**Кафедра фізико-математичних дисциплін
Національного університету цивільного захисту України**

# ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
# ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

## Модуль 1
## ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

**Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів**

*Для студентів всіх форм навчання за напрямом підготовки
"Психологія"*

**Харків 2015**

**Кафедра фізико-математичних дисциплін**
**Національного університету цивільного захисту України**

# ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

## Модуль 1
## ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

**Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів**

*Для студентів всіх форм навчання за напрямом підготовки*
*“Психологія”*

**Харків 2015**

Друкується за рішенням кафедри фізико-математичних дисциплін.
Протокол № 8 від 23.03.2015

**Укладач** М.М.Горонескуль

**Рецензент:** професор, доктор технічних наук В.М.Комяк, професор кафедри фізико-математичних дисциплін НУЦЗ України

**Основи** вищої математики та математична статистика. Модуль 1. Основи вищої математики: методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів. / Укладач М.М.Горонескуль. – Х.: НУЦЗУ, 2015. – 125 с.

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Мета методичних вказівок – допомогти курсантам (студентам) у самостійній роботі з підручниками та навчальними посібниками, оволодінні теоретичними та практичними знаннями з дисципліни "Основи вищої математики та математична статистика".

Методичні вказівки містять список рекомендованої літератури, вказівки до вивчення окремих модулів та тем курсу, приклади розв’язання задач, питання до самоконтролю, завдання до практичних занять та для самостійної роботи, необхідні довідкові матеріали. Основна увага приділена темам, що виносяться на самостійне вивчення та темам, за якими є практичні заняття. Рівень засвоєння матеріалу рекомендується перевіряти за допомогою контрольних питань.

Дисципліна "Основи вищої математики та математична статистика" ґрунтується на знанні курсантами (студентами) курсу математики середньої загальноосвітньої школи та забезпечує вивчення дисциплін: "Математичні методи в психології", "Експериментальна психологія".

Модуль "Основи вищої математики" передбачає реалізацію основних засад математичної освіти сучасних фахівців, підвищення рівня базової математичної підготовки, орієнтацію курсантів (студентів) на застосування математичних методів при розв’язанні психологічних задач. Враховувалось, що навчальний курс "Основи вищої математики" повинен, з одного боку, бути достатнім для того, щоб відігравати розвиваючу роль, а з іншого, – змістовним, щоб курсанти (студенти) навчилися розв’язувати деякі прикладні задачі.

## МЕТА ТА ЗАДАЧІ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Викладання модулю "Основи вищої математики" для психологів має на *меті*:

- підвищити рівень математичної підготовки курсантів (студентів) та зорієнтувати їх на використання математичних методів при проведенні психологічних досліджень;
- сформувати вміння курсантів (студентів) коректної математичної постановки прикладної задачі, сприяти подальшому розвитку у слухачів здібностей до логічного та критичного мислення;
- навчити курсантів (студентів) основним математичним поняттям і методам, які сприяють загальному підвищенню наукового рівня розв'язання професійних задач;
- підготувати майбутнього психолога до самостійного вивчення тих розділів сучасної математики, які можуть знадобитися додатково у його практичній та науково-дослідній роботі.

Найважливішими *задачами* вивчення курсантами (студентами) психологами "Основ вищої математики" є:

- сприяти розвитку у курсантів (студентів) вміння коректної постановки задачі, яка потребує для свого розв'язання використання математичних методів;
- стимулювати у курсантів (студентів) пізнавальний інтерес до питань застосування математичних методів у психології;
- розвивати вміння аналізувати отриману і оброблену у ході випробування інформацію, здійснювати на її основі прогнози розвитку психологічних феноменів.

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

## ТЕМА 1.1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ З НИМИ

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Матриці, види матриць.
- Дії з матрицями. Транспонування матриці.
- Множення матриці на число.
- Сума матриць.
- Узгоджені матриці. Добуток матриць.
- Степінь матриці.
- Многочлен від матриці.

*Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.*

### § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

**Матриці, види матриць.** Основні поняття [1, С. 87]. *Матрицею* розміру $m \times n$ називається таблиця чисел $a_{ij}$ $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$ вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці позначаються великими латинськими буквами *A, B, C*…. або коротко $A_{m \times n}$, $(a_{ij})_{m,n}$ або $(a_{ij})$.

Якщо $m = n$, матриця називається *квадратною* порядку $n$.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матриця називається *нульовою*. Позначення: $O$.

Квадратна матриця $D$ називається *діагональною*, якщо всі її елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, тобто

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо діагональна матриця така, що всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, то матриця називається *одиничною*. Позначення: $E$ . Отже,

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця, що отримана з даної матриці $A$ заміною її рядків стовпцями, називається *транспонованою* до даної. Позначення: $A^T$ .

Якщо $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Приклад 1.1.1.** Знайти транспоновану матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:* $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

*Відповідь*: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

**Дії з матрицями**

**Множення матриці на число.** *Добутком* $\lambda A$ матриці $A = (a_{ij})_{m,n}$ на число $\lambda$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m,n}$, така, що $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

**Приклад 1.1.2.** Знайти $2A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:* $2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

*Відповідь*: $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

**Сума матриць**. *Сумою* $A + B$ матриць $A = (a_{ij})_{m,n}$ та $B = (b_{ij})_{m,n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m,n}$, така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

**Приклад 1.1.3.** Знайти суму матриць $A$ та $B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix} \text{ та } B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:* $A+B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 8 & 7\\ -1 & 7\end{pmatrix}.$

*Відповідь*: $A+B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 8 & 7\\ -1 & 7\end{pmatrix}.$

**Приклад 1.1.4.** Знайти $2A-3B+C$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:*

$$2A-3B+C=2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & -2\\ 0 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 15 & 24\\ -3 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -2\\ -10 & -24\\ 4 & -5\end{pmatrix}.$$

*Відповідь*: $2A-3B+C=\begin{pmatrix}13 & -2\\ -10 & -24\\ 4 & -5\end{pmatrix}.$

**Множення матриць.** Множити можна тільки узгоджені матриці. Матриці $A_{m,n}$ та $B_{n,p}$ називаються *узгодженими*, якщо кількість стовпців матриці $A$ дорівнює кількості рядків матриці $B$.

*Добутком* $AB$ матриці $A=(a_{ij})_{m,n}$ на $B=(b_{ij})_{n,p}$ називається матриця $C=(c_{ij})_{m,p}$, де

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nj},$$

тобто елемент $c_{ij}$ дорівнює добутку відповідних елементів *i*-го рядка матриці $A$ та *j*-го стовпця матриці $B$:

$$\boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad \cdots \quad a_{in}}\ \begin{array}{|c|}\hline b_{1j}\\ b_{2j}\\ \cdots\\ b_{nj}\\ \hline\end{array} = a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nj}=c_{ij}$$

**Приклад 1.1.5.** Знайти $AB$ та $BA$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:* Оскільки матриці $A_{2,2}$ та $B_{2,3}$ є узгодженими, то $A_{2,2}B_{2,3}=C_{2,3}$. Отже,

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 5 & 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot(-1)\\ 3\cdot 1+(-5)\cdot 5 & 3\cdot 2+(-5)\cdot 0 & 3\cdot 4+(-5)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -22 & 6 & 17\end{pmatrix}$$

*Відповідь*: $C=AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -22 & 6 & 17\end{pmatrix}$.

Знайти $BA$. Виконати $B_{2,3}A_{2,2}$ неможливо, оскільки кількість стовпців матриці $B$ – першого множника не дорівнює кількості рядків матриці $A$ – другого множника.

Матриці $A$ та $B$ називаються *переставними*, якщо $AB = BA$.

*Властивості операцій з матрицями* [1, С.88]:

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
4) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
5) $(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$;
6) $A(BC)=(AB)C$;
7) $A(B+C)=AB+AC$.

Де $A$, $B$, $C$ – матриці, $\lambda$, $\mu$ – числа.

**Степінь матриці.** *Степенем* $k$ матриці $A$ називається матриця $A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\text{ разів}}$, де $k$ – ціле додатне число.

Так $A^0 = E$, $A^2 = A\cdot A$, $A^3 = A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A$ тощо.

*Многочленом від матриці* $A$ називається вираз, що має вигляд

$$P(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + a_2A^{k-2} + \ldots + a_{k-1}A + a_kE,$$

де $k$ – ціле додатне число; $A^0 = E$.

**Приклад 1.1.6.** Знайти значення многочлена $f(x)$ при $x = A$, де $A$ – задана матриця: $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

*Розв'язання:* $f(A_{2,2}) = A_{2,2}^2 - 3A_{2,2} + 5E_{2,2}$, де $E$ – одинична матриця другого порядку.

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2-1 \\ 6+3 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $f(A) = O$, то матриця $A$ є коренем даного многочлена.

*Відповідь*: $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## § 2 Контрольні питання

1. Що називається матрицею розміру $m \times n$?
2. Яка матриця називається квадратною, нульовою, діагональною, одиничною, транспонованою до даної матриці $A$?
3. Що називається сумою двох матриць, їх різницею?
4. Що називається добутком числа $\lambda$ на матрицю $A$?
5. Які матриці називаються узгодженими?
6. Що називається добутком матриць?
7. Що називається многочленом матриці $A$?

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 1.1.1. Обчислити $3A + 2B$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Завдання* 1.1.2. Обчислити:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

*Завдання* 1.1.3. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці $A$:

1) $f(x) = 3x^2 - 4$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

## ТЕМА 1.2 ВИЗНАЧНИКИ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Визначники 2-го, 3-го і вищих порядків, їх властивості та методи обчислення.
- Мінори та алгебраїчні доповнення. Обернена матриця.
- Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера. Метод Гаусса. Матричний метод.

*Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.*

### § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

**Основні означення** [2, С.74]**.** *Матрицею другого порядку* називається квадратна таблиця вигляду $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, де $a_{ij}$ – задані числа ($i=\overline{1,2}$, $j=\overline{1,2}$).

*Визначником* (детермінантом) *другого порядку*, що відповідає матриці $A$, називається число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Квадратна матриця $A$ називається невиродженою, якщо $\det A\neq 0$.

**Приклад 1.2.1.** Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

*Розв'язання:* $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-1)\cdot 3=8+3=11$.

*Відповідь*: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=11$.

*Матрицею третього порядку* називається квадратна таблиця вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де $a_{ij}$ $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3})$ – задані числа.

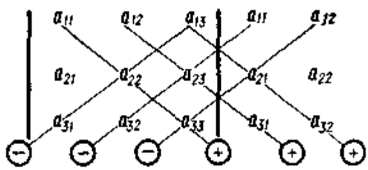
*Визначником* (детермінантом) *третього порядку*, що відповідає матриці $A$, називається число

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначники позначаються: $det\, A,\ \Delta A$ або $\Delta$.

## Способи обчислення визначників третього порядку

**Спосіб 1.** Правило Саррюса. Згідно з цим правилом необхідно дописати перші два стовпця справа від даного визначника:



Елементи, що стоять на діагоналях множаться. Добутки елементів, які стоять на діагоналях зі знаком «плюс», додаються, потім віднімаються добутки елементів, що знаходяться на лініях із знаком «мінус». Отже,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{31} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

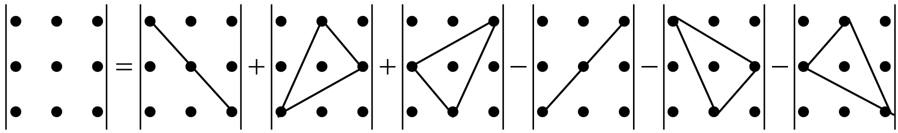
**Приклад 1.2.2.** Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

*Розв'язання:* $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{matrix} =$

$$= 2\cdot 4\cdot 1 + (-2)\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 4\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 0 - (-2)\cdot 3\cdot 1 =$$
$$= 8 + 4 + 0 + 4 - 0 + 6 = 22.$$

*Відповідь*: $\Delta = 22$.

**Спосіб 2** [1, С. 74]**.** Правило трикутників. Згідно з цим правилом визначник обчислюється за схемою:



**Приклад 1.2.3.** За правилом «трикутників» обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання:* $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 2\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 0 + (-2)\cdot 2\cdot(-1) - \\ -1\cdot 4\cdot(-1) - (-2)\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 0 = 22 \end{matrix}.$

*Відповідь*: $\Delta = 22$.

*Матрицею n-го порядку* називається квадратна матриця вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де $a_{ij}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$ – задані числа.

*Визначником n-го порядку*, що відповідає матриці $A$, називається число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Мінором* $M_{ij}$ елемента $a_{ij}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$ визначника $n$-го порядку називають визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення рядка і стовпця, на перетині яких стоїть елемент $a_{ij}$.

**Приклад 1.2.4.** Задано визначник $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Обчислити мінори $M_{11}$, $M_{12}$ та $M_{13}$ до елементів $a_{11}$, $a_{12}$ та $a_{13}$ відповідно.

*Розв'язання:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=4;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=5;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 .$$

*Відповідь*: $M_{11} = 4$; $M_{12} = 5$; $M_{13} = 4$.

*Алгебраїчним доповненням* $A_{ij}$ елемента $a_{ij}$ називають число, що визначається $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

**Приклад 1.2.5.** Задано визначник $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Обчислити алгебраїчні доповнення $A_{11}$, $A_{12}$ та $A_{13}$ відповідно до елементів $a_{11}$, $a_{12}$ та $a_{13}$.

*Розв'язання:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 = 4 ;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 = -5 ;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 = 4 .$$

*Відповідь*: $A_{11} = 4$; $A_{12} = -5$; $A_{13} = 4$.

**Спосіб 3. Теорема Лапласа обчислення визначника n-го порядку** [1, С.75]. Розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} , \ i = \overline{1, n} \text{ або } \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} , \quad j = \overline{1, n} .$$

Розкладання визначника третього порядку за елементами, наприклад, першого рядка виглядає наступним чином:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ або}$$
$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

**Приклад 1.2.6.** За елементами першого рядка обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2\cdot A_{11} + (-2)\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = \\ &= 2\cdot 4 + (-2)\cdot(-5) + 1\cdot 4 = 8 + 10 + 4 = 22, \end{aligned}$$

де $A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 = 4$;

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 = -5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+3}\cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 = 4.$$

*Відповідь*: $\det A = 22$.

**Приклад 1.2.7.** Задано визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 10 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання:* Розкладемо визначник за елементами 3–го стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 10 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = 63.$$

*Відповідь*: $\det A = 63$.

**Властивості визначників** [1, С.76]

1. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки зробити стовпцями з тими ж номерами. Ця операція називається *транспонуванням.* Отже $\det A = \det A^T$ .

2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

4. Загальний множник елементів деякого рядка (стовпця) визначника може бути винесеним за знак визначника.

5. Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника однакові, то визначник дорівнює нулю.

*Наслідок*. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

6. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (або стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й теж саме число (теорема про лінійну комбінацію елементів рядків (стовпців)).

7. Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення (теорема розкладання).

8. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю (теорема анулювання).

9. Визначник, у якого елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких у зазначеному рядку (стовпці) стоять перші доданки, а у другого – другі доданки; всі інші рядки (стовпці) в обох визначників однакові.

*Зауваження*. При обчисленні визначників корисно, використовуючи основні властивості визначників, обернути в нуль всі, крім одного, елементи деякого рядка (стовпця) визначника, а потім застосувати теорему розкладання.

*Метод зведення до трикутного вигляду* полягає у такому перетворенні визначника, коли всі елементи, що лежать по один бік однієї з його діагоналей, рівні нулю.

*Метод рекурентних співвідношень* полягає у тому, щоб даний визначник виразити через визначники того ж вигляду, але більш низького порядку. Одержана рівність називається рекурентним співвідношенням. Отримується це рекурентне співвідношення перетворенням визначника та розкладанням його за елементами рядка (стовпця).

## ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

**Основні поняття** [1, С. 89–90]. *Оберненою* до квадратної матриці $A$ називається матриця $A^{-1}$ така, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Обернені матриці мають такі *властивості*:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$;

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**Теорема.** Для того, щоб квадратна матриця $A$ мала обернену матрицю $A^{-1}$, необхідно та достатньо, щоб матриця $A$ була невиродженою, тобто $\det A \neq 0$.

*Обернена матриця* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$, $(\det A \neq 0)$, де $\tilde{A}$ – приєднана матриця до заданої матриці $A$.

*Приєднаною* до квадратної матриці $A$ називається матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij}$ – алгебраїчні доповнення елементів $a_{ij}$ матриці $A$. Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

**Приклад 1.2.8.** Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:* Обчислимо визначник матриці $A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = -34 .$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \tilde{A}$,

де $\tilde{A}$ – приєднана матриця до заданої матриці $A$. Обчислимо приєднану матрицю $\tilde{A}$ до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Приєднана матриця $\tilde{A}$ складається з $A_{ij}$ – алгебраїчних доповнень елементів $a_{ij}$ матриці $A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1-6) = -7 ,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2+2) = -4 ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6-1) = 5 ,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2+3) = -5 ,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3-1) = 2 ,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (9+2) = -11 ,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4-1) = 3 ,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(6+2)=-8,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-3-4)=-7\,.$$

Одержимо,

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 5\\ -5 & 2 & -11\\ 3 & -8 & -7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-7 & -5 & 3\\ -4 & 2 & -8\\ 5 & -11 & -7\end{pmatrix}.$$

Отже, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}-7 & -5 & 3\\ -4 & 2 & -8\\ 5 & -11 & -7\end{pmatrix}$ – приєднана матриця до матриці $A$.

Обернена матриця $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Остаточно, $A^{-1}=-\dfrac{1}{34}\begin{pmatrix}-7 & -5 & 3\\ -4 & 2 & -8\\ 5 & -11 & -7\end{pmatrix}$.

Обернену матрицю знайдено вірно, якщо виконується рівність:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\,.$$

Знайдемо $A^{-1}A=-\dfrac{1}{34}\begin{pmatrix}-7 & -5 & 3\\ -4 & 2 & -8\\ 5 & -11 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}=$

$$=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-21-10-3 & -14+5+9 & 7-10+3\\ -12+4+8 & -8-2-24 & 4+4-8\\ 15-22+7 & 10+11-21 & -5-22-7\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-34 & 0 & 0\\ 0 & -34 & 0\\ 0 & 0 & -34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

*Відповідь*: $A^{-1} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$.

## СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

**Основні означення** [1, С. 106]**.** Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases}$$

або в матричній формі:

$$AX = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Розширена матриця системи має вигляд

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

*Розв'язком* системи називається матриця–стовпець $X$, яка обертає матричне рівняння $AX = B$ у тотожність.

Система називається *сумісною*, якщо має, хоча б один розв'язок, у протилежному випадку, вона називається *несумісною*.

Дві системи називаються еквівалентними, якщо множини їх розв'язків співпадають.

**Ранг матриці**. *Рангом* матриці називається найвищий з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Позначення *RgA*. Відмінний від нуля мінор матриці А, порядок якого *r=RgA*, називається *базисним мінором*.

**Теорема Кронекера–Капеллі.** Для того, щоб система $AX = B$ була сумісною, необхідно та достатньо щоб $RgA = Rg\overline{A}$, де $\overline{A} = \left(A \mid B\right)$ – розширена матриця системи.

З теореми випливає:

1) якщо $RgA = Rg\overline{A} = n$, де $n$ – кількість невідомих, то система має єдиний розв'язок;

2) якщо $RgA = Rg\overline{A} = r < n$, то система має безліч розв’язків;

3) якщо $RgA \neq Rg\overline{A}$, то система несумісна.

**Методи розв'язання систем рівнянь:**

**І. Формули Крамера** для розв'язання системи *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими [1, С. 109]:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = \overline{1, n},$$

де $$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ – визначник системи;

$\Delta_i$ одержується з $\Delta$ шляхом заміни $i$-го стовпця стовпцем вільних членів, так

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

**Приклад 1.2.9.** За формулами Крамера розв'язати задану систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

*Розв'язання:* Для даної системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Формулами Крамера* мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -34.$$

Визначники $\Delta_i$ ($i = \overline{1,3}$), одержується з визначника $\Delta$ шляхом заміни $i$-го стовпця стовпцем вільних членів. Отже,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -34;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 34;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 11 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -136.$$

Таким чином, за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-34}{-34} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{34}{-34} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-136}{-34} = 4.$$

*Відповідь*: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4$.

**ІІ. Метод Гаусса** ґрунтується на наступній теоремі: елементарним перетворенням рядків розширеної матриці системи відповідає перетворення цієї системи в еквівалентну [1, С. 109-111].

За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці, а також переміни місцями стовпців, що відповідає перепозначенню змінних, матриця $\overline{A}$ зводиться до східчастої (або трапецієвидної) форми. Цій матриці ставиться у відповідність система, яка еквівалентна вихідній. Це прямий хід методу Гаусса. Розв'язання отриманої системи здійснюється знизу уверх (зворотній хід методу Гаусса).

Метод Гаусса представляє собою метод послідовного виключенні змінних. *Обчислювальна процедура гауссових виключень* може бути формалізована за допомогою простих правил. Більш детально цей процес описано у підручниках та навчальних посібниках: [1, С.109–111], [15, С. 62–63].

**Приклад 1.2.10.** Методом Гаусса розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

*Розв’язання:* Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень розширеної матриці, які виконують над рядками:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{l} \text{поміняємо 1-й} \\ \text{та 3-й рядок} \\ \text{місцями} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{одержимо під} \\ \text{елементом} \\ a_{11}\text{=-1 нулі} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \\ 0 & 11 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{одержимо новий третій рядок :помножемо} \\ \text{елементи другого рядка на (-2) та додамо} \\ \text{з відповідними елементами третього рядка} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{поміняємо 2-й} \\ \text{та 3-й рядок} \\ \text{місцями} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{одержимо} \\ \text{під a}_{22}\text{=1} \\ \text{нуль} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 34 & 136 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Оскільки $RgA = Rg\overline{A} = 3$, де $n = 3$ – кількість невідомих, то система сумісна і має єдиний розв'язок.

Ставимо у відповідність розширеній матриці систему, еквівалентну вихідній, розв'язання якої здійснюємо знизу уверх:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_2 - 6x_3 = -25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + x_3; \\ x_2 = 6x_3 - 25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + 4; \\ x_2 = 24 - 25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + 4; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 4; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

*Відповідь*: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4$.

**III. Матричний метод**: $X = A^{-1} \cdot B$.

Реалізація методу полягає в знаходженні оберненої матриці і множення її на стовпець вільних членів. Використовується для невироджених $(\det A \neq 0)$ квадратних матриць [1, С. 109].

**Приклад 1.2.11.** Розв'язати задану систему матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

*Розв'язання:* Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Із матричного рівняння $AX = B$, звідки $X = A^{-1} \cdot B$.

Розв'язання матричним методом можливе за умови, якщо $\det A = \Delta \neq 0$, тобто матриця $A$ невироджена:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -34 \neq 0,$$ тому існує обернена матриця, отже, і єдиний розв'язок системи.

Обернена матриця (див. **приклад 1.2.8**) має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю невідомих: $X = A^{-1} \cdot B$.

$$X = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} 21-55+0 \\ 12+22+1 \\ -15-121+0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -34 \\ 34 \\ -136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$.

Перевірка. Підставимо отриманий розв'язок у систему:

$$\begin{cases} 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 4 = -3; \\ 2\cdot 1 - (-1) + 2\cdot 4 = 11; \\ -1 + 3\cdot(-1) + 4 = 0. \end{cases}$$

Систему рівнянь розв’язана вірно.

*Відповідь*: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$.

## § 2 Контрольні питання

1. Що називається визначником другого порядку, третього порядку, $n$–го порядку?
2. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням елемента $a_{ij}$ визначника $n$–го порядку?
3. Наведіть основні властивості визначників.
4. Запишіть формулу розкладання визначника за елементами 1–го рядка.
5. Дайте означення оберненої матриці до даної матриці $A$?
6. Сформулюйте необхідну та достатню умову існування оберненої матриці.
7. Наведіть формулу, за якою знаходиться обернена матриця та сформулюйте її властивості.
8. Що називається рангом матриці?
9. Які перетворення матриць називаються елементарними?
10. Яка система рівнянь називається лінійною?
11. Що називається основною матрицею та розширеною матрицею системи?
12. Сформулюйте теорему Кронекера–Капеллі – критерій сумісності системи.
13. В якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок; безліч розв’язків; не має розв’язків?

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 1.2.1. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$;  2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

*Завдання* 1.2.2. Обчислити визначники третього порядку:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;  2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

*Завдання* 1.2.3. Обчислити визначники четвертого порядку:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;  2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

*Завдання* 1.2.4. Знайти обернені матриці для заданих матриць:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;  2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

*Завдання* 1.2.5. За формулами Крамера розв'язати системи:

1) $\begin{cases} 3x-5y=13; \\ 2x+7y=81; \end{cases}$;  2) $\begin{cases} 3x-4y=-6; \\ 3x+4y=18; \end{cases}$.

3) $\begin{cases} x+y-2z=6; \\ 2x+3y-7z=16; \\ 5x+2y+z=16; \end{cases}$  4) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$.

*Завдання* 1.2.6. Методом Гаусса розв'язати системи:

1) $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2; \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7; \\ 2x_1+x_2-x_3=-5; \end{cases}$  2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2; \\ x_1+2x_2+3x_3=-1; \\ x_1-3x_2-2x_3=3. \end{cases}$.

*Завдання* 1.2.7. Матричним методом розв'язати системи:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - 4x_2 \qquad = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

# ТЕМА 1.3 ВЕКТОРИ ТА ДІЇ З НИМИ

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Вектори та дії з ними.
- Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис.
- Проекції вектора. Декартова прямокутна система координат.
- Скалярний добуток векторів, його властивості.
- Векторний добуток векторів, його властивості.
- Мішаний добуток векторів, його властивості.
- Поділ відрізка у заданому відношенні.

*Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.*

## § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

**Вектори та дії з ними** [1, С. 13]**.** *Вектором* (геометричним вектором) $\vec{a}$ називається множина всіх напрямлених відрізків, що мають однакову довжину та напрямок. Про всякий відрізок $AB$ з цієї множини кажуть, що він представляє вектор $\vec{a}$. З означення випливає, що вектори можна переносити паралельно самим собі. У зв’язку з цим вектори, що розглядаються, називаються *вільними*.

Довжина відрізка $AB$ називається довжиною (модулем, нормою) вектора $\vec{a}$ і позначається символом $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначення: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Під лінійними операціями над векторами розуміють операцію множення вектора на число та додавання векторів.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число $\lambda$ називається вектор, який позначається $\lambda\vec{a}$, такий що:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$;

2) вектори $\vec{a}$ та $\lambda\vec{a}$ однаково напрямлені ($\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}$), якщо $\lambda > 0$ та протилежно напрямлені ($\vec{a} \uparrow\downarrow \lambda\vec{a}$), якщо $\lambda < 0$.

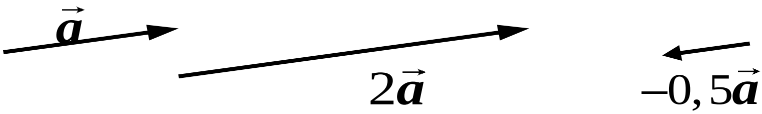



Рис. 1.3.1

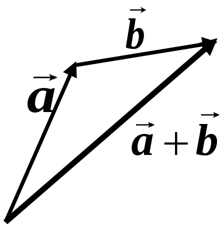



Рис. 1.3..2

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, тоді $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ називається *сумою* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і позначається $\vec{a}+\vec{b}$.

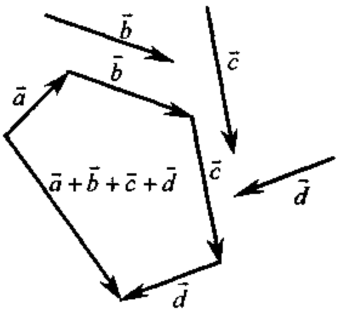
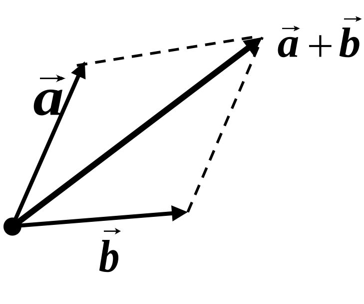


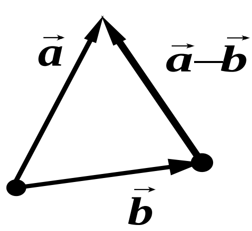

Рис. 1.3.3

Сума будь-якого числа векторів може бути знайдена за правилом многокутника.




*Сума* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, початки яких суміщені, зображується вектором з тим же початком, що співпадає з діагоналлю паралелограма, сторонами якого є $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Рис. 1.3.4




*Різниця* $\vec{a}-\vec{b}$ цих векторів зображується вектором, що співпадає з другою діагоналлю того ж паралелограмам, причому цей вектор напрямлений в бік зменшуваного.

Рис. 1.3.5

*Властивості векторів*:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,
2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$,
3) $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$,
4) $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{a}$,
5) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$,
6) $\left(\lambda+\mu\right)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

## Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис

**Арифметичні вектори** [1, С. 15]**.** Будь-яка упорядкована сукупність з $n$ чисел називається *арифметичним вектором* і позначається символом $\vec{a}=\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$.

Над арифметичними векторами вводяться такі *операції*.

*Додавання*: якщо $\vec{a}=\left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\vec{b}=\left(b_1, b_2, b_3\right)$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\right).$$

Множення на число: якщо $\lambda$ – число та $\vec{a}=\left(a_1, a_2, a_3\right)$ – арифметичний вектор, то $\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\right)$.

Система арифметичних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_S$, що не всі рівні нулю та має місце рівність

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n \text{ або } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i=0.$$

У протилежному випадку, коли $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i = 0$, якщо усі $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, система називається лінійно *незалежною*.

Система векторів $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ називається *базисом* у $\boldsymbol{R^n}$, якщо всі ці вектори належать $\boldsymbol{R^n}$ є лінійно незалежними та будь-який вектор $\vec{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{R^n}$ подається у вигляді:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i = 0,$$

де $\lambda_k$ – деякі числа, координати вектора $\vec{x}$ у базисі $\beta$.

Число $n$ називається *вимірністю* простору $\boldsymbol{R^n}$. Система векторів

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0); \\ &\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

утворює базис у $\boldsymbol{R^n}$, який називається канонічним, зокрема, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ та $\vec{k} = (0, 0, 1)$ – утворює базис у $\boldsymbol{R^3}$.

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називається *базисом* у множині всіх геометричних векторів $\mathbf{V_3}$.

Усякий геометричний вектор $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ може бути поданий у вигляді: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, тобто розкладений за базисом $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тут $a_1, a_2, a_3$ – числа, що називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\beta$. Коротко: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Базис $\beta$ називається прямокутним або ортонормованим, якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. У цьому випадку прийнято позначення:

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k}.$$

Аналогічно, упорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ називається *базисом* у множині всіх геометричних векторів $\mathbf{V_2}$, компланарних деякій площині. Будь-який ненульовий вектор $\vec{e}$ утворює базис у множині геометричних векторів $\mathbf{V_1}$, колінеарних деякому напрямку. Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$ називається число $Пр_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{e}})$.

**Приклад** 1.3.1. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, якщо $\vec{x} = (2,5,0)$, $\vec{p} = (1,2,-1)$, $\vec{q} = (3,6,1)$, $\vec{r} = (3,9,3)$

*Розв'язання:* Оскільки $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, то вектор $\vec{x}$ можна розкласти за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Знайдемо коефіцієнти розкладу $\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r} = \vec{x}$. Підставимо координати векторів у рівність та одержимо:

$$\alpha(1,2,-1) + \beta(3,6,1) + \gamma(3,9,3) = (2,5,0).$$

Запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 3\gamma = 2; \\ 2\alpha + 6\beta + 9\gamma = 5; \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Із системи $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

Зробивши перевірку, впевнюємося у правильності розв'язання системи. Отже, шуканий розв'язок має такий вигляд $\vec{x} = 1 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} + \frac{1}{3} \cdot \vec{r}$.

*Відповідь*: $\vec{x} = \vec{p} + \frac{1}{3}\vec{r}$.

**Декартова прямокутна система координат.** У тривимірному просторі введена *декартова прямокутна система координат*, якщо задано точка $O$ – початок координат; прямокутний базис

$\beta = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ у множині всіх геометричних векторів. Осі $Ox$, $Oy$ та $Oz$, що проведені через точку $O$ у напрямку базисних ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, називаються координатними осями системи координат.

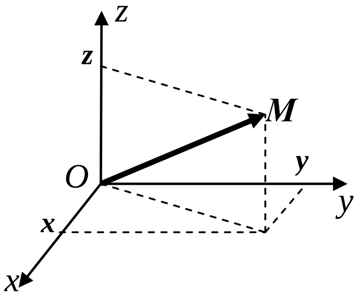



Рис. 1.3.6

Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіус–вектором точки $M(x, y, z)$ і позначають $\vec{r}(M)$ або просто $\vec{r}$. Оскільки координати вектора $\vec{r}$ співпадають з координатами точки $M$, то розклад $\vec{r}$ за ортами має вигляд $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

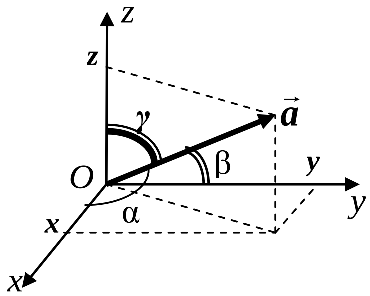



Рис. 1.3.7

Якщо $(x, y, z)$ – координати вектора $\vec{a}$ у прямокутному базисі, то вони співпадають з проекціями вектора $\vec{a}$ на базисні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ відповідно:

$x = Пр_{\vec{i}}\,\vec{a}$, $y = Пр_{\vec{j}}\,\vec{a}$, $z = Пр_{\vec{k}}\,\vec{a}$.

*Довжина* вектора $\vec{a}$ визначається $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**Приклад 1.3.2.** Визначити довжину вектора $\vec{a} = (2, 3, 0)$.

*Розв’язання:*

Довжина вектора $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13}$.

*Відповідь:* $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{13}$.

**Одиничний вектор, напрямні косинуси.** Вектор $\vec{a}_0$ – називається *одиничним* або *нормованим*, якщо $\left|\vec{a}_0\right| = 1$. Вектор $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$ є одиничним вектором (ортом) вектора $\vec{a}$. Числа

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}}) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$. Також $\vec{a}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Має місце рівність: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Вектор $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0 = (|\vec{a}| \cdot \cos\alpha; |\vec{a}| \cdot \cos\beta; |\vec{a}| \cdot \cos\gamma)$

Вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ може бути записаний у вигляді $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, де $\vec{r}_2$ – радіус–вектор точки $B$, $\vec{r}_1$ – радіус–вектор точки $A$.

Отже, координати вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Відстань між точками $A$ та $B$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Приклад 1.3.3.** Задано точки $A(3,4,12)$ і $B(6,8,0)$. Визначити координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, його довжину $|\vec{a}|$, напрямні косинуси, та орт $\vec{a}_0$.

*Розв'язання:* Знайдемо $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, отже $\vec{a} = (6-3;\ 8-4;\ 0-12) = (3;\ 4;\ -12)$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13,$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{3}{13},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{4}{13},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{12}{13}.$$

Оскільки $\vec{a}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, то

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right) \text{ або}$$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}_0|} = \frac{3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}}{13} = \left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right).$$

*Відповідь*: $\vec{a} = (3;\ 4;\ -12)$; $|\vec{a}| = 13$; $\vec{a}_0 = \left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right)$.

**Приклад 1.3.4.** У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задані вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

*Розв'язання:* $2\vec{a} = 2(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$;

$3\vec{b} = 3(\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) = 3\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}$;

$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + (3\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}) = 7\vec{i} + 7\vec{j} - 10\vec{k}$.

*Відповідь*: $\vec{c} = 7\vec{i} + 7\vec{j} - 10\vec{k}$.

**Поділ відрізка у даному відношенні** [1, С. 17]**.** Нехай на прямій $l$ задані точки $A$, $B$ та $C$, причому $A \neq B$. Вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{CB}$ колінеарні, а отже знайдеться таке дійсне число $\lambda$, що $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Число $\lambda$ називається відношенням, в якому точка $C$ ділить напрямлений відрізок $AB$ $(\lambda \neq -1)$.

Якщо відомі координати точок $A$ і $B$ та відношення $\lambda$, в якому точка $C$ ділить напрямлений відрізок $AB$, то координати точки $C$ знаходяться за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda},$$

або у векторній формі $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1+\lambda}$, де $\vec{r} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$.

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, то координати точка $C$ середини відрізку $AB$ знаходяться за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

**Приклад 1.3.5.** Точка $C(2,2,4)$ ділить відрізок $AB$ у відношенні $\lambda = \dfrac{2}{3}$. Знайти координати точки $B$, якщо $A(-2,4,0)$.

*Розв'язання:* Нехай $B(x_B, y_B, z_B)$. Враховуючи, що точка $C$ ділить відрізок $AB$ у відношенні $\lambda = \dfrac{2}{3}$, маємо:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ \Rightarrow 2 = \frac{-2 + \frac{2}{3} x_B}{1 + \frac{2}{3}},\ \Rightarrow x_B = 8;$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ \Rightarrow 2 = \frac{-4 + \frac{2}{3} \cdot x_B}{1 + \frac{2}{3}},\Rightarrow y_B = -1;$$

$$z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda},\Rightarrow 4 = \frac{0 + \frac{2}{3} \cdot x_B}{1 + \frac{2}{3}},\ \Rightarrow z_B = 10.$$

*Відповідь*: $B(8,-1,10)$.

**Скалярний добуток векторів** [1, С. 23]**.**

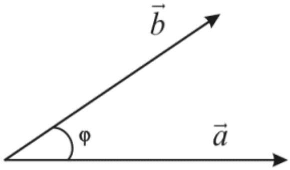


Рис. 1.3.8

*Скалярним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута $\varphi$ між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi .$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ визначається:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} .$$

Скалярний добуток позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

*Властивості скалярного добутку*:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативний закон).
2. $\vec{a}\lambda\vec{b} = \lambda\vec{a}\vec{b}$, $\lambda\in\mathbf{R}$ (асоціативний закон).
3. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$ (дистрибутивний закон).
4. $\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1,\ \vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = 0$.
5. Якщо $\vec{a} = x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ та $\vec{b} = x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
6. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ .
7. Умова перпендикулярності векторів: якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ або $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0$.

*Проекція вектора* $\vec{a}$ *на вісь вектора* $\vec{b}$ визначається:

$$Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} .$$

*Механічний зміст скалярного добутку* двох векторів. Робота $A$ сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої з положення $B$ в $C$, де $\overrightarrow{BC}=\vec{s}$, визначається за формулою $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$.

**Приклад 1.3.6.** У трикутнику з вершинами $A(2,-1,3)$, $B(-2,2,5)$, $C(1,2,3)$ знайти косинус кута при вершині $A$.

*Розв'язання:* $\cos\varphi=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)^{\wedge}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$;

$\overrightarrow{AB}=(-4,3,2)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}=\sqrt{29}$;

$\overrightarrow{AC}=(-1,3,0)$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-1)^2+3^2+0^2}=\sqrt{10}$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4\cdot(-1)+3\cdot 3+2\cdot 0=13$;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{13}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}\approx 0,763.$$

*Відповідь*: $\cos\varphi\approx 0,763$, $\varphi\approx 40^\circ$.

**Векторний добуток векторів** [1, С. 24]. *Векторним добутком векторів* $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, що задовольняє такі умови:

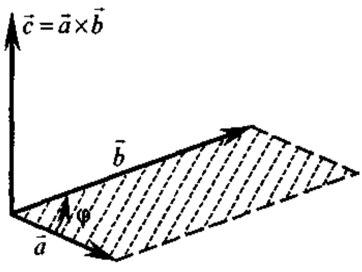



Рис 1.3.9

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, де $\varphi=\left(\vec{a},\vec{b}\right)^{\wedge}$;

2) $\vec{c}\perp\vec{a},\quad \vec{c}\perp\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку.

Зауваження: вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку, якщо найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ з кінця вектора $\vec{c}$ спостерігається проти годинникової стрілки. Векторний добуток позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ або $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

*Властивості векторного добутку*:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ (антикомутативний закон).
2. $\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, $\lambda\in\mathbf{R}$ (асоціативний закон).
3. $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивний закон).
4. $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$, $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$.
5. Якщо $\vec{a} = x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ та $\vec{b} = x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k},$$

тобто $\vec{a}\times\vec{b}$ записується за допомогою визначника третього порядку (*див.* розкладання визначника 3–го порядку за елементами 1–го рядка).

6. $\vec{a}\times\vec{a} = 0$.
7. Умова колінеарності векторів: якщо $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b} = 0$ або

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

*Геометричний зміст векторного добутку* двох векторів:

1) площа $S$ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислюється за формулою $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$;

2) площа $S_{\blacktriangle}$ трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислюється за формулою $S_{\blacktriangle} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$;

*Механічний зміст векторного добутку* двох векторів: момент $\overrightarrow{M}$ сили $\overrightarrow{F}$, що прикладена до точки $A$ тіла, відносно точки $O$, визначається за формулою $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{F}$.

**Приклад 1.3.7.** Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

*Розв'язання:* $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&5\\1&2&1\end{vmatrix}=$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}3&5\\2&1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2&5\\1&1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-7\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}=\left(-7,3,1\right).$$

*Відповідь*: $\vec{a}\times\vec{b}=\left(-7,3,1\right)$.

**Приклад 1.3.8.** Обчислити площу трикутника $ABC$, де $A\left(2,-1,3\right)$, $B\left(-2,2,5\right)$, $C\left(1,2,3\right)$.

*Розв'язання:* Площа $S_\blacktriangle$ трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислюється за формулою $S_\blacktriangle=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Врахуємо, що $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\left(-4,3,2\right)$ та $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\left(-1,3,0\right)$, тоді

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&3&2\\-1&3&0\end{vmatrix}=-6\vec{i}-2\vec{j}-9\vec{k}=\left(-6,-2,-9\right);$$

$$S_\blacktriangle=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+(-9)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{121}=5,5 \text{ (кв.од.)}.$$

*Відповідь*: $S_\blacktriangle=5,5$ (кв.од.).

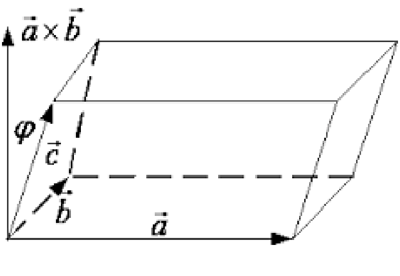



Рис. 1.3.10

**Мішаний добуток векторів** [1, С. 25]**.** *Мішаним добутком векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, тобто $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Позначається $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, або $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

*Властивості мішаного добутку*:

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$.
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Завдяки цій властивості мішаний добуток записується у вигляді:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \text{ або } \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

3. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=-\left(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}\right)=-\left(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}\right)=-\left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}\right)$.
4. Якщо $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$,

$\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

5. Необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

*Геометричний зміст мішаного добутку* векторів:

1) об'єм $V$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обчислюється за формулою $V=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$;

2) об'єм $V_{\blacktriangle}$ трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ обчислюється за формулою $V_{\blacktriangle}=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

**Приклад 1.3.9.** Задані вершини трикутної піраміди $ABCD$, де $A(3,2,1)$, $B(-2,1,-2)$, $C(-1,2,3)$ та $D(1,-2,3)$. Знайти її об'єм.

*Розв'язання.* Об'єм $V_{\blacktriangle}$ трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$ обчислюється за формулою $V_{\blacktriangle}=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

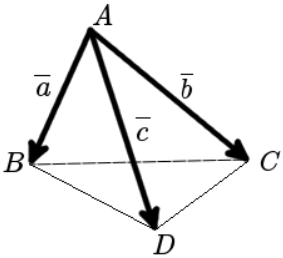


Рис. 1.3.11

Оскільки $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-5,-1,-3)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-4,0,2)$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (-2,-4,2)$, тоді:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -92$$

;

*Відповідь*. Отже, $V_{\blacktriangle} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot 92 = \frac{46}{3}$ (куб.од.).

**Приклад 1.3.10.** Задано вектори $\vec{a} = (2,3,0)$, $\vec{b} = (1,-2,2)$, $\vec{c} = (3,2,1)$. Визначити:

1) $|\,\vec{a}\,|$ – довжину вектора $\vec{a}$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
3) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
4) $\vec{a}\times\vec{b}$ – векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
5) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;
6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
7) чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

*Розв'язання:*

1) довжина вектора $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$;

2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 0\cdot 2 = 4;$$

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|} = \frac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{1+4+4}} = -\frac{4}{3\sqrt{13}};$$

4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}==\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=6\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}=(6,-4,-7);$$

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=3$$

або

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=(6,-4,-7)(3,2,1)=18-8-7=3$$

6) умова колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$, отже,

$$\frac{2}{1}\neq\frac{3}{-2}\neq\frac{0}{2}\ \Rightarrow\ \vec{a}\text{ та }\vec{b}\text{ не колінеарні;}$$

7) умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$, отже, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=3\neq 0$, тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарні.

**§ 2 Контрольні питання**

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними?
3. Які операції з векторами називаються лінійними?
4. Що називається сумою двох векторів?
5. Дайте означення добутку вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$. Як у залежності від $\lambda$ буде спрямований вектор $\lambda\vec{a}$.
6. Що називається розкладом вектора за базисом у множині геометричних векторів $\mathbf{V}_3$?

7. Який базис називається ортонормованим?

8. Що називається декартовою прямокутною системою координат у просторі?

9. Задані координати векторів $\vec{a}=\left(x,y,z\right)$ та $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ у прямокутному базисі. Чому дорівнюють координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ у тому ж базисі?

10. Задані координати вектора $\vec{a}=\left(x,y,z\right)$ у прямокутному базисі. Чому дорівнюють координати вектора $\lambda\vec{a}$ у тому ж базисі?

11. Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано точки $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ та $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$. Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$ у цій же системі координат?

12. Нехай у декартовій прямокутній системі координат дано точки $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ та $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$. Чому дорівнюють координати точки $C\left(x,y,z\right)$, яка ділить відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні $\lambda$?

13. Наведіть означення скалярного добутку двох векторів?

14. Перелічите основні властивості скалярного добутку векторів.

15. Як виражається скалярний добуток векторів через координати векторів у декартовій прямокутній системі координат?

16. Як визначити кут між ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ?

17. Сформулюйте умову ортогональності (перпендикулярності) векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ; умова колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ?

18. Що називається векторним добутком двох векторів?

19. Який геометричний зміст модуля векторного добутку двох неколінеарних векторів?

20. Перелічите основні властивості векторного добутку векторів.

21. Запишіть формулу, за якою обчислюється векторний добуток векторів $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ та $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$.

22. Що називається мішаним добутком векторів?

23. Який геометричний зміст модуля мішаного добутку некомпланарних векторів?

24. У чому полягає необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів?

25. Як виражається мішаний добуток трьох векторів через координати векторів у декартовій системі координат?

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 1.3.1. Задано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Знайти:

а) координати орт вектора $\vec{a}_0$ та напрямні косинуси вектора $\vec{a}$;

б) координати вектора $\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

в) розклад вектора $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ за базисом $\beta = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$;

г) $Пр_{\vec{j}}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ – проекцію вектора $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ на вісь орт вектора $\vec{j}$.

*Завдання* 1.3.2. За яких значень $\alpha$ та $\beta$ вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ та $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні?

*Завдання* 1.3.3. Відрізок з кінцями у точках $A(3,-2)$ та $B(6,4)$, розділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення.

*Завдання* 1.3.4. Для заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ обчислити $Пр_{\vec{c}}\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)$:

а) $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$;

б) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

*Завдання* 1.3.5. Обчислити роботу *А* сили $\vec{F} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки з положення $M_1(-1,2,0)$ у положення $M_2(2,1,3)$.

*Завдання* 1.3.6. Знайти координати вектора $\vec{x}$, колінеарного вектору $\vec{a} = (2, 1, -1)$ і такого, що задовольняє умові $\vec{a} \cdot \vec{x} = 3$.

*Завдання* 1.3.7. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ і $C(1,3,-1)$, та знайти висоту $h = |\overrightarrow{BD}|$.

*Завдання* 1.3.8. Сили $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ прикладена до точки $A(4,-2,3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $O(3,2,-1)$.

*Завдання* 1.3.9. Встановити, чи утворюють вектори $\overleftarrow{a}_1, \overleftarrow{a}_2, \overleftarrow{a}_3$ базис у множині всіх векторів, якщо:

а) $\vec{a}_1 = (2,3,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,3)$, $\vec{a}_3 = (1,9,-11)$;

б) $\vec{a}_1 = (3,-2,-1)$, $\vec{a}_2 = (2,1,2)$, $\vec{a}_3 = (3,-1,-2)$.

*Завдання* 1.3.10. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

*Завдання* 1.3.11. Знайти довжину висоти паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, якщо за основу прийняти паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

*Завдання* 1.3.12. У піраміди з вершинами у точках $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ та $D(3,4,-3)$ обчислити висоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
# ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

## ТЕМА 2.1. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Рівняння прямої на площині.
- Кут між прямими.
- Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

*Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.*

### § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

**Пряма на площині** [1, С. 55]**.** Наведемо основні види рівняння прямої на площині:

1) $Ax+By+C=0$ – загальне рівняння прямої, де вектор $\vec{n}=(A,B)$ перпендикулярний до прямої і називається нормальним вектором прямої (рис. 3.1);

2) $y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k$ – кутовий коефіцієнт прямої: $k=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha$ – кут між прямою і додатним напрямом осі $Ox$, $b$ – ордината точки перетину прямої з віссю $Oy$ (рис. 3.2);

3) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}=(A,B)$ (рис. 2.1.1);

4) $y-y_0=k(x-x_0)$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ у заданому напрямі, який задається кутовим коефіцієнтом $k$ (рис. 3.2);

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{p}$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s}=(m,\mathrm{p})$ (канонічне рівняння) (рис. 2.1.1);

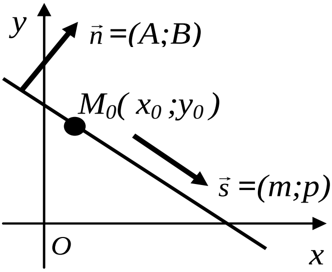



Рис. 2.1.1

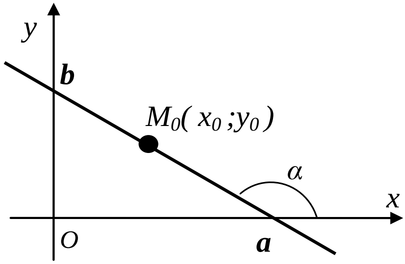



Рис. 2.1.2

6) $\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + pt \end{cases}$ – параметричне рівняння прямої, де параметр $t \in \mathbf{R}$;

7) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої у відрізках, де $a$ та $b$ – величини напрямлених відрізків, які відтинає пряма на координатних осях (рис. 2.1.2);

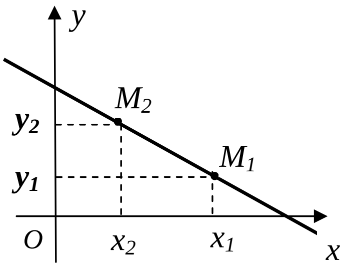



Рис. 2.1.3

8) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 2.1.3).

**Приклад 2.1.1**. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (3,-5)$.

*Розв'язання:* Використаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Маємо: $3(x-1) - 5(y-2) = 0$. Після розкриття дужок і спрощення одержимо $3x - 5y + 7 = 0$.

*Відповідь:* $3x - 5y + 7 = 0$ – шукане рівняння прямої.

**Приклад 2.1.2.** Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,2)$ паралельно вектору $\vec{s}=(6,1)$.

*Розв'язання:* Використаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s}=(m,p)$ (канонічне рівняння): $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{p}$. Маємо: $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-2}{1}$. Звідки $x-1=6(y-2)$, а після спрощення одержимо $x-6y+11=0$.

*Відповідь:* $x-6y+11=0$ – шукане рівняння прямої.

**Приклад 2.1.3.** Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1,2)$ та $M_2(3,5)$.

*Розв'язання:* Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Маємо: $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{5-2}$ або $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$. Після спрощення одержимо $3x-2y+1=0$.

*Відповідь:* $3x-2y+1=0$ – шукане рівняння прямої.

**Приклад 2.1.4.** Задано рівняння прямої $x-5y-2=0$. Записати його у вигляді:

а) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

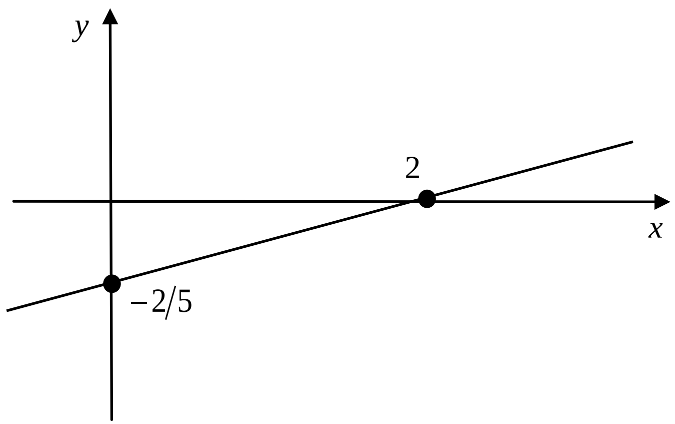
б) рівняння прямої у відрізках, зробити малюнок.

*Розв'язання:* Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$, де $k=\mathrm{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, $\alpha$ – кут між прямою і додатним напрямом осі $Ox$, $b$ – ордината точки перетину прямої з віссю $Oy$.

Зведемо рівняння прямої $x-5y-2=0$ до означеного вигляду $5y=x-2$, звідки $y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}$, де $k=\dfrac{1}{5}$ та $b=-\dfrac{2}{5}$.

Рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де $a$ та $b$ – величини напрямлених відрізків, які відтинає пряма на координатних осях.

Спочатку подамо рівняння прямої у вигляді: $x-5y=2$. Розділимо ліву і праву частину рівняння на $2$: $\frac{x}{2}-\frac{5y}{2}=\frac{2}{2}$. Звідки шукане рівняння набуде вигляду: $\frac{x}{2}+\frac{y}{\left(-2/5\right)}=1$, де $a=2$ та $b=-\frac{2}{5}$.




*Відповідь:* $y=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$ – рівняння заданої прямої з кутовим коефіцієнтом; $\frac{x}{2}+\frac{y}{\left(-2/5\right)}=1$ – рівняння прямої у відрізках.

**Кут між прямими** [1, С. 36]**.** Якщо $\vec{n}_1=\left(A_1,B_1\right)$ та $\vec{n}_2=\left(A_2,B_2\right)$ – нормальні вектори прямих $l_1$ та $l_2$ відповідно, то косинус кута між ними визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}.$$

Якщо $k_1$ та $k_2$ – кутові коефіцієнти двох прямих, то тангенс кута $\varphi$ між ними визначається за формулою:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

де $k_1 \cdot k_2 \neq -1$.

**Приклад 2.1.5.** Знайти кут між прямими $l_1 : x + y - 9 = 0$ та $l_2 : 3x - 4y + 1 = 0$.

*Розв'язання: Спосіб 1.* Кут між прямими визначимо з формули:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Для заданих прямих $\vec{n}_1 = (1,1)$ та $\vec{n}_2 = (3,-4)$ відповідно.

Маємо: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = (1,1)\cdot(3,-4) = 3 - 4 = -1$;

$|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{2}$;

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Звідки $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{10} \approx 1,71$ або $\varphi \approx 98^\circ$.

*Спосіб 2.* Кут між прямими визначимо за формулою $\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, де $k_1 \cdot k_2 \neq -1$. Для заданих прямих маємо $k_1 = -1$ та $k_2 = \frac{3}{4}$ відповідно.

Обчислимо: $k_2 - k_1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ та $1 + k_1 \cdot k_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Отже, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{7/4}{1/4} = 7$, $\varphi = \mathrm{arc\,tg}\,(7) \approx 1,43$ ; $\varphi \approx 82^\circ$ – гострий суміжний кут, або $\phi \approx (180 - 82)^\circ = 98^\circ$ – відповідний тупий суміжний кут.

*Відповідь*: $\varphi \approx 82^\circ$ – відповідний гострий суміжний кут, або $\phi \approx 98^\circ$ – тупий кут між прямими.

**Умови паралельності прямих** $l_1$ та $l_2$ [1, С. 36]: ]**.** Якщо $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ та $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ – нормальні вектори прямих $l_1$ та $l_2$ відповідно:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ або } l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 .$$

**Умови перпендикулярності прямих** $l_1$ та $l_2$:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \text{ або } l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

**Приклад 2.1.6.** Задано рівняння прямої $l_1 : 4x + y - 8 = 0$ та точка $M(-4, 7)$. Знайти рівняння $l_2$, що проходить через точку $M$ :

а) паралельно прямій $l_1$;

б) перпендикулярно прямій $l_1$.

*Розв'язання:* Рівняння заданої прямої $l_1$ подамо у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Отже, $l_1 : y = -4x + 8$, де $k_1 = -4$. З умови паралельності двох прямих: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$. Отже $k_1 = k_2 = -4$.

Рівняння шуканої прямої $l_2$, що проходить через точку $M$ запишемо у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Маємо, $y - 7 = -4(x + 4)$, після спрощення рівняння прямої $l_2$ набуде вигляду $y = -4x + 9$.

З умови перпендикулярності двох прямих: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$. Отже $k_1 \cdot k_2 = -1$, звідси $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{4}$.

Рівняння шуканої прямої $l_2$, що проходить через точку $M$ запишемо у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Маємо, $y-7=\frac{1}{4}(x+4)$, після спрощення рівняння прямої $l_2$ набуде вигляду $y=\frac{1}{4}x+8$.

*Відповідь*: $y=-4x+9$ – рівняння прямої, паралельної заданій прямі $l_1$; $y=\frac{1}{4}x+8$ – рівняння прямої, що перпендикулярна заданій прямі $l_1$.

**Відстань від заданої точки до прямої** [1, С. 36]**.** Якщо задано рівняння прямої $l: Ax+By+C=0$ та точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється за формулою:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

**Приклад 2.1.7.** Знайти відстань від прямої $l: 6x-8y+13=0$ до точки $M_0\left(1,2\right)$.

*Розв'язання:* Відстань від заданої точки до даної прямої обчислимо за формулою:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Отже, $d=\frac{|6\cdot 1-8\cdot 2-13|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{23}{10}=2,3$.

*Відповідь*: $d=2,3$ – відстань від заданої точки до даної прямої.

## § 2 Контрольні питання

1. Записати загальне рівняння прямої на площині.
2. Який геометричний зміст в загальному рівнянні прямої на площині мають коефіцієнти при $x$ та $y$?

3. Записати рівняння прямої на площині, що проходить через точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=\left(A, B\right)$.

4. Записати канонічне рівняння прямої на площині та вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.

5. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.

6. Записати умови паралельності двох прямих.

7. Записати умови перпендикулярності двох прямих.

8. Як обчислити кут між прямим?

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 2.1.1. Пряма $l$ задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ та нормальним вектором $\vec{n}=(A, B)$. Написати рівняння прямої, звести його до:

1) загального вигляду;
2) вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом;
3) рівняння прямої у відрізках, побудувати пряму.

Якщо,

а) $M_0(-1, 2)$, $\vec{n}=(3, 2)$;

б) $M_0(2, 1)$, $\vec{n}=(2, -1)$.

*Завдання* 2.1.2. Пряма $l$ задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}=(m, n)$. Написати рівняння прямої у канонічному вигляді, звести його до:

1) загального вигляду;
2) параметричного вигляду;
3) рівняння прямої у відрізках, побудувати пряму.

Якщо,

а) $M_0(-3, 1)$, $\vec{s}=(1, -4)$;

б) $M_0(1, 1)$, $\vec{s}=(0, -1)$.

*Завдання* 2.1.3. Пряма $l$ задана двома точками $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$.

Написати рівняння прямої, звести його до:
1) канонічного вигляду;
2) параметричного вигляду;
3) загального вигляду, побудувати пряму. Якщо,

а) $M_1(1,2)$, $M_2(-1,0)$;

б) $M_1(1,1)$, $M_2(1,-2)$.

*Завдання* 2.1.4. Задана пряма $l$ та точка $M_0(x_0, y_0)$. Необхідно написати рівняння прямої, звести його до:

1) обчислити відстань $d$ від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $l$;

2) написати рівняння прямої $l'$, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданій прямій $l$;

3) написати рівняння прямої $l''$, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданій прямій $l$. Якщо,

а) $l: -2x + y - 1 = 0$, $M_0(-1,2)$;

б) $l: 2y + 1 = 0$, $M_0(1,0)$;

в) $l: x + y + 1 = 0$, $M_0(0,-1)$.

*Завдання* 2.1.5. Визначити кут між прямими:

а) $l_1: 5x - y + 7 = 0$, $l_2: 2x - 3y + 1 = 0$;

б) $l_1: 3x + 2y = 0$, $l_2: 6x + 4y + 9 = 0$;

в) $l_1: 3x - 4y = 6$, $l_2: 8x + 6y = 11$.

# ТЕМА 2.2 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Криві другого порядку: еліпс, гіпербола, парабола.

*Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.*

## § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

Загальне рівняння кривої другого порядку [1, С. 60]:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ де } |A| + |B| + |C| \neq 0.$$

Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ – дискримінантом рівняння.

Визначник $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ – дискримінантом старших членів рівняння.

У залежності від значень цих визначників рівняння визначає наступний геометричний образ:

| | $\Delta \neq 0$ | $\Delta = 0$ |
|---|---|---|
| $\delta > 0$ | Еліпс (дійсний або уявний). | Точка. |
| $\delta < 0$ | Гіпербола. | Пара прямих, що перетинаються. |
| $\delta = 0$ | Парабола. | Пара паралельних прямих (дійсних або уявних). |

**Еліпс** [1, С. 60]. Канонічне рівняння *еліпса:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad 0 < b \leq a.$$

Параметри $a$ та $b$ – півосі еліпса; точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ - його вершини; осі $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$ – головні осі еліпса, вісь $\boldsymbol{Ox}$ - фокальна вісь; точка $\boldsymbol{O}$ – центр еліпса.

Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}\geq 0$ – *фокуси* еліпса; $r_1, r_2$ – фокальні радіуси точки $\boldsymbol{M}$, що належить еліпсу.

При $a=b$ маємо $x^2+y^2=a^2$ – рівняння кола.

Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ $(0\leq\varepsilon<1)$ – *ексцентриситет* еліпса (при $\varepsilon=0$ маємо коло).

*Директриси* еліпса — прямі $D_1: x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ та $D_2: x=\dfrac{a}{\varepsilon}$, що перпендикулярні фокальній осі.

Еліпс має форму, що зображена на рисунку 2.2.1:

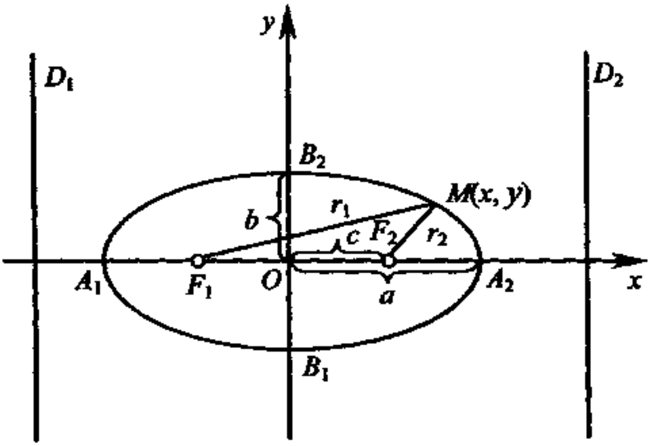



Рис. 2.2.1

**Приклад 2.2.1.** Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його фокусами $2c$, що лежить на осі $\boldsymbol{Ox}$, дорівнює $24$, а ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{4}$.

*Розв'язання:* Для того, щоб скласти канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, необхідно знати параметри $a$ та $b$.

Враховуючи, що ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, а $2c = 24$, маємо $\dfrac{3}{4} = \dfrac{12}{a}$, звідки $a = 16$.

Використовуючи співвідношення $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, отримаємо $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16^2 - 12^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{\left(4\sqrt{7}\right)^2} = 1.$$

*Відповідь*: канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{16^2} + \dfrac{y^2}{\left(4\sqrt{7}\right)^2} = 1.$

**Гіпербола** [1, С. 61]. Канонічне рівняння *гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0.$$

Гіпербола має форму, що зображена на рисунку 2.2.2:

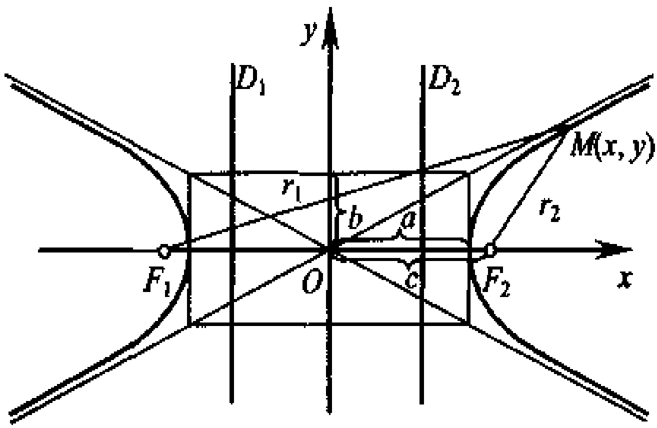



Рис. 2.2.2

Параметри $a$ та $b$ – півосі гіперболи; точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ – її вершини; осі симетрії $\boldsymbol{Ox}$ та $\boldsymbol{Oy}$ – дійсна і уявна осі, точка $\boldsymbol{O}$ – центр гіперболи. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоти гіперболи.

Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, де $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$ – *фокуси* гіперболи; $r_1, r_2$ – фокальні радіуси точки $\boldsymbol{M}$, що належить гіперболи. При $a=b$ маємо $x^2-y^2=a^2$ – рівнобічна гіпербола.

Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(1<\varepsilon<+\infty)$ – *ексцентриситет* гіперболи.

*Директриси* гіперболи – прямі $D_1: x=-\frac{a}{\varepsilon}$ та $D_2: x=\frac{a}{\varepsilon}$, що перпендикулярні дійсній осі.

**Приклад 2.2.2.** Задана гіпербола $9x^2-16y^2=144$. Знайти ексцентриситет гіперболи та рівняння її асимптот.

*Розв'язання:* Поділивши обидві частини заданого рівняння на $144$, отримаємо канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, з якого видно, що $a^2=16$ та $b^2=9$, тобто $a=4$ та $b=3$. Використовуючи співвідношення для гіперболи $c=\sqrt{a^2+b^2}$, отримаємо $c=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$. Оскільки ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $\varepsilon=\frac{5}{4}$. Підставивши в рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{b}{a}x$ значення $a=4$ та $b=3$, отримуємо рівняння асимптот заданої гіперболи $y=\pm\frac{3}{4}x$.

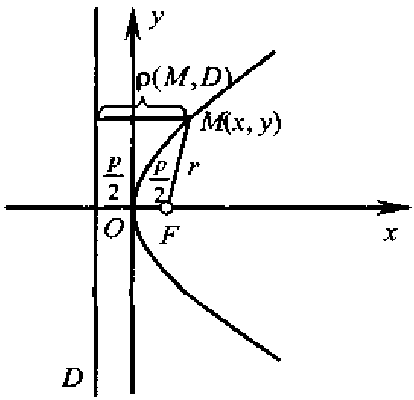
*Відповідь*: $\varepsilon=\frac{5}{4}$ – ексцентриситет заданої гіперболи та $y=\pm\frac{3}{4}x$ – рівняння її асимптот.

**Парабола** [1, С. 62]. Канонічне рівняння *параболи*:

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0.$$

Парабола має форму, що зображена на рисунку 2.2.3.

Рис. 2.2.3




Число $p$ – *параметр* параболи, точка $\boldsymbol{O}$ – її вершина, вісь $\boldsymbol{Ox}$ – вісь симетрії параболи.

Точка $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ – *фокус* параболи, $r$ – фокальний радіус точки $\boldsymbol{M}$ параболи. Пряма $D: x = -\dfrac{p}{2}$ – *директриса* параболи, що перпендикулярна осі симетрії параболи.

Величина $\rho = \rho(\boldsymbol{M}, D)$ – відстань від точки $\boldsymbol{M}$ до її директриси.

*Ексцентриситет* параболи $\varepsilon = \dfrac{r}{\rho} = 1$.

**Приклад 2.2.3.** Скласти рівняння параболи, яка симетрична відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ і проходить через точки $O(0,0)$ та $A(2,3)$.

*Розв'язання:* Оскільки парабола симетрична відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ і проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд:

$$y^2 = 2px.$$

Враховуючи, що парабола проходить через точку $A(2,3)$, маємо $3^2 = 2p \cdot 2$ або $9 = 4p$, звідки $p = \frac{9}{4}$. Отже, $y^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} x$ або $y^2 = \frac{9}{2} x$ – шукане рівняння.

*Відповідь*: рівняння параболи $y^2 = \frac{9}{2} x$.

**Приклад 2.2.4.** З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

*Розв'язання:* Оскільки загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, то у нашому випадку $A = 4$, $B = 0$, $C = 9$, $D = -8$, $E = -36$, $F = 4$.

Обчислимо дискримінант рівняння:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & -36 \\ -8 & -36 & 4 \end{vmatrix} = -5616 \neq 0.$$

Обчислимо дискримінант старших членів рівняння:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$ та $\delta > 0$, то рівняння визначає фігуру еліптичного типу. Перетворимо задане рівняння таким чином:

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y = -4,$$
$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4,$$
$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4,$$

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \text{ або } \frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1.$$

Одержане рівняння є рівнянням еліпсу з центром у точці з координатами $(1,2)$ та параметрами $a=3$ та $b=2$. Якщо зробити паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку $O_1(1,2)$ та скористатися формулами перетворення координат $x_1=x-1,\ y_1=y-2$, то відносно нових осей координат рівняння еліпса матиме вигляд:

$$\frac{x_1^2}{3^2}+\frac{y_1^2}{2^2}=1.$$

*Відповідь*: $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ – еліпс.

## § 2 Контрольні питання

1. Що називається еліпсом?
2. Записати канонічне рівняння еліпса. Вказати його осі симетрії, вершини, фокуси.
3. Що називається гіперболою?
4. Записати канонічне рівняння гіперболи. Вказати її осі симетрії, вершини, фокуси, дійсну вісь, уявну вісь, асимптоти.
5. Що називається параболою?
6. Записати канонічне рівняння параболи. Вказати її вершину, фокус, вісь симетрії.
7. Що називається ексцентриситетом еліпса; гіперболи; параболи?

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 2.2.1. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає еліпс, знайти його: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис. Зробити рисунок:

1) $9x^2+4y^2=36$; 2) $16x^2+25y^2=400$.

*Завдання* 2.2.2. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) $a=3,\ b=2$; 2) $a=5,\ c=4$;

3) $c=3,\ \varepsilon=\dfrac{3}{5}$; 4) $b=5,\ \varepsilon=\dfrac{12}{13}$.

*Завдання* 2.2.3. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає гіперболу, знайти її: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот; д) рівняння директрис. Зробити рисунок:

1) $16x^2-9y^2=144$; 2) $16x^2-9y^2=-144$.

*Завдання* 2.2.4. Написати канонічне рівняння гіперболи, що має дійсною вісь *Ox*, якщо:

1) $a=2,\ b=3$; 2) $b=4,\ c=5$;

*Завдання* 2.2.5. Написати канонічне рівняння гіперболи, що має дійсною вісь *Oy*, якщо:

1) $c=3,\ \varepsilon=\dfrac{3}{2}$; 2) $a=8,\ \varepsilon=\dfrac{5}{4}$.

*Завдання* 2.2.6. Побудувати наступні параболи та визначити їх параметри:

1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$;

3) $y^2=-4x$; 4) $x^2=-y$.

*Завдання* 2.2.7. Написати рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо відомо, що:

1) парабола розташована у лівій півплощині симетрично відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ та $p=\dfrac{1}{2}$;

2) парабола розташована симетрично відносно осі *Oy* та проходить через точку $\boldsymbol{M}(4,-8)$;

3) фокус параболи знаходиться в точці $F(0,-3)$.

*Завдання* 2.2.8. Встановити яку криву визначає кожне з наступних рівнянь:

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

2) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

3) $y^2 = 4x - 8$.

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

## ТЕМА 3.1 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Функція: властивості і види функцій.
- Границя функцій.
- Обмежені функції.
- Теореми про границі.
- Перша та друга чудові границі.
- Неперервність функції. Класифікація точок розриву.

*Рекомендована література: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15.*

### § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

**Основні поняття** [1, С. 280]. **Функція**. Нехай задано дві непусті множини ***X*** та ***Y***. Якщо кожному значенню змінної ***x***, що належить деякій області її зміни $X$ ($x \in X$), ставиться у відповідність за деяким законом єдине значення $y \in Y$, то кажуть, що на множині ***X*** *задана функція* $y = f(x)$.

Множина ***X*** називається *областю визначення функції* і позначається $D(f)$. Множина ***Y*** всіх значень ***y***, які $f(x)$ приймає при $x \in X$, називається *областю значень функції* і позначається $E(f)$. При цьому ***x*** називається *незалежною змінною* або *аргументом*, ***y*** – *функцією*.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини $xOy$ з координатами $(x, f(x))$, де $x \in D(f)$. Функція може бути як *многозначною*, так і *однозначною* [2, С. 280]. Обернені та складні функції [2, С. 281] вивчались у середній школі.

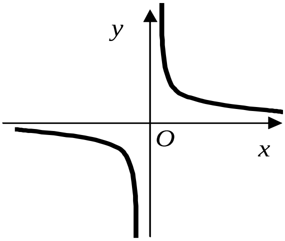
**Деякі класи функцій** [2, С. 281-282]:

- обмежена функція;
- зростаюча (спадна) функція;
- неспадна (незростаюча) функція;
- монотонна функція;
- парна та непарна функція;

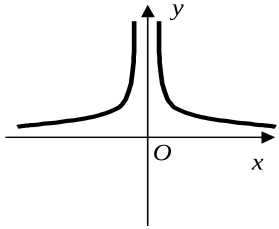
- періодична функція;
- основні елементарні функції;
- раціональні функції.

### Основні елементарні функції.

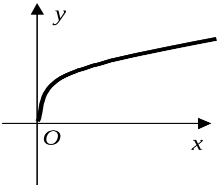
1. Степенева функція: $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

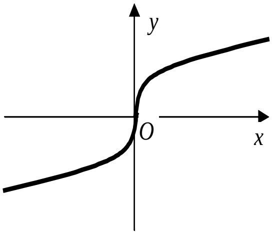


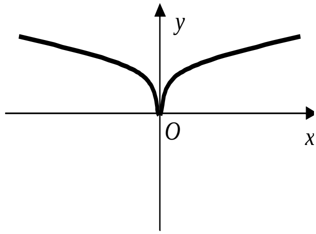

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x}} \text{ або } \boldsymbol{y = \frac{1}{x^{2n+1}}}$$




$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x^{2}}} \text{ або } \boldsymbol{y = \frac{1}{x^{2n}}}$$



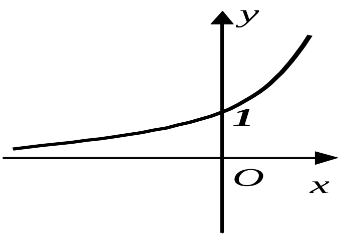




$\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ або $\boldsymbol{y = \sqrt[2n]{x}}$

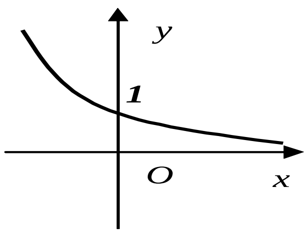
$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$ або $\boldsymbol{y = \sqrt[2n+1]{x}}$

$\boldsymbol{y^{3} = x^{2}}$ або $\boldsymbol{y^{2n+1} = x^{2m}}$

2. Показникова функція: $y = a^{x}$, $a > 0, a \neq 1$.

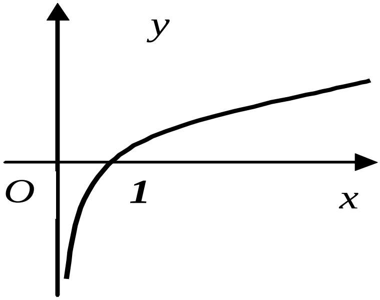



$$\boldsymbol{y = a^{x}, a > 1}$$

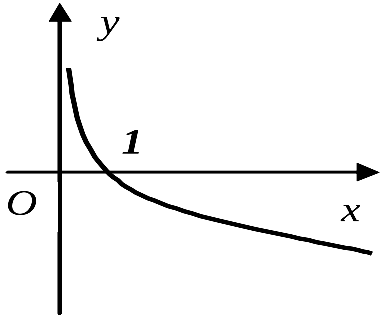



$$\boldsymbol{y = a^{x}, 0 < a < 1}$$

3. Логарифмічна функція: $y = log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

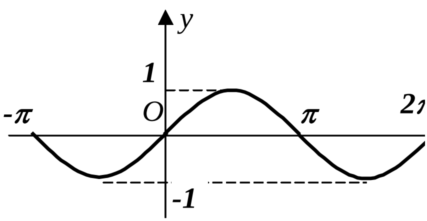



$\boldsymbol{y = \log_a x, a > 1}$

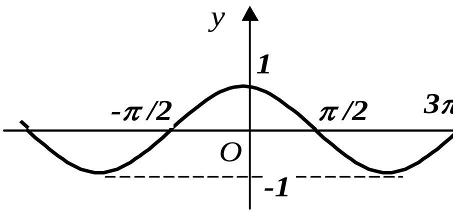



$\boldsymbol{y = \log_a x, 0 < a < 1}$

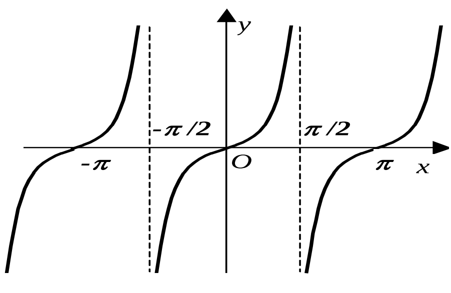
4. Тригонометричні функції:
$y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$.



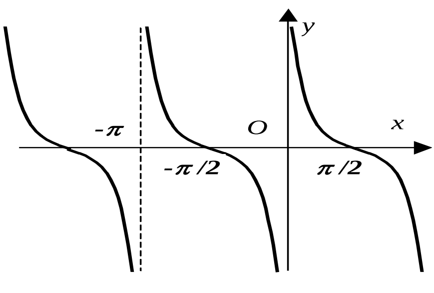

$y = \boldsymbol{sinx}$




$y = \boldsymbol{cosx}$

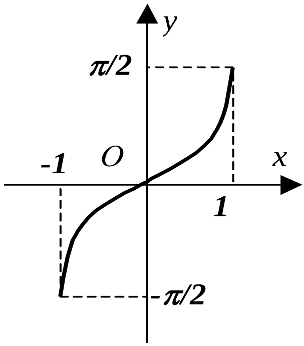



$y = \boldsymbol{tgx}$

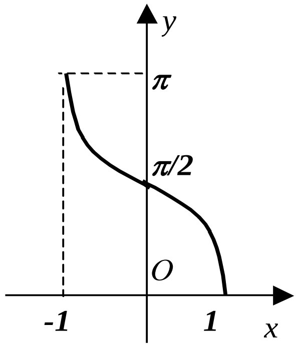



$y = \boldsymbol{ctgx}$

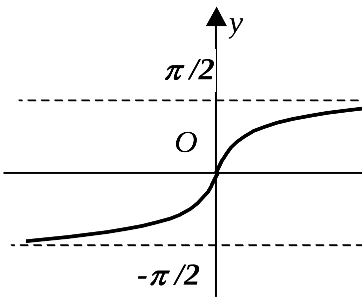
5. Обернені тригонометричні функції: $y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.



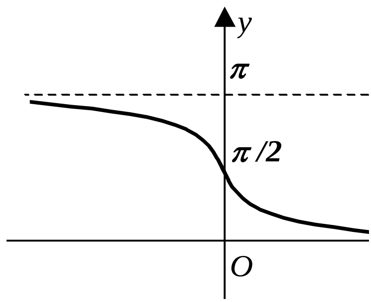

$y = \boldsymbol{arcsinx}$




$y = \boldsymbol{arccosx}$




$y = \boldsymbol{arctgx}$




$y = \boldsymbol{arcctgx}$

**Приклад 3.1.1.** Знайти область визначення функції $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$.

*Розв'язання:* Функція $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$ визначена, якщо $x-1 \neq 0$ та $1+x > 0$, тобто якщо $x \neq 1$ та $x > -1$.

*Відповідь*: область визначення функції $f(x)$ є об'єднання двох інтервалів $D(f) = (-1,1) \bigcup (1,+\infty)$.

**Приклад 3.1.2.** Знайти множину значень функції $f(x) = 2 + 3\sin x$.

*Розв'язання:* Оскільки $|sin\,x|\le 1$ або $-1\le sin\,x\le 1$, то $-3\le 3sin\,x\le 3$. Отже, $2-3\le 2+3sin\,x\le 2+3$, тому $-1\le 2+3sin\,x\le 5$.

*Відповідь*: $E(f)=[-1,5]$.

**Приклад 3.1.3.** Встановити парність або непарність функції $f(x)=2^{x}+2^{-x}$.

*Розв'язання:* Оскільки $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^{x}=f(x)$.

Отже, $f(-x)=f(x)$, тому функція $f(x)=2^{x}+2^{-x}$ - парна.

*Відповідь*: $f(x)=2^{x}+2^{-x}$ - парна.

**Приклад 3.1.4.** Встановити парність або непарність функції $f(x)=x^{3}$.

*Розв'язання:* Оскільки $f(-x)=(-x)^{3}=-(x^{3})=-f(x)$.

Отже, $f(-x)=-f(x)$, тому функція $f(x)=x^{3}$ - непарна.

*Відповідь*: $f(x)=x^{3}$ - непарна.

**Приклад 3.1.5.** Встановити парність або непарність функції $f(x)=x^{2}+5x$.

*Розв'язання:* Оскільки $f(-x)=(-x)^{2}+5(-x)=x^{2}-5x$.

Отже, $f(-x)\ne f(x)$ та $f(-x)\ne -f(x)$, тому функція $f(x)=x^{2}+5x$ не є ні парною, ні непарною.

*Відповідь*: $f(x)=x^{2}+5x$ не є ні парною, ні непарною.

**Приклад 3.1.6.** Знайти період функції $f(x)=cos\,8x$.

*Розв'язання:* Згідно з означенням періодичної функції

$$cos\,8(x+T)=cos\,8x,\ 8(x+T)=8x+2\pi,\ 8x+8T=8x+2\pi,$$

$$8T=2\pi.$$

*Відповідь*: $T=\dfrac{\pi}{4}$.

# ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

**Послідовність** [1, С. 278]. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ ставиться у відповідність $x_n$, то множина чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називається *числовою послідовністю* або просто *послідовністю*.

Скорочено послідовність позначається символом $\{x_n\}$.

Числа $x_n$, $n \in N$, називаються *членами послідовності*, $x_n = f(n)$ - *загальний член послідовності.*

**Приклад 3.1.7.** Арифметична прогресія $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots = \{n\}$.

**Приклад 3.1.8.** Геометрична прогресія:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

Число $a$ називається *границею числової послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Символічно це записується так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \qquad \text{або} \qquad x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Послідовність $\{x_n\}$, яка має границю $a$, називається *збіжною*. Послідовність, яка не є збіжною, називається *розбіжною*.

*Самостійно за вказаною літературою розглянути матеріал:*

- Геометричний зміст границі послідовності $\{x_n\}$ [1, С. 278].
- Обмежена послідовність [1, С. 278].
- Зростаюча послідовність [1, С. 278-279].
- Спадна послідовність [1, С. 278-279].
- Неспадна послідовність [1, С. 278-279].
- Незростаюча послідовність [1, С. 278-279].
- Критерій Коші збіжності послідовності [1, С. 279].

**Число** ***e:*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, де $e$ - ірраціональне число, $2 < e < 3,\ e = 2,71828182\ldots$;

$\log_e x = \ln x$ - *натуральний логарифм*.

Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Нескінченно малі послідовності $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ називаються *еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$. Пишуть $\alpha_n \sim \beta_n$.

*Властивості* нескінченно малих послідовностей розглянути самостійно [1, С. 279].

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то послідовність $\{x_n\}$ є *нескінченно великою* [1, С. 279]. Серед нескінченно великих послідовностей розрізняють такі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Нескінченно великі послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називаються *еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 1$. Пишуть $x_n \sim y_n$.

*Зауваження.* $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n \sim a_0 n^k$ при $n \to \infty$.

**Арифметичні властивості збіжних послідовностей**

Якщо існують границі послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \text{ то}$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} C \cdot x_n = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x$, де $C = const$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$, де $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$.

**Обчислення границь** зводиться до застосування вказаних формул, за умови існування скінчених границь послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$. Якщо ж ця умова не виконується, виникають так звані *невизначеності*, наприклад, типів $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$, $|\infty-\infty|$, $|1^{\infty}|$. Для розкриття невизначеностей спочатку виконують перетворення, а після цього переходять до границі.

**Приклад 3.1.9.** Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty\\ 3n^2+4n+1\sim 3n^2\\ 2n^2-5n+7\sim 2n^2\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2}.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}=\dfrac{3}{2}$.

**Приклад 3.1.10.** Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty\\ n^2+4n\sim n^2\\ n^3-3n^2\sim n^3\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n}=1$.

**Приклад 3.1.11.** Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty \\ n^3+1\sim n^3\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3+1}=0$.

**Приклад 3.1.12.** Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n+5}{n^2+1}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n+5}{n^2+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty \\ n^3+n+5\sim n^3 \\ n^2+1\sim n^2\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n+5}{n^2+1}=\infty$.

**Приклад 3.1.13.** Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n}}{\dfrac{3^n-2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1-\underbrace{\left(\dfrac{2}{3^n}\right)}_{0}}=\frac{5}{1}=5.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=5$.

**Границя функції** [1, С. 282]. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x=a$, за виключенням, можливо самої точки $x=a$.

*Означення* 1. Число $A$ називається *границею функції* $f(x)$ в точці $x=a$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, де $x_n\neq a$, збіжної до $a$, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до $A$.

*Означення* 2. Число $A$ називається *границею функції* $f(x)$ в точці $x=a$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$, знайдеться число $\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх $x$, які задовольняють нерівності $0<|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Символічно той факт, що число $A$ є *границею функції* $f(x)$ в точці $x=a$, записується так $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

*Геометричну інтерпретацію* границі функції $f(x)$ розглянути самостійно [1, С.283].

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x\to a$.

Якщо $x<a$ та $x\to a$, то умовно пишуть $x\to a-0$, а число $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ називають *границею функції* $f(x)$ *зліва*.

Якщо $x>a$ та $x\to a$, то умовно пишуть $x\to a+0$, а число $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ називають *границею функції* $f(x)$ *справа*.

Границю зліва в точці $a$ та границю справа в точці $a$ називають *однобічними границями.*

Для існування границі функції при $x\to a$ необхідно та достатньо, щоб $f(a-0)=f(a+0)$.

*Арифметичні властивості функцій*, що мають скінченні границі. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де $C=const$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, де $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Мають велике значення перша та друга важливі ("чудові") границі і наслідки з них.

*Перша важлива* ("чудова") *границя*: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

*Друга важлива* ("чудова") *границя*: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

*Наслідки з першої важливої* ("чудової") *границі*:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg}x}{x} = 1.$$

*Наслідки з другої важливої* ("чудової") *границі*:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^m - 1}{x} = m.$$

*Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих функцій* та *властивості еквівалентних нескінченно малих* розглянути самостійно [1, С. 285].

При розв'язані задач корисно використовувати *ланцюжок еквівалентних нескінченно малих* при $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}x \sim \ln(1 + x) \sim e^x - 1;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};\ a^x - 1 \sim x \ln a;\ (1 + x)^m - 1 \sim mx;\ \log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a}.$$

У більш загальному вигляді, якщо $u = u(x) \to 0$ при $x \to a$:

$$u \sim \sin u \sim \mathrm{tg}u \sim \arcsin u \sim \mathrm{arctg}u \sim \ln(1 + u) \sim e^u - 1;$$

$$1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2};\ a^u - 1 \sim u \ln a;\ (1 + u)^m - 1 \sim m \cdot u;\ \log_a(1 + u) \sim \frac{u}{\ln a}.$$

Для нескінченно великих функцій корисно використовувати еквівалентність $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0x^n$, при $x \to \infty$.

### *Техніка обчислення границь*

При обчисленні границь перш за все необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням. При цьому можемо отримати або визначені значення або невизначеності різних типів.

**Приклад 3.1.14.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)$.

*Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to 1}(x+2) = \lim\limits_{x\to 1}(1+2) = 3$.

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$.

При обчисленні границь використовують:

- формули, які пов'язані з арифметичними властивостями функцій, що мають скінченні границі;
- правило граничного переходу під знаком неперервної функції $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$;
- важливі ("чудові") границі та їх наслідки;
- ланцюжок еквівалентних нескінченно малих;
- еквівалентні нескінченно великі, тощо.

Слід пам'ятати, що за умови $C = const$, [0] – нескінченно мала величина, мають місце такі співвідношення:

1) $\dfrac{C}{[0]} = \infty$, $C \neq 0$;  2) $\dfrac{\infty}{[0]} = \infty$;  3) $\dfrac{C}{\infty} = 0$;

4) $\dfrac{0}{\infty} = 0$;  5) $C \cdot \infty = \infty$, $C \neq 0$;  6) $\infty \cdot \infty = \infty$;

7) $\infty + \infty = \infty$;  8) $0^\infty = 0$;  9) $\infty^\infty = \infty$.

Підстановка граничного значення часто призводить до *невизначеностей* вигляду:

$$\left|\frac{0}{0}\right| \qquad \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \qquad |0\cdot\infty| \qquad |\infty-\infty|$$

та

$$|1^\infty|; \qquad |\infty^0|; \qquad |0^0|.$$

Для розкриття невизначеностей спочатку виконують перетворення, а потім переходять до границі.

**Розкриття невизначеностей типу** $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ [1, С.295-299]

Нехай $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ та $Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$, де $n, m \in \mathbf{N}$, при $x \to a$, тоді

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\cdot P_{n-1}(x)}{(x-a)\cdot Q_{m-1}(x)}.$$

Слід пам'ятати, що $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

де $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ та $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

Корисними є формули:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

**Приклад 3.1.15.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+5x-6} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{2}{7}.$$

$$x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6),$$

оскільки $D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 25 + 24 = 49$, тому

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+7}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-7}{2} = -6.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6} = \dfrac{2}{7}$.

**Приклад 3.1.16.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3}=\frac{2}{3}.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\dfrac{2}{3}$.

**Приклад 3.1.17.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \operatorname{arctg}3x}$.

*Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \operatorname{arctg}3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{\sin x\cdot \operatorname{arctg}3x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\operatorname{arctg}3x}=\begin{bmatrix}\text{при }\ x\to 0\\ \sin 2x\sim 2x\\ \operatorname{arctg}3x\sim 3x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 2x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \operatorname{arctg}3x}=\dfrac{4}{3}$.

**Розкриття невизначеностей типу** $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ [1, С.299-301]

При $x\to\infty$ є вірним $\dfrac{1}{x^n}\to 0$, а також

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\sim a_0x^n \text{ та}$$

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m\sim b_0x^m.$$

**Приклад 3.1.18.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\left[\begin{array}{c}\text{при } x\to\infty\\ 2x^2+x+1\sim 2x^2\\ 5x^2-x-4\sim 5x^2\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}=\dfrac{2}{5}$.

**Приклад 3.1.19**. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+2}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to\infty\\ 10x-3\sim 10x\\ 2x^3+4x+2\sim 2x^3\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{2x^3}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=\frac{5}{\infty}=0.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+2}=0$.

**Приклад 3.1.20.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to-\infty\\ 2x^5+3x^3-4x\sim 2x^5\\ 3x^2-4x+2\sim 3x^2\end{array}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{3x^2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=-\infty$.

**Приклад 3.1.21.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$.

*Розв'язання:*

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\left[\begin{array}{c}\text{при }\ x\to+\infty\\ \sqrt{x^2+1}\sim\sqrt{x^2}\ =x\\ \sqrt[3]{x^6+1}\sim\sqrt[3]{x^6}\ =x^2\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2}=4.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}=4$.

**Розкриття невизначеностей типу** $\left|\,0\cdot\infty\,\right|$ [1, С.302]

Невизначеність типу $\left|\,0\cdot\infty\,\right|$ шляхом тотожних перетворень зводять до невизначеностей типів $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ або $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

**Приклад 3.1.22.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}$.

*Розв'язання:*

$$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x^2}=\left|\,\infty\cdot0\,\right|=\left[\sin\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}=0$.

**Розкриття невизначеностей типу** $\left|\,\infty-\infty\,\right|$ [1, С.302-303]

Невизначеність типу $\left|\,\infty-\infty\,\right|$ шляхом тотожних перетворень зводять до невизначеностей типів $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ або $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

**Приклад 3.1.23.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)$.

*Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)=\left|\infty-\infty\right|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+8x+3-(x^2+4x-5)}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+8}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}$$

$$=\begin{bmatrix}\text{при } x\to+\infty\\ 4x+8\sim 4x\\ \sqrt{x^2+8x+3}\sim\sqrt{x^2}=x\\ \sqrt{x^2+4x-5}\sim\sqrt{x^2}=x\end{bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=2.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)=2$.

**Розкриття невизначеностей типу** $\left|1^\infty\right|$, $\left|\infty^0\right|$, $\left|0^0\right|$. Для розкриття невизначеностей доцільно використовувати [1, С.303-305]:

- другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ або $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$;
- еквівалентність $\ln(1+u(x))\sim u(x)$, якщо $u(x)\to0$, при $x\to a$.

**Приклад 3.1.24.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\begin{bmatrix}\text{при } x\to0\\ 2x\to0\\ \sin 2x\sim 2x\end{bmatrix}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2$.

**Приклад 3.1.25.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=\begin{bmatrix}\text{при } x\to 0\\ x+1\sim x\\ 2x+1\sim 2x\end{bmatrix}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=0$.

**Приклад 3.1.26.** Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x}{2x-3}-1\right)\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}(2-5x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6-15x}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6-15x}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-15x}{2x}}=e^{\frac{-15}{2}}.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=e^{\frac{-15}{2}}$.

## Неперервність функції в точці. Класифікація точок розриву функції

**Означення неперервності** [1, С. 319]**.** Функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці $x = a$. Якщо:

1) функція $f(x)$ визначена в точці $x = a$ і деякому її околі;
2) існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
3) ця границя дорівнює значенню функції в точці $x = a$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

З умови неперервності випливає. що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$.

Умова неперервності може бути подана у вигляді $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = 0$ або у вигляді $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона називається *неперервною* в цій *області*.

**Точки розриву** [1, С. 319]**.** Точка $a$, в якій порушена хоча б одна з умов неперервності, називається точкою розриву функції $f(x)$.

Точки розриву класифікуються таким чином:

- якщо $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$, коли функція $f(x)$ не визначена в точці $x = a$, то точка $x = a$ називається точкою *усувного розриву*;
- якщо $f(a+0) \neq f(a-0)$, то точка $x = a$ називається точкою *розриву першого роду* або точкою "стрибка", а величина $\Delta f = f(a+0) - f(a-0)$ *стрибком* функції $f(x)$ в точці $a$;
- якщо хоча б одна з границь $f(a+0)$, $f(a-0)$ не існує або дорівнює нескінченності, тоді точка $x = a$ називається точкою *розриву другого роду.*

*Властивості неперервних функцій та функцій, неперервних на відрізку* розглянути самостійно [1, С.320-321]

**Приклад 3.1.27.** Дослідити на неперервність функцію:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

*Розв'язання:* Функція визначена для всіх $x$, крім $x=3$, і є неперервною на інтервалах $(-\infty,3)$, $(3,+\infty)$.

Обчислимо $f(3+0)$ та $f(3-0)$.

$$f(3+0)=\lim_{x\to3+0}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3+0}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3+0}(x+3)=6,$$

$$f(3-0)=\lim_{x\to3-0}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3-0}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3-0}(x+3)=6.$$

Оскільки $f(3+0)=f(3-0)\neq f(3)$, бо при $x=3$ функція невизначена.

*Відповідь*: $x=3$ - точка розриву першого роду.

**Приклад 3.1.28.** Дослідити на неперервність функцію:

$$f(x)=\frac{\sin x}{|x|}.$$

*Розв'язання:* Функція визначена для всіх $x$, крім $x=0$, і є неперервною на інтервалах $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

Обчислимо $f(0+0)$ та $f(0-0)$.

$$f(0+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{-x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

Оскільки $f(0+0)\neq f(0-0)$, отже $x=0$ - точка розриву першого роду, типу "стрибок". Величина стрибка $\Delta f=f(0+0)-f(0-0)=1-(-1)=2$.

*Відповідь*: $x=0$ - точка розриву першого роду, типу "стрибок".

**Приклад 3.1.29.** Дослідити на неперервність функцію:

$$f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}.$$

*Розв'язання:* У точці $x=2$ функція невизначена. Отже функція неперервна на інтервалах $(-\infty,2)$, $(2,+\infty)$. Обчислимо**:**

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0}3^{\frac{1}{x-2}}=3^{\frac{1}{+0}}=3^{+\infty}=+\infty,$$

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0\,.$$

Оскільки $f(2+0)=\infty$, то $x=2$ - точка розриву другого роду.

*Відповідь*: $x=2$ - точка розриву другого роду.

**Приклад 3.1.30.** За якого параметра $A$ функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}, & x\neq 5;\\ A, & x=5.\end{cases}$$ буде неперервною?

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}\,.$$

Враховуючи, що функція неперервна за умови, що

$$f(5+0)=f(5-0)=f(5) \text{ та}$$

$$f(5+0)=f(5-0)=\frac{1}{4}, \text{ то } f(5)=A=\frac{1}{4}\,.$$

*Відповідь*: функція $f(x)$ неперервна при $A=\dfrac{1}{4}$.

## § 2 Контрольні питання

1. Дайте означення функції.
2. Що називається областю визначення та областю значень функції?
3. Яка функція називається обмеженою?
4. Яка функція називається монотонною, строго монотонною?
5. Дайте означення парної (непарної) функції.
6. Що таке періодична функція, період?
7. Які функції називаються елементарними, перелічите основні елементарні функції.
8. Що називається числовою послідовністю?

9. Наведіть означення границі числової послідовності та тлумачення її геометричного змісту.

10. Наведіть властивості збіжних числових послідовностей.

11. Що таке число $e$, який логарифм називають натуральним?

12. Наведіть арифметичні властивості збіжних числових послідовностей.

13. Дайте означення еквівалентних нескінченно малих та еквівалентних нескінченно великих послідовностей.

14. Дайте означення границі функції.

15. Дайте означення однобічних границь.

16. Наведіть першу важливу границю, наслідки з неї.

17. Наведіть другу важливу границю, наслідки з неї.

18. Які нескінченно малі функції називаються еквівалентними?

19. Наведіть ланцюжок еквівалентних нескінченно малих.

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 3.1.1. Знайти область визначення функцій:

1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

*Завдання* 3.1.2. Знайти множину значень функцій:

1) $f(x)=-x^2+8x-13$; 2) $f(x)=1-3\cos x$.

*Завдання* 3.1.3. Встановити парність або непарність функцій:

1) $f(x)=x^4-3x^2+x$; 2) $f(x)=x^3+x$;

3) $f(x)=x^4\sin 7x$. 4) $f(x)=\lg\cos x$

*Завдання* 3.1.4. Знайти періоди функцій:

1) $f(x)=\sin 5x$; 2) $f(x)=\lg\cos 2x$.

*Завдання* 3.1.5. Обчислити задані границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$;  4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n+1}{100n^2+15n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;  6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$;  8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$;  10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

*Завдання* 3.1.6. Обчислити границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$;  2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$;  3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

*Завдання* 3.1.7. Обчислити границі функцій, розкривши невизначеність типу $\left|\dfrac{0}{0}\right|$:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;  2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;  3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

*Завдання* 3.1.8. Обчислити границі функцій (ірраціональний вираз під знаком границі), розкривши невизначеність типу $\left|\dfrac{0}{0}\right|$:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$;  2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

*Завдання* 3.1.9. Обчислити границі функцій, розкривши невизначеність типу $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;  2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$;  4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

*Завдання* 3.1.10. Обчислити границі функцій, розкривши невизначеність типу $|\infty-\infty|$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;  2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

*Завдання* 3.1.11. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу важливу "чудову" границю і її наслідки, та еквівалентність нескінченно малих:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;  2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin 5x}$;  3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;  5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\right)$;  6) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

*Завдання* 3.1.12. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу та другу важливі "чудові" границі, їх наслідки, та еквівалентність нескінченно малих та нескінченно великих:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$;  2) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{t}$;  3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$;  5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$;  6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$;  8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.  9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg(x-1)}{x^2-1}$.

*Завдання* 3.1.13. Дослідити задану функцію на неперервність, знайти точки розриву та встановити їх характер:

1) $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$;  2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$;

3) $f(x)=(1+x)\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$.

*Завдання* 3.1.14. Для заданої функції $f(x)$ визначити, за якого вибору параметра $A$, що входить в її означення, функція буде неперервною:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+2}{x-1}, & x\neq 1;\\ A, & x=1.\end{cases}$$

## ТЕМА 3.2. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Похідна, її механічний і геометричний зміст.
- Правила диференціювання.
- Похідні елементарних функцій.
- Диференціал функції та його геометричний зміст.
- Застосування диференціала в наближених обчисленнях.
- Похідні і диференціали вищих порядків.

*Рекомендована література: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15.*

### § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

**Похідна, її механічний та геометричний зміст** [1, С.330-333]**.** *Похідною* від функції $y=f(x)$ у точці $x$ називається $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо ця границя існує.

Позначення: $y'(x)$, $y'_x$, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Отже, за означенням $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* функції.

*Механічний зміст похідної*: швидкість $v$ прямолінійного руху точки в момент часу $t$ є похідна від шляху $s$ за часом $t$, тобто, якщо $s=s(t)$, то $v'=s(t)$.

*Геометричний зміст похідної*: похідна в точці $x_0$ від функції $y = f(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в точці з абсцисою $x_0$, тобто $y' = \mathrm{tg}\alpha$ (рис. 3.2.1).

**Основні правила диференціювання**

Нехай $C = const$, $u = u(x)$ та $v = v(x)$, тоді

1) $C' = 0$.

2) $(Cu)' = C \cdot u'$.

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, де $v \neq 0$.

6) $\left(f(u)\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.

7) $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ - обернена функція до функції $y = y(x)$.

**Похідні функцій**

Якщо $u = u(x)$, то

1) $x' = 1$

2) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, де $\alpha \in \mathbf{R}$

3) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, ( $a \neq 1, a > 0$ )

4) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

5) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$, ( $a \neq 1, a > 0$ )

6) $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

7) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

8) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

9) $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

10) $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

11) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

12) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

13) $(\mathrm{arc\,tg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

14) $(\mathrm{arc\,ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

**Приклад 3.2.1.** Знайти похідну функції $y = 5x^3 + \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 7$.

*Розв'язання:* Застосовуючи правило диференціювання суми (різниці) функцій, маємо:

$$y' = 5\left(x^3\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^3}\right)' + 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' + (7)'$$

$$= 5\left(x^3\right)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-3}\right)' + 2\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 5\cdot 3\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-4} - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{5}{3}}.$$

*Відповідь*: $y' = 15\cdot x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}$.

**Приклад 3.2.2**. Знайти похідну функції $y = x^3 \cdot \mathrm{arctg}x$.

*Розв'язання:* Застосовуючи правило диференціювання добутку функцій, маємо:

$$y' = \left(x^3\right)' \cdot \mathrm{arctg}x + x^3 \cdot \left(\mathrm{arctg}x\right)' = 3x^2 \cdot \mathrm{arctg}x + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

*Відповідь*: $y' = 3x^2 \cdot \mathrm{arctg}x + \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

**Приклад 3.2.3.** Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2-1}{\cos x}$.

*Розв'язання:* Застосовуючи правило диференціювання частки функцій, маємо:

$$y' = \frac{\left(x^2-1\right)'\cos x - \left(x^2-1\right)\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + \left(x^2-1\right)\sin x}{\cos^2 x}$$

*Відповідь*: $y' = \dfrac{2x\cos x + \left(x^2-1\right)\sin x}{\cos^2 x}$.

**Приклад 3.2.4.** Знайти похідну складної функції $y = e^{5x}$.

*Розв'язання:* Застосовуючи правило диференціювання складної функцій, маємо: $y' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}$.

*Відповідь*: $y' = 5e^{5x}$.

**Приклад 3.2.5.** Знайти похідну складної функції $y = \sin^4 x$.

*Розв'язання:* Застосовуючи правило диференціювання складної функцій, маємо: $y' = \left((\sin x)^4\right)' = 4(\sin x)^3 (\sin x)' = 4(\sin x)^3 \cos x$.

*Відповідь*: $y' = 4\sin^3 x \cos x$.

**Диференціал функції** [1, С. 333-335]. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x$, тобто має в цій точці скінченну похідну $y'$, то її приріст можна подати у вигляді $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

*Диференціалом функції* $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, лінійна відносно приросту аргументу $\Delta x$. Позначення: $dy$.

Отже, $dy = y'\Delta x$ або $dy = y'dx$.

*Правила знаходження диференціалів:*

Нехай $C = const$, $u = u(x)$ та $v = v(x)$, тоді

1) $dC = 0$.
2) $d(Cu) = C \cdot du$.
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4) $d(u \cdot v) = vdu + udv$.
5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, де $v \neq 0$.

**Приклад 3.2.6.** Знайти диференціал $dy$ функції $y = \sin 4x$.

*Розв'язання:* Згідно з означенням $dy = y'dx$.

$y' = (\sin 4x)' = 4\cos 4x$. Отже, $dy = 4\cos 4x$.

*Відповідь*: $dy = 4\cos 4x$.

**Приклад 3.2.7.** Знайти диференціал $d(\mathrm{arctg}x)$.

*Розв'язання:* Згідно з означенням $dy = y'dx$.

$d(\mathrm{arctg}x) = (\mathrm{arctg}x)'\,dx$. Отже, $d(\mathrm{arctg}x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$.

*Відповідь*: $d(\mathrm{arctg}x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

*Застосування в наближених обчисленнях* [1, С.334]. Порівняння $\Delta y$ з $dy$ показує, що $\Delta y \approx dy$.

Звідси $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$,

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малому прирості $\Delta x$ незалежної змінної $x$.

**Приклад 3.2.8.** Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{27{,}1}$.

*Розв'язання:* Покладемо $x = 27$, $\Delta x = 0{,}1$ та $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Оскільки $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, то

$$\sqrt[3]{27{,}1} \approx f(27) + f'(27)\cdot\Delta x,$$

де $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$,

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$f'(27) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}.$$

Отже, $\sqrt[3]{27{,}1} \approx 3 + \dfrac{1}{27}\cdot 0{,}1 = 3{,}0037$.

*Відповідь*: $\sqrt[3]{27{,}1} \approx 3{,}0037$.

*Геометричний зміст диференціала.* Геометрично диференціал $dy$ є приростом ординати дотичної до графіка функції в точці $M(x,y)$: $dy = \mathrm{tg}\alpha\cdot\Delta x$.

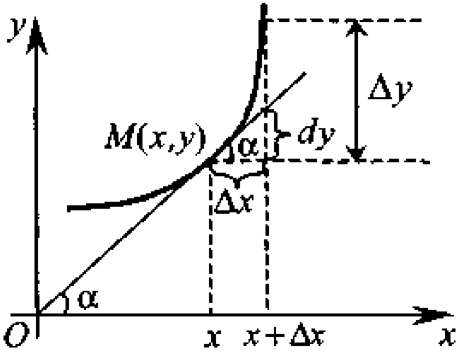



Рис. 3.2.1

**Похідні вищих порядків.** Похідною другого порядку від функції $y = f(x)$ називається похідна від її першої похідної, тобто

$$\left( f'(x) \right)' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''_{xx}.$$

Аналогічно визначаються похідні більш високих порядків:

$$\left( f''(x) \right)' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''_{xxx}, \text{ тощо.}$$

*Механічний зміст другої похідної.* Якщо $s = s(t)$ - функція, що описує закон руху матеріальної точки, то $\frac{d^2 s}{dt^2} = a$ - прискорення цієї точки в момент часу $t$.

**Приклад 3.2.9.** Знайти похідну другого порядку від функції $y = \ln x$.

*Розв'язання:* Знаходимо першу похідну $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Тоді

$$y'' = \left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

*Відповідь*: $y'' = -\frac{1}{x^2}$.

**Диференціали вищих порядків** [1, С. 336-337]**.** Якщо задана функція $y = f(x)$, де $x$ - незалежна змінна, то диференціалом другого порядку буде $d^2y = d(dy) = y''dx^2$, третього порядку відповідно $d^3y = d(d^2y) = y'''dx^3$ тощо.

**Приклад 3.2.10.** Знайти $d^2y$ від функції $y = e^{3x}$.

*Розв'язання:* Згідно з означенням $d^2y = y''dx^2$, тому знаходимо $y'$ та $y''$: $y' = 3e^{3x}$, звідси $y'' = 9e^{3x}$. Отже, $d^2y = 9e^{3x}dx^2$.

*Відповідь*: $d^2y = 9e^{3x}dx^2$.

**Розкриття невизначеностей за правило Лопіталя** [1, С.354-356]. *Розкриття невизначеностей типу* $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$

Теорема (*правило Лопіталя*) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) задовольняють умовам теореми Коші [1, С. 354] в деякому околі точки $x = a$;
2) прямують до нуля (або $\pm\infty$) при $x \to a$;
3) існує границя $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна, яка дорівнює $+\infty$ або $-\infty$), то існує і $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопіталя справедливе і при $a = \pm\infty$. Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватись тотожними перетвореннями для спрощування, а також комбінувати це правило з будь-якими іншими способами обчислення границь, зокрема, використовувати еквівалентні нескінченно малі та нескінченно великі.

Слід пам'ятати, що $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ може існувати, а $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує. Тоді правило Лопіталя не може бути застосовано.

**Приклад 3.2.11.** Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$, використовуючи правило Лопіталя.

*Розв'язання:* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

**Приклад 3.2.12.** Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, використовуючи правило Лопіталя.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{3(x^2)'}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\begin{bmatrix} x\to 0 \\ \sin x\sim x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

У цьому прикладі правило Лопіталя було використане двічі.

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

*Розкриття невизначеностей типу* $|0\cdot\infty|$ *та* $|\infty-\infty|$. У цих випадках слід алгебраїчно перетворити дану функцію так, щоб привести її до невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, а далі використовувати правіло Лопіталя [1, С. 354-356].

**Приклад 3.2.13.** Використовуючи правило Лопіталя, знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=|\infty\cdot 0|=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0\,.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$.

**Приклад 3.2.14.** Знайти задану границю, використовуючи правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\text{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

*Розв'язання:*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\text{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(2x\cdot\sin x-\pi\right)'}{(2\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x}=-1\,.$$

*Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\text{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)=-1$.

## § 2 Контрольні питання

1. Дайте означення похідної.
2. Наведіть геометричний та механічний зміст похідної.
3. Сформулюйте основні правила диференціювання.
4. Наведіть похідні основних функцій.
5. Як знаходиться похідна від складної функції?
6. Сформулюйте означення диференціала.
7. Який геометричний зміст диференціала.
8. Як знаходяться похідні і диференціали вищих порядків?
9. Наведіть приклад застосування диференціала до наближених обчислень.
10. Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеностей типів $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ та $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

11. Як розкриваються невизначеності типів $|0\cdot\infty|$ та $|\infty-\infty|$ з використанням правила Лопіталя?

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 3.2.1. Знайти похідні вказаних функцій:

1) $y=3x^2-5x+1$;

2) $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2x^3}{3}+x$;

3) $y=x+2\sqrt{x}$;

4) $y=6\cdot\sqrt[3]{x}-\dfrac{8}{\sqrt[4]{x^3}}$;

5) $y=\dfrac{10}{x^3}$;

6) $y=x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{5x^5}$;

7) $y=x-\sin x$;

8) $y=3x^5-\mathrm{tg}x$;

9) $y=x^2\cos x$;

10) $y=\left(x^3+1\right)\mathrm{ctg}x$;

11) $y=e^x\left(x^2-3\right)$;

12) $y=(x-2)\ln x$;

13) $y=\dfrac{\cos x}{x^2}$;

14) $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{x}}$.

*Завдання* 3.2.2. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{2x^2}$. Обчислити $f'(2)$.

*Завдання* 3.2.3. Знайти похідні складних функцій:

1) $y=\sin 6x+\sin\sqrt{x}$;

2) $y=\sin(5x+1)+7\cos\dfrac{x}{2}$;

3) $y=(1-5x)^4$;

4) $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}$;

5) $y=\dfrac{10}{\left(1-x^2\right)^5}$;

6) $y=\sqrt{\cos 4x}$;

7) $y=\ln^2 x$;

8) $y=\ln\mathrm{tg}3x$

9) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;

10) $y=\mathrm{arc\,tg}\,x^2$;

11) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$;

12) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

*Завдання* 3.2.4. Знайти диференціали:

1) $d(x^2)$ 2) $d(x^3+5)$;

3) $d(\sin x)$; 4) $d(\cos x)$;

5) $d(e^x)$; 6) $d(\ln x)$;

7) $d(\mathrm{tg}x)$; 8) $d(\arcsin x)$.

*Завдання* 3.2.5. Обчислити наближено:

1) $\arcsin 0,05$; 2) $\mathrm{arc\,tg}0,97$;

3) $\sqrt{5}$; 4) $\mathrm{tg}44^\circ$.

*Завдання* 3.2.6. Знайти похідні другого порядку від вказаних функцій:

1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = \left(x^2+1\right)^3$.

*Завдання* 3.2.7. Знайти $f''(1)$, якщо $f(x) = \mathrm{arctg}x$.

*Завдання* 3.2.8. Знайти $f''(0)$, якщо $f(x) = e^{2x-1}$.

*Завдання* 3.2.9. Використовуючи правило Лопіталя, обчислити границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +0} x\ln^3 x$; 4) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

## ТЕМА 4.1 ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### § 1 Методичні вказівки до вивчення теми та приклади розв'язання задач

Внаслідок вивчення матеріалу курсанти (студенти) повинні набути навичок з наступного матеріалу:

- Первісна функція. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця основних інтегралів
- Методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, заміна змінної, інтегрування частинами
- Визначений інтеграл та його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи інтегрування
- Невласні інтеграли

*Рекомендована література: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15.*

**Основні поняття** [2, С. 10]. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a,b)$, якщо $F'(x)=f(x)$ для $\forall x\in(a,b)$.

*Властивості первісних:*

1. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку $(a,b)$, то $F(x)+C$, де $C$ – довільна стала, також первісна цієї функції на $(a,b)$.

2. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ будь-які первісні для функції $f(x)$ на проміжку $(a,b)$, то $F_1(x)-F_2(x)=C$, $C = const$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $(a,b)$ називається сукупність всіх первісних для цієї функції на $(a,b)$.

Позначення: $\int f(x)dx$.

Отже, за означенням $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Із означення невизначеного інтеграла безпосередньо випливає, що

$$\int 0\cdot dx = C.$$

*Властивості невизначеного інтеграла* [2, C. 10]:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int dF(x)dx = F(x) + C$, $C = const$.
3. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, де $A \in \mathbf{R}$.
4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
5. Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ C = const.$$

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ та $u = \varphi(x)$ - диференційована функція, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

**Основна таблиця інтегралів** [2, С. 11].

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$.
3. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$, $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int cos\, x\ dx = sin\, x + C$.
7. $\int sin\, x\ dx = -cos\, x + C$.
8. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.
9. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$.

17. $\int \frac{dx}{sin\, x} = ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

19. $\int tgx\ dx = -ln|cos\, x| + C$.

20. $\int ctgx\ dx = ln|sin\, x| + C$.

**Безпосереднє інтегрування** [2, С. 12]. Знаходження невизначеного інтеграла з використанням таблиці інтегралів та властивостей інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням*. Для знаходження невизначеного інтеграла, як правило, виконують тотожні перетворення підінтегральної функції, щоб звести інтеграл до табличного.
Крім того, використовують метод підведення під знак диференціала, який випливає з властивості 6 невизначених інтегралів. Ця властивість означає, що вигляд формули інтегрування залишається незмінним не залежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною, чи деякою диференційованою функцією (інваріантність формул інтегрування).

Отже, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f\left(\varphi(x)\right) d\varphi(x) = F\left(\varphi(x)\right) + C .$$

Метод підведення під знак диференціала в багатьох випадках дозволяє зводити інтеграли до табличних.

**Приклад 4.1.1.** Знайти невизначений інтеграл за допомогою безпосереднього інтегрування $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

*Розв'язання:*

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int \left( x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C .$$

*Відповідь*: $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$.

**Основні методи інтегрування** [2, С. 12-13].

*Метод заміни змінної.* Якщо функція $f(x)$ – неперервна та $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ неперервні, то

$$\int f(x)\, dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\, dt \end{array} \right| = \int f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\, dt .$$

Функцію $\varphi(t)$ підбирають таким чином, щоб права частина у записаній формулі мала вигляд, зручний для інтегрування. Після інтегрування слід повернутися до старої змінної.

**Приклад 4.1.2.** Знайти невизначений інтеграл за допомогою метода заміни змінної $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

*Розв'язання:*

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C .$$

*Відповідь*: $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2arctg\sqrt{x} + C$ .

*Метод підстановки.* Якщо функції $\varphi(x)$ та $\varphi'(x)$ – неперервні, то

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot \varphi'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int f(t)\,dt = F(t) + C = F\left(\varphi(x)\right) + C,$$

або

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int t^{\alpha}\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,$$

або

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left| \begin{matrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|f(x)| + C .$$

**Приклад 4.1.3.** Знайти невизначений інтеграл $\int cos(3x+1)\,dx$ .

*Розв'язання:*

$$\int cos(3x+1)\,dx = \left| \begin{matrix} t = 3x+1 \\ dt = 3dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int cos\,tdt = \frac{1}{3}sin\,t + C =$$

$$= \frac{1}{3}sin(3x+1) + C .$$

*Відповідь*: $\int cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}sin(3x+1) + C$ .

**Приклад 4.1.4.** Знайти невизначений інтеграл $\int (x^4+1)^7 x^3 dx$.

*Розв'язання:*

$$\int (x^4+1)^7 x^3 dx = \begin{vmatrix} t = x^4+1 \\ dt = 4x^3 dx \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int t^7 dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{32}(x^4+1)^8 + C.$$

*Відповідь*: $\int (x^4+1)^7 x^3 dx = \frac{1}{32}(x^4+1)^8 + C$.

*Метод підведення під знак диференціала:*

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C, \text{ або}$$

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \int f^{\alpha}(x)d(f(x)) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \text{ або}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = ln\left|f(x)\right| + C$$

**Приклад 4.1.5.** Знайти невизначений інтеграл за допомогою метода підведення під знак диференціала $\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$.

*Розв'язання:*

$$\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx = \int (arctgx)^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \left| d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2} \right|$$

$$= \int (arctgx)^2 \cdot d(arctgx) = \frac{(arctgx)^3}{3} + C.$$

*Метод інтегрування частинами.* Якщо $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовані функції, то має місце формула

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ця формула називається *формулою інтегрування частинами.* Застосовувати її доречно, коли інтеграл у правій частині формули більш простий (в ідеалі табличний) для знаходження, ніж у лівій, або йому подібний.

Взагалі, інтегрування частинами застосовується для інтегрування деяких трансцендентних функцій (наприклад, $arcsin\,x$,

$arccos\,x$, $arctgx$, $arcctgx$, $ln\,x$), а також добутків алгебраїчних та трансцендентних функцій.

Якщо $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ - многочлен, то

**Випадок 1** – за $u$ приймають многочлен $P_n(x)$:

$$\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{cos\,kxdx}_{dv}, \qquad \int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{sin\,kxdx}_{dv}, \qquad \int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{e^{kx}dx}_{dv};$$

**Випадок 2** – за $u$ приймають відповідно функції $ln\,x$, $arcsin\,x$, $arccos\,x$, $arctgx$, $arcctgx$:

$$\int \underbrace{lnx}_{u} \cdot \underbrace{P_n(x)dx}_{dv}, \qquad \int \underbrace{arctgx}_{u} \cdot \underbrace{P_n(x)dx}_{dv}, \qquad \int \underbrace{arcctgx}_{u} \cdot \underbrace{P_n(x)dx}_{dv},$$

$$\int \underbrace{arcsin\,x}_{u} \cdot \underbrace{P_n(x)dx}_{dv}, \qquad \int \underbrace{arccos\,x}_{u} \cdot \underbrace{P_n(x)dx}_{dv};$$

**Випадок 3** – для інтегралів $\int e^{kx} cos\,\alpha xdx$ та $\int e^{kx} sin\,\alpha xdx$ немає різниці що брати за $u$: чи $e^{kx}$, чи $cos\,\alpha x$ або $sin\,\alpha x$.

Зазначимо, що інтегрування частинами може застосовуватись повторно.

**Приклад 4.1.6.** Знайти невизначений інтеграл за допомогою метода інтегрування частинами $\int x\,sin\,x\,dx$.

*Розв'язання:*

$$\int x\,sin\,x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = sin\,x\,dx \\ du = dx & v = -cos\,x \end{vmatrix} = -x\,cos\,x + \int cos\,x\,dx =$$

$$= -x\,cos\,x + sin\,x + C.$$

*Відповідь*: $\int x\,sin\,x\,dx = -x\,cos\,x + sin\,x + C$.

**Приклад 4.1.7.** Знайти невизначений інтеграл за допомогою метода інтегрування частинами $\int ln\,x\,dx$.

*Розв'язання:*

$$\int ln\,x\,dx = \begin{vmatrix} u = ln\,x, & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{vmatrix} = x\,ln\,x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C\,.$$

*Відповідь*: $\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - x + C$.

**Приклад 4.1.8.** Знайти невизначений інтеграл за допомогою метода інтегрування частинами $\int e^x \sin x\,dx$.

*Розв'язання:*

$$\int e^x \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x, & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x \quad dx\right) =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \quad dx\,.$$

Оскільки, $\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \quad dx$, то

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x\,.$$

Отже, $\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$.

Остаточно $\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + C$.

*Відповідь*: $\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + C$.

*Інтегрування основних класів елементарних функцій* (розглянути самостійно):

- Інтегрування раціональних дробів [2, С. 13-17, С. 30-37].
- Інтегрування ірраціональних функцій [2, С. 17-19, С.37-42].
- Інтегрування тригонометричних функцій [2, С. 19-23, С.42-44].

**Визначений інтеграл** [2, С. 54-56]. Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена функція $f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок на $n$ довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ візьмемо довільну точку $\xi_i$ і побудуємо суму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сума $I_n$ – називається *інтегральною сумою* для функції $f(x)$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a,b]$ і даному вибору проміжних точок $\xi_i$.

Позначимо $\lambda = max\,\Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$.

*Означення*. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $I_n$ при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ та вибору точок $\xi_i$, то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$.

Отже, за означенням $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} I_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

У випадку існування вказаної границі інтегральної суми функція $f(x)$ називається *інтегрованою* на відрізку $[a,b]$. Числа $a$ та $b$ називаються відповідно *нижньою* та *верхньою межею інтегрування,* функція $f(x)$ – *підінтегральною функцією*.

Мають місце такі **теореми**.

*Теорема* 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

*Теорема* 2. Якщо функція $f(x)$ обмежена і неперервна на відрізку $[a,b]$ і має на ньому скінченну кількість точок розриву, то вона інтегрована на цьому відрізку.

*Геометрична інтерпретація*. Якщо $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$, де $a<b$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції – фігури, обмеженої лініями: $y=f(x)$ – зверху, $y=0$ – знизу, $x=a$ – зліва, $x=b$ – справа.

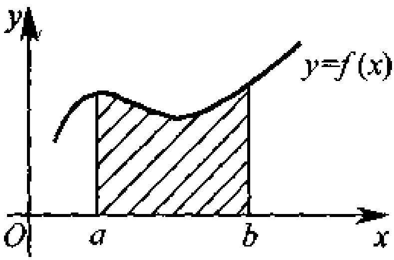



Рис. 4.1.1

У загальному випадку визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ фігур, обмежених лініями: $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$, причому, площі, розташовані вище осі $Ox$, входять до цієї суми зі знаком "+", а площі, розташовані нижче осі $Ox$, – зі знаком "-".

**Основні властивості визначеного інтеграла** [2, С. 56-57].

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. Якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

4. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$ та $C_1$, $C_2$ - сталі множники, то

$$\int_a^b [C_1 f(x) + C_2 g(x)]dx = C_1\int_a^b f(x)dx + C_2\int_a^b g(x)dx$$

(властивість лінійності інтеграла).

5. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a,c]$ та на $[c,b]$, то вона інтегрована і на $[a,b]$, причому $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (властивість адитивності інтеграла).

Зауважимо, що точка $c$ може бути довільно розташована відносно точок $a$ та $b$.

6. Якщо $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

7. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то існує така точка $c \in [a, b]$, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(теорема про середнє). Значення $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

*Обчислення визначених інтегралів*. Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною для неперервної функції $f(x)$, $x \in [a,b]$, то має місце формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Приклад 4.1.9.** Обчислити визначений інтеграл за допомогою формули Ньютона-Лейбніца: $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2 x}$.

*Розв'язання:* $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

*Відповідь*: $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

При обчисленні визначених інтегралів як і невизначених, основними методами є метод заміни змінної (або метод підстановки) і метод інтегрування частинами.

*Формула заміни змінної* у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$ та її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$; $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а $f\left[\varphi(t)\right]$ неперервна на $[\alpha, \beta]$.

*Зауваження*: якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $t = \psi(x)$ у первісній функції необхідно було від змінної $t$ повернутися до змінної $x$, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити лише межі інтегрування.

**Приклад 4.1.10.** Обчислити визначений інтеграл за допомогою формули заміни змінної: $\int\limits_1^4 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

*Розв'язання:*

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{x} = t & t = \sqrt{1} = 1 \\ x = t^2 & t = \sqrt{4} = 2 \\ dx = 2tdt & 1 \le t \le 2 \end{array} \right| = \int\limits_1^2 \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int\limits_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = .$$

$$= 2\,arctgt\Big|_1^2 = 2\left(arctg2 - arctg1\right) = 2arctg\,\frac{2-1}{1+1\cdot 2} = 2arctg\,\frac{1}{3}$$

*Відповідь*: $\int\limits_1^4 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2arctg\,\frac{1}{3}$.

**Приклад 4.1.11.** Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^e \frac{ln^2 x}{x}\,dx$.

*Розв'язання:* $\int\limits_1^e \frac{ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = ln\,x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \\ x = 1, \quad t = ln1 = 0 \\ x = e, \quad t = lne = 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

.

*Відповідь*: $\int\limits_1^e \frac{ln^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{3}$.

*Формула інтегрування частинами* у визначеному інтегралі має вигляд:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu,$$

де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ - неперервно-диференційовані на $[a,b]$ функції.

**Приклад 4.1.12.** Обчислити визначений інтеграл за допомогою формули інтегрування частинами $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$.

*Розв'язання:*

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = x, & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}\,dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}.$$

*Відповідь*: $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx = \frac{e-2}{e}$.

Зауважимо, що для інтегралів з симетричними межами інтегрування мають місце такі співвідношення:

1) якщо $f(x)$ - парна функція, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$;

2) якщо $f(x)$ - непарна функція, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

**Невласні інтеграли** [2, С.58-64]. *Невласними інтегралами* є:

1) *Невласні інтеграли першого роду* – інтеграли з нескінченними границями інтегрування.

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = F(+\infty) - F(a),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(-\infty),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Якщо існує скінченна границя справа, то відповідний невласний інтеграл *збігається* в протилежному випадку – інтеграл *розбігається*.

**Приклад 4.1.13.** Обчислити невласний інтеграл першого роду $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$.

*Розв'язання:*

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\Big|_a^0\right) =$$

$$\lim_{a\to-\infty}(arctg0 - arctga) = \lim_{a\to-\infty}(-arctga) = \frac{\pi}{2}.$$

*Відповідь*: інтеграл збігається.

**Приклад 4.1.14.** Обчислити невласний інтеграл першого роду:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

*Розв'язання:* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = ln\,x\Big|_1^{+\infty} = ln(+\infty) - ln(1) = +\infty - 0 = +\infty$.

*Відповідь*: інтеграл розбігається.

**Приклад 4.1.15.** Обчислити невласний інтеграл першого роду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

*Розв'язання:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\Big|_{a}^{0}\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(arctgx\Big|_{0}^{b}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-arctga\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(arctgb\right) =$$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

*Відповідь*: інтеграл збігається.

2) *Невласні інтеграли другого роду* – інтеграли від необмежених функцій.

**Випадок 1.** Якщо $x = a$ - особлива точка, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a+0}^{b} = F(b) - F(a+0).$$

**Випадок 2.** Якщо $x = b$ - особлива точка, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b-0} = F(b-0) - F(a).$$

**Випадок 3.** Якщо $x = c$, $c \in (a, b)$ - особлива точка, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{c-0} + F(x)\Big|_{c+0}^{b}.$$

**Приклад 4.1.16.** Обчислити невласний інтеграл другого роду:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}.$$

*Розв'язання:* $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = ln\,x\Big|_{0+0}^{1} = ln1 - ln(0+0) = 0 - (-\infty) = +\infty.$

*Відповідь*: інтеграл розбігається.

Якщо існує скінченна границя справа, то відповідний невласний інтеграл *збігається* в протилежному випадку – інтеграл *розбігається*.

**Розглянути самостійно:**

*Геометрична інтерпретація* невласного інтегралу першого роду [2, С58].

*Геометрична інтерпретація* невласного інтегралу другого роду [2, С. 61].

*Ознаки збіжності* невласного інтегралу першого роду [2, С. 60-61].

*Ознаки збіжності* невласного інтегралу другого роду [2, С. 62-64].

## § 2 Контрольні питання

1. Наведіть означення первісної для функції $f(x)$ на проміжку $(a,b)$.
2. Наведіть кілька прикладів функцій, які мають первісні.
3. Поясніть зміст операції "підведення під знак диференціала".
4. За яких умов формула заміни змінної буде вірною?
5. Запишіть формулу інтегрування частинами. За яких умов ця формула буде вірною?
6. Які класи функцій інтегруються частинами?
7. Дайте означення інтегральної суми функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.
8. Дайте означення визначеного інтеграла.
9. Яка функція називається інтегрованою?
10. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца. За яких умов вона буде вірною?
11. Назвіть умови, при виконанні яких будуть вірні формули заміни змінної, інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
12. Які типи невласних інтегралів існують?
13. Дайте означення невласного інтеграла першого роду та наведіть його геометричний зміст.
14. Дайте означення невласного інтеграла другого роду та наведіть його геометричний зміст.
15. Наведіть приклади невласних інтегралів першого та другого роду.

## § 3 Завдання для самостійної роботи

*Завдання* 4.1.1. Знайти невизначені інтеграли, використовуючи властивості та таблицю інтегралів:

1) $\int \sqrt{x}dx$;

2) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$;

3) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$;

4) $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dx$;

5) $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$;

6) $\int tg^2 x\, dx$;

7) $\int \sin x\, d(\sin x)$;

8) $\int tg^3 x\, d(tgx)$.

*Завдання* 4.1.2. Знайти невизначені інтеграли, використовуючи прийом введення під знак диференціала або заміни змінної (метод підстановки):

1) $\int (x+1)^{15} dx$;

2) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$;

3) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\, dx$;

4) $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$;

5) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

6) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$;

7) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \cdot \sqrt{1-x^2}}$;

8) $\int \frac{(arc\,tgx)^3}{1+x^2} dx$;

9) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$;

10) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$;

12) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$.

*Завдання* 4.1.3. Знайти невизначені інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1) $\int x\sin 2xdx$;
2) $\int x\cos x\,dx$;
3) $\int xe^{-x}\,dx$;
4) $\int x3^{x}\,dx$;
5) $\int x\cdot arctgx\,dx$;
6) $\int ln\,x\,dx$;
7) $\int arccos\,x\,dx$;
8) $\int e^{3x}\left(sin\,2x-cos\,2x\right)dx$.

*Завдання* 4.1.4. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1) $\int\frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$;
2) $\int\frac{x}{2x^2-3x-2}dx$;
3) $\int\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx$;
4) $\int\frac{x}{x^3-1}dx$.

*Завдання* 4.1.5. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$;
2) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;
3) $\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4dx$;
4) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$.

*Завдання* 4.1.6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int cos\,x\cdot sin\,3x\,dx$;
2) $\int sin^4 x\,dx$;
3) $\int cos^6 x\,dx$;
4) $\int cos^3 x\,dx$;
5) $\int sin^5 x\,dx$;
6) $\int\frac{cos^3 x}{sin^4 x}\,dx$.

*Завдання* 4.1.7. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$;
2) $\int_4^9\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x\,dx$;

4) $\int\limits_0^2 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$;

5) $\int\limits_0^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$;

6) $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$;

7) $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$;

8) $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$;

9) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$;

10) $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$;

11) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x+x^3}\,dx$;

12) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x\cdot\sin 2x\,dx$.

*Завдання* 4.1.8. Обчислити невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (або встановити їх розбіжність):

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x dx$.

*Завдання* 4.1.9. Обчислити невласні інтеграли від необмежених функцій (або встановити їх розбіжність):

1) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

2) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. - Харків: ХНУРЕ; Фактор, 2004. – 592 с.
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. - Харків: ХНУРЕ; 2002. – 440с.
3. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика. Х.: АПБУ, 2003 – 136 с.
4. Білоусова Л.І. Горонескуль М.М. Курс вищої математики у середовища Maple : Навчальний посібник. – Х.: УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
6. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1969. – 736 с.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. – 432 с.
8. Глаголева А.А., Солнцев Т.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. школа, 1971. – 656 с.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.І. – М.: Высш. шк., 1986. – 304с.
10. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1970. – 472 с.
11. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984. 302 с.
12. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1969 – 256 с.
13. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.
14. Овчинников П.Ф. и др. Высшая математика. К.: Вища школа, 1987. – 552 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. – М.: Наука, 1985. – 551 с.

**Навчальне видання**

**Горонескуль** Маріанна Миколаївна

# ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА. МОДУЛЬ 1. ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для студентів всіх форм навчання за напрямом підготовки “Психологія”

Підп. до друк 30.06.15. Формат 60х84 1/16.
Умовн.-друк. арк. 7,7.
Вид. № 54/14.
Сектор редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
61023 м. Харків, вул. Чернишевська, 94.