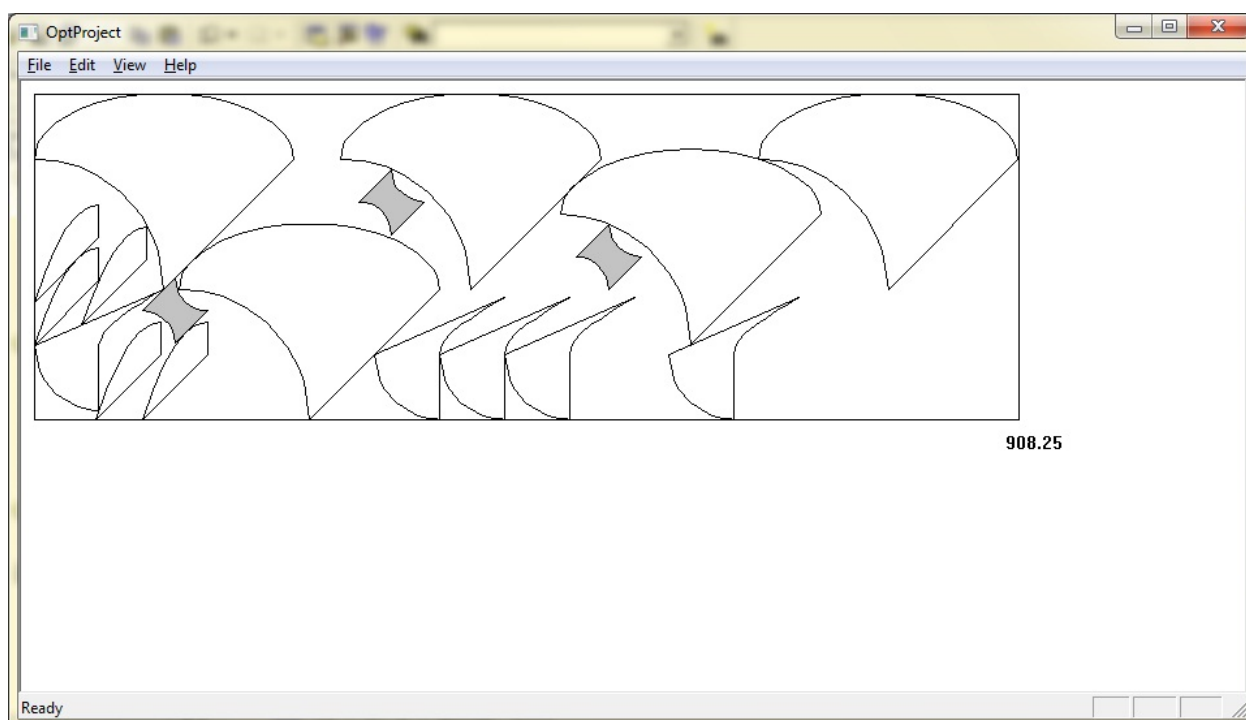


Рисунок 4.21 – Результат розв’язання задачі 3

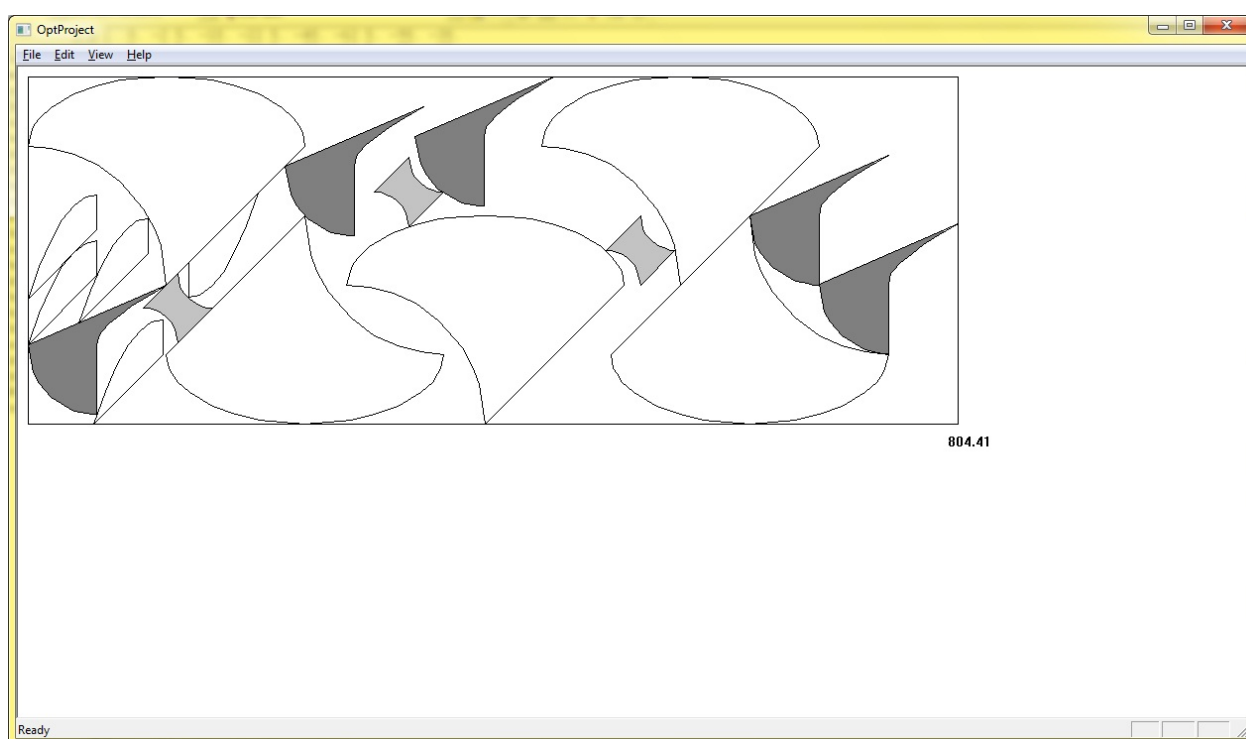


Рисунок 4.22 – Результат розв’язання задачі 2 при $n_d = 2$

На рис. 4.23 – 4.26 наведено результати розв’язання задачі 2 при $n_d = 4, \dots, 7$.



Рисунок 4.23 – Результат розв'язання задачі 2 при $n_d = 4$

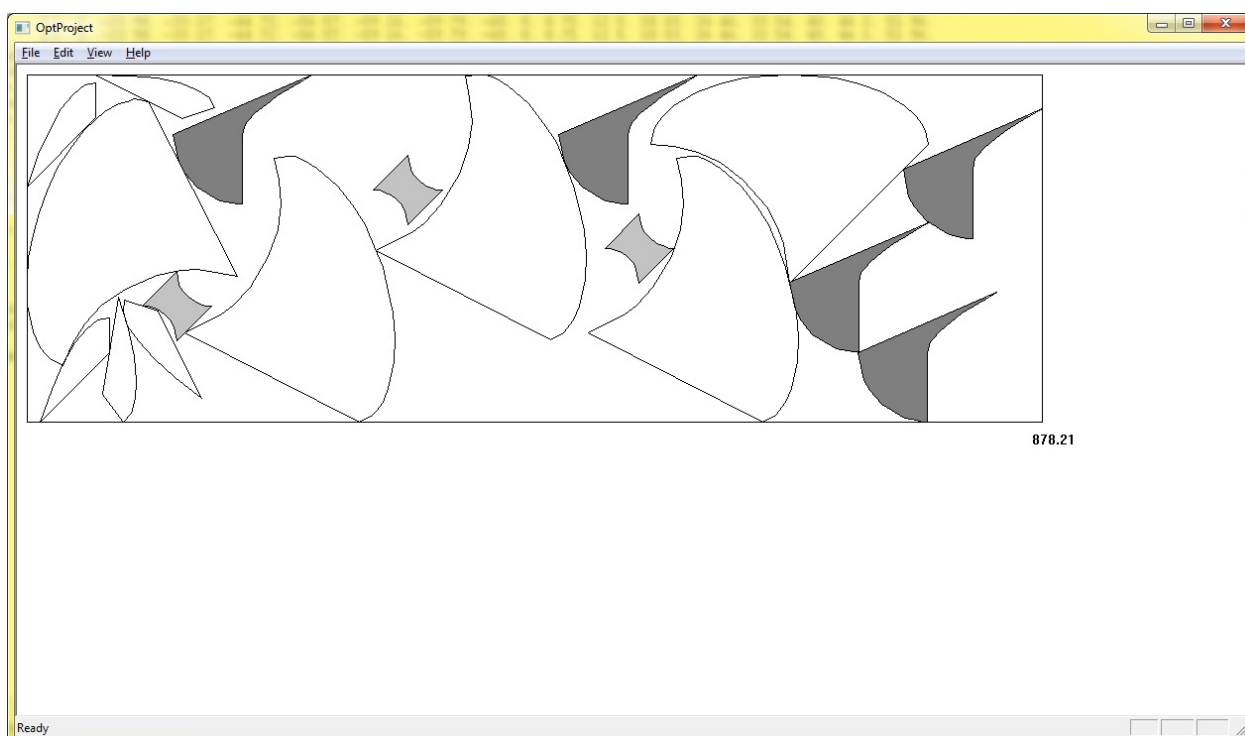


Рисунок 4.24 – Результат розв'язання задачі 2 при $n_d = 5$

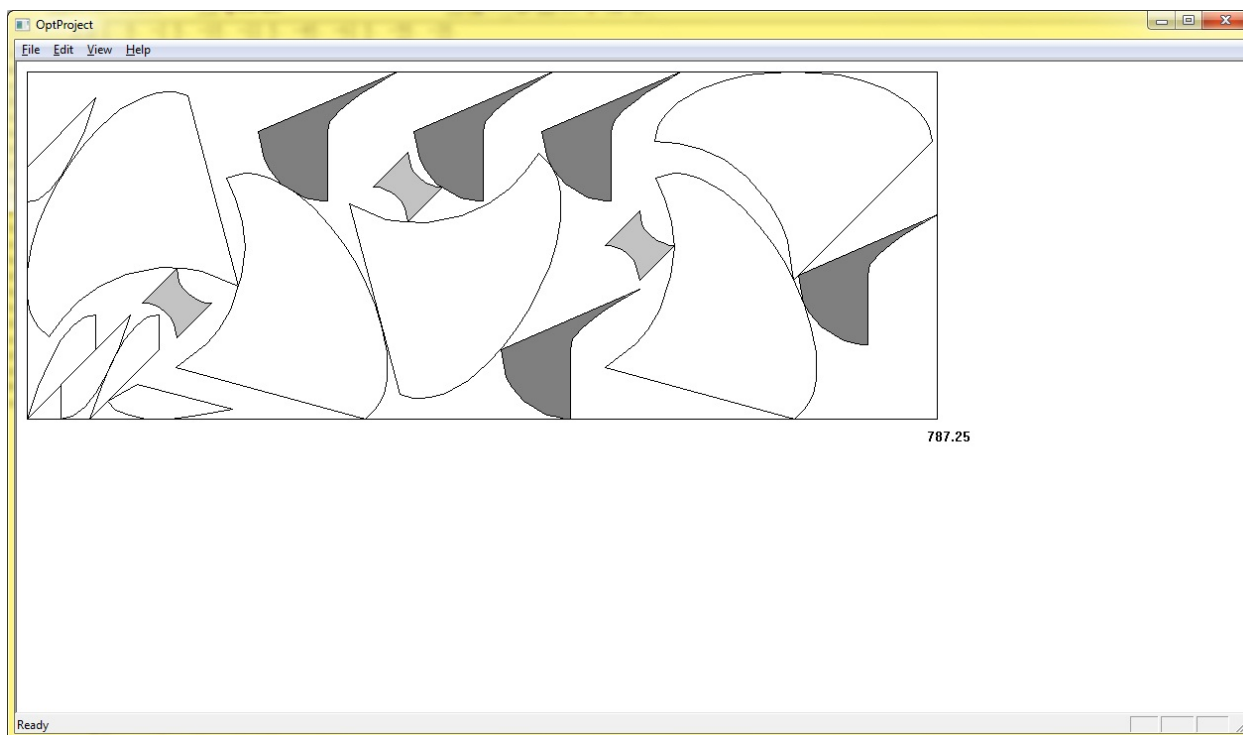


Рисунок 4.25 – Результат розв’язання задачі 2 при $n_d = 6$



Рисунок 4.26 – Результат розв’язання задачі 2 при $n_d = 7$

Очевидно, що серед наведених результатів комп’ютерного моделювання оптимального розміщення орієнтованих та неорієнтованих

об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини найкраще (найменше) значення цільової функції досягнуто при значенні параметра дискретизації кутів повороту локальних систем координат неорієнтованих об'єктів $n_d = 6$, тобто $l = 787,25$, що на 13,3% менше, ніж в задачі 3.

Також можна відмітити поступове зростання значень цільової функції при $n_d = 2, \dots, 5$, її зменшення при $n_d = 6$ і знов зростання при $n_d = 7$.

Розглянемо загальну задачу, тобто оптимальне розміщення 15-ти неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини (*задача 1*).

На рис. 4.27 наведено результати комп'ютерного моделювання розміщення неорієнтованих об'єктів при значенні $n_d = 2$.



Рисунок 4.27 – Результат розв'язання задачі 1 при $n_d = 2$

Треба відзначити, що у даному випадку значення цільової функції

менше, ніж краще значення цільової функції в задачі 2.



Рисунок 4.28 – Результат розв’язання задачі 1 при $n_d = 3$

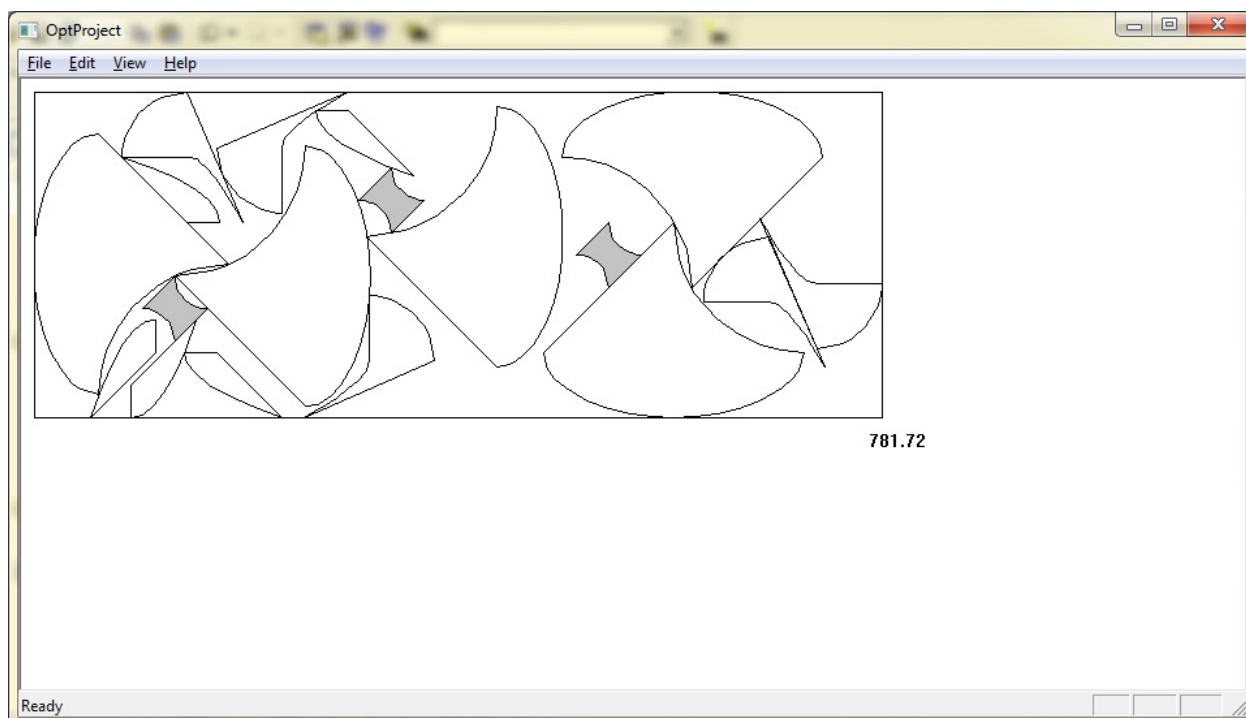


Рисунок 4.29 – Результат розв’язання задачі 1 при $n_d = 4$

На рис. 4.28 – 4.32 наведено результати розв’язання задачі 1 при

$$n_d = 3, \dots, 7.$$



Рисунок 4.30 – Результат розв’язання задачі 1 при $n_d = 5$

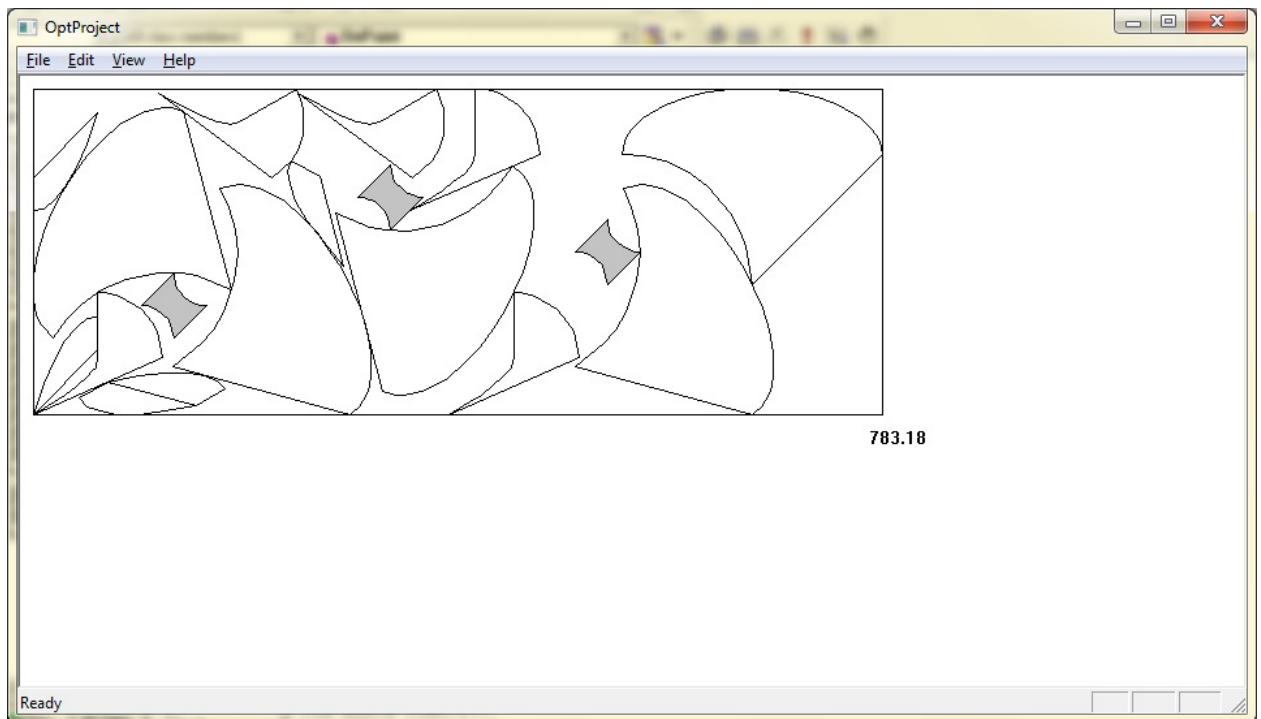


Рисунок 4.31 – Результат розв’язання задачі 1 при $n_d = 6$

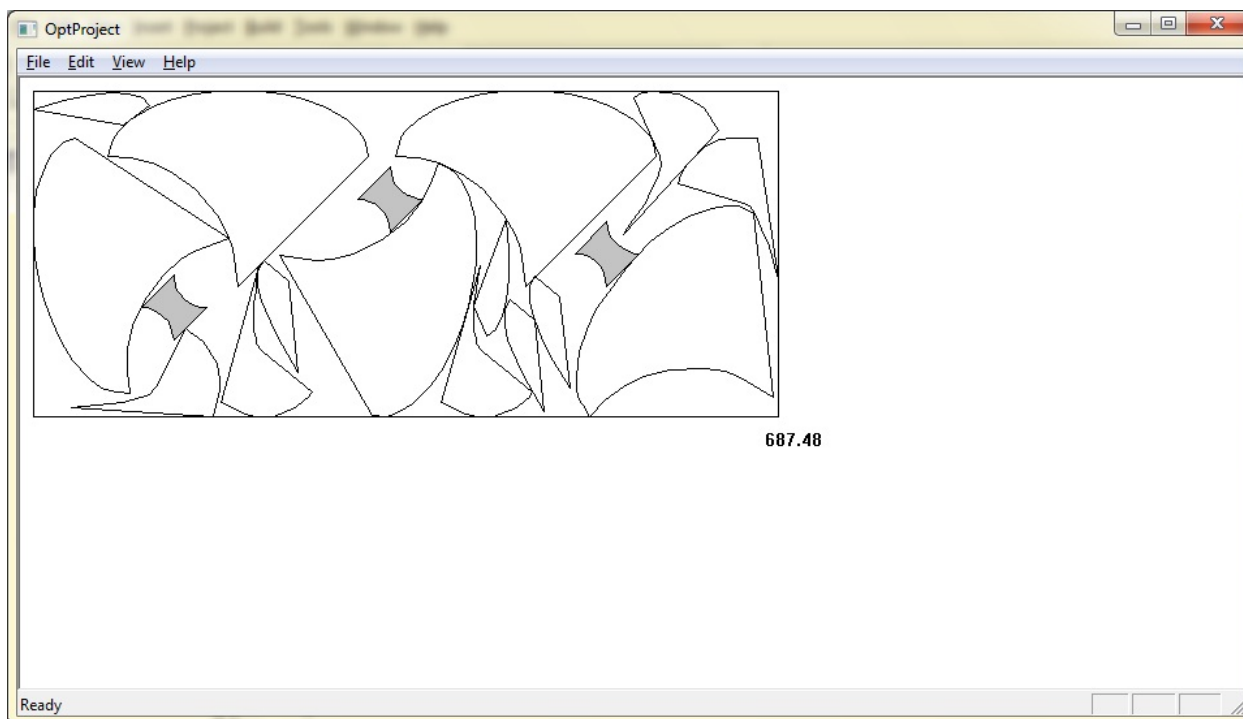


Рисунок 4.32 – Результат розв’язання задачі 1 при $n_d = 7$

Для наведених на рис. 4.27 – 4.32 прикладів найменше значення цільової функції $l = 687,48$ досягнуто при значенні параметра дискретизації кутів повороту локальних систем координат неорієнтованих об’єктів $n_d = 7$. Це на 24,3% менше ніж значення цільової функції в задачі 3 та на 12,7% – ніж в задачі 2, що також свідчить про перевагу використання неорієнтованих об’єктів у задачах оптимального розміщення.

Слід зауважити, що вибір параметра дискретизації кутів повороту локальних систем координат неорієнтованих об’єктів не обмежується значеннями, які наведені для задач 1–6, є довільним і залежить від особливостей задачі оптимального розміщення, обчислювальних ресурсів тощо.

Було проведено вплив значення параметра дискретизації на час розв’язання задачі оптимізації (рис. 4.33), причому кількість об’єктів розміщення дорівнювала 20. Очевидно, що дана залежність є лінійною, що

підтверджує вірогідність одержаних оцінок складності модифікованого методу імітації відпалу (3.14) та (3.16).

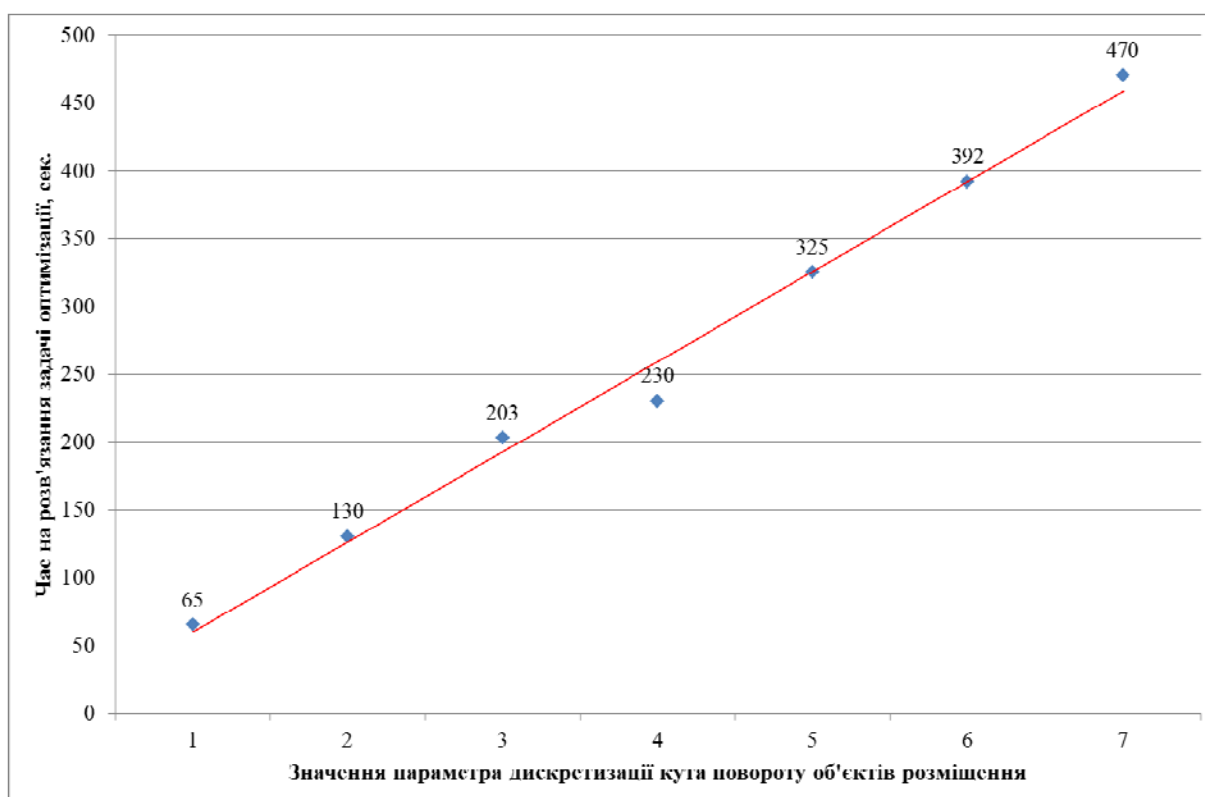


Рисунок 4.33 – Залежність часу розв'язання задачі оптимізації від значень параметра дискретизації кутів повороту

Результати розв'язання задач оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини одержано на комп'ютері з процесором Intel Core2 1,80 GHz, при цьому параметри модифікованого методу імітації відпалу дорівнювали: $T_0 = 500$, $T_{\min} = 20$, $q = 0,7$,

$$p\left(\frac{\Delta E}{T}\right) \geq 0,7.$$

ВИСНОВКИ

Монографію присвячено розробці методу геометричного моделювання перерізів поверхні дотику плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями для оптимізації розміщення зазначеного класу об'єктів у багатозв'язних областях.

Значення для науки даної роботи полягає у подальшому розвитку класу задач оптимізаційного геометричного проектування за рахунок розробки моделей та методів геометричного моделювання оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини.

Значення для практики монографії полягає у тому, що розроблені моделі та методи дозволили здійснити побудову карт розкрою з більш економним використанням матеріалу за рахунок розв'язання задачі оптимізації та використання неорієнтованих об'єктів розміщення, дозволили врахувати наявні дефекти матеріалу або розв'язувати задачу оптимізації з урахуванням вже розміщених геометричних об'єктів, дозволили скоротити час формування карт розкрою за рахунок автоматизації їх моделювання.

При цьому отримано результати, що мають науково-практичну цінність:

1. Здійснено аналіз літературних джерел за темою дисертаційних досліджень, який дозволив зробити висновок про те, що на теперішній час не існує моделей та методів оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних областях змінної довжини. Здійснено постановку задачі оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів у багатозв'язних та одностов'язних областях, задач одночасного розміщення неорієнтованих та орієнтованих геометричних об'єктів і задач оптимального розміщення орієнтованих об'єктів у зазначених областях [206, 208].

2. Побудовано загальну модель оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній багатозв'язній області змінної довжини та досліджено її особливості у випадку одночасного розміщення неорієнтованих та орієнтованих об'єктів (тільки орієнтованих об'єктів) у багатозв'язних та однозв'язних областях. Відзначено, що цільова функція є неаналітичною, а обмеження моделі є як лінійними, так і нелійними, причому їх загальна кількість дорівнює $C_N^2 + N \cdot (1 + N_R)$. Область припустимих розв'язків, у загальному випадку, є обмеженою та незв'язною. Це дозволило розробити обґрунтовані методи оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у заданих областях [209, 212, 213].

3. Розроблено метод геометричного моделювання перерізів поверхні дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями, а також перерізів поверхні дотику зазначених об'єктів із багатозв'язною областю розміщення, що дозволило формалізувати та надати геометричну інтерпретацію обмеженням побудованої загальної моделі оптимального розміщення зазначених об'єктів у багатозв'язних областях. Зроблено висновок, що у загальному випадку умова дотику двох плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями може бути представлена гіперповерхнею у просторі R^6 [207, 214].

4. Розроблено модифіковані методи оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних багатозв'язних та однозв'язних областях змінної довжини, основою яких є метод імітації відпалу, метод гілок та меж. Порівняння оцінок складності розроблених методів дозволило обґрунтувати використання модифікованого методу імітації відпалу для розв'язання практичних задач оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язних та

однозв'язних областях, а також розробити алгоритмічне та програмне забезпечення [210, 211, 213 – 215].

5. Розроблено алгоритмічне та програмне забезпечення, здійснено комп'ютерне моделювання оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутних однозв'язних та багатозв'язних областях змінної довжини. Це дозволило з позицій прикладної геометрії розв'язувати широке коло практичних задач, які у своїх постановках можуть бути зведеними до задач оптимального розміщення неорієнтованих об'єктів, а також здійснити більш економне використання матеріалу у порівнянні із розміщенням аналогічних орієнтованих об'єктів (досягається зменшення цільової функції від 13,3% до 24,3%) [214].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Михайленко В.Є. Сучасний стан методів геометричного та комп'ютерного моделювання та напрямки їх розвитку / В.Є. Михайленко, О.В. Черніков // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 68. – С. 3-6.
2. Михайленко В.Е. Прикладная геометрия в Украине / В.Е. Михайленко // Современные проблемы геометрического моделирования: сборник трудов украино-российской научно-практической конференции. Спец. выпуск. – Харьков, 2005. – С. 5-14.
3. Михайленко В.Є. Еволюція змісту і значення нарисної геометрії за 70 років / В.Є. Михайленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2000. – Вип. 67. – С. 5-10.
4. Михайленко В.Є. Геометричне моделювання в ергономіці / В.Є. Михайленко, Ю.М. Ковальов // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 1999. – Т. 10. – С. 8-13.
5. Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник / В.Є. Михайленко [та ін.]; за ред. В.Є. Михайленко. – 2-ге вид., перероб. – К.: Вища школа, 2001. – 350 с.
6. Формообразование большепролетных покрытий в архитектуре: монография / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалев, К.А. Сазонов; ред. В.Е. Михайленко.– К.: Вища школа, 1987. – 191 с.
7. Інженерна та комп'ютерна графіка: підручник для студ. вищих закл. освіти / В. Є. Михайленко [та ін.] ; ред. В. Є. Михайленко. – 3.вид. – К.: Каравела, 2004. – 339 с.
8. Подгорный А.Л. Геометрическое моделирование пространственных конструкций: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / Подгорный Алексей Леонтьевич. – М., 1975. – 371 с.

9. Pidgorny O.L. From the theory of the maps to geometrical modelling of objects, phenomena and processes / O.L. Pidgorny // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 32-38.

10. Подгорный А.Л. Некоторые результаты и перспективы развития прикладной геометрии в архитектурно-строительной области / А.Л. Подгорный // Современные проблемы геометрического моделирования: сборник трудов украино-российской научно-практической конференции. Спец. выпуск. – Харьков, 2005. – С. 32-39.

11. Підгорний О.Л. Поверхні сонячних променів як особливий випадок торсових поверхонь однакового схилу / О.Л. Підгорний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2013. – Вип. 91. – С. 211-218.

12. Світлопрозорі огороження будинків: навч. посібник для студентів ВНЗ / [О.Л. Підгорний, І.М. Щепетова, О.В. Сергейчук, О.М. Зайцев, В.П. Процюк]; під заг. ред. О.Л. Підгорний.– К. : Издатель Домашевская О. А., 2005.– 282 с.

13. Kovalev S.M. Main directions in the development of discrete applied geometry of curves and surfaces / S.M. Kovalev, L.S. Ivanova // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 67-71.

14. Ковалев С.Н. Статико-геометрический способ формирования дискретных сетей / С.Н. Ковалев // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К., 1989. – Вып. 48. – С. 17-19.

15. Ковальов С.М. Локальні інтерполяції дугами клотоїди з другим порядком гладкості / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 71. – С. 31-34.

16. Ковальов С.М. Одновимірна дискретна локальна інтерполяція з використанням кубічного поліному / С.М. Ковальов, О.І. Ахматшина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 77. – С. 21-25.

17. Ковальов С.М. Параметричний аналіз багатогранників / С.М. Ковальов, О.І. Ахматшина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 68. – С. 29-30.

18. Ковальов С.М. Параметризація симплексів у багатовимірних просторах / С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2005. – Вип. 75. – С. 16-19.

19. Ковальов С.М. Формоутворююча роль зовнішнього навантаження в статико-геометричному методі / С.М. Ковальов, О.І. Ахматшина // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 2. – С. 43-50.

20. Ковалев С.Н. Свойства некоторых параболоидов n-го порядка / С.Н. Ковалев, С.И. Ботвиновская, А.В. Мостовенко // Управління розвитком складних систем. – 2015. – № 22 (1). – С. 134-137.

21. Плоский В.О. Методологічна парадигма прикладної геометрії та зміст паспорту спеціальності 05.01.01 / В.О. Плоский // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2007. – Вип. 78. – С. 23-26.

22. Плоский В.О. Принципи системності в прикладній геометрії та шляхи їх реалізації / В.О. Плоский, Р.М. Баглюк // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 88. – С. 16-20.

23. Плоский В.О. Системна класифікація ММР: поняття та активне використання / В.О. Плоский, С.А. Кожедуб // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 182-188.

24. Плоский В.О. Методика побудови складчастої трансформованої системи S_n / В.О. Плоский, І.С. Лісун // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 2. – С. 83-87.

25. Тривимірні параметричні моделі елементів м'яких меблів / Сазонов К.О., Анпілогова В.О., Демченко В.В. [та ін.] // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2001. – Вип. 69. – С. 26-29.

26. Sazonov K.O. Development of computer-aided graphic spatial modeling / K.O. Sazonov // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2002. – Вип. 70. – С. 91-93.

27. Сазонов К.О. Створення з'єднувальної сітки на основі цифрових зображень у комп'ютерній технології проектування двомірного вантажу [Електронний ресурс] / К.О. Сазонов, А.О. Петрушевський // Технічна естетика і дизайн. – 2013. – Вип. 12. – С. 190-194. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/technect_2013_12_32.

28. Сазонов К.А. Компьютерное формообразование поверхностей вращения на перспективных изображениях по линиям очертания [Електронний ресурс] / К.А. Сазонов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 298-301. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig_2012_90_55.

29. Сергейчук О.В. Геометричні питання зміни №1 ДБН В.2.6-31: 2006 "Теплова ізоляція будівель" / О.В. Сергейчук, Г.Г. Фаренюк // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 409-414.

30. Сергейчук О.В. О перспективе дальнейшего увеличения теплоизоляции наружных ограждающих конструкций в Украине / О.В. Сергейчук, М.З. Диб // Энергоефективність в будівництві та архітектурі. – 2013. – Вип. 4. – С. 253-258.

31. Сергейчук О.В. Особенности врахування регульованого сонцезахисту у розрахунках сонячних теплонадходжень / О.В. Сергейчук // Будівельні конструкції. – 2014. – Вип. 80. – С. 17-21.

32. Сергейчук О.В. Побудова комплексних сонячних карт за нормативними кліматичними даними / О.В. Сергейчук // Сучасні проблеми моделювання. – 2014. – Вип. 2. – С. 149-153.

33. Злоба В.В. Геометричне моделювання кліматичного районування території України за періодом охолодження / В.В. Злоба, О.В. Сергейчук // Сучасні проблеми моделювання. – 2015. – Вип. 4. – С. 46-51.

34. Ванін В.В. Комп'ютерне геометричне моделювання як інтегруюча основа автоматизованого проектування об'єктів машинобудування / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, О.О. Голова, Г.М. Смаковська // Сучасні проблеми моделювання. – 2014. – Вип. 2. – С. 22-25.

35. Ванін В.В. Здобутки та перспективи розвитку структурно-параметричного геометричного моделювання / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, О.О. Голова, С.Л. Шамбіна // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 69-74.

36. Ванін В.В. Застосування комбінаторно-варіаційного підходу до класифікації геометричних об'єктів / В.В. Ванін, В.Г. Вірченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 53-57.

37. Ванін В.В. Опис стійких положень динамічних систем засобами фрактальної апроксимації / В.В. Ванін, О.В. Залевська // Сучасні проблеми моделювання. – 2015. – Вип. 4. – С. 18-21.

38. Ванін В.В. Метод поліпараметризації як інваріантний компонент комп'ютерного формоутворення [Електронний ресурс] / В.В. Ванін, Г.І. Вірченко // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. – 2016. – Вип. 6, Т. 1. – С. 269-275. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvtdau_2016_6_1_32.

39. Гумен О.М. Інноваційні комп'ютерні технології моделювання багатопараметричних технічних об'єктів і систем / О.М. Гумен, І.Б. Селіна // Проблеми інформатизації: Зб. праць. – К.: ДУТ, НТУ, 2015. – С. 44.

40. Гумен О.М. Про відображення комплексного простору щодо розв'язування задач механіки / О.М. Гумен, Є.В. Мартин, С.Є. Лясковська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип.4. – Т.57. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С.73-78.

41. Gumen O. Geometrical macrostructure analysis of currents in accompanying or opposite flows / O.Gumen, V. Dovgaljuk, V.Mileikovskiy // Proceedings. – Czestochowa, 2014. – P. 120-123.

42. Аушева Н.М. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 3-8.

43. Аушева Н.М. Конструювання плоскої ізотропної кривої на основі рівняння кривої за годографом Піфагора / Н.М. Аушева // Технічна естетика і дизайн. – 2013. – Вип. 12. – С. 7-11.

44. Аушева Н.М. Розробка узагальненого підходу щодо формування кривих та поверхонь дійсного простору на основі ізотропних характеристик / Н.М. Аушева // Технологический аудит и резервы производства. – 2014. – № 3(1). – С. 17-20.

45. Методи отримання інформації про метричні та структурні характеристики трикотажу / Л.Є. Галавська, Т.В. Єліна, А.А. Демчишин, Н.М. Аушева // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 4. – С. 204-207.

46. Аушева Н.М. Моделювання кривих Безье на основі уявних дотичних / Н.М. Аушева, А.Л. Гурін // Сучасні проблеми моделювання. – 2015. – Вип. 4. – С. 9-13.

47. Пилипака С.Ф. Конструювання просторових кривих у функції натурального параметра завданням їх горизонтальних проєкцій / С.Ф. Пилипака // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 276-282.

48. Дослідження руху матеріальної частинки добрива при відцентровому розсіюванні / С.Ф. Пилипака, В.В. Яременко, О.М. Черниш, О.В. Адамчук // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – 2013. – Вип. 43(1). – С. 127-136.

49. Пилипака С.Ф. Конструювання сферичних кривих у функції натурального параметра / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова // Біоресурси і природокористування. – 2013. – Т. 5, № 3-4. – С. 57-62.

50. Пилипака С.Ф. Конструювання гвинтових поверхонь, віднесених до координатних ліній кривини / Т.С. Пилипака, О.А. Пилипака // Технологический аудит и резервы производства. – 2014. – № 1(1). – С. 30-34.

51. Пилипака С.Ф. Аналітичний опис трубчастої поверхні, віднесеної до ліній кривини, у системі супровідного тригранника лінії укосу / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання. – 2014. – Вип. 3. – С. 100-106.

52. Розробка теорії складного руху матеріальної точки по площині / С.Ф. Пилипака, О.В. Адамчук, Ян Франчак, Марош Коренко // Механізація і електрифікація сільського господарства. – 2013. – Вип. 97(1). – С. 69-79.

53. Пилипака С.Ф. Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Абсолютне прискорення. Задачі на динаміку точки / С.Ф. Пилипака, А.В. Чепіжний // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія : Механізація та автоматизація виробничих процесів. – 2015. – Вип. 11. – С. 146-155.

54. Несвідомін В.М. Конструювання гвинтових поверхонь сталої середньої кривини / В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака, О.А. Пилипака // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 216-223.

55. Несвідомін В.М. Поворот зображень на поверхнях, віднесених до просторових ізометричних сіток / В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака, Т.С. Кременець // Сучасні проблеми моделювання. – 2014. – Вип. 3. – С. 93-99.

56. Несвідомін В.М. Комп'ютерні технології дослідження руху частинки по шорстких нерухомих поверхнях на прикладі вертикального

конуса / В.М. Несвідомін // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. – 2012. – Вип. 2, Т. 5. – С. 227-232.

57. Бадаєв Ю.І. Властивості полікоординатних відображень за однією координатою / Ю.І. Бадаєв, Л.П. Лагодіна // Водний транспорт. – 2013. – Вип. 1. – С. 162-168.

58. Бадаєв Ю.І. Комп'ютерна реалізація проектування криволінійних обводів методом NURBS-технологій вищих порядків / Ю.І. Бадаєв, А.О. Блиндарук // Сучасні проблеми моделювання. – 2014. – Вип. 2. – С. 3-8.

59. Бадаєв Ю.І. Дослідження щодо застосування вагових коефіцієнтів в полікоординатних відображеннях / Ю.І. Бадаєв, Л.П. Лагодіна // Водний транспорт. – 2014. – Вип. 2. – С. 140-144.

60. Бадаєв Ю.І. Моделювання плоскої кривої із заданим законом кривини / Ю.І. Бадаєв, І.М. Ганношина // Сучасні проблеми моделювання. – 2015. – Вип. 4. – С. 14-17.

61. Корчинський В.М. Методи підвищення інформаційних показників багатоспектральних зображень на основі ортогоналізації даних / В.М. Корчинський, Д.М. Свинаренко, О.Є. Мацулевич // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – 2014. – Вип. 14, т. 2. – С. 153-158.

62. Voloshin V.I. A Novel Method For Correction Of Distortions And Improvement Of Informational Content In Satellite-Acquired Multispectral Images / V.I. Voloshin, V.M. Korchinsky, M.M. Kharitonov // Advances and Challenges in Multisensor Data and Information Processing. – Vol. 8. – 2007. – P. 315-323.

63. Корчинський В.М. Геометричні характеристики інформативності цифрових багатоспектральних зображень / В.М. Корчинський // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Х., 2009. – Вип. 24. – С. 176-181.

64. Корчинський В.М. Класифікація геометричних форм об'єктів на багатоспектральних растрових зображеннях / В.М. Корчинський, О.В. Кравець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2011. – Вип. 88. – С. 116-120.

65. Корчинский В.М. Совмещение информационных компонент многоспектральных растровых изображений растровой природы на основе их кратномасштабного анализа / В.М. Корчинский, О.В. Кравець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2010. – Вип. 86. – С. 434-438.

66. Гнатушенко В.В. Використання взаємної інформації в задачах обробки проєкційних зображень / В.В. Гнатушенко, В.М. Корчинський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2008. – Вип. 79. – С. 23-28.

67. Гнатушенко В.В. Трансформування та сумісна обробка фотограмметричних сканерних зображень / В.В. Гнатушенко, Л.С. Загородня // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 115-121.

68. Гнатушенко В.В. Інформаційна технологія підвищення просторової розрізненості цифрових супутникових зображень на основі ІСА- та вейвлет-перетворень / В.В. Гнатушенко, О.О. Кавац // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2013. – № 771. – С. 28-32.

69. Гнатушенко В.В. Розпізнавання будівель на цифрових мультиспектральних фотограмметричних зображеннях високого просторового розрізнення / В.В. Гнатушенко, Т.В. Касьяненко, Н.О. Соколова // Нові технології. – 2013. – № 3-4. – С. 58-63.

70. Гнатушенко В.В. Умови та обмеження методів інтелектуальної обробки космічних зображень для подальшого 3D моделювання / В.В. Гнатушенко, О.О. Кавац, Ю.О. Кібукевич // Штучний інтелект. – 2015. – № 1-2. – С. 54-62.

71. Дмитрієва І.С. Дослідження поведінки усамітнених хвиль при натіканні на берег / І.С. Дмитрієва, Д.В. Усік. – Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 2 (85). – Дніпропетровськ, 2013. – С. 167-170

72. Дмитрієва І.С. Дослідження кінематичної моделі маніпуляційного роботу / І.С. Дмитрієва, Д.О. Левченко. – Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Випуск 3 (98). – Днепропетровск, 2015. – С.57-62. (Index Copernicus - IСV 2014: 41.10.)

73. Дмитрієва І.С. Обернена задача кінематики маніпуляційного роботу / І.С. Дмитрієва, Д.О. Левченко. – Вісник Херсонського національного технічного університету. Випуск 3 (54). – Херсон: ХНТУ, 2015. – С.118-121.

74. Дмитрієва І.С. Розрахунок параметрів зубчастого зачеплення та їх проектування / І.С. Дмитрієва, Є.О. Сухойван. - Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Випуск 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С.79-84.

75. Куценко Л.М. Геометричне моделювання результату коливань вантажу при аварійному обриві монтажного стропа / Л.М. Куценко, Р.М. Колочавін // Энергоефективність в будівництві та архітектурі. – 2013. – Вип. 4. – С. 159-164.

76. Куценко Л.М. Опис руху n-ланкового маятника за допомогою операторів системи Maple / Л.М. Куценко, Р.М. Колочавін // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 166-172.

77. Куценко Л.М. Відображення Пуанкаре для гравітаційного більярда при відсутності перескоку на сусідню півплощину / Л.М. Куценко, О.В. Адашевський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Київ: КНУБА, 2011. – Вип.87. – С. 233-239.

78. Куценко Л.М. Опис роздільних поверхонь, що обмежують у фазовому просторі гілки фазових кривих / Л.М. Куценко, М.М. Пікрасов //

Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – Вип. 4. – Т. 38. – С. 21-27.

79. Шоман О.В. Використання поверхонь однакового нахилу для одержання сімей паралельних кривих / О.В. Шоман // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 49. – С. 11–16.

80. Тормосов Ю.М. Геометричне моделювання та оптимізація процесу теплової променевої обробки харчових продуктів : автореф. дис ... д-ра техн. наук : 05.01.01 / Юрій Михайлович Тормосов. – К., 2004.– 35 с.

81. Черников А.В. Геометрические модели в исследованиях физических и технологических процессов / А.В. Черников // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наук. праць – Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип. 17. – С. 159-163.

82. Черніков О.В. Основні напрямки геометричного та комп'ютерного моделювання фізичних та технологічних процесів / О.В. Черніков // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наук. праць – Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип. 19. – С. 168-182.

83. Шатохін В.М. Моделювання динамічних процесів у роторно-планетарних гідромашинах з епітрохійдним контуром робочої порожнини / В.М. Шатохін, С.В. Росоха, Д.В. Воронцова // Машинознавство. – 2009. – № 7. – С. 14-22.

84. Гавриленко Є.А. Варіативне дискретне геометричне моделювання на основі просторових кутових параметрів дискретно представлені кривої другого порядку гладкості / Є.А. Гавриленко, А.В. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 102-108.

85. Найдиш В.М. Алгебра БН-исчисления / В.М. Найдиш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 210-215.

86. Застосування методу рухомого симплексу для моделювання багатофакторних процесів / Є.В. Конопацький, І.Г. Балюба, А.В. Найдиш, В.М. Верещага // Сучасні проблеми моделювання. – 2014. – Вип. 3. – С. 69-72.

87. Найдиш А.В. Управління формою дискретно представленої кривої при накладанні декількох умов моделювання / А.В. Найдиш, Д.В. Спірінцев, В.А. Строкань // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 206-209.

88. Кучеренко В.В. Формалізовані, засобами точкового числення Балюби-Найдиша, геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченної множини точок / В.В. Кучеренко, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 231-235.

89. Визначення площі сегмента, обмеженого дугою кривої / В.М. Верещага, О.М. Павленко, А.Я. Чураков, О.С. Лебідько // Сучасні проблеми моделювання. – 2015. – Вип. 4. – С. 22-25.

90. Мартин Є.В. Замкнені області комплексного простору / Є.В. Мартин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип.77. – С.25-29.

91. Кокоч М.В. Моделювання фактичного затуляння в залі театру з ламаними в плані рядами місць / М.В. Кокоч, Є.В. Пугачов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 206-210.

92. Гарбарук Ю.В. Порівняння методів розрахунку ефективності циліндричних дзеркально відбиваючих світлових шахт / Ю.В. Гарбарук, Є.В. Пугачов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 79-83.

93. Пугачов Є.В. Зонування поверхонь панорами і визначення областей інтегрування для моделювання їх (поверхонь) природної освітленості / Є.В. Пугачов, Л.С. Савчук // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2015. – № 19. – С. 138-141.

94. Пустюльга С.І. Дискретне векторне формування фрактальних структур / С.І. Пустюльга, В.М. Придюк, І.В. Прушко // Наукові нотатки. – 2012. – Вип. 37. – С. 275-279.

95. Дискретне моделювання замкнутих траєкторій числовими послідовностями / С.І. Пустюльга, В.Р. Самостян, Ю.В. Клак, А. Хомич // Наукові нотатки. – 2011. – Вип. 31. – С. 295-297.

96. Пустюльга С.І. Стикування дискретно представлених ділянок криволінійних поверхонь із заданим порядком гладкості за допомогою операцій над матрицями / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук, Ю.В. Клак // Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті. – 2014. – № 2. – С. 104-111.

97. Хомченко А.Н. Серендипові скінченні елементи: фізична адекватність / А. Н. Хомченко // Наукові праці [Чорноморського державного університету імені Петра Могили]. Сер. : Комп'ютерні технології. – 2012. – Т. 191, Вип. 179. – С. 39-41.

98. Астионенко И.А. Трикубическая интерполяция по Кунсу как задача на геометрическую вероятность / И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2010. – № 926, вип. 15. – С. 25-30.

99. Тулученко Г.Я. Побудова базисів трикутних скінченних елементів, які адаптовані до виду граничної задачі (повідомлення 1) / Г.Я. Тулученко, О.В. Котова, С.І. Безердян // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2014. – Вип. 3 (50). – С. 502–505.

100. Тулученко Г.Я. Удосконалення геометричного алгоритму побудови гармонічних базисів для трикутних скінченних елементів / Г.Я. Тулученко, Н.В. Старун, С.І. Безердян, Н.В. Осипова // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2015. – Вип. 3 (54). – С. 630–633.

101. Тулученко Г.Я. Прогностичне оцінювання апроксимаційних властивостей базису трикутного скінченного елемента II порядку / Г.Я. Тулученко, Н.В. Старун, Т.П. Білоусова, С.І. Безердян // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2015. – Вип. 6(95), Ч. 1. – С. 61–66.

102. Борисенко В.Д. Геометричне моделювання поверхні охолодження кромки лопатки осьової турбіни / В.Д. Борисенко, Д.В. Котляр // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип. 90. – С. 43-48.

103. Устенко С.А. Метод побудови просторової перехідної кривої / С.А. Устенко, С.В. Діданов // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – 2013. – Вип. 2. – С. 124-128.

104. Ісмаїлова Н.П. Діаграма гвинта та її застосування до визначення спряжених квазігвинтових поверхонь, що виключають інтерференцію / Н.П. Ісмаїлова, А.М. Підкоритов // Сучасні проблеми моделювання. – 2015. – Вип. 4. – С. 52-57.

105. Рвачев В.Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов / В.Л. Рвачев // Доклады АН Украины. – 1963. – № 4. - С. 765-767.

106. Рвачев В.Л. К вопросу о поиске абсолютного экстремума в одной задаче оптимального раскроя / В.Л. Рвачев, Ю.Г. Стоян, А.Г. Глушков // Алгоритмические языки, оптимизация, программирование. – 1966. – Вып. 2.– С. 70-81.

107. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – К.: Наукова думка, 1976. - 248 с.

108. Стоян Ю.Г. О плотной упаковке параллелепипедов произвольных размеров в параллелепипеде наименьшего объема / Ю.Г. Стоян, А.Я. Галата // Кибернетика. – 1972. – №2.– С.81-86.

109. Stoyan Yu. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped / Yu. Stoyan, G. Yaskov, G. Scheithauer // Central European Journal of Operations Research. – 2003. – Vol. 11. – N.4. – P. 389-407.

110. Стоян Ю.Г. Свойства и способы реализации функции плотного размещения / Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. – К., 1972. – 46 с. – (Препринт / АН Украины, Ин-т кибернетики; 18).

111. Элементы теории геометрического проектирования / [Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др.]; под ред. В.Л. Рвачева - К.: Наукова думка, 1995. – 241 с.

112. Гиль Н.И. Об одном подходе к построению годографа вектор-функции плотного размещения плоских геометрических объектов, устойчивого к вычислительной погрешности / Гиль Н.И., Комяк В.М. – Харьков, 1991. – 23 с. – (Препринт / АН Украины, Ин-т пробл. машиностроения; 350).

113. Stoyan Yu.G. Automation of arrangement design of engineering systems of block design. Mathematical model / Yu.G. Stoyan, A.F. Loiko // Engineering simulation. – 1998. – N.15. – P.815-825.

114. Стоян Ю.Г. Метод асимптотического перебора локальных экстремумов / Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. – Харьков, 1974. – 48 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т пробл. машиностроения; 1-74).

115. Романова Т.Е. Система построения математической модели класса E_k -задач размещения: автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.16 / Татьяна Евгеньевна Романова. – К., 1990. – 16 с.

116. Стоян Ю.Г. Об одном обобщении функции плотного размещения / Ю.Г. Стоян // Доклады АН УССР. – 1980. – №8. – С. 70-74.

117. Стоян Ю.Г. Упаковка различных круговых цилиндров в параллелепипеде / Ю.Г. Стоян, Д.И. Придатко // Докл. НАН Украины. – 2004. – № 4. – С. 27-32.

118. Packing of convex polytopes into a parallelepiped / Stoyan Yu., Gil' N., Scheithauer G. [and other]. – Dresden, 2003. – 23 p. – (Preprint / Technische Universitat Dresden; MATH-NM-04-2003).

119. Стоян Ю.Г. Математическое моделирование отношений геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова // Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития – 1-й Междунар. радиоэлектронный форум - МРФ-2002: сб. науч. тр. – Харьков, 2002. – Ч.2. – С.223 - 226.

120. Stoyan Yu.G. Φ -function and its basic properties / Yu.G. Stoyan // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 2001. – №8. – С. 112-117.

121. Φ -функции параллелепипедов и цилиндров / Ю.Г. Стоян, Д.И. Придатко, Т.Е. Романова [и др.] // Докл. НАН Украины. – 2002. – №10. – С. 68-72.

122. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования / Стоян Ю.Г. – Харьков, 1983. – 36 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т проблем машиностроения; 181).

123. Ємець О.О. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: автореф. дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.05.01 / О.О. Ємець. – Київ, 1997. – 42 с.

124. Магас С.Л. Методы решения экстремальных задач размещения многоугольных геометрических объектов на полосе: автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.05.03 / С.Л. Магас. – М., 1984. – 20 с.

125. Письменчук Н.В. Методы и алгоритмы компоновочного синтеза технических систем с решетчатой структурой: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.01/ Н.В. Письменчук. – Харьков, 1988. – 16 с.

126. Stoyan Yu.G. Regular packing of congruent polygons on the rectangular sheet / Yu.G. Stoyan, A.V. Pankratov // European Journal of Operational Research. – 1999. – N113. – P.653-765.

127. Винарский В.Я. Математическая модель и методы решения задач периодического размещения трехмерных объектов: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.16 / В.Я. Винарский – К., 1987. – 16 с.

128. Дубро Г.В. Математические модели и оптимизационные методы периодического размещения многоугольников: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.01 / Г.В. Дубро. – Харьков, 1992. –16 с.

129. Hopper E. Problem Generators for Rectangular Packing Problems / E. Hopper, B.C.H. Turton // *Studia Informatica Universalis*. – 2002. – V. 2, N. 1 – P. 123-136.

130. Pisinger D. The two-dimensional bin packing problem with variable bin sizes and costs / D. Pisinger, M. Sigurd // *Discrete Optimization*. – 2005. – V. 2. – P. 154-167.

131. Pisinger D. Denser packings obtained in $O(n \log \log n)$ time / D. Pisinger // *INFORMS Journal on Computing*. – 2007. – V. 19. – P. 395-405.

132. Alvarez-Valdes R. Reactive GRASP for the strip-packing problem / R. Alvarez-Valdes, F. Parreño, J.M. Tamarit // *Computers & Operations Research*. – 2008. – V. 35. – P. 1065-1083.

133. Hifi M. Strip generation algorithms for constrained two-dimensional two-staged cutting problems / M. Hifi, R. M'Hallah // *European Journal of Operational Research*. – 2006. – V. 172. – P. 515-527.

134. Baldacci R. A cutting plane approach for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting problem / R. Baldacci, M.A. Boschetti // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – V. 183. – P. 1136-1149.

135. Carlier J. New reduction procedures and lower bounds for the two-dimensional bin packing problem with fixed orientation / J. Carlier, F. Clautiaux, A. Moukrim // *Computers & Operations Research*. – 2007. – V. 34. – P. 2223-2250.

136. Pott A. Optimization problems in a semi-automatic device for cutting leather / A. Pott, H. Glaab // *Mathematics - Key Technology for the Future* (eds.: Jäger, W.; Krebs, H.-J.). – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2003. –

P. 609-622.

137. Burke E. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem / E. Burke, R. Hellier, G. Kendall, G. Whitwell // *Operations Research*. – 2006. – V. 54. – P. 587-601.

138. Bennell J.A. The geometry of nesting problems: A tutorial / J.A. Bennell, J.F. Oliveira // *European Journal of Operational Research* – 2008. – V. 184. – P. 397-415.

139. Burke E. Complete and robust no-fit polygon generation for the irregular stock cutting problem / E. Burke, R. Hellier, G. Kendall, G. Whitwell // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – V. 179. – P. 27-49.

140. Morabito R. Optimising the cutting of wood fibre plates in the hardboard industry / R. Morabito, L. Belluzo // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – V. 183. – P. 1405-1420.

141. Costa M.T. Heuristic approaches to large-scale periodic packing of irregular shapes on a rectangular sheet / M.T. Costa, A.M. Gomes, J.F. Oliveira // *European Journal of Operational Research*. – 2009. – V. 192. – P. 29-40.

142. Al-Mudahka I. Packing circles in the smallest circle: an adaptive hybrid algorithm / I. Al-Mudahka, M. Hifi, R. M'Hallah // *Journal of the Operational Research Society*. – 2011. – V. 62. – P. 1917-1930.

143. Dowsland K.A. A local search approach to a circle cutting problem arising in the motor cycle industry / K.A. Dowsland, M. Gilbert, G. Kendall // *Journal of the Operational Research Society*. – 2007. – V. 58. – P. 429-438.

144. Addis B. Efficiently packing unequal disks in a circle / B. Addis, A. Locatelli, F. Schoen // *Operations Research Letters*. – 2008. – V. 36. – P. 37-42.

145. Hifi M. A dynamic adaptive local search algorithm for the circular packing problem / M. Hifi, R. M'Hallah // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – V. 183. – P. 1280-1294.

146. Cui Y. Strips minimization in two-dimensional cutting stock of

circular items / Y. Cui, D.Y. Xu // *Computers & Operations Research*. – 2010. – V. 37. – P. 621-629.

147. Birgin E. New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips / E. Birgin, J.M. Gentil // *Computers & Operations Research*. – 2010. – V. 37. – P. 1318-1327.

148. Yanasse H.H. Linear models for 1-group two-dimensional guillotine cutting problems / H.H. Yanasse, R. Morabito // *International Journal of Production Research*. – 2006. – V. 44. – P. 3471-3491.

149. Charalambous C. A constructive bin-oriented heuristic for the two-dimensional bin packing problem with guillotine cuts / C. Charalambous, K. Fleszar // *Computers & Operations Research*. – 2011. – V. 38. – P. 1443-1451.

150. Amossen R.R. Multi-dimensional bin packing problems with guillotine constraints / R.R. Amossen, D. Pisinger // *Computers & Operations Research*. – 2010. – V. 37. – P. 1999-2006.

151. De Queiroz T.A. Algorithms for 3D guillotine cutting problems: Unbounded knapsack, cutting stock and strip packing / T.A. de Queiroz, F.K. Miyazawa, Y. Wakabayashi, E.C. Xavier // *Computers & Operations Research*. – 2012. – V. 39. – P. 200-212.

152. Correa J.R. Resource augmentation in two-dimensional packing with orthogonal rotations / J.R. Correa // *Operations Research Letters*. – 2006. – V. 34. – P. 85-93.

153. Clautiaux F. A new lower bound for the non-oriented two-dimensional bin-packing problem / F. Clautiaux, A. Jouglet, J. El Hayek // *Operations Research Letters*. – 2007. – V. 35. – P. 365-373.

154. Martins T.C. Rotational placement of irregular polygons over containers with fixed dimensions using simulated annealing and no-fit polygons / T.C. Martins, M.S.G. Tsuzuki // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. – 2008. – V. 30, N. 3. – P. 205-212.

155. Ibaraki T. Hybrid Metaheuristics for Packing Problems / T. Ibaraki;

S. Imahori; M. Yagiura // Hybrid Metaheuristics - An Emerging Approach to Optimization (eds.: Blum, C. et al.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. – P. 185-219.

156. De Araújo O.C.B. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem / O.C.B. de Araújo; V.A. Armentano // Pesquisa Operacional. – 2007. – V. 27. – P. 311-331.

157. Cui Y. Heuristic and exact algorithms for generating homogeneous constrained three-dimensional cutting patterns / Y. Cui // Computers & Operations Research. – 2008. – V. 35. – P. 212-225.

158. Burke E. A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem / E. Burke, G. Kendall, G. Whitwell // Operations Research. – 2004. – V. 52. – P. 655-671.

159. Egeblad J. Heuristic approaches for the two- and three-dimensional knapsack packing problem / J. Egeblad, D. Pisinger // Computers & Operations Research. – 2009. – V. 36. – P. 1026-1049.

160. Cui Y. A recursive branch-and-bound algorithm for the rectangular guillotine strip packing problem / Y. Cui, Y. Yang, X. Cheng, P. Song // Computers & Operations Research. – 2008. – V. 35. – P. 1281-1291.

161. Fanslau T. A tree search algorithm for solving the container loading problem / T. Fanslau, A. Bortfeldt // INFORMS Journal on Computing. – 2010. – V. 22. – P. 222-235.

162. Gomes, A. M.; Oliveira, J. F. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming / A.M. Gomes, J.F. Oliveira // European Journal of Operational Research. – 2006. – V. 171. – P. 811-829.

163. Burke E. A simulated annealing enhancement of the best-fit heuristic for the orthogonal stock-cutting problem / E. Burke, G. Kendall, G. Whitwell // INFORMS Journal on Computing. – 2009. – V. 21. – P. 505-516.

164. Dereli T. A hybrid simulated annealing algorithm for solving multi-objective container-loading problems / T. Dereli, G.S. Das // Applied Artificial

Intelligence. – 2010. – V. 24. – P. 463-486.

165. Liu Y. A dynamic programming-based heuristic for the variable sized two-dimensional bin packing problem / Y. Liu, C. Chu, K. Wang // International Journal of Production Research. – 2011. – V. 49. – P. 3815-3831.

166. Leung S.C.H. Extended local search algorithm based on nonlinear programming for two-dimensional irregular strip packing problem / S.C.H. Leung, Y. Lin, D. Zhang // Computers & Operations Research. – 2012. – V. 39. – P. 678-686.

167. Hifi M. A linear programming approach for the three-dimensional bin-packing problem / M. Hifi, I. Kacem, S. Nègre, L. Wu // Electronic Notes in Discrete Mathematics. – 2010. – V. 36. – P. 993-1000.

168. Faroe O. Guided local search for the three-dimensional bin-packing problem / O. Faroe, D. Pisinger, M. Zachariasen // Journal on Computing. – 2003. – V. 15. – P. 267-283.

169. Koloch G. Nested vs. joint optimization of vehicle routing problems with three-dimensional loading constraints / G. Koloch, B. Kaminski // Engineering Letters. – 2010. – V. 18. – P. 193-198.

170. Bortfeldt A. Eine Heuristik für Multiple Containerladeprobleme / A. Bortfeldt // OR Spektrum. – 2000. – V. 22. – P. 239-261.

171. Gendreau M. A tabu search algorithm for a routing and container loading problem / M. Gendreau, M. Iori, G. Laporte, S. Martello // Transportation Science. – 2006. – V. 40. – P. 342-350.

172. Wu Y. Three-dimensional bin packing problem with variable bin height / Y. Wu, W. Li, M. Goh, R. de Souza // European Journal of Operational Research. – 2010. – V. 201. – P. 347-355.

173. Christensen S.G. Container loading with multi-drop constraints / S.G. Christensen, D.M. Rousøe // International Transactions in Operational Research. – 2009. – V. 16. – P. 727-743.

174. Allen S.D. A hybrid placement strategy for the three-dimensional strip packing problem / S.D. Allen, E.K. Burke, G. Kendall // European Journal

of Operational Research. – 2011. – V. 209. – P. 219-227.

175. Gonçalves J.F. A parallel multi-population based random-key genetic algorithm for a container loading problem / J.F. Gonçalves, M.G.C. Resende // Computers & Operations Research. – 2012. – V. 39. – P. 179-190.

176. De Almeida A. A particular approach for the Three-dimensional Packing Problem with additional constraints / A. de Almeida, M.B. Figueiredo // Computers & Operations Research. – 2010. – V. 37. – P. 1968-1976.

177. Sciomachen A. A 3D-BPP approach for optimising stowage plans and terminal productivity / A. Sciomachen, E. Tanfani // European Journal of Operational Research. – 2007. – V. 183. – P. 1433-1446.

178. Egeblad J. Heuristics for container loading of furniture / J. Egeblad, C. Garavelli, S. Lisi, D. Pisinger // European Journal of Operational Research. – 2010. – V. 200. – P. 881-892.

179. Junqueira L. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints / L. Junqueira, R. Morabito, D.S. Yamashita // Computers & Operations Research. – 2012. – V. 39. – P. 74-85.

180. Miyazawa F.K. Three-dimensional packings with rotations / F.K. Miyazawa, Y. Wakabayashi // Computers & Operations Research. – 2009. – V. 36. – P. 2801-2815.

181. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.

182. Стоян Ю.Г. Оптимизация покрытий трансляциями ограниченных множеств / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С.20-23.

183. Yakovlev S. On a class of problems on covering of a bounded set / S. Yakovlev // Acta mathematica. – 1989. – 53 (3-4). – P. 141-154.

184. Яковлев С.В. Решение задач геометрического покрытия с использованием структур линейных неравенств / С.В. Яковлев // Методы прикладной математики в машиностроении. – К., 1987. – С. 42-48.

185. Особенности построения математической модели задачи покрытия в системах автоматической противопожарной защиты / А.А. Антошкин, В.М. Комяк, Т.Е. Романова [и др.] // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 1. – С. 75-78.

186. Метод регулярного покрытия прямоугольной области кругами заданного радиуса / А.В. Панкратов, В.Н. Пацук, Т.Е. Романова [и др.] // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 1. – С. 50-52.

187. Соболь О.М. Побудова ω -функцій в задачах покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками / О.М. Соболь, В.О. Собина, О.М. Тур // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 118-122.

188. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.

189. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. - К.: Наук. думка, 1985. - 382 с.

190. Christofides N. Algorithms for large scale set covering problems in applied mathematical programming and modeling / N. Christofides, J. Paixao // Ann. Oper. Res. – 1993. – N. 43. – P. 261-277.

191. Chu P.C. A genetic algorithm for the set partitioning problem / P.C. Chu, J.E. Beasley // Sci. Oper. Res. – 1995. – N. 4. – P. 392-404.

192. Sweeney P.E. Cutting and packing problems: a categorized, application oriented research bibliography / P.E. Sweeney, E.L. Ridenour // J. Oper. Res. Soc. – 1992. – N. 7. – P. 691-706.

193. Киселева Е.М. Условие оптимальности и метод решения для

одного класса многокритериальных непрерывных задач разбиения множеств / Е.М. Киселева, Н.К. Васильева // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 6. – С. 118-128.

194. Садковий В.П. Раціональне розбиття множин при територіальному плануванні в сфері цивільного захисту: Монографія / Садковий В.П., Комяк В.М., Соболев О.М.: Ун-т цивільного захисту України. – Горлівка: ПП «Видавництво Ліхтар», 2008. – 174 с.

195. Комяк В.В. Подход к определению рациональных путей (планов) эвакуации для высотных зданий / В.В. Комяк, А.Н. Соболев, А.Г. Коссе // Проблемы пожарной безопасности. - Харьков: АО «Фолио», 2012. – Вип.32. – С.107-112.

196. Гребеннік І.В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні : автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / І.В. Гребеннік. – Х., 2006. – 36 с.

197. Злотник М.В. Построение полного класса нормализованных Ф-функций для кругов и прямоугольников с поворотами / М.В. Злотник // Збірка тез доповідей II Міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Комп'ютерний моніторинг та інформаційні технології". – Донецьк. –2006. – С.244-245.

198. Злотник М.С. Математична модель і метод розв'язання оптимізаційної задачі розміщення неорієнтованих багатокутників та кругів: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 01.05.02 / Михайло Вікторович Злотник. – Харків, 2007. – 18 с.

199. Попова А.В. Комп'ютерне моделювання оптимізаційного розміщення плоских орієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями / А.В. Попова // Науковий вісник Кременчуцького університету економіки, інформаційних технологій і управління «Нові технології». – Кременчук: КУЕІТУ, 2014. – №3-4(45-46). – С. 87-92.

200. Попова А.В. Геометричне моделювання розміщення плоских орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями: автореф. дис. ...

канд. техн. наук : 05.01.01 / Альбіна Вадимівна Попова. – Дніпропетровськ, 2015. – 26 с.

201. Романова Т.Є. Засоби побудови математичних моделей оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів та їх застосування: Автореф. дис. ... докт. техн. наук: 01.05.02 / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – К.: 2003. – 36 с.

202. Тимофієва Н.К. Порівняльний аналіз методів, що використовуються для розв'язання задач комбінаторної оптимізації / Н.К. Тимофієва // Індуктивне моделювання складних систем. – 2015. – Вип. 7. – С. 259-270.

203. Тимофієва Н.К. Про методи комбінаторної оптимізації, що ґрунтуються на розпізнаванні вхідної інформації, евристичні алгоритми та обчислювальний інтелект / Н.К. Тимофієва // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2015 – № 2. – С. 106–111.

204. Kirkpatrick S. Optimization by simulated annealing / S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi // Science. – 1983, Vol. 220. – P. 671-680.

205. Савин А.Н. Применение алгоритма оптимизации методом имитации отжига на системах параллельных и распределенных вычислений / А.Н. Савин, Н.Е. Тимофеева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ, 2012. – Вып. 1 (12). – С. 110-116.

206. Комяк В.М. Постановка задачі оптимального розміщення неорієнтованих плоских геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями / В.М. Комяк, О.М. Соболь, Ю.С. Чапля // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 91. – К.: КНУБА, 2013. – С. 127-130.

207. Соболь О.М. Спосіб побудови 0-рівня Ф-функції для плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями / О.М. Соболь, Ю.С. Чапля // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць – Мелітополь: Вид-во МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 3. –

С. 119-125.

208. Чапля Ю.С. Геометрична інформація в задачах оптимізації розміщення плоских геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями / Ю.С. Чапля, А.В. Попова, О.М. Соболев // Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності» (22-23 квітня 2014 р., м. Київ). – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – С. 214-219.

209. Комяк В.М. Математична модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями / В.М. Комяк, О.М. Соболев, Ю.С. Чапля // Вестник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вып. 3(50). – С. 300-305.

210. Комяк В.М. Метод оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній області змінної довжини / В.М. Комяк, О.М. Соболев, Ю.С. Чапля // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. Вип. 48 – Луцьк: ЛНТУ, 2015. – С.107-111.

211. Чапля Ю.С. Метод пошуку глобального екстремуму цільової функції в задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями / Ю.С. Чапля, О.М. Соболев // Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності» (23-24 квітня 2015 р., м. Київ). – К.: ДІА, 2015. – С. 213-218.

212. Чапля Ю.С. Загальна модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній області / Ю.С. Чапля, О.М. Соболев // Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини» (17-19 вересня 2015 р. м. Миколаїв). –

Миколаїв: МНУ, 2015. – С. 242-245.

213. Чапля Ю.С. Модель та метод оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній області / Ю.С. Чапля // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2015. – Вып. 3(54). – С. 625-629.

214. Соболев О.М. Моделювання оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у заданих областях / О.М. Соболев, Ю.С. Чапля // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 93. – К.: КНУБА, 2015. – С. 79-85.

215. Chaplya Yu. Development the methods of optimum placement undirected planar objects with piecewise non-linear boundaries in the multiply area / Yu. Chaplya, O. Sobol // ECONTECHMOD. An international quarterly journal. – 2016, Vol.5, No.2. – P. 39-44.