АВТОМАТИКА РАННЬОГО ВИЯВЛЕННЯ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ

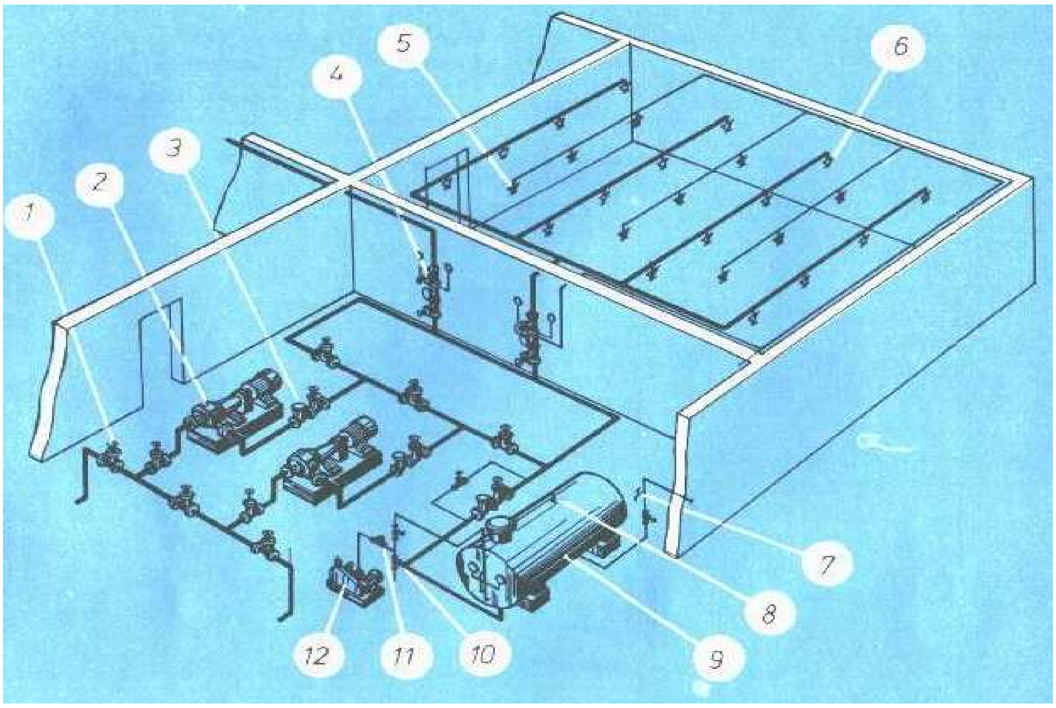
Лекція 3

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ХАРАКТЕРИСТИК АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ КОНТРОЛЮ ТА СПОСТЕРЕЖЕННЯ. СТАНДАРТНІ ВХІДНІ СИГНАЛИ. ТИПИ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ. ПЕРЕХІДНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛАНОК

Зміст лекції:

ВСТУП

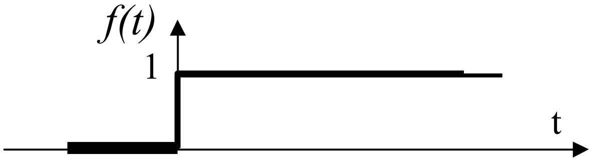
В другій лекції, на прикладі АУВПГ було показано, що люба по складності пожежна АС, може бути представлена набором окремих простих елементів. Сьогодні на занятті ми розглянемо, як можливо математично записати усі її елементи, та виразити діючи на них сигнали.



1. СТАНДАРТНІ ВХІДНІ ВПЛИВИ

В автоматиці прийнято розглядати реакції АС на вхідні сигнали визначеної форми, що називаються стандартними.

1. Одиничний східчастий сигнал: *f(t)=1(t).*



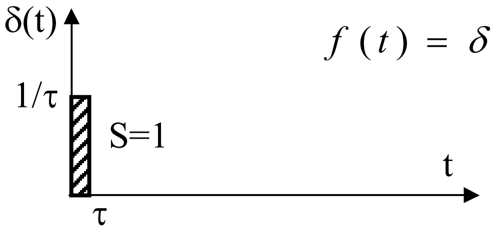
При $t \le 0$, $f(t)=0$;
При $t>0$, $f(t)=1(t)$, $F(p)=1/p$.

2. Одиничний східчастий сигнал швидкості:

$$\dot{f}(t) = 1(t), \quad F(p) = \frac{1}{p^2}.$$

$$f(t) = \int_0^t 1(t)\cdot dt; \quad F(p) = L\left[\int_0^t 1(t)\cdot dt\right] = \frac{1}{p^2};$$

3. Одиничний імпульсний сигнал (дельта функція):



$$f(t) = \delta(t), \quad F(p) = 1.$$

4. Одиничний гармонійний сигнал:

$$f(t) = Cos(\omega \cdot t), \quad F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ АС

Реакції АС на стандартні вхідні сигнали мають визначені назви.

Перехідною характеристикою (ПХ) називають графічне зображення реакції АС на східчастий сигнал. Математичне вираження перехідної характеристики називається **перехідною функцією (ПерФ).**

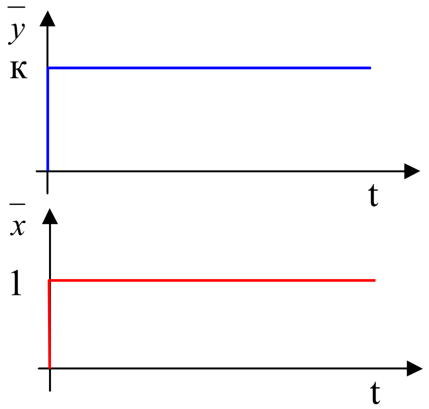
Імпульсною (ваговою) характеристикою (ІХ) називають графічне зображення реакції АС на одиничний імпульсний сигнал. Математичне вираження імпульсної характеристики називається **імпульсною (ваговою) функцією (ІФ).**

Частотною характеристикою (ЧХ) називають графічне зображення реакції АС на гармонійний сигнал. Математичне вираження гармонійної характеристики називається **частотною функцією (ЧФ).**

3. Перехідні характеристики позиційних ланок.

3. 1. Ідеальна позиційна ланка.

Ричаг датчика рівня вогнегасної речовини. Переміщення кінця перемістить інший кінець



Рівняння динаміки:

$$\bar{y} = K \cdot \bar{x}; \qquad W(p) = K .$$

Ланка миттєво відтворює вхідний сигнал, посилений у "*K*" раз.

3.2. Реальна позиційна ланка.

Пожежний насос. Вхідний сигнал оберти від приводу, вихідний сигнал витрата води.

Рівняння динаміки, ПФ:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = K \cdot x(t); \quad W(p) = \frac{K}{Tp+1} .$$

Знайдемо перехідну функцію, при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \dfrac{1}{p}$.

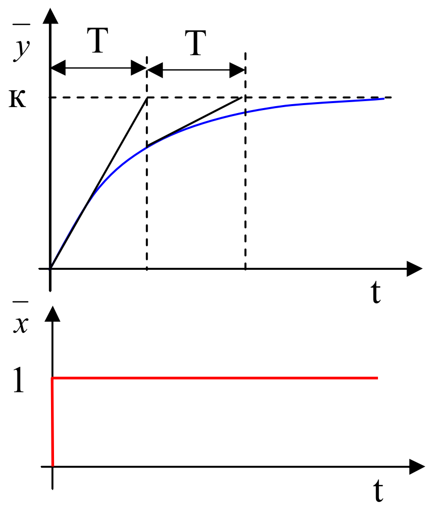
Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot X(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) .$$

Перехідна характеристика являє собою експоненту.



Особливості ПХ:

1. Графік перехідного процесу являє собою експоненту.
2. Величина проекції дотичної на лінію сталого режиму дорівнює постійної часу T.
3. Тривалість перехідного процесу t_r, час за який вихідний сигнал досягає 95% нового сталого значення визначається постійної часу: $t_r = 3T$.

Дійсно: $0{,}95K = K - K \cdot e^{-\frac{t_r}{T}}$, отже $e^{-\frac{t_r}{T}} = 0{,}05$ или $e^{\frac{t_r}{T}} = 20$.

Прологарифмуємо:

$$\frac{t_r}{T} = \ln 20 \approx 3 \quad \Rightarrow \quad t_r = 3T$$

Довідка. Для заданої умови $\overline{x}=1(t)$ рівняння динаміки прийме вид: $T\dot{\overline{y}}+\overline{y}=K$

Рішення лінійного диференціального рівняння шукається у вигляді: $\overline{y}(t)=\overline{y}_{OO}+\overline{y}_{ЧАС}$.

Загальне однорідне рішення має вигляд: $\overline{y}_{OO}=C\cdot e^{pt}$, де p – корінь характеристичного рівняння,

С – постійна інтегрування, обумовлена з початкових умов.

Приватне рішення в цьому випадку має вигляд правої частини: $\overline{y}_{ЧАС}=K$

Характеристичне рівняння ДУ: $Tp+1=0$, отже $p=-\frac{1}{T}$

Одержимо: $\overline{y}(t)=C\cdot e^{-\frac{t}{T}}+K$.

Постійну «З» знайдемо з початкових умов: $\overline{y}(0)=C\cdot e^{-\frac{t_0}{T}}+K$, отже $0=C+K$, звідки $C=-K$.

Остаточно одержимо: $\overline{y}(t)=K\cdot(1-e^{-\frac{t}{T}})$.

3 .3. Позиційна ланка 2-го порядку.

Пожежний насос. Вхідний сигнал оберти від приводу, вихідний сигнал витрата води. Ураховуються динамічні процеси, пов'язані з тертям та перетіканням вогнегасної речовини.

Рівняння динаміки, ПФ:

$$T^2\ddot{\overline{y}}+2dT\dot{\overline{y}}+\overline{y}=K\overline{x}; \qquad W(p)=\frac{K}{T^2p^2+2dTp+1}.$$

Знайдемо перехідну функцію при $x(t)=1(t)$, $X(p)=\frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при *t=0*, $y(0)=0$; $\dot{y}(0)=0$; $\ddot{y}(0)=0$.

$$Y(p)=W(p)\cdot X(p)=\frac{K}{T^2p^2+2dTp+1}\cdot X(p)=\frac{K}{T^2p^2+2dTp+1}\cdot\frac{1}{p}.$$

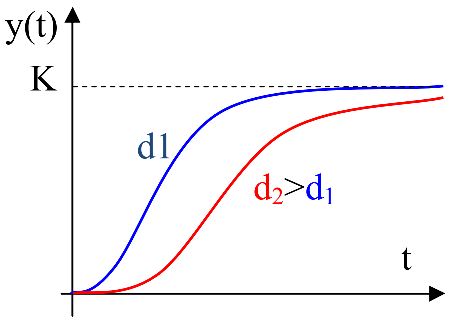
З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

<u>1) Декремент загасання d≥1.</u>

Корені характеристичного рівняння дійсні негативні: $p_{1,2}=-\frac{d}{T}\pm\sqrt{\frac{d^2-1}{T^2}}$

Позначимо: $T_1=-\frac{1}{p_1}$; $T_2=-\frac{1}{p_2}$.

Представимо ПФ у виді: $W(p)=\frac{K}{(T_1p+1)\cdot(T_2p+1)}=\frac{K}{T_1p+1}\cdot\frac{1}{T_2p+1}$.



Рішення ДУ має вид:

$$y(t) = K(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}}).$$

Перехідна характеристика складається з двох експонент і відповідно до характеру перехідного процесу називається аперіодичної

Особливості ПХ: **1.** $\dot{y}(0) = 0$.

2. Мається крапка перегину.

3. Тривалість перехідного процесу залежить не тільки від постійної часу, але і від величини декремента загасання.

Довідка. У випадку дійсних коренів характеристичного рівняння рішення ДУ має вид:

$$y(t) = y_{OO}(t) + y_{ЧАС}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + K = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + K$$

Значення З$_1$, З$_2$ визначаються з початкових умов: при *t=0*, $\bar{y}(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$; $\ddot{y}(0) = 0$.

$$\dot{y}(t) = \frac{C_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{C_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}; \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + K = 0 \\ -\frac{C_1}{T_1} - \frac{C_2}{T_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = K\frac{T_1}{T_2 - T_1}; \quad C_2 = -K\frac{T_2}{T_2 - T_1}.$$

Остаточно одержимо: $y(t) = K(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}})$.

2) Декремент загасання d<1

Корені характеристичного рівняння комплексно-сполучені:

$$p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm j\sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} = -\alpha \pm j\omega \ .$$

Рішення ДУ має вид:

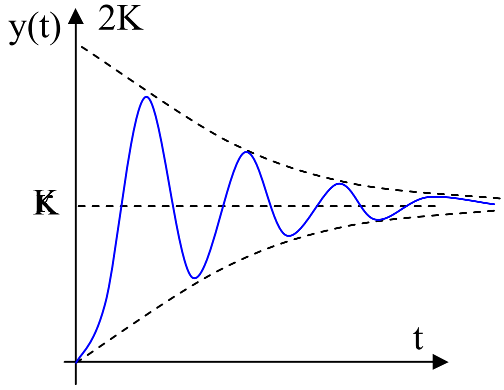
$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T/d}} \cdot Sin\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T} t + arctg\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right)\right).$$

Позначимо: $T_{ОГ} = \frac{T}{d}$,

$\omega = \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}}$ – власна частота коливань [рад/с],

$\phi = arctg\sqrt{\frac{1-d^2}{d^2}}$ – зрушення фази [рад].

Одержимо спрощений запис: $y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-\frac{t}{T_{ОГ}}} \cdot Sin(\omega t + \varphi)\right)$



Особливості ПХ:

1. Перехідний процес буде коливальним. У рішенні ДУ мається гармонійна складова.
2. Графік розташовується між двома обгинаючими. Обгинаючи є експонентою з постійної часу: $T_{ОГ} = \frac{T}{d}$.
3. Час τ_R можна приблизно оцінити за постійною часу обгинаючої.

$$t_R = 3T_{ОГ} = \frac{3T}{d} .$$

4. З $\downarrow d$, $\tau_R \uparrow$. При d=0 коливання взагалі не загасають.

Така ланка називається **"консервативною" (ідеальний маятник).**

Довідка. У випадку комплексно-сполучених коренів: $p_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm i \cdot \sqrt{\frac{1-d^2}{T^2}} = -\alpha \pm i\omega$.

Загальне рішення ДУ шукається у виді: $\overline{y}_{OO} = C_1 e^{(-\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(-\alpha-i\omega)t}$.

Для того щоб одержати рішення в дійсній формі скористаємося правилом. Якщо ДУ з дійсними коефіцієнтами має комплексне рішення:

$$y(t) = U(t) + iV(t) ,$$

то кожна з цих функцій U(t) і V(t) є рішенням цього ДУ.

По формулі Ейлера: $e^{(-\alpha+i\omega)t} = e^{-\alpha t} \cdot (Cos\omega t + iSin\omega t) = e^{-\alpha t} Cos\omega t + i \cdot e^{-\alpha t} Sin\omega t = U(t) + iV(t)$.

Тоді відповідно до правила функції $U(t) = e^{-\alpha t} Cos\, \omega t;$ и $V(t) = e^{-\alpha t} Sin\, \omega t$,

є рішенням вихідного ДУ. Знаючи дві частки рішення, можна побудувати загальне рішення:

$$y_{OO} = C_1 U(t) + C_2 V(t) = e^{-\alpha t} \cdot (C_1 Cos\, \omega t + C_1 Sin\, \omega t) .$$

Позначимо: $C_1 = ASin\varphi;$ и $C_2 = ACos\varphi$.

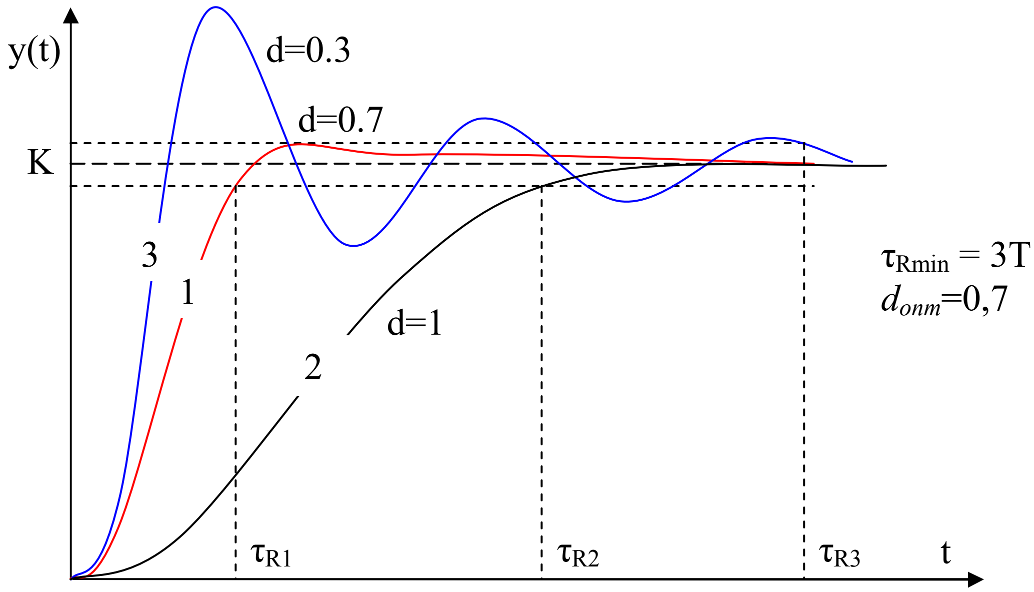
Одержимо: $y_{OO} = e^{-\alpha t} \cdot (ASin\, \phi Cos\, \omega t + ACos\, \phi Sin\, \omega t) = Ae^{-\alpha t} \cdot Sin(\omega t + \phi)$.

З начельных умов визначаються єдині значення $З_1$, $З_2$ чи А, φ.

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \qquad \varphi = arctg \frac{C_1}{C_2} .$$

А.Ф. Берман, И.Г. Араманович. Короткий курс математичного аналізу. М., Наука, 1971,стор.591.

На наступному рисунку показаний вплив декремента загасання *d* на тривалість перехідних процесів ланки 2-го порядку. Мінімальний час перехідного процесу відповідає декременту загасання *d*=0,7.



<u>Висновок.</u> Для забезпечення мінімального часу перехідного процесу сучасні АС проектуються з незначної коливальністю перехідних процесів.

4. Перехідні характеристики інтегруючих ланок.

<u>4.1. Ідеальна інтегруюча ланка.</u>

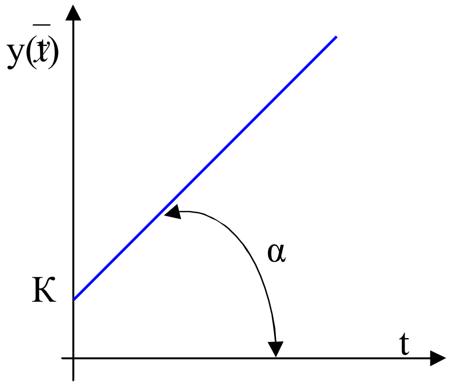
Датчик рівня вогнегасної речовини: вхідний сигнал витрата рідини, вихідний сигнал - рівень рідини.

Рівняння динаміки, ПФ: $T\dot{y}(t) = Kx(t); \quad W(p) = \dfrac{K}{Tp}$.

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \dfrac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = \frac{1}{Tp} \cdot \frac{1}{p}.$$



З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$y(t)=\frac{K}{T}t\,.$$

<u>Особливості ПХ:</u>
Перехідна характеристика представляє собою пряму лінію з кутом нахилу:

$$\alpha = arctg\frac{K}{T}\,.$$

<u>Довідка.</u> Це найбільш просте ДУ, його рішення має вид: $y(t)=\frac{K}{T}\int_0^t x(t)\cdot dt=\frac{K}{T}\int_0^t dt=\frac{1}{T}t\,.$

<u>4.2. Реальна інтегруюча ланка.</u>

перспективна пожежна АС

Рівняння динаміки: $T_1T\ddot{y}(t)+T\dot{y}(t)=Kx(t)\,.$

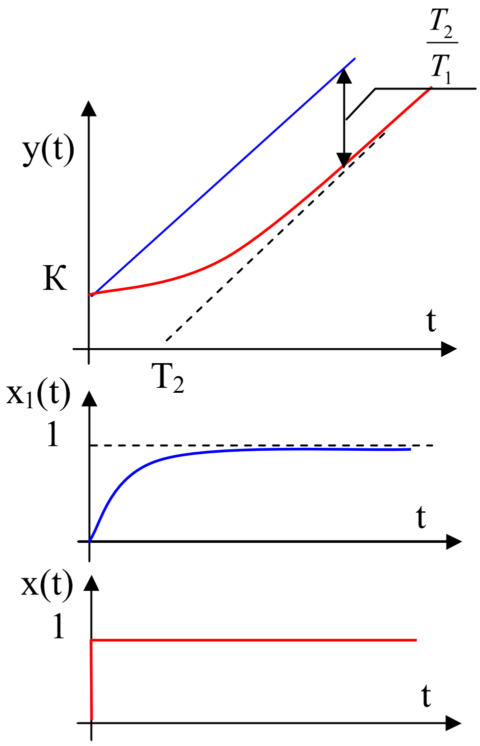
Реальну інтегруючу ланку можна представити у виді послідовного з'єднання інерційної і ідеальної інтегруючої ланок.

$$X \rightarrow \boxed{\frac{1}{T_1p+1}} \xrightarrow{X_1} \boxed{\frac{K}{T\,p}} \xrightarrow{Y}$$

Знайдемо перехідну функцію при $x(t)=1(t)$, $X(p)=\frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0)=0$; $\dot{y}(0)=0\,.$

$$Y(p)=W_1(p)\cdot W_2(p)X(p)=\frac{K}{Tp}\cdot\frac{1}{T_1p+1}\cdot X(p)=\frac{K}{T\,p}\cdot\frac{1}{T_1p+1}\cdot\frac{1}{p}\,.$$



Знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{K}{T} t - \frac{T_1}{T} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T1}})}$$

<u>Особливості ПХ:</u>

1. При t→∞ : $e^{-\frac{t}{T2}} \to 0$.

$$y(\mathrm{t}) \approx \frac{K\,t}{T} - \frac{T_1}{T} .$$

2. Перехідна характеристика реальної інтегруючої ланки відрізняється від ідеальної ланки на величину $\Delta \bar{\boldsymbol{y}} = -\frac{\boldsymbol{T_1}}{\boldsymbol{T}}$.

Це відставання вносить інерційна ланка.

Довідка. Перехідна функція першої ланки відома: $\bar{x}_1 = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}$. Тоді для другої ланки одержимо:

$$y = \frac{K}{T_1} \int_0^t (1 - e^{-\frac{t}{T_2}}) dt = \frac{K}{T_1} \left(t + T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)_0^t = \frac{K}{T_1} (t + T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} - T_2) = \frac{K}{T_1} t - \frac{T_2}{T_1} (1 - e^{-\frac{t}{T_2}}).$$

5. Перехідні характеристики ланок, що диференціюють.

<u>5.1. Ідеальна ланка, що диференціює.</u>

Ідеальний вимірник швидкості.

Рівняння динаміки: $y(t) = K\,\dot{x}(t)$.

Знайдемо перехідну функцію при $x(t) = 1(t)$, $X(p) = \frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при $t=0$, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

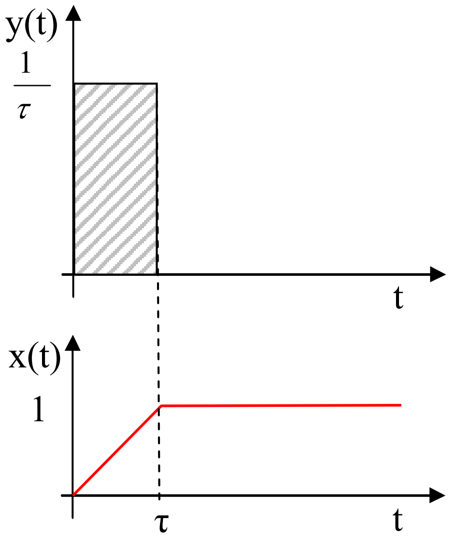
$$Y(p) = W(p) \cdot X(p) = Kp \cdot X(p) = Kp \cdot \frac{1}{p} = K .$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$\bar{y} = K \cdot \delta(t) .$$

Перехідна характеристика являє собою імпульс площею "К".

Щоб зрозуміти перехідну характеристику ідеальної диференцюючої ланки, розглянемо не східчастий сигнал впливу, а сигнал з деяким нахилом, приблизно вважаючи його східчастим.



$$y(t)=\dot{x}=\frac{dx(t)}{dt}\approx\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{1}{\tau}$$

У цьому випадку імпульс дорівнює по величині $\frac{1}{\tau}$, а площа імпульсу дорівнює:

$$S=\tau\cdot\frac{1}{\tau}=1\ .$$

При $\tau\to 0$, перехідна характеристика прагне до дельта функції $\delta(t)$:

$$1'(t)=\lim_{\tau\to 0}\dot{x}(t)=\delta(t)\ .$$

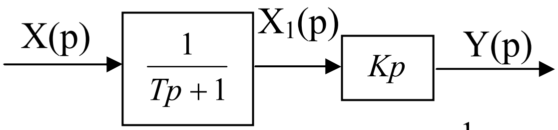
Відповідно: $\int_0^t\delta(t)dt=1(t)$.

5.2. Реальна ланка, що диференціює.

Реальний вимірник швидкості

Рівняння динаміки: $T\,\dot{y}(t)+y(t)=K\,\dot{x}(t)$.

Реальна ланка, що диференціює, можна представити у виді послідовного з'єднання інерційного позиційної й ідеальної диференцюючої ланок.

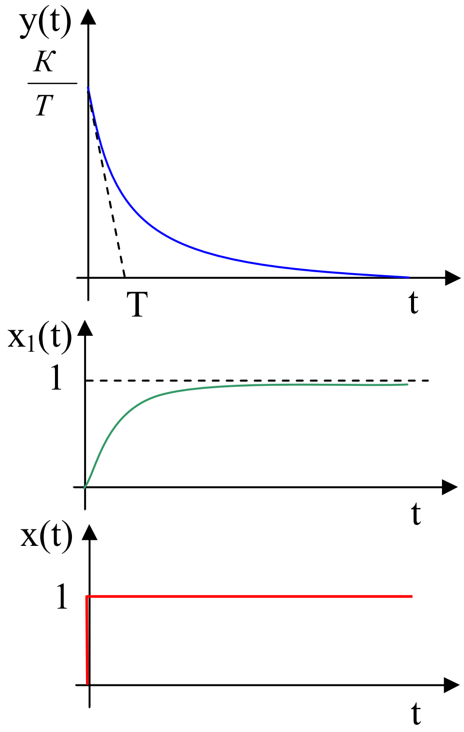


Знайдемо перехідну функцію при $x(t)=1(t)$, $X(p)=\frac{1}{p}$.

Нульові ПУ: при *t=0*, $y(0)=0$; $\dot{y}(0)=0$.

$$Y(p)=W(p)\cdot X(p)=Kp\frac{1}{Tp+1}X(p)=\frac{Kp}{Tp+1}\frac{1}{p}.$$

З таблиць перетворень Лапласа знайдемо оригінал отриманого зображення:



$y(t)=\frac{K}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$

Особливості ПХ:

1. Перехідна характеристика являє собою експоненту.

2. При t=0 $y(0)=\frac{K}{T}$

3. Чим менше постійна часу інерційного запізнювання T, тим ближче реальна ланка до ідеальної.

4. Процес експоненціальний, час перехідного процесу: $t_R=3T$.

Довідка. $x_1=1-e^{-\frac{t}{T}}$

$$\Rightarrow \quad y(t)=K\,\dot{x}(t)=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}.$$

Висновок: на лекції було розглянуто математичне вираження і характеристики елементів та пристрої АУВПГ.

Завдання на смопідготовку:

Абрамов Ю.А. "Основы пожарной автоматики" стор. 46-92.