

А.А. ТЕСЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, НТУ "ХПИ"

МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ФОТОУПРУГОСТИ.

У роботі розглядаються основи нової модифікації методу фотопружності і можливості її модельного дослідження. Суть нової модифікації полягає в поєднанні можливостей традиційного методу фотопружності і методу кінцевих елементів. Вироблена оцінка впливу точності пьезооптичних коефіцієнтів на точність у визначенні напруг в умовах конкретної речовини і схеми вимірювання.

Bases of a new modification of photoelasticity method and possibility of its model research are examined in work. Essence of a new modification consists of combination of possibilities of traditional photoelasticity method and finite-element method. Estimation of influencing of exactness of elastooptic coefficients on exactness in determination of tensions in the conditions of particular matter and chart of measuring is produced.

1. Введение. В настоящее время наблюдается интенсивное развитие автоматизации метода фотоупругости. Разрабатываемые методологии и устройства находят применение, например, при производстве стекол для TFT мониторов. Имеется два направления развития метода фотоупругости. Первое – развитие методологии и автоматизации измерений поляризационных параметров, второе – развитие методов интерпретации измерений. Первое направление развивается относительно интенсивно, второе представлено в основном томографическими методами, сориентированными на частные случаи напряженного состояния.

2. Актуальность рассматриваемой проблемы. В предлагаемой работе рассматривается проблема интерпретации измерений. Отличительной чертой предлагаемого подхода является тот факт, что не делается никаких предположений о распределении напряжений или симметрии свойств среды. Т.е. все соотношения записываются для общего случая анизотропной задачи. Работа продолжает исследование, представленное в [1,2]. В рамках этого подхода результат ищется в виде решения задачи метода конечных элементов. Это дает возможность учесть граничные условия и условия равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Дальше, в этой статье, будем называть этот способ решения задачи фотоупругости методом конечных фотоупругих элементов (МКФЭ). Развитием метода конечных элементов дает в руки специалистов большой набор мощных и апробированных средств. Однако неясным остается вопрос об устойчивости метода фотоупругости в этом случае. В работе [1] устойчивость метода фотоупругости изучалась для случая МКФЭ в условиях неточно измеренных поляризационных параметров, оптической разности хода \mathcal{S} и оптического параметра изоклины φ . В данной работе изучается устойчивость МКФЭ в условиях погрешности пьезооптиче-

ских коэффициентов π_{ijk} . Аналогичное исследование проводилось в работах [3,4] и др. для метода наклонного просвечивания. В этих работах была исследована устойчивость метода для кристаллов кубической симметрии кристаллической решетки. Неожиданным был тот результат, что устойчивость задачи фотоупругости имеет анизотропную регулярную составляющую. Было выяснено, что случайные ошибки в измерениях оптических параметров приводят к регулярным ошибкам в напряжениях. Этот результат может ставить под сомнение более ранние исследования напряжений в кристаллах методом фотоупругости, в которых показана анизотропия напряженного состояния. Из работ [3, 4 ...] видно, что такая анизотропия вполне может быть следствием регулярной ошибки, поскольку имеет внешнее сходство с анизотропией напряженного состояния, определенного методом наклонного просвечивания. Предлагаемый метод МКФЭ должен быть также исследован на устойчивость. Дополнительно можно ожидать наличие чувствительности метода к способу разбиения на элементы. В данной работе исследования такой чувствительности не производилось.

3. Метод фотоупругости и МКЭ. С точки зрения МКЭ метод конечных фотоупругих элементов - новая модификация метода, в которой элементы обладают не только упругими, но и пьезооптическими свойствами. Непосредственно наработки МКЭ переносятся в метод фотоупругости нецелесообразно, т.к. МКЭ в теории упругости твердого деформируемого тела развивался для задач с совместными деформациями (выполняются дифференциальные условия совместности деформаций [5]). Главным достоинством метода фотоупругости является его способность определять остаточные напряжения. Условие совместности деформаций в присутствии остаточных напряжений не выполняется. В работах [1,2] описываются основы подхода к поляризационно-оптической томографии с использованием метода конечных элементов. Подход состоит в учете граничных условий и условий равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Традиционные вариационные постановки МКЭ содержат это условие и в этом случае неприменимы. В данной работе использовано условие равенства нулю дивергенции:

$$\operatorname{div}(\vec{\sigma}_{i*}) = 0, \quad (1)$$

где $\vec{\sigma}_{i*}$ - вектор силы с координатами $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$; σ_{ij} - тензор напряжений. Для любой области внутри тела выполняется соотношение:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{\sigma}_{i*}) dV = 0 \quad (2)$$

Разобьем тело на области (конечные элементы) [6]. Для каждого конечного элемента будет выполняться условие (2). σ_{ij} в произвольной точке тела будет

представлено интерполяционной формулой для соответствующего конечного элемента [6].

$$\sigma_{ij} = \sum_{\ell=1}^m N_{\ell} \sigma_{ij}^{\ell} \quad (3)$$

где N_{ℓ} - функции формы элемента; σ_{ij}^{ℓ} - искомые величины напряжений в узлах конечных элементов, m - количество узлов в элементе, ℓ - номер узла в элементе. В тонкой пластине, без градиента напряжений по ее толщине, для линейного треугольного элемента соотношение (2) будет записано в виде:

$$\iint_S \sum_{\ell=1}^3 \left(\sigma_{i1}^{\ell} \frac{\partial L_{\ell}}{\partial x} + \sigma_{i2}^{\ell} \frac{\partial L_{\ell}}{\partial y} \right) dS = 0 \quad (4)$$

или

$$\iint_S \sum_{\ell=1}^3 (\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell} + \sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}) dS = 0 \quad (5)$$

L_{ℓ} - функции формы элемента [3]:

$$L_{\ell} = (a_{\ell} + b_{\ell}x + c_{\ell}y) / D,$$

$a_{\ell}, b_{\ell}, c_{\ell}$ - коэффициенты линейного разложения функции формы, D - площадь элемента. Условие равновесия для одного элемента окончательно примет вид

$$\sum_{\ell=1}^3 (\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell} + \sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}) = 0 \quad (6)$$

Узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} для всех узлов могут определяться решением системы уравнений (6), записанных для всех элементов и уравнений фотоупругости

$$A_{ij}^{\bar{n}} \sigma_{ij}^{\ell} = \delta^{\bar{n}} \cos(2\varphi^{\bar{n}}), \quad (7)$$

определенных для направления \bar{n} в узле ℓ . Уравнения (7) представляют собой уравнения, связывающие напряжения и измеряемые параметры описанные, например, в [3]. В формуле (7): $\delta^{\bar{n}}$ - оптическая разность хода; $\varphi^{\bar{n}}$ - оптический параметр угла изоклины; $A_{ij}^{\bar{n}}$ - коэффициенты, являющиеся функцией пьезооптических коэффициентов, показателя преломления, толщины просвечиваемого слоя, ориентации направления просвечивания и ориентации системы координат, в которой определяются напряжения. Аналогично получают соотношения для квадратичного элемента. Решением систем линейных уравнений (6,7) будем получать искомые узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} .

4. Численный эксперимент. Если сравнить σ_{ij}^{ℓ} , полученные решением

системы уравнений (6,7) (метод МКФЭ), с решением системы уравнений, состоящей только из уравнений (7) (метод наклонного просвечивания), даже с избыточным числом измерений, то МКФЭ обнаруживает большую устойчивость. В работе [1] был осуществлен простейший имитационный эксперимент, доказывающий этот факт в частном случае напряженного состояния и нормально распределенной ошибкой в измеряемых параметрах. В данной работе исследуется влияние ошибки, связанной с погрешностью пьезооптических коэффициентов. В [1] исследовалась относительно сложная модель напряжений, что не способствовало пониманию результатов. В подобных численных экспериментах применение сложнонапряженной модели на данном этапе проводимых работ ничем не оправдано. Логичнее взять для модельного исследования равномерно напряженное тело. В этом случае более наглядны будут отклонения определенных методом МКФЭ напряжений от исходных модельных напряжений. Конкретно, в данной работе был задан чистый сдвиг, равномерно распределенный по квадратной пластине с размерами 10x10x1см. Величина сдвигового напряжения $\sigma_{12}=1$ Па. Две другие компоненты σ_{11} и σ_{22} были заданы нулевыми. Исходя из заданного напряжения, определялись измеряемые параметры: $\delta^{\bar{n}}$ - оптическая разность хода и $\varphi^{\bar{n}}$ - оптический параметр угла изоклины. Кристаллографические плоскости считались направленными параллельно граням пластины. Константы среды были выбраны соответствующие кристаллу LiF. К пьезооптическим коэффициентам π_{ijkl} в каждом месте промоделированного измерения (в данной работе эти места совпадают с узлами элементов) добавлялась разная случайная нормально распределенная ошибка, имеющая среднеквадратическое отклонение 0.1 брьюстера (1 брьюстер = 10^{-12} Па⁻¹). Далее по алгоритму эти величины участвовали в формировании коэффициентов $A_{ij}^{\bar{n}}$ уравнений (7). Для каждой точки, где расположен узел, было сформировано два уравнения (7), соответствующих перпендикулярному и наклонному просвечиванию пластины. Наклон производился в кристаллографической плоскости и был равен 27 градусам. Как и в работе [1] имеется ввиду, что просвечивание производится монохроматическим светом с длиной волны 640нм и для оценки погрешности используется следующая модификация относительной погрешности $\zeta(x) = \left| \frac{x - x^T}{\max} \right|$, где x - исследуемое значение, x^T - точное значение, \max - максимальное по модулю значение. Результаты приводятся в виде теневых картин, на которых численные значения величин увеличиваются от темного к светлomu. Разбиение пластины производилось на прямоугольные четы-

рехузовые изопараметрические элементы (10x10). Элементы имеют своими узловыми значениями независимые переменные σ_{ij}^l .

5. Обсуждение результатов. При указанном разбиении, МКФЭ дает распределение $\zeta(\sigma_{12})$, показанное на рис.1

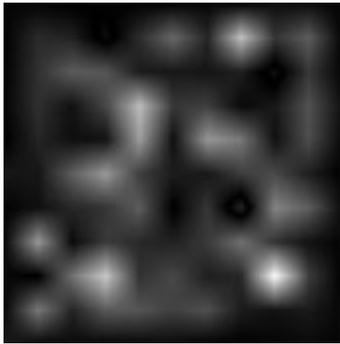


Рис. 1

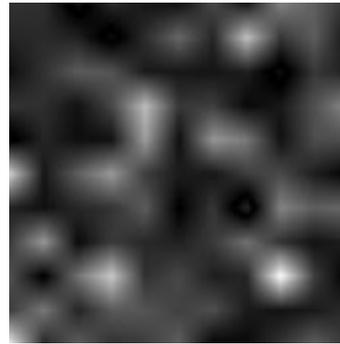


Рис. 2

Для сравнения на рис.2 приведено распределение, полученное методом наклонного просвечивания. Количественное отличие имеется. Для МКФЭ максимум $\zeta(\sigma_{12})$ - 4.46, дисперсия этой величины - 0.00973. Для метода наклонного просвечивания максимум $\zeta(\sigma_{12})$ - 29.625, дисперсия этой величины - 0.123305.

Эти результаты показывают точность определения ненулевой компоненты напряжений σ_{12} . В этой же модели $\sigma_{11} = 0$ Па. Картину распределения относительной ошибки $\zeta(\sigma_{11})$, индуцированной ошибкой пьезооптических коэффициентов, показывают рисунки 3 и 4. На рисунке 3 показано распределение $\zeta(\sigma_{11})$ для МКФЭ. Максимум $\zeta(\sigma_{11})$ - 11.188, дисперсия этой величины - 0.291580. На рисунке 4 - $\zeta(\sigma_{11})$ для метода наклонного просвечивания. Максимум $\zeta(\sigma_{11})$ - 11.188, дисперсия - 0.649646.

Для МКФЭ заметна малая величина относительной ошибки на границе пластины по сравнению с методом наклонного просвечивания. Это связано с влиянием граничных условий на результирующую картину распределения относительной ошибки в напряжениях. Здесь мы имеем два конкурирующих процесса: с одной стороны, условия равновесия «подправляют» результат, «опираясь» на граничные условия, с другой стороны, в центральных областях пластины в условиях равновесия участвуют определенные с ошибкой коэф-

фициенты уравнений. Численные эксперименты показывают, что в среднем относительная ошибка меньше в МКФЭ по сравнению с методом наклонного просвечивания во всех областях исследуемого тела.

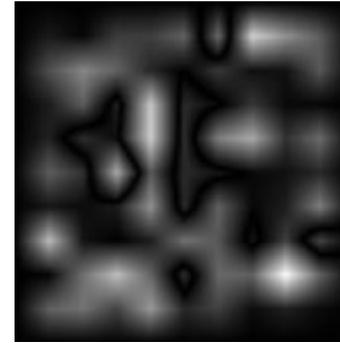


Рис. 3

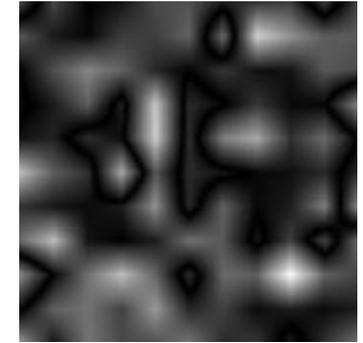


Рис. 4

6. Выводы. Учет граничных условий приводит к малым величинам ошибки на границе плоского тела. Применение МКФЭ обеспечивает значительное понижение уровня относительной ошибки во всех областях, включая центральные. Численные результаты говорят об уменьшении максимумов и дисперсии ошибки. Из этих результатов видно, что максимальные ошибки отличаются значительно меньше, чем дисперсии. Это означает, что учет условий равновесия и граничных условий в среднем значительно улучшают результат. Однако, существуют условия, при которых такое улучшение относительно невелико. Этот факт требует дополнительного исследования.

Список литературы: 1. Тесленко А.А. / Заводская лаборатория 2. 1998. Т.64. №8. С.42-44. 2. Гаврилук В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В. / Функциональные материалы 2. 1995. №4. С.543. 3. Тесленко А.А. Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.- Харьков. 1991.- 22с. 4. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др. / Заводская лаборатория. 1993. Т.59. №2. С.64-66. 5. Васидзу К. / В кн.: Вариационные методы в теории упругости и пластичности.- М.: Мир, 1987. С.27. 6. Еременко С.Ю. / В кн.: Методы конечных элементов в механике деформируемых тел.- Харьков: Основа, 1991. С.9.

Поступила в редколлегию 16.08.05