АВТОМАТИКА РАННЬОГО ВИЯВЛЕННЯ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ

Лекція 2

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ. ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ФОРМИ ЗАПИСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ. ПОНЯТТЯ ПЕРЕДАТНОЇ ФУНКЦІЇ. ФУНКЦІОНАЛЬНА СХЕМА І ЇЇ ПЕРЕТВОРЕННЯ

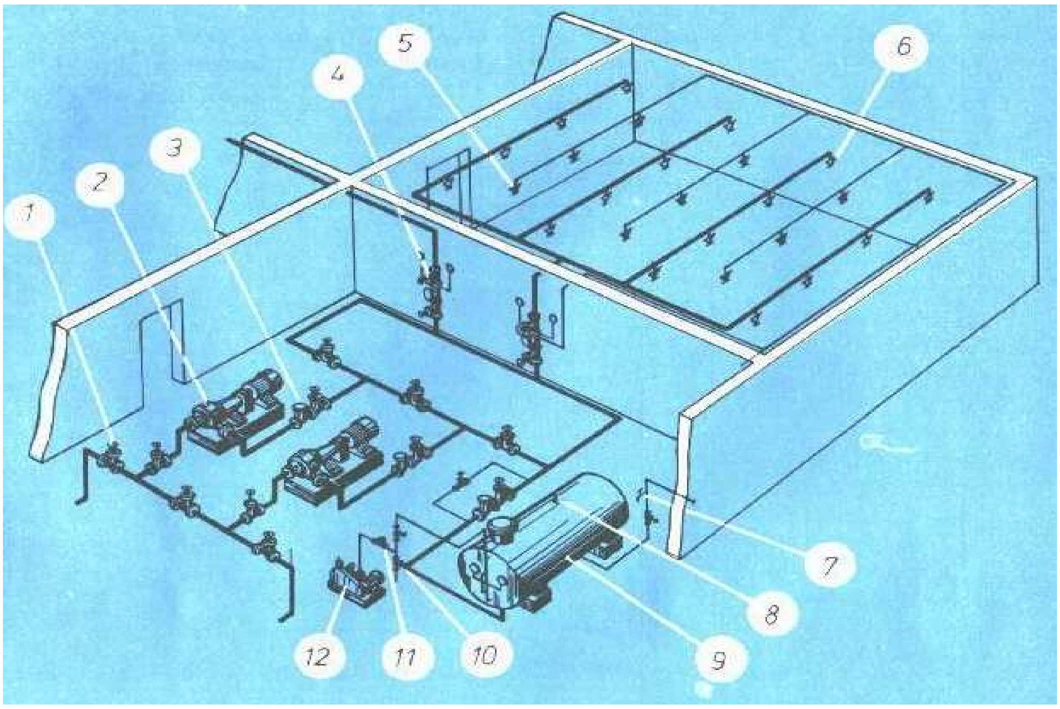
ХАРКІВ

Зміст лекції:

Вступ
1. Лінеаризація ДР АС. Метод повного диференціала.
2. Лінеаризація ДР АС. Метод січної.
3. Форми запису ДР.
3.1. Звичайна форма запису ДР
3.2. Стандартна форма запису ДР.
3.3. Операторна форма запису ДР.
4. Функціональні схеми і їхні перетворення.
4.1. Послідовне з'єднання ланок.
4.2. Паралельне з'єднання ланок.
4.3. Зустрічно-паралельне з'єднання ланок.

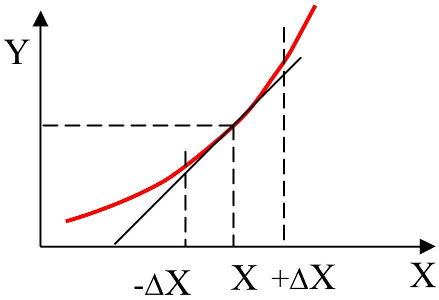
Вступ

В першій лекції, на прикладі автоматичної установки водяного пожежегасіння, рис.1., було показано, що люба по складності пожежна АС, може бути представлена набором окремих простих елементів.



Такими елементами можуть виступати: 1-вентилі та засувки; 2-пожежні насоси з двигунами-приводами; 3-зворотні клапани; 4-вузли управління; 5,6-зрощувачі та трубопроводи. В спрощених моделях пожежних АС, вузли управління та насоси з приводами можуть бути теж представлені як окремі прості елементи. Динаміка роботи усіх елементів може бути описана рівняннями, згідно прийнятої моделі будови пожежної АС.

У загальному випадку динаміка роботи пожежних АС описується системою нелінійних ДУ. Однак, використання нелінійних ДУ сильно ускладнює рішення завдань автоматики. Завдання істотно спрощується, якщо нелінійні рівняння приблизно замінити лінійними. Такий перехід від нелінійних ДУ до лінійного називається лінеаризацією.



$$\Delta Y = \left(\frac{dY}{dX}\right)_0 \cdot \Delta X = tg\alpha \cdot \Delta X$$

Основною умовою лінеаризації є обмеження області досліджуваних режимів малими відхиленнями. Чім вуже область дослідження, тим точніше результати, отримані по лінійній моделі.

Більші успіхи автоматики були досягнуті завдяки тому, що динаміка АС вивчалася в лінійній постановці.

1. Лінеаризація ДР АС. Метод повного диференціала.

Нехай динаміка АС описується ДУ:

$$F\left(\dot{Y}, Y\right) = \varphi(x).$$

Якщо функція диференцюєма, то можна скористатися методом повного диференціала.

1. Дорівняємо повний диференціал лівої й правої частини ДУ.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right)_0 \cdot d\dot{Y} + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 \cdot dY = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_0 \cdot dX .$$

2. Замінимо диференціали малими відхиленнями.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right)_0 \cdot \Delta\dot{Y} + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 \cdot \Delta Y = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_0 \cdot \Delta X .$$

3. Перейдемо до відносним змінного.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right)_0 \cdot \frac{Y_0}{Y_0}\Delta\dot{Y} + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 \cdot \frac{Y_0}{Y_0}\Delta Y = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_0 \cdot \frac{X_0}{X_0}\Delta X .$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \dot{\boldsymbol{Y}}}\right)_0 \cdot \boldsymbol{Y}_0 \dot{\overline{\boldsymbol{Y}}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{Y}}\right)_0 \cdot \boldsymbol{Y}_0 \overline{\boldsymbol{Y}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{X}}\right)_0 \cdot \boldsymbol{X}_0 \overline{\boldsymbol{X}} .$$

$$\overline{Y} = \frac{\Delta Y}{Y_0}; \quad \dot{\overline{Y}} = \frac{d\left(\dfrac{\Delta Y}{Y_0}\right)}{dt} = \frac{1}{Y_0}\left(\frac{d(\Delta Y)}{dt}\right) = \frac{\Delta \dot{Y}}{Y_0} .$$

В автоматиці прийнято використати не абсолютні відхилення змінних, а відносні, щодо розглянутої базисної крапки X_0, Y_0.

Коефіцієнти при змінних є постійними, отже, одержали лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, яке можна записати у формі Коші:

$$a_0 \dot{\overline{Y}} + a_1 \overline{Y} = b \overline{x} \, .$$

Примітка. Якщо линеаризуєма функція являє собою добуток і частку змінних, то перед лінеаризацією функцію зручно попередньо прологарифмувати.
Приклад: лінеаризувати рівняння:

$$G = m \frac{PF}{\sqrt{T}} \, .$$

Прологарифмуємо дане рівняння:

$$\ln G = \ln m + \ln P + \ln F - 0{,}5 \ln T \, .$$

Дорівняємо диференціали правої й лівої частини:

$$\frac{dG}{G_0} = \frac{dP}{P_0} + \frac{dF}{F_0} - 0{,}5 \frac{dT}{T_0} \, .$$

Замінимо диференціали малими збільшеннями щодо крапки «0»:

$$\frac{\Delta G}{G_0} = \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta F}{F_0} - 0{,}5 \frac{\Delta T}{T_0} \, .$$

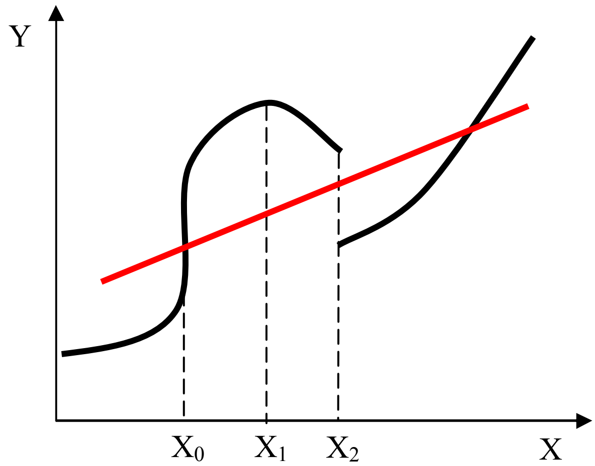
Перейдемо до відносних перемінних:

$$\overline{G} = \overline{P} + \overline{F} - 0{,}5\overline{T} \, .$$

Одержали шукане лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами.

2. Лінеаризація ДР АС. Метод січної.

Методом січної користуються в тих випадках, коли метод повного диференціала не можливо застосувати.



У точці X_0 производная $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_0 = \infty$ отже лінійна модель буде давати нескінченні помилки.

У точці X_1 производная $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_0 = 0$ отже лінійна модель нерухома.

У точці X_2 функция F(X) не диференцюєма.

У цьому випадку використовуючи статистичні дані нелінійну модель приблизно заміняють лінійної так, щоб помилки, отримані в результаті застосування лінійної моделі були найменшими (наприклад методом найменших квадратів). Представлена лінійна модель буде являти собою не дотичну, а січну. Звідси й назва методу.

3. Форми запису диференціальних рівнянь.

3.1. Звичайна форма запису ДУ

Звичайна форма запису ДУ відповідає лінійному ДУ з постійними коефіцієнтами:
$$a_0 \overline{\dddot{y}} + a_1 \overline{\ddot{y}} + a_2 \overline{\dot{y}} + a_3 \overline{y} = b \overline{x} .$$

3.2. Стандартна форма запису ДУ

У стандартній формі запису прийнято, щоб коефіцієнт при нульовій похідній рівнявся одиниці. Розділимо праву й ліву частини рівняння у звичайній формі на коефіцієнт при нульовій похідній.
$$\frac{a_0}{a_3} \overline{\dddot{y}} + \frac{a_1}{a_3} \overline{\ddot{y}} + \frac{a_2}{a_3} \overline{\dot{y}} + \overline{y} = \frac{b}{a_3} \overline{x}$$

Одержимо рівняння в стандартній формі.
$$T_1^3 \overline{\dddot{y}} + T_2^2 \overline{\ddot{y}} + T_3 \overline{\dot{y}} + \overline{y} = K \overline{x} .$$

Коефіцієнти ДУ, записаного в станд. формі, мають певний фізичний зміст.

Коефіцієнт підсилення ***K*** показує співвідношення вихідного сигналу до вхідного на рівноважних режимах.
$$\overline{\dddot{y}} = 0 ; \quad \overline{\ddot{y}} = 0 ; \quad \overline{\dot{y}} = 0 ; \quad \overline{y} = K \overline{x}$$

Постійні часу $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$ - характеризують інерційні властивості системи й визначають тривалість динамічних процесів. Розмірність постійних часу дорівнює секунді. Розмірність змінних – величина зворотна часу:
$$\left[\overline{\dot{y}}\right] = \left[\frac{d\overline{y}}{dt}\right] = \frac{1}{c}; \quad \left[\overline{\ddot{y}}\right] = \left[\frac{d^2\overline{y}}{dt^2}\right] = \frac{1}{c^2}; \quad \left[\overline{\dddot{y}}\right] = \left[\frac{d^3\overline{y}}{dt^3}\right] = \frac{1}{c^3} .$$

Очевидно, для того щоб усі рівняння, що складаються, були безрозмірними, коефіцієнти при похідних повинні мати розмірність часу.
$$[T_1]=c; \quad [T_2]=c; \quad [T_3]=c.$$

3.3. Операторна форма запису ДУ

В основі операторної форми запису ДУ лежить теорія перетворення Лапласу.

Формально застосувати операторну форму запису можна, якщо замінити символ диференціювання оператором Лапласа:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \Rightarrow \mathrm{P} .$$

В операторній формі запису, певним чином змінюється зміст перемінних, які тепер називаються **зображеннями**. Тоді, скориставшись формальним правилом, запишемо ДР в операторній формі:
$$\mathrm{T_1^3 P^3 Y + T_2^2 P^2 Y + T_3 P Y + Y = K X} .$$

З ДР, записаним в операторній формі, можна поводитися, як із простим алгебраїчним рівнянням.

Винесемо Y за дужки:

$$Y(T_1^3P^3 + T_2^2P^2 + T_3P + 1) = KX \; .$$

Передаточною функцією (ПФ) називається відношення зображення вихідного сигналу до зображення вхідного сигналу**:**

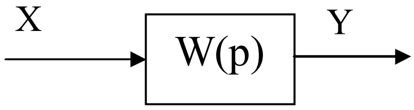
$$W(P) = \frac{Y}{X} = \frac{K}{T_1^3P^3 + T_2^2P^2 + T_3P + 1} \, .$$

Знаючи передатну функцію і вхідний сигнал легко одержати вихідний сигнал:

$$Y = W(P) \cdot X \; .$$

Таким чином, ПФ показує, які перетворення необхідно зробити над вхідним сигналом X, щоб одержить вихідний сигнал Y.

Така властивість ПФ дозволяє зображувати АС у виді функціональної схеми.



__Довідка__. Перетворення Лапласу зв'язує функцію дійсної перемінний $f(t)$ с функцією комплексної перемінний F(p). Дійсну функцію називають оригіналом, а комплексну функцію – зображенням. Математичний зв'язок оригіналу з зображенням установлюється формулою L – перетворення.

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F(p) \, .$$

Не для всякого оригіналу можна знайти відповідне зображення. Для цей оригінал повинний відповідати наступним умовам:

- функція $f(t)$ повинна бути визначена в інтервалі $\pm\infty$;
- дорівнювати нулю при $t < 0$;
- бути на кожнім відрізку безупинної і мати кінцеве число екстремумів чи кінцеве число розривів першого роду;
- не прагнути до нескінченності при $t \to \infty$.

Цим вимогам задовольняє широкий клас функцій, якими оперує лінійна ТАУ.

Перетворення Лапласу цікаво тим, що інтегральне і диференціальне числення в просторі зображень заміняється простими алгебраїчними операціями. Це істотно спрощує аналітичне дослідження складних динамічних систем.

__Диференціювання.__

Диференціювання оригіналу в просторі зображень заміняється множенням зображення на комплексний аргумент «р».

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = p \cdot F(p) \, .$$

__Інтегрування.__

Інтегрування оригіналу в просторі зображень заміняється розподілом зображення на комплексний аргумент «р».

$$L[\int_0^t f(t)] = \frac{1}{p} \cdot F(p) \, .$$

__Запізнювання.__

Якщо F(p) зображення $f(t)$, то зображенням функції $f(t\text{-}\tau)$ є: $L[f(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = e^{-p\tau} \cdot F(p)$ __Межі.__

Якщо F(p) зображення $f(t)$, то: $L[\underset{t\to\infty}{f(t)}] = L[f(\infty)] = \lim\limits_{p\to 0} p \cdot F(p)$.

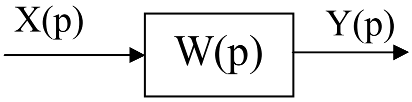
Таблиця перетворень Лапласа.

№п/п	Оригінал f(t)	Зображення F(p)
1.	$\delta(t)$	1
2.	$a \cdot \delta(t)$	a
3.	1(t)	$\frac{1}{p}$
4.	a(t)	$\frac{a}{p}$
5.	$a \cdot t^n \quad (n = 1,2,\ldots\ldots)$	$\frac{a \cdot n!}{p^{n+1}}$

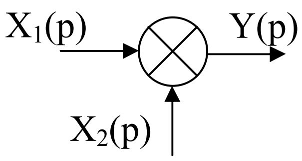
6.	$\frac{t}{T}-\frac{T_1}{T}(1-e^{-\frac{t}{T_1}})$	$\frac{1}{Tp\ (T_1p+1)\ p}$
7.	$\frac{a}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{a}{Tp+1}$
8.	$a(1-e^{-\frac{t}{T}})$	$\frac{a}{p(Tp+1)}$
9.	$a(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}-\frac{T_2}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_2}})$	$\frac{a}{p(T_1p+1)\cdot(T_2p+1)}$
10.	$a\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}e^{-\frac{t}{T/d}}\cdot Sin(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t+arctg\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})$	$\frac{a}{p(T^2p^2+2dTp+1)}$; d<1

4. Функціональні схеми і їхні перетворення.

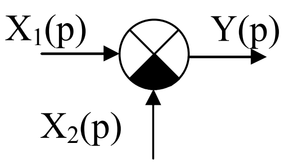
Взаємозв'язок простих динамічних ланок у складних АС зручно відображати за допомогою функціональних схем. На цих схемах ланки зображують прямокутниками, усередині яких записані передатні функції, а стрільцями - сигнали. Причому напрямок стрілки показує і напрямок впливу.



Найпростіші арифметичні операції додавання і вирахування сигналів на функціональних схемах зображують у такий спосіб:



Додавання: $Y(\text{p}) = X_1(\text{p}) + X_2(\text{p})$



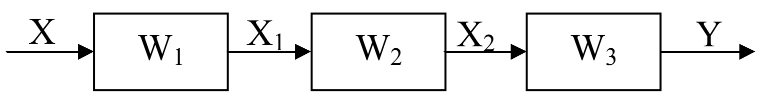
Вирахування: $Y(\text{p}) = X_1(\text{p}) - X_2(\text{p})$

Таким чином, функціональні схеми відображують ті математичні операції, що здійснюються при передачі сигналів через ланки.

За допомогою функціональної схеми легко одержати загальну передатну функцію (рівняння динаміки) в

сієї АС, не вирішуючи систему диференціальних рівнянь, що описують динаміку її елементів.

4. 1. Послідовне з'єднання ланок (спрацювання: СП, ППКП, АУПГ)



$X_1 = W_1 \cdot X$;

$X_2 = W_2 \cdot X_1$;

$Y = W_3 \cdot X_2$;

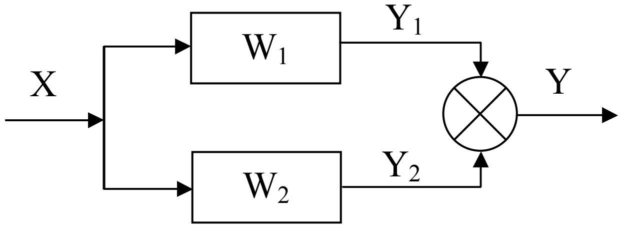
Виключимо змінні X_1, X_2, отже:

$$Y = W_3 \cdot W_2 \cdot W_1 \cdot X$$

Еквівалентна передатна функція буде дорівнює:

$$W_{ЭКВ} = \frac{Y}{X} = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3$$

4. 2. Паралельне з'єднання ланок (робота диференційного сповіщувача)



$Y_1 = W_1 \cdot X$;

$Y_2 = W_2 \cdot X$;

$Y = Y_1 + Y_2$.

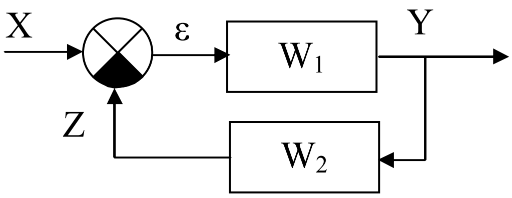
Виключимо змінні Y_1, Y_2, отже:

$$Y = W_1 \cdot X + W_2 \cdot X = (W_1 + W_2) \cdot X \ .$$

Еквівалентна передатна функція буде дорівнює:

$$W_{ЭКВ} = \frac{Y}{X} = W_1 + W_2 \ .$$

4. 3. Зустрічно-паралельне з'єднання ланок (підтримання тиску в АУВПГ)



$Y = W_1 \cdot \varepsilon$;

$Z = W_2 \cdot Y$;

$\varepsilon = X - Z$.

Виключимо змінні Y_1, Y_2, одержимо:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{W}_1 \cdot (\mathrm{X} - \mathrm{W}_2 \cdot \mathrm{Y}) = \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{X} - \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{W}_2 \cdot \mathrm{Y} \ .$$

$$\mathrm{Y} + \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{W}_2 \cdot \mathrm{Y} = \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{X} \quad \text{или} \quad \mathrm{Y} \cdot (1 + \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{W}_2) = \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{X}$$

Еквівалентна передатна функція буде дорівнює:

$$\mathrm{W}_{ЭКВ} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{W}_1}{1 + \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{W}_2} \ .$$

В автоматиці сигнал Z називають сигналом зворотного зв'язку (ОС).

Якщо (=X-Z ОС називається негативної.

Якщо (=X+Z ОС називається позитивної й еквівалентна передатна функція визначається по формулі:

$$\mathrm{W}_{ЭКВ} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{W}_1}{1 - \mathrm{W}_1 \cdot \mathrm{W}_2}$$

Підсумки за лекцією

Таким чином, загальні відомості будови систем пожежної автоматики, що нами розглянуто, будуть вами використані для більш глибокого опанування основних теоретичних положень теорії роботи автоматики пожежних систем, яка буде розглянута на наступній лекції.

Завдання на самопідготовку

1. Абрамов Ю.О. Основи пожарной автоматики. С. 30-45.