

## УДК 514.18

- Є. А. Лінчевський<sup>1</sup>, д.т.н., с.н.с. департаменту (ORCID 0000-0002-2571-3352)*  
*Л. М. Куценко<sup>2</sup>, д.т.н., професор, проф. каф. (ORCID 0000-0003-1554-8848)*  
*А. Я. Калиновський<sup>2</sup>, к.т.н., доцент, нач. каф. (ORCID 0000-0002-1021-5799)*  
*В. О. Семків<sup>2</sup>, ад'юнкт (ORCID 0000-0002-1584-4754)*  
*С. Ю. Назаренко<sup>2</sup>, к.т.н., доцент, доц. каф. (ORCID 0000-0003-0891-0335)*  
*О. І. Сухарькова<sup>2</sup>, викл. каф. (ORCID 0000-0003-1033-4728)*

<sup>1</sup>Департамент запобігання надзвичайним ситуаціям, ДСНС, Київ, Україна

<sup>2</sup>Національний університет цивільного захисту України, Харків, Україна

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕПІГІПОТРОХОЇДНИХ ПРОФІЛІВ ОДНОГВИНТОВИХ НАСОСІВ МУАНО

Запропоновано спосіб розрахунку геометричних форм поверхонь, які обмежують ротор та корпус моделей одногвинтових насосів системи Муано. При цьому контури нормальних перетинів ротора і корпуса задовольняють умові взаємоспряженості в системі координат площини, яка перпендикулярна (нормальна) осі насоса. Введено поняття епігіпотроходних кривих, зручних для розрахунку взаємоспряжених поверхонь ротора і корпуса. Які складаються з робочих профілів періодично розташованих епітроход і гіпотроход. Знайдено описи епігіпотроходних кривих у параметричному вигляді, де кожне з рівнянь має вигляд єдиного аналітичного виразу. Засобами графічних побудов проілюстровано взаємоспряженість контурів нормальних перетинів ротора і корпуса. На базі цього розроблено способи: а) визначення інтегральних характеристик та контактних ліній епігіпотроходних контурів ротора і корпуса насосів Муано; б) опису циліндричної гвинтової поверхні з епігіпотроходним нормальним перерізом. Це дозволило розраховувати характеристики об'єму порожнин насоса. Запропоновані рівняння епігіпотроходних кривих можливо використати для дослідження їх диференціальних характеристик – побудови дотичних і нормалей, побудови векторів швидкості та прискорення для точки, яка рухається по епігіпотроході. А також зручно використати для дослідження їх інтегральних характеристик – обчислення площі фігури, обмеженої замкнутою епігіпотроходною кривою, або фігури між двома епігіпотроходами. Одержані результати можуть скласти основу удосконалення одногвинтових насосів Муано, що розширить діапазон їх застосування. Зазначимо, що одногвинтові насоси Муано використовуються для перекачування різних типів рідин, що можна використати в роботі аварійно-рятувальних служб. Насоси здатні перекачувати стічні і каналізаційні води, нафтопродукти, пінобетон й піщано-цементні розчини тощо.

**Ключові слова:** геометричне моделювання, одногвинтовий насос Муано, епігіпотрохода, взаємоспряжені криві, обвідні епігіпотроход

### 1. Вступ

Історія одногвинтових насосів починається із тридцятих років минулого століття, коли французький інженер Рене Муано (Rene Moineau) запатентував схему об'ємної роторної гідравлічної машини, заклавши в неї принцип капсулізму. Цей принцип, раніше невідомий у теорії і практиці гідравлічних машин, полягає у застосуванні як робочих органів тільки двох гвинтових деталей – ротора і корпуса. Поєднання поверхонь цих деталей утворює замкнуті камери (капсули, або шлюзи). Таке нововведення істотно спростило конструкцію гідромашини. Крім того, заявлений новий принцип дії, доданий до виготовлення внутрішньої поверхні корпуса з еластичного матеріалу, забезпечив універсальність використання одногвинтових насосів у різних експлуатаційних умовах. Переваги насоса Муано (в зарубіжній літературі progressing cavity pumps) визначаються здатністю перекачувати в'язкі рідини і водяні суміші, які містять механічні домішки за умови безперервної зміни положення лінії контакту робочих поверхонь [1, 2].

Унікальні можливості насосів Муано досягаються завдяки складності їх розрахунків, які незрівнянні з геометричними розрахунками насосів інших систем.

Мова йде про складність опису геометричних форм їх робочих поверхонь. Взагалі, причина складності досліджень роторно-планетарних машин полягає у тому, що ротор здійснює обертовий рух відносно корпусу за допомогою планетарного механізму (або йому подібного за результатами дії). Тоді профілі нормальних перетинів корпусу і ротора матимуть вигляд спеціальних кривих – трохоїд та їх обвідних. Це стосується і опису руху активних поверхонь однороторного насоса Муано.

Для забезпечення переваг насоса Муано необхідно розробити адекватну математичну модель дії одnogвинтових машин. При цьому головна проблема полягає у визначенні геометричних форм поверхонь ротора і корпусу, здатних здійснювати взаємне переміщення з забезпеченням руху замкнутих об'ємів (капсул або шлюзів) між поверхнями ротора і корпусу.

В основу розробки способу розрахунку робочих поверхонь роторів і корпусів одnogвинтових насосів Муано доцільно покласти геометричні моделі кривих, одержані у їх нормальних перетинах. Для забезпечення прийняттого взаємного переміщення поверхонь ротора і корпусу слід зауважити на те, що зазначені поверхні мають бути взаємоспряженими. Для пояснення слід розглянути контури нормальних перетинів ротора і корпусу як взаємоспряжених кривих в системі координат площини, що перпендикулярна (нормальна) осі насоса. Наочно це виглядає так, що один з контурів має вигляд обвідної параметричної сім'ї, одержаної при русі другого контуру за законом обкатки.

Для реалізації такої ідеї необхідно наряду з використанням означень епітрохоїди та гіпотрохоїди ввести поняття епігіпотрохоїди як кривої в нормальному перетині поверхонь ротора і корпусу. Для цього необхідно розробити спосіб опису епігіпотрохоїдних кривих як періодично розташованих профілів епітрохоїд і гіпотрохоїд. Також необхідно запропонувати формули, які дозволяють точно описати „узагальнені” обвідні сімей епітрохоїд і гіпотрохоїд. А також визначення інтегральних характеристик епігіпотрохоїдних контурів ротора і корпусу і визначення контактних ліній робочих органів гвинтових насосів Муано.

Проблемою на сьогоднішній день є те, що насоси такого типу ще не вивчені, а розробка і дослідження способу розрахунку робочих поверхонь роторів і корпусів гвинтових насосів Муано на основі геометричного моделювання взаємоспряжених кривих у їх нормальних перетинах є актуальною темою.

## 2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Літературні джерела проаналізуємо з врахуванням впливу геометричних форм робочих поверхонь на функціонування насосу. В роботі [3] розглядається питання геометрії при моделюванні в'язкого потоку, що проходить через гвинтові насоси. Наведено рівняння профілю багатопелюсткової конфігурації на будь-якому перетині в кожний момент часу обертання. Але в статті відсутні узагальнені результати, тому є складність розуміння. Моделюванню однофазного потоку рідини у гвинтовому насосі присвячено робота [4]. Запропонована модель являє собою комбінацію двох існуючих у літературі моделей, а саме аналітичної моделі для прогнозування теоретичної продуктивності насоса й моделі проковзування. В роботі [5] розглянуто питання геометричні особливості профілювання ролика для виготовлення гвинта насоса із прогресивними кавернами. Але в роботі не наведено аналітичні описи зв'язку поверхні ролика з поверхнею гвинта.

В роботі [6] досліджується геометрія статора насоса Муано. Проведено аналіз для випадку трипелюсткового гвинтового насоса, у якому шляхом визначення

форми ротора може бути сформована модель статора. Два об'єкти, ротор і статор, перебувають у взаємному русі, в результаті обертання без ковзання (кочення) двох кругових центроїдів. В роботі представлено чисельне застосування цих параметрів, але розробки способу визначення інтегральних характеристик епігіпотрохідних контурів ротора і корпусу в роботі не наведено. Математичні завдання для насосів Муано сформульовано в роботі [7]. Докладно описано кінематику руху компонентів насоса, які складаються із двох частин, що обертаються відносно одна одної. Форми в осьовому перерізі можуть бути складені зі шматочків гіпоциклоїд, з'єднаних з епіциклоїдами. Зазначено, що альтернативою цьому може бути крива з постійною відстанню до гіпоциклоїди. Кінематичний рух з обертанням двох частин складний процес, тому розробка способу опису циліндричної гвинтової поверхні з епігіпотрохідним нормальним перерізом актуальна.

В роботі [8] детально розглянута геометрія насоса Муано. Наведено ряд математичних теорем, базуючись на результатах яких можна наближено описати профілі ротора і корпусу роторно-планетарної машини залежно від відношення радіусів ділільних кіл. При цьому в основу зазначеного опису покладено поняття опорної функції (support function). Але опис профілів роторно-планетарних машин за допомогою опорних функцій має певні недоліки, адже у процесі складення рівнянь профілів ротора і корпусу прихована геометрична суть послідовних етапів їх формоутворення.

Також відомі роботи, присвячені впливу геометрії поверхонь на загальну роботу насосів Муано. В роботі [9] досліджуються навантаження на контактні зони робочих органів гвинтових насосів і двигунів. Здійснено комп'ютерне моделювання для розрахунку навантаження на контактні зони робочих органів гвинтового насоса й гвинтових забійних двигунів. В роботі [10] виконано дослідження можливості використання насосів Муано для об'ємної екструзії гранул. Представлено новий альтернативний багат шаровий насос на основі насоса Муано. В роботах [9, 10] не розглядається інтегральні характеристики контурів ротора і корпусу.

У статті [11] розроблена аналітична модель плинну в металевому корпусі насоса. На основі аналізу руху зачеплення й геометрії зазору усередині насоса розраховується проковзування через поперечну й поздовжню області ущільнення з урахуванням різних механізмів проковзування. Теоретичне моделювання продуктивності об'ємного двигуна розглянуто у роботі [12]. Для цього розраховується площа прохідного перетину насоса. В роботі [13] розглянута конструкція масляного насоса з двома розширеними кардіоїдними пелюстками. За допомогою автоматичної програми була запропонована геометрична форма профілю ротора для зниження шуму при роботі насоса.

В роботі [14], також в попередніх виданнях книги цих авторів, наведено основні співвідношення для розрахунку елементів гвинтових ліній і гвинтових поверхонь. На результати цієї роботи ми будемо спиратися в процесі дослідження геометрії координатних ліній робочих поверхонь насоса Муано. Таким чином, будуть використані запропоновані нами епігіпотрохідні криві.

Певним кроком до одержання адекватних геометричних форм робочих поверхонь насосів Муано та профілів роторно-планетарних машин були роботи [15–17]. В цих статтях розроблено графоаналітичний спосіб розрахунку взаємоспряжених профілів роторів і корпусів роторно-планетарних машин у вигляді комбінованих кривих з фрагментами гіпотрохідної і епітрохідної. Але тут недостає формул для точного опису «узагальнених» обвідних сімей епітрохід і гіпотрохід.

Аналіз літературних джерел [1–17] показує, що вдосконалення одногвинтових насосів здійснюється переважно за рахунок підвищення якості матеріалів робочих поверхонь, вдосконалення технологій їхнього виготовлення, оптимізації режимів експлуатації робочих органів тощо. Останнім пунктом цього переліку (але за змістом чи не найголовнішим) слід назвати удосконалення одногвинтових насосів за рахунок пошуку адекватних геометричних форм робочих поверхонь ротора і корпусу. При цьому ще не дослідженим виявилось створення ефективних узагальнених алгоритмів профілювання корпусу і ротора комбінованими кривими у вигляді фрагментів гіпотрохоїди та епітрохоїди як попарно спряжених кривих. Тому, невирішеною частиною розглянутої проблеми є відсутність способів розрахунку робочих поверхонь роторів і корпусів гвинтових насосів Муано на основі геометричного моделювання взаємоспряжених кривих у їх нормальних перетинах.

### 3. Мета і задачі дослідження

Метою дослідження є розробка способу розрахунку робочих поверхонь роторів і корпусів гвинтових насосів Муано на основі геометричного моделювання взаємоспряжених кривих у їх нормальних перетинах.

Для досягнення мети необхідно вирішити наступні завдання:

1. Знайти аналітичний опис епігіпотрохоїдних кривих та довести їх взаємоспряженість.
2. Розробити спосіб визначення інтегральних характеристик епігіпотрохоїдних контурів ротора і корпусу.
3. Розробити спосіб опису циліндричної гвинтової поверхні з епігіпотрохоїдним нормальним перерізом.
4. Розробити спосіб визначення контактних ліній робочих органів гвинтових насосів Муано.

### 4. Матеріали та методи дослідження

Об'єктом проведених досліджень є геометричне моделювання дії одногвинтових насосів системи Муано. Складність геометричних розрахунків впливає з особливості руху ротора (гвинта) відносно корпусу, що здійснюється за допомогою планетарного механізму (або йому аналогічного). Під час руху має виконуватися принцип капсулізму. Тобто в результаті переміщення поєднаної пари поверхонь ротора і корпусу між ними мають утворюватися рухомі замкнуті капсули речовини, що перекачується вздовж насосу.

В якості основної гіпотези розрахунку геометричних форм поверхонь, які обмежують ротор та корпус вважатимемо, що контури нормальних перетинів ротора і корпусу будуть взаємоспряженими в системі координат площини, яка перпендикулярна (нормальна) осі насоса. На практиці це виглядатиме так, ніби один з контурів (наприклад, перетину корпусу) матиме вигляд обвідної параметричної сім'ї, одержаної при русі другого контуру (перетину ротора) за законом обкатки.

Для зручності розрахунку взаємоспряжених поверхонь ротора і корпусу необхідно ввести поняття епігіпотрохоїдних кривих. Ці криві складаються з робочих профілів періодично розташованих епітрохоїд і гіпотрохоїд. В результаті досліджень потрібно знайти опис епігіпотрохоїдних кривих у вигляді параметричних рівнянь  $x=x_{EG}$  і  $y=y_{EG}$ . При чому, кожна з функцій  $x_{EG}$  і  $y_{EG}$  повинна мати вигляд єдиного аналітичного виразу. Тобто, що є ключовим моментом, вирази функцій  $x_{EG}$  і  $y_{EG}$  повинні заключати у себе одночасно інформацію про відповідну гіпотрохоїду та епітрохоїду. Засобами графічних побудов буде проілюстровано взаємоспряженість контурів нормальних перетинів ротора і корпусу.

В рамках геометричної моделі в роботі прийняті традиційні спрощення: не враховуються ефекти ковзання та тертя поверхонь, ігноруються особливості матеріалів виготовлення ротора і корпусу, не береться до уваги їх динаміка та гідродинаміка в процесі роботи, тощо.

В результаті досліджень одержані геометричні моделі поверхонь роторів корпусів, орієнтовані на використання при складанні комп'ютерних програм. В якості програмного забезпечення для реалізації одержаних результатів може використовуватися довільний математичний пакет, здатний оперувати з аналітичними виразами для формул.

Адекватність запропонованих геометричних моделей перевірено шляхом проведення комп'ютерних експериментів. А саме, здійсненні унаочнення епігіпотрохідних кривих та демонстрації їх взаємоспряженості (в режимі комп'ютерної анімації). А також виконані побудови моделей робочих поверхонь ротора і корпусу з можливістю визначати наближено їх лінії дотику.

### 5. Дослідження аналітичного опису епігіпотрохідних кривих та демонстрація їх взаємоспряженості

З використанням епітрохоїди та гіпотрохоїди введемо поняття епігіпотрохоїди як кривої в нормальному перетині поверхонь ротора і корпусу.

Оберемо в декартовій системі координат Оху нерухоме коло радіуса  $R$  з центром в початку координат, по якому без проковзування котиться коло радіуса  $r$ . Спочатку розглянемо традиційний спосіб побудови трохоїдних кривих – гіпотрохоїди та епітрохоїди.

Нехай коло меншого радіуса  $r$  котиться всередині більшого кола радіуса  $R$ . Тоді гіпотрохоїду накреслить точка, яка зафіксована на рухомому колі. Рівняння гіпотрохоїди має вигляд:

$$\begin{aligned}x_G &= (R - r)\cos t + r\cos\left(\frac{R - r}{r}t\right); \\y_G &= (R - r)\sin t - r\sin\left(\frac{R - r}{r}t\right).\end{aligned}\quad (1)$$

Тут і далі  $R$  і  $r$  радіуси більшого і меншого кіл,  $t$  – параметр.

Якщо коло меншого радіуса  $r$  котиться зовні більшого кола радіуса  $R$ , то епітрохоїду накреслить точка, зафіксована на рухомому колі. При цьому епітрохоїда має рівняння:

$$\begin{aligned}x_E &= (R + r)\cos t - r\cos\left(\frac{R + r}{r}t\right); \\y_E &= (R + r)\sin t - r\sin\left(\frac{R + r}{r}t\right).\end{aligned}\quad (2)$$

Зазначимо, що рівняння (1) і (2) відрізняються лише знаком при  $r$ , що необхідно враховувати при побудовах. В цих прикладах побудови трохоїд центр рухомого кола радіуса  $r$  має координати:

$$x_C = (R - r)\cos t; \quad y_C = (R - r)\sin t. \quad (3)$$

А рухоме коло будується за законом обкатки:

$$x = (R - r)\cos t + r\cos \varphi; y = (R - r)\sin t + r\sin \varphi. \quad (4)$$

Тут  $\varphi$  – параметр визначення положення точки на рухомому колі.

Далі розвинемо зв'язок між гіпотрохоїдою та епітрохоїдою за допомогою введеного поняття епігіпотрохоїди. Для цього вважатимемо, що формоутворення профілів ротора і корпусу здійснюється в результаті обкатки двох кіл, послідовно, за епітрохоїдним та гіпотрохоїдним законами. Одержану криву пропонується назвати епігіпотрохоїдою. Тобто під терміном «епігіпотрохоїда» будемо розуміти комплексну криву, яка по черзі складена з кусків епітрохоїд чи гіпотрохоїд залежно від кута обкатки.

Для зручності використання такого роду графічної інформації запропоновано спосіб опису епігіпотрохоїд у параметричному вигляді  $x=x_{EG}$ ,  $y=y_{EG}$  за умови, що вирази для функцій  $x_{EG}$  і  $y_{EG}$  представлені у вигляді єдиного аналітичного виразу. А також, що вирази для функцій  $x_{EG}$  і  $y_{EG}$  заключають у себе одночасно інформацію про гіпотрохоїду та епітрохоїду.

Далі вважатимемо, що величина радіуса меншого кола повинна бути  $R-1$  відносно значення радіуса  $R$  більшого кола. Зазначимо, що одиниця тут визначає умовну «одиницю» виміру. Тому не дивно, що далі також будуть розглядатися кола радіуса 0,5.

Ідея аналітичного опису епігіпотрохоїд базується на співвідношенні:

$$F = \frac{1}{2} \left( f_1 + f_2 + (f_1 - f_2) \frac{x - a}{|x - a|} \right). \quad (5)$$

З використанням формули (5) зручно складати алгоритм розподілу величин функції  $F(x)$  за принципом «до» і «після» набуття значення  $a$  її аргумента  $x$ . Тобто при  $x < a$  маємо  $F(x) = f_1$ , а при  $x > a$  одержимо  $F(x) = f_2$ .

В роботі знайдено наступні параметричні рівняння епігіпотрохоїдних кривих. При  $R=1$  рівняння епігіпотрохоїди має вигляд (рис. 1):

$$\begin{aligned} x_{EG} &= \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + (x_G - x_E) \frac{|t - \pi|}{t - \pi} \right); \\ y_{EG} &= \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + (y_G - y_E) \frac{|t - \pi|}{t - \pi} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

При  $R=2$  рівняння епігіпотрохоїди має вигляд (рис. 2):

$$\begin{aligned} x_{EG} &= \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + (x_G - x_E) \frac{|t - \frac{\pi}{2}|}{t - \frac{\pi}{2}} \right) - (x_G - x_E) \frac{|t - \pi|}{t - \pi} + (x_G - x_E) \frac{|t - \frac{3\pi}{2}|}{t - \frac{3\pi}{2}}; \\ y_{EG} &= \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + (y_G - y_E) \frac{|t - \frac{\pi}{2}|}{t - \frac{\pi}{2}} \right) - (y_G - y_E) \frac{|t - \pi|}{t - \pi} + (y_G - y_E) \frac{|t - \frac{3\pi}{2}|}{t - \frac{3\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

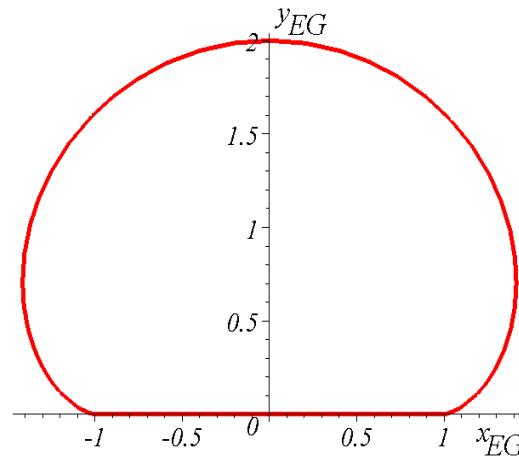


Рис. 1. Епігіпотрохіда, побудована за формулами (6)

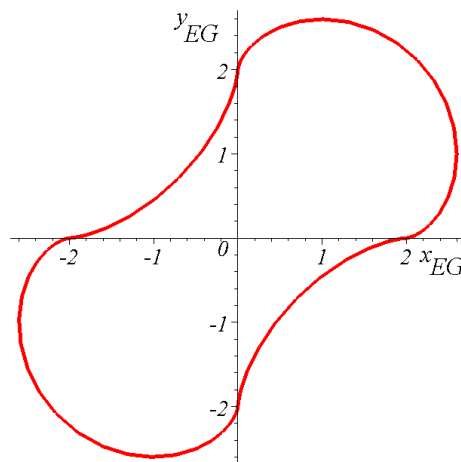


Рис. 2. Епігіпотрохіда, побудована за формулами (7)

При  $R=3$  рівняння епігіпотрохіди має вигляд (рис. 3):

$$\begin{aligned}
 x_{EG} = & \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{\pi}{3} \right|}{t - \frac{\pi}{3}} - (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{3\pi}{2} \right|}{t - \frac{3\pi}{2}} + \right. \\
 & \left. + (x_G - x_E) \frac{|t - \pi|}{t - \pi} - (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{4\pi}{3} \right|}{t - \frac{4\pi}{3}} + (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{5\pi}{3} \right|}{t - \frac{5\pi}{3}} \right); \\
 y_{EG} = & \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{\pi}{3} \right|}{t - \frac{\pi}{3}} - (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{3\pi}{2} \right|}{t - \frac{3\pi}{2}} + \right. \\
 & \left. + (y_G - y_E) \frac{|t - \pi|}{t - \pi} - (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{4\pi}{3} \right|}{t - \frac{4\pi}{3}} + (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{5\pi}{3} \right|}{t - \frac{5\pi}{3}} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

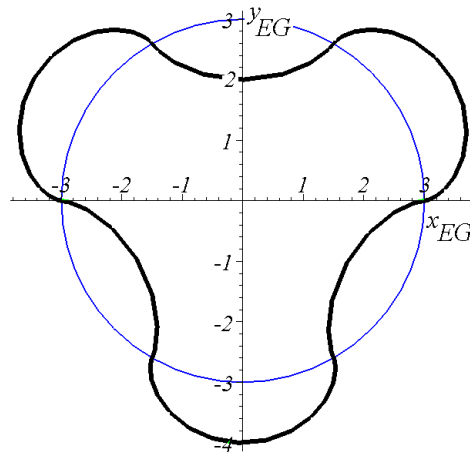


Рис. 3. Епігіпотрохіда, побудована за формулами (8)

Узагальнення. Аналіз структури формул (6)–(8) дозволив запропонувати загальний опис епігіпотрохіди залежно від значення радіуса  $R$ .

$$\begin{aligned}
 x_{EG} &= \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right); \\
 y_{EG} &= \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right). \quad (9)
 \end{aligned}$$

На рис. 4 зображено послідовності епігіпотрохідних кривих для різних значень радіуса  $R$ . Легко помітити, що кожна з кривих складається з циклічно розташованих кусків епітрохід і гіпотрохід.

За допомогою графо-аналітичних перетворень покажемо, що «сусідні» елементи з картинок на рис. 4 будуть взаємоспряженими за умови, що рух однієї кривої відносно іншої здійснюється за допомогою роторно-планетарного механізму. Для наочності нерухому «зовнішню» криву будемо називати профілем корпусу, а рухому «внутрішню» криву – профілем ротора.

За схемою обкатки роторно-планетарного механізму в глобальній системі декартових координат  $Ox$ у коло радіуса  $R$  є нерухомим, а коло радіуса  $R-1$  котиться без ковзання по його внутрішній частині. Контур ротора жорстко пов'язаний із колом радіуса  $R-1$  і описаний в рухомій системі координат  $OxY$  рівняннями  $X=X_{EG}(t)$ ;  $Y=Y_{EG}(t)$ .

Реалізувати обкатку контурів ротора і корпусу за схемою планетарного механізму будемо за допомогою формул:

$$\begin{aligned}
 x_p &= x_C + X_{EG}(t) \cos \theta + Y_{EG}(t) \sin \theta; \\
 y_p &= y_C - X_{EG}(t) \sin \theta + Y_{EG}(t) \cos \theta. \quad (10)
 \end{aligned}$$

де  $x_C = \cos(R-1)\theta$  і  $y_C = \sin(R-1)\theta$  – координати центра рухомого кола.



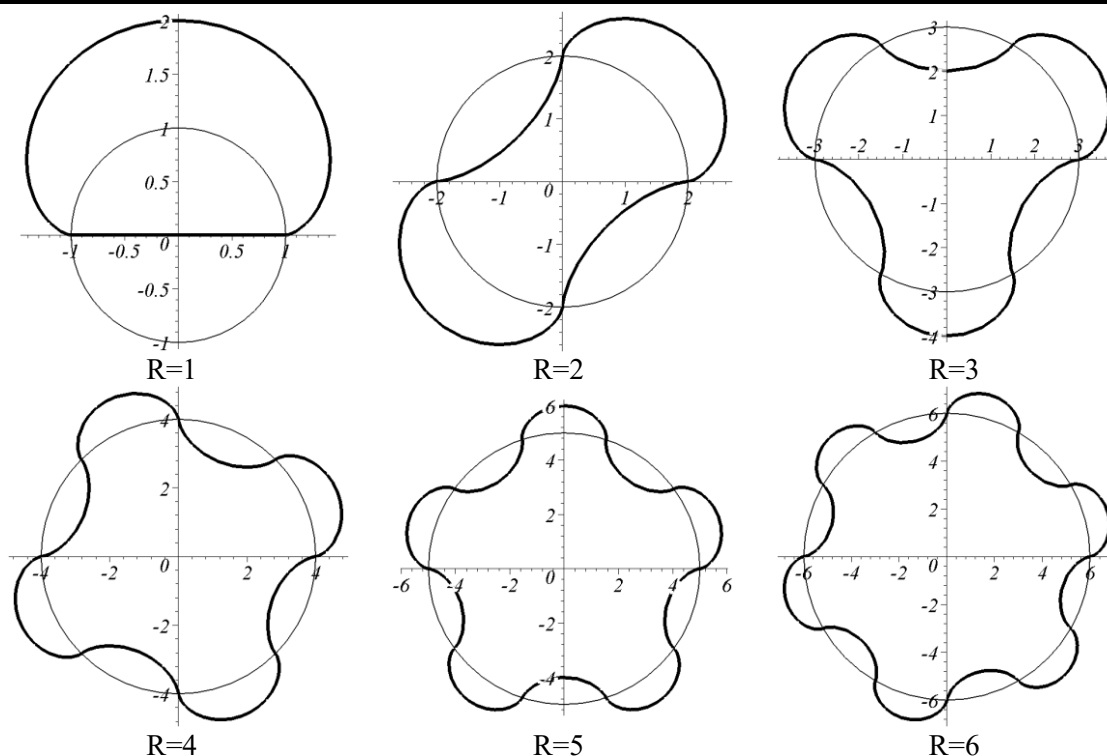


Рис. 4. Послідовність ряду епігіпотрохідних кривих, побудованих на колі радіуса  $R$

Правило застосування епігіпотрохідних кривих при профілюванні роторних машин із більшим радіусом ділильного кола  $R$ :

- в якості профілю ротора слід обрати епігіпотрохіду, побудовану за допомогою кіл радіусів  $R-1$  і  $0,5$  і описану в рухомій системі координат  $OXY$ ;
- в якості профілю корпусу слід обрати епігіпотрохіду, побудовану за допомогою кіл радіусів  $R$  і  $0,5$ , і описану в нерухомих координатах  $Oxy$ ;
- за допомогою формул зв'язку між координатами (9) необхідно реалізувати спряження двох профілів у процесі обкатки.

Приклади. Нехай профіль корпусу сформовано нерухомим колом радіуса  $R$ , рухомим колом радіуса  $0,5$ . Тоді на основі формул (8), і з урахуванням відповідних рівнянь трохоїд

$$\begin{aligned} x_E &= (R + 0,5)\cos\theta - 0,5\cos((2R + 1)t); & y_E &= (R + 0,5)\sin\theta - 0,5\sin((2R + 1)t); \\ x_G &= (R - 0,5)\cos\theta + 0,5\cos((2R - 1)t); & y_G &= (R - 1,5)\sin\theta + 0,5\sin((2R - 3)t); \end{aligned} \quad (11)$$

рівняння профілю корпусу матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x_{EG} &= \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right); \\ y_{EG} &= \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Нехай профіль ротора сформовано нерухомим колом радіуса  $R-1$  і рухомим колом радіуса  $0,5$ . Тоді рівняння профілю ротора одержимо, коли в (12) замінимо  $R$  на  $R-1$ :

$$\begin{aligned} X_{EG} &= \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right); \\ Y_{EG} &= \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

При цьому у формулу (13) слід підставити відповідні рівняння трохоїд:

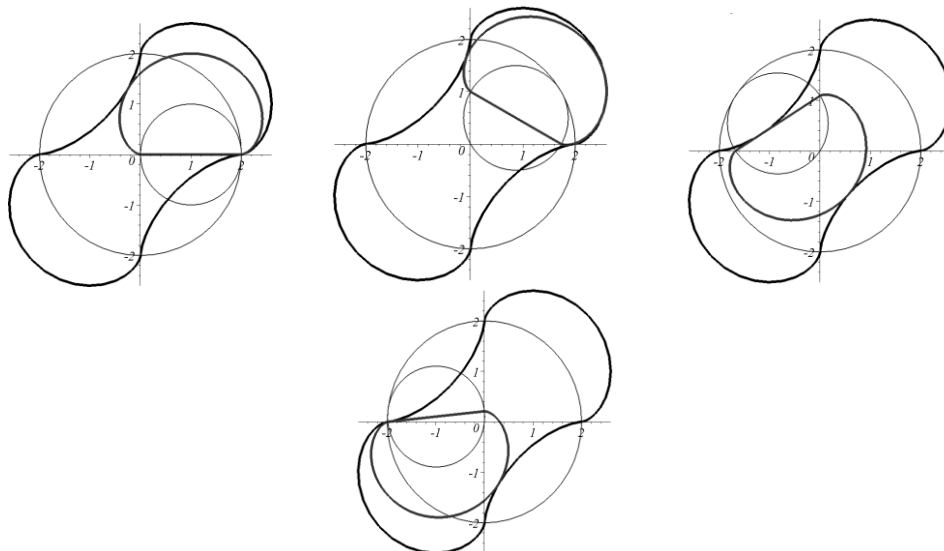
$$\begin{aligned} x_E &= (R-0,5)\cos\theta - 0,5\cos((2R-1)t); & y_E &= (R-0,5)\sin\theta - 0,5\sin((2R-1)t); \\ x_G &= (R-1,5)\cos\theta + 0,5\cos((2R-3)t); & y_G &= (R-1,5)\sin\theta + 0,5\sin((2R-3)t). \end{aligned} \quad (14)$$

Миттєві положення ротора залежно від значення кута обкатки  $\theta$  одержимо, коли у формулу (10) підставимо вирази (13).

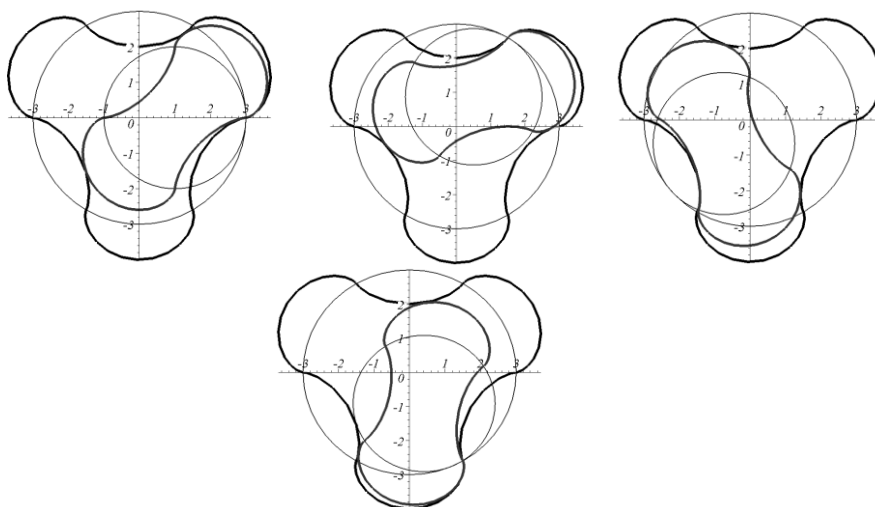
В результаті одержимо опис двохпараметричної сім'ї кривих, елементи якої збігаються з миттєвими положеннями контуру ротора:

$$\begin{aligned} x_p(t, \theta) &= \cos(R-1)\theta + \\ &+ \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right) \cos\theta + \\ &+ \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right) \sin\theta; \\ y_p(t, \theta) &= \sin(R-1)\theta - \\ &- \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right) \sin\theta + \\ &+ \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| t - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{t - \frac{k\pi}{R}} \right) \cos\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

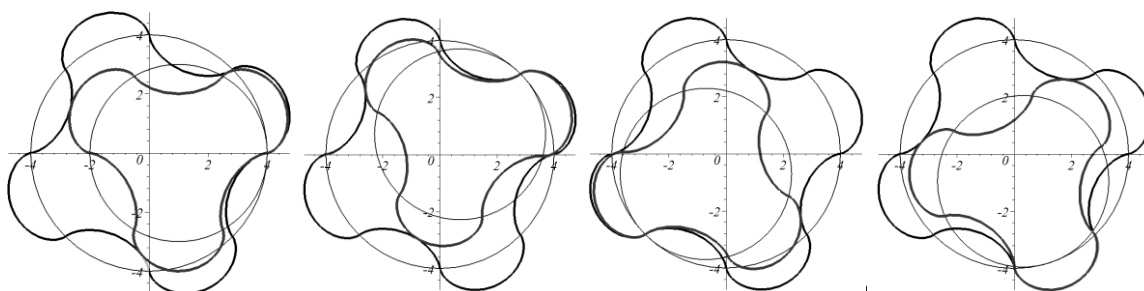
Наведені результати покладено в основу програми для реалізації алгоритму комп'ютерної обробки. В результаті її виконання одержано кадри анімації руху ротора. На рис. 5–7 зображено кадри комп'ютерної анімації дії роторно-планетарного механізму за різних значень  $R$  з епігіпотрохоїдами в якості робочих контурів. Це на графічному рівні ілюструє (і доводить) факт взаємоспряженості зазначених епігіпотрохійних кривих.



**Рис. 5.** Фази руху роторно-планетарного епігіпотрохійного механізму для ділильного радіуса великого кола  $R=2$



**Рис. 6.** Фази руху роторно-планетарного епігіпотрохійного механізму для ділильного радіуса великого кола  $R=3$



**Рис. 7.** Фази руху роторно-планетарного епігіпотрохійного механізму для ділильного радіуса великого кола  $R=4$

Одержані результати покладено в основу побудови спряжених перетинів поверхонь ротора і корпусу однороторного насоса Муано.

### 6. Розробка способу визначення інтегральних характеристик епігіпотрохідних контурів ротора і корпусу

Знайдені параметричні рівняння (8) епігіпотрохідних кривих, тобто профілів ротора і корпусу, дозволяють обчислити площу між ними (для фіксованого значення кута обкатки  $\theta$ ). А це надає можливість в подальшому розрахувати продуктивність машини.

Позначимо рівняння епігіпотрохідної кривої як  $x = x'_{EG}(t)$ ;  $y = y_{EG}(t)$ , де  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Тоді площу фігури, обмежену цією замкнутою кривою, можна обчислити за відомою з інтегрального числення формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x'_{EG}(t)y_{EG}(t) - y_{EG}(t)x'_{EG}(t)) dt. \quad (16)$$

Для обчислення інтеграла (16) в аналітичному вигляді складено програму. В машинних кодах одержано формулу для обчислення площі фігури на площині, обмеженій відповідною епігіпотрохідною для обраного значення радіуса  $R$ . Одержані результати обчислення інтеграла (16) для певних значень  $R$ , занесемо в табл. 1.

Табл. 1. Площа фігури, обмежена епігіпотрохідною залежно від радіуса ділильного кола

1	2	3	4	5
4,712388980	14,13716694	29,84513021	51,83627880	80,11061265

Далі обчислимо площі фігур між контурами ротора і корпусу, що дозволить на практиці оцінити робочі об'єми обраного перерізу насоса Муано (як роторно-планетарної машини).

На рис. 8 наведено обчислені величини площі (тут і далі в умовних одиницях) між епігіпотрохідними для певних значень  $R$ .

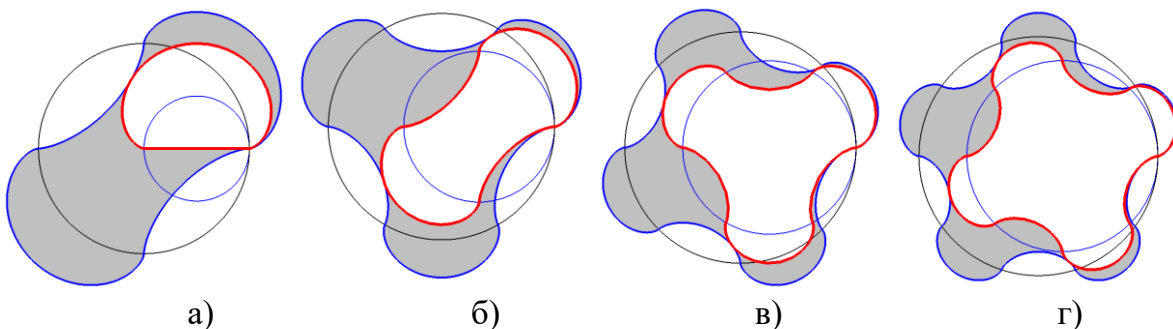


Рис. 8. Величина зафарбованої площі  $S$  між епігіпотрохідними: а) для  $R=2$   $S=9,42477796$ ; б) для  $R=3$   $S=15,70796327$ ; в) для  $R=4$   $S=21,99114859$ ; г) для  $R=5$   $S=28,27433385$

Зазначимо, що в системі декартових координат ORS графік зміни площ між епігіпотрохідними залежно від  $R$  матиме вигляд прямої лінії з рівнянням у вигляді:

$$S = \pi(2R - 1); \quad (17)$$

Тобто формула (17) дозволяє, по суті, без інтегрування визначати площі між епігіпотроходами для довільних значень  $R$ .

Одержані результати покладено в основу визначення інтегральних характеристик капсул між поверхнями ротора і корпуса однороторного насоса Муано.

### 7. Розробка способу опису циліндричної гвинтової поверхні з епігіпотрохoidним нормальним перерізом

Поверхні робочих органів одногвинтових гідромашин (корпуса й ротора) утворюються гвинтовим рухом відповідних профілів. Тому в робочих органах використовується переважно просторове циклоїдальне зачеплення. Траєкторії всіх точок профілів є звичайними гвинтовими лініями, що лежать на співвісних циліндрах радіуса  $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Якщо відомі параметричні рівняння профілю  $x(t)$ ;  $y(t)$  і крок гвинтової лінії  $T$ , то рівняння поверхні є функціями двох кутових параметрів ( $t$ ,  $\varphi$ ):

$$\begin{aligned}x &= x \cos \varphi \pm y \sin \varphi; \\y &= \mp x \sin \varphi + y \cos \alpha; \\Z &= \frac{\varphi}{2\pi} T,\end{aligned}\tag{18}$$

де  $\varphi$  – кут повороту перетину ( $\varphi=0-2\pi$ ).

Верхні знаки відносяться до гвинтових поверхонь обертання в лівому напрямку, нижні – в правому напрямку.

Оскільки  $\frac{T}{t} = \frac{z_1}{z_2}$ , то:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{z_2}{z_1};\tag{19}$$

тобто повному оберту (на кут  $2\pi$ ) гвинтової поверхні корпуса (що відбувається на довжині  $z=T$ ) відповідає поворот поверхні ротора на більший кут  $2\pi \frac{z_1}{z_2}$ . Тут і далі

через  $z_1$  і  $z_2$  позначено кількість заходів гвинтів корпуса і ротора відповідно.

Дослідження геометрії робочих поверхонь здійснюється за допомогою координатних ліній, які дослідимо спираючись на результати роботи [18] за умови застосування в них запропонованих епігіпотрохoidних кривих.

При фіксованому значенні одного з параметрів  $t$  або  $\varphi$  і зміні іншого точка опише криву, що лежить на поверхні робочих органів. Якщо змінні  $t$  чи  $\varphi$  прирівняти деяким постійним значенням, то на поверхні утворяться дві сім'ї кривих – координатних ліній. Два числа  $t=t_i$ , і  $\varphi=\varphi_k$  є криволінійними координатами точки на поверхні.  $t$ -лінії лежать у площині  $xu$  й повторюють торцевий профіль, а  $\varphi$ -лінії являють собою звичайні гвинтові лінії із кроком  $\Gamma'$ , що проходять по циліндрах радіуса  $a$ . Проекцією гвинтової лінії на площину  $xu$  є коло, а на площину  $xz$  або  $yz$  – синусоїда.

Кривизна  $t$  – ліній ( $\varphi = \text{const}$ ) ідентична кривизні профілю  $\rho$ . Радіус кривизни  $\rho_B$  і кут підйому  $\theta$   $\varphi$ - ліній ( $t = \text{const}$ ) постійні й не залежать від координати  $\varphi$ :

$$\rho_B = a + \frac{T^2}{4a\pi^2}; \quad (20)$$

$$\theta = \text{arctg} \frac{T}{2\pi a}. \quad (21)$$

Кут підйому гвинтової лінії, що залежить від числа заходів і коефіцієнта форми поверхні, є також кутом перетину координатних ліній гвинтового механізму.

Головні нормалі координатних ліній розташовані в торцевій площині. Нормалі  $t$ -ліній збігаються з нормаллями профілю. Нормалі  $\varphi$ -ліній проходять через вісь робочих органів, що збігається з початком координат.

Нормалі до поверхні відхилені від площини  $xu$  на деякий кут  $\beta$ , що залежить від безрозмірних параметрів зачеплення і кутового параметра  $t$ . У вершинах виступів і западин ( $t=0$ ;  $t=\pi/z_1$ ) нормаль до поверхні лежить у торцевій площині і збігається з головними нормаллями координатних ліній; у цих точках просторовий полюс сполучається з полюсом перетину.

Найбільше відхилення нормалей відбувається в точці профілю  $t_n$ , нормаль у якій дотикається центроїди. Графік функції  $\beta=f(t)$  є симетричним: на різних половинах кутового періоду нормалі до поверхні зміщені від торцевої площини в різні боки.

Проекція нормалі до поверхні на площину  $xu$  є нормаллю до відповідної точки профілю. Тому кут  $\beta$  дорівнює куту між нормаллю до поверхні й головною нормаллю  $t$ -лінії. Геометричне пояснення цього полягає у тому, що нормаль перетинає миттєву вісь обертання, яка, будучи перпендикулярною до торцевої площини, проходить через неї в полюсі розглянутого перетину.

Важливим показником є радіус кривизни поверхні в нормальному перетині, перпендикулярному до дотичної  $\varphi$ -лінії в точці поверхні з координатами  $t$ ,  $\varphi$ . У гвинтовому (косозубому) механізмі  $\varphi$ -лінії не паралельні осі  $z$ , тому нормальний перетин не збігається з торцевим.

Через нормаль у точці поверхні можна провести безліч перетинів у різних напрямках, при цьому кривина поверхні в даному напрямку буде дорівнювати кривині кривої, що проходить через точку поверхні в тому ж напрямку. У кожній точці поверхні є два головних напрямки, перпендикулярні один одному, де нормальна кривина поверхні досягає екстремального значення.

Перший головний напрямок (з максимальним радіусом кривизни  $R_1$ ) збігається з напрямком  $\varphi$ -ліній, тобто:

$$R_1 = \rho_\varphi. \quad (22)$$

Оскільки нормальний перетин перпендикулярний дотичній до  $\varphi$ -лінії, то він також є і другим головним перетином (з мінімальним радіусом кривизни  $R_2$ ). Тому радіус кривини в нормальному перетині  $\rho_n=R_2$  і визначається за формулою Ейлера, що зв'язує радіуси кривини в головних і довільному перетинах:

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{\cos^2 \kappa}{R_1} + \frac{\sin^2 \kappa}{R_2}, \quad (23)$$

де  $\rho_\phi$ ,  $\rho_t$  – нормальні радіуси кривини в напрямку координатних ліній (у довільному перетині);  $\kappa$  – кут між першим головним напрямком і напрямком  $t$ -ліній,  $\kappa=\theta$ .

За теоремою Меньє  $\rho_\phi$  і  $\rho_t$  можна виразити через радіуси кривини відповідно до гвинтової лінії  $\rho_B$  і торцевого профілю  $\rho$ :

$$\rho_\phi = \frac{\rho_B}{\cos \beta_B}; \quad (24)$$

$$\rho_t = \frac{\rho}{\cos \beta}, \quad (25)$$

де  $\beta_B$  – кут між нормаллю до поверхні й головною нормаллю  $\phi$ -лінії.

Підставляючи (24), (25) в (23), у результаті одержуємо вираз для обчислення нормального радіуса кривизни гвинтової поверхні

$$\rho_n = \frac{\rho \rho_B \sin \theta}{\rho_B \cos \beta - \rho \cos \beta_B \cos^2 \theta}. \quad (26)$$

З (26) випливає, що кривина поверхні в точці із заданим кутовим параметром  $t$  залежить від кривини її координатних ліній ( $\rho$ ,  $\rho_B$ ), кута підйому гвинтової лінії  $\theta$  і кутів між нормаллю до поверхні й головними нормаллями координатних ліній ( $\beta$ ,  $\beta_B$ ). У прямокутному механізмі, утвореному без обертання профілів ( $\beta=0$ ;  $\theta=\pi/2$ ):

$$\rho_n = \rho. \quad (27)$$

Залежність (26) дозволяє аналізувати зміну кривизни поверхні від кутового  $t$  і геометричних параметрів.

За знаком головних радіусів кривизни ( $R_1$ ,  $R_2$ ) проводиться класифікація точок поверхонь робочих органів [18]. Так, для поверхні корпусу гвинтового механізму із гіпоциклоїдальним зачепленням у межах кутового кроку ( $2\pi/z_1$ ) радіуси  $R_1$  і  $R_2$  мають один знак, точки поверхні, що лежать на відповідних кривих, є еліптичними. Якщо в інтервалі зміни параметра  $t$  головні радіуси різних знаків і  $R_2$  змінює знак, то точки поверхні є гіперболічними. Точки перегину, де  $R_2=\infty$ , є параболічними точками.

Нехай для нормальних перетинів згідно з виразами (14) і (15), маємо, відповідно, описи корпусу  $x = x'_{EG}(t)$ ;  $y = y_{EG}(t)$  та ротора  $x = x'_{EG}(t)$ ;  $y = y_{EG}(t)$ . Тоді рівнянням циліндричної гвинтової поверхні корпусу буде:

$$x = x_{EG}(t) \cos kC + y_{EG}(t) \sin kC; y = -x_{EG}(t) \sin kC + y_{EG}(t) \cos kC; z = C, \quad (28)$$

а рівнянням циліндричної гвинтової поверхні ротора буде:

$$x = X_{EG}(t) \cos kC + Y_{EG}(t) \sin kC; y = -X_{EG}(t) \sin kC + Y_{EG}(t) \cos kC; z = C, \quad (29)$$

де  $k$  – коефіцієнт скруту поверхні;  $k = \frac{h}{2\pi}$ , тут  $h$  – крок гвинта.

Складено програму унаочнення процесу обертання поверхні ротора всередині поверхні корпусу за роторно-планетарним законом. Обкатку поверхонь ротора і корпусу за схемою планетарного механізму здійснено за допомогою формул (9).

На рис. 9 зображено кадри анімації для різних значень  $k$  залежно від радіуса більшого діляльного кола планетарного механізму.

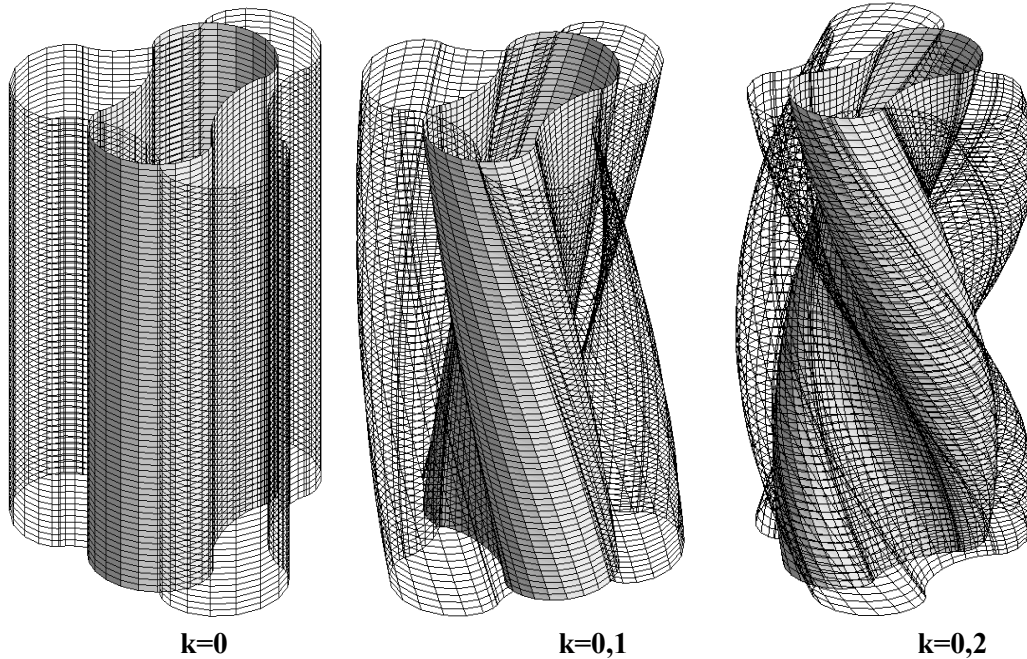


Рис. 9. Циліндричні гвинтові поверхні з епігіпотрохідними нормальними перетинами

Одержані результати покладено в основу побудови поверхонь ротора і корпусу одnogвинтового насоса Муано.

## 8. Розробка способу визначення лінії контакту робочих поверхонь одnogвинтового насоса Муано

Далі, також спираючись на результати роботи [18], дослідимо контактні лінії робочих поверхонь одnogвинтового насоса Муано. Контактні лінії утворюються множиною точок дотику гвинтових поверхонь ротора і корпусу при їхньому фіксованому положенні. Проекція контактної лінії на торцеву площину  $Oxy$  називається лінією зачеплення.

У формуванні контактних ліній беруть участь виступи й западини всіх  $z_2$  зубів ротора, де під западиною ротора розуміється ділянка профілю, розташована між двома сусідніми виступами.

Розглянемо параметричні рівняння контактних ліній. Нехай у вихідному перетині ( $z=0$ ,  $\varphi_1=0$ ) робочих органів лівого (як приклад) напрямку закруту точка дотику виступу зуба ротора із западиною корпусу  $K$  розташована на осі  $x$  ( $t=0$ ), а точка дотику западини ротора  $K_0$  відповідає кутовому параметру  $t=-t_0$ . Тоді для деякого  $z$  при повороті перетину корпусу й координатних осей  $xy$  на кут  $\varphi_1$  відносно кут повороту перетину ротора можна обчислити за формулами:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\varphi_1}{z_2} = \frac{\varphi_2}{z_1}. \quad (30)$$



У цьому перетині точки дотику розглянутих виступу й западини ротора перейдуть в положення  $K'$  і  $K$  з певними кутовими координатами.

У теорії гвинтових механізмів прийнято в межах кожного зуба ротора розділяти контактну лінію на дві складові: першу гілку, утворену точками дотику поверхонь виступу зуба ротора, і другу гілку – за множиною точок дотику западини ротора.

Теоретичне пояснення появи двох гілок контактної лінії [18] полягає в подвійному перетинанні нормалі в точці дотику профілів центроїд коліс (за винятком особливих точок  $t$ , де нормаль розташована по дотичній до центроїдів).

Координати гілок контактної лінії можна визначити, використовуючи перетворення координат при повороті осей на кут  $\varphi_1$  рівняння зв'язку кутових параметрів  $t$  і  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi_1 - y' \sin \varphi_1; \\y &= x' \sin \varphi_1 + y' \cos \varphi_1; \\z &= \frac{\varphi_1}{2\pi} T,\end{aligned}\quad (31)$$

де  $x'$  і  $y'$  – координати точки дотику відносно положення осей корпусу, яке залежить від кутового параметра точки.

Для переходу до рівнянь гілок контактних ліній врахуємо, що в ідеальному гвинтовому механізмі при повороті перетину корпусу на кут  $\varphi_1$  у зачепленні з виступом розглянутого зуба ротора перебуває точка профілю корпусу з кутовим параметром  $t = \frac{\varphi_1}{z_2}$ , а в зачепленні із западиною ротора – точка, кутовий параметр якої визначається з виразу:

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{z_2 + 2}{2} t - \cos \frac{z_2}{2} t}{\sin \frac{z_2 + 2}{2} t - \sin \frac{z_2}{2} t}.\quad (32)$$

Перша контактна лінія. Підставляючи в рівняння вихідного профілю (14) значення  $t = \frac{\varphi_1}{z_2}$ , одержуємо координати лінії зачеплення:

$$\begin{aligned}x_{EG} &= \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| \frac{\varphi_1 - k\pi}{z_2} - \frac{k\pi}{R} \right|}{\frac{\varphi_1 - k\pi}{z_2} - \frac{k\pi}{R}} \right); \\y_{EG} &= \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-1} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| \frac{\varphi_1 - k\pi}{z_2} - \frac{k\pi}{R} \right|}{\frac{\varphi_1 - k\pi}{z_2} - \frac{k\pi}{R}} \right),\end{aligned}\quad (33)$$

де:

$$\begin{aligned}
x_E &= (R + 0,5)\cos \theta - 0,5 \cos \left( (2R + 1)\frac{\varphi_1}{z_2} \right); \\
y_E &= (R + 0,5)\sin \theta - 0,5 \sin \left( (2R + 1)\frac{\varphi_1}{z_2} \right); \\
x_G &= (R - 0,5)\cos \theta + 0,5 \cos \left( (2R - 1)\frac{\varphi_1}{z_2} \right); \\
y_G &= (R - 0,5)\sin \theta + 0,5 \sin \left( (2R - 1)\frac{\varphi_1}{z_2} \right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Друга контактна лінія. Через неможливість розв'язати рівняння (32) відносно  $t$  для зовніцентроїдного зачеплення, координати лінії зачеплення в загальному випадку можна отримати тільки чисельним розрахунком на комп'ютері.

У центроїдному механізмі  $t = -\varphi_1$  і координати лінії зачеплення, наприклад, для ротора, можна виразити аналітично:

$$\begin{aligned}
X_{EG} &= \frac{1}{2} \left( x_E + x_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (x_G - x_E) \frac{\left| -\varphi_1 - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{-\varphi_1 - \frac{k\pi}{R}} \right); \\
Y_{EG} &= \frac{1}{2} \left( y_E + y_G + \sum_{k=1}^{2R-3} (-1)^{(k-1)} (y_G - y_E) \frac{\left| -\varphi_1 - \frac{k\pi}{R-1} \right|}{-\varphi_1 - \frac{k\pi}{R}} \right),
\end{aligned} \tag{35}$$

де:

$$\begin{aligned}
x_E &= (R - 0,5)\cos \theta - 0,5 \cos((- \varphi_1 2R - 1)t); \\
y_E &= (R - 0,5)\sin \theta - 0,5 \sin((- \varphi_1 2R - 1)t); \\
x_G &= (R - 1,5)\cos \theta + 0,5 \cos((- \varphi_1 2R - 3)t); \\
y_G &= (R - 1,5)\sin \theta + 0,5 \sin((- \varphi_1 2R - 3)t).
\end{aligned} \tag{36}$$

Обидві гілки ліній дотику являють собою гвинтоподібні просторові криві різного кроку і кривини. Перша гілка проходить по всій довжині гвинтового зуба ротора із кроком (і діаметром основного кола, близьким до середнього діаметра робочих органів). Друга гілка – крива із кроком  $\frac{t}{z_2} + 2\Delta l$ , локалізована в районі осі зачеплення.

Замкнуту робочу камеру – капсулу (або шлюз) насоса обмежують дві перші і дві другі контактні лінії. Капсула утвориться суміжними першими лініями контакту і крайніми (на довжині кроку корпусу) іншими лініями.

На рис. 10 наведено приклад наближеного визначення лінії контакту між поверхнями ротора і корпусу насоса Муано. Лінія контакту складається з множини

точок, координати яких визначаються з точок контакту відповідних нормальних перетинів ротора і корпусу.

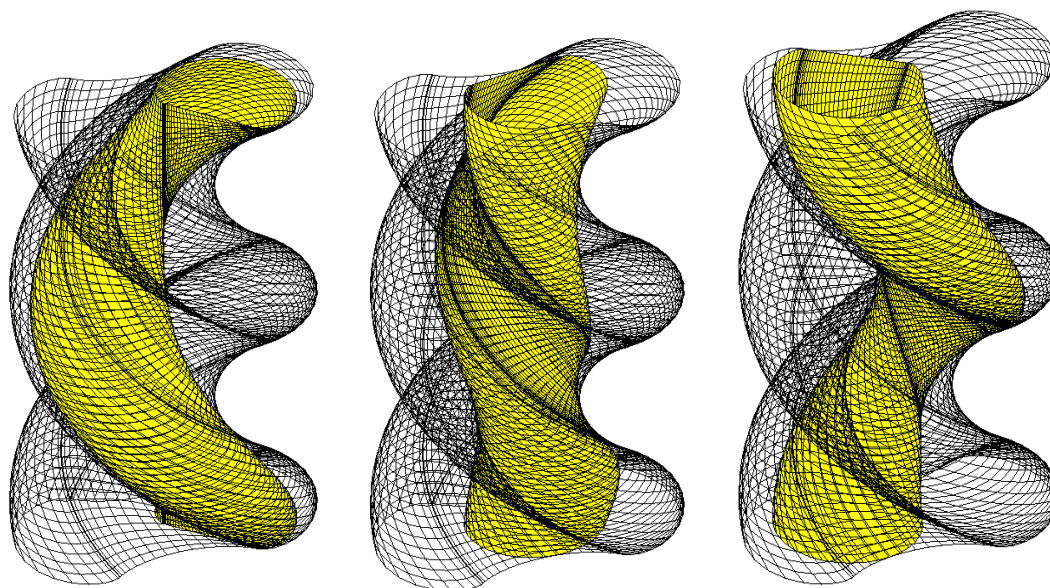


Рис. 10. Циліндричні гвинтові епітрохоїдні поверхні ротора і корпусу для  $R=2$ ,  $k=0,3$

Одержані результати покладено в основу побудови контактних ліній поверхонь ротора і корпусу однороторного насоса Муано.

### 9. Обговорення результатів дії одногвинтових насосів системи Муано на геометричній моделі

Для створення адекватної геометричної моделі одногвинтового насоса Муано (в зарубіжній літературі *progressing cavity pumps*) необхідно забезпечити його основну властивість. Вона полягає у тому, що в результаті руху поєднаної пари поверхонь ротора і корпусу між ними утворюються замкнуті камери (капсули) речовини, які під час перекачування поверхонь переміщатимуться вздовж насосу. Для цього було враховано, що для забезпечення такого руху ротора відносно корпусу необхідно використати планетарний механізм (або йому аналогічний за принципом дії). Саме це ускладнювало в попередніх дослідженнях розрахунки геометричних форм поверхонь ротора і корпусу.

Для розв'язання зазначеної задачі було запропоновано спосіб опису геометричних форм поверхонь, які обмежують ротор та корпус моделей одногвинтових насосів системи Муано. При цьому контури нормальних перетинів ротора і корпусу задовольняють умові взаємоспряженості в системі координат площини, яка перпендикулярна (нормальна) осі насоса.

Завдяки введеному поняттю епітрохоїдних кривих вдалося розрахувати взаємоспряжені поверхні ротора і корпусу. Унаочнюючи, можна вважати, що ці криві складаються з робочих профілів періодично розташованих епітрохоїд і гіпотрохоїд. Знайдено описи епітрохоїдних кривих у параметричному вигляді, де кожне з рівнянь має вигляд єдиного аналітичного виразу. Що головне – кожне з цих рівнянь включає в себе одночасно інформацію про епітрохоїду і гіпотрохоїду. Засобами графічних побудов проілюстровано взаємоспряженість контурів нормальних перетинів ротора і корпусу.

На базі цього підготовлено математичне забезпечення складання комп'ютерних програм для:

а) визначення інтегральних характеристик епігіпотрохідних контурів ротора і корпусу (табл. 1);

б) опису циліндричної гвинтової поверхні з епігіпотрохідним нормальним перерізом для  $k=0$ ,  $k=0,1$  та  $k=0,2$  (рис. 9);

в) визначення контактних ліній циліндричних гвинтових епігіпотрохідних поверхні ротора і корпусу для  $R=2$ ,  $k=0,3$  гвинтових насосів Муано (рис. 10).

Це дозволило розраховувати характеристики об'єму порожнин (капсул) насоса, а також ліній взаємного дотику поверхонь ротора та корпусу одnogвинтових насосів системи Муано.

Запропоновані рішення забезпечують переваги порівняно з відомими способами завдяки таким особливостям. Рівняння епігіпотрохідних кривих у вигляді єдиних аналітичних виразів можливо використати для дослідження їх диференціальних характеристик – побудови дотичних і нормалей, побудови векторів швидкості та прискорення для точки, яка рухається по епігіпотрохіді. А також зручно використати для дослідження їх інтегральних характеристик – обчислення площі фігури, обмеженої замкнутою епігіпотрохідною кривою, або фігури між двома епігіпотрохідями. Саме в цьому полягають переваги даного дослідження в порівнянні з аналогічними.

В подальших дослідженнях планується детально описати аналітичними формулами замкнуту робочу камеру – капсулу насоса Муано. При цьому буде враховано, що капсулу обмежують два типи контактних ліній. Капсула утвориться суміжними лініями контакту першого типу і крайніми (на довжині кроку корпусу) контактними лініями другого типу.

Одержані результати можуть скласти основу удосконалення одnogвинтових насосів Муано, що сприятиме розширенню діапазону їх застосування. Зараз насоси такого типу здатні перекачувати стічні і каналізаційні води, нафтопродукти (від сирої нафти до мазуту), пінобетон й піщано-цементні розчини, тощо. Тобто їх можна з успіхом використовувати для перекачування різних речовин, з якими стикаються рятувальники.

## 10. Висновки

1. Знайдено аналітичний опис епігіпотрохідних кривих та доведено їх взаємоспряженість. Для цього запропоновано наступне правило застосування епігіпотрохідних кривих при профілюванні роторних машин із більшим радіусом діляльного кола  $R$ :

– в якості профілю ротора слід обрати епігіпотрохіду, побудовану за допомогою кіл радіусів  $R-1$  і  $0,5$  і описану в рухомій системі координат  $OXY$ ;

– в якості профілю корпусу слід обрати епігіпотрохіду, побудовану за допомогою кіл радіусів  $R$  і  $0,5$ , і описану в нерухомих координатах  $Oxy$ ;

– за допомогою формул зв'язку між координатами (9) необхідно реалізувати спряження двох профілів у процесі обкатки.

Одержано фази руху роторно-планетарного епігіпотрохідного механізму для діляльного радіуса величини кола (рис. 5, 6 та 7), ці результати було покладено в основу побудови спряжених перетинів поверхонь ротора і корпусу одnogвинтового насоса Муано.

2. Розроблено спосіб визначення інтегральних характеристик епігіпотрохідних контурів ротора і корпусу. Для цього в машинних кодах

одержано формулу (16) для обчислення площі фігури на площині, обмеженій відповідною епігіпотрохоїдою для обраного значення радіуса  $R$ . Показано, що графік зміни площ між епігіпотрохоїдами залежно від  $R$  матиме вигляд прямої лінії. Одержана формула (17) дозволяє без інтегрування визначати площі між епігіпотрохоїдами для довільних значень  $R$ , що дало можливість визначити інтегральні характеристики капсул між поверхнями ротора і корпусу однороторного насоса Муано (рис. 8).

3. Розроблено спосіб опису циліндричної гвинтової поверхні з епігіпотрохоїдним нормальним перерізом. Для цього знайдено опис епігіпотрохоїдних кривих як періодично розташованих профілів епітрохоїд і гіпотрохоїд. Запропоновано формули для циліндричної гвинтової поверхні корпусу (28) та ротора (29). Дослідження геометрії робочих поверхонь здійснюється за допомогою координатних ліній з врахуванням у їх описах запропонованих епігіпотрохоїдних кривих. Складено програму унаочнення процесу обертання поверхні ротора всередині поверхні корпусу за роторно-планетарним законом (рис. 9).

4. Розроблено спосіб визначення контактних ліній робочих органів гвинтових насосів Муано. Контактні лінії утворюються множиною точок дотику гвинтових поверхонь ротора і корпусу при їхньому фіксованому положенні. Наведено приклад наближеного визначення лінії контакту між поверхнями ротора і корпусу насоса Муано (рис. 10). Лінія контакту (33) та (35) складається з множини точок, координати яких визначаються з точок контакту відповідних нормальних перетинів ротора і корпусу.

### Література

1. Wittrisch C., Cholet H. Progressing cavity pumps: oil well production artificial lift. Editions Technip, 2012. 224 p. URL: <http://www.editionstechnip.com/en/catalogue-detail/641/progressing-cavity-pumps.html>
2. Nelik L., Brennan J. Gulf pump guides: progressing cavity pumps, downhole pumps and mudmotors. Elsevier, 2013. 214 p. URL: <https://www.amazon.com/Gulf-Pump-Guides-Progressing-Mudmotors/dp/0976511312>
3. El-Abd F. M., Wahba E. M., Adam I. G. Viscous flow simulations through multi-lobe progressive cavity pumps. *Petroleum Science*. 2020. № 17. P. 768–780. doi: <https://doi.org/10.1007/s12182-020-00458-6>
4. Nguyen T., Tu H., Al-Safran E. Saasen A. Simulation of single-phase liquid flow in progressing cavity pump. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2016. Vol. 147. P. 617–623. doi: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2014.07.009>
5. Baroiu N., Morosăanu G., Teodor V., Oancea N. Roller profiling for generating the screw of a pump with progressive cavities. *Inventions*. 2021. Vol. 6. 34. P. 8. URL: <https://www.mdpi.com/2411-5134/6/2/34>
6. Baroiu N., Morosanu G., Frumușanu G., Teodor V. Study of the stator geometry for a Moineau pump. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. January 2021. Vol. 1009. P. 11. doi: [10.1088/1757-899X/1009/1/012003](https://doi.org/10.1088/1757-899X/1009/1/012003)
7. Donaldson J., Feng Y., Gennip Y., Grann H. Mathematical problems for Moineau pumps. Center for analysis, scientific computing and applications, orthopaedic biomechanics, discrete algebra and geometry. 2006. P. 49. URL: <https://research.tue.nl/en/publications/mathematical-problems-for-moineau-pumps/fingerprints/>
8. Gravesen J. The geometry of the Moineau pump. *Computer Aided Geometric Design*. 2008. Vol. 25. № 9. P. 792–800. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2008.07.001>

j.cagd.2008.06.012

9. Syzrantseva K., Syzrantsev V. Load on multipair contact zones of operating parts of screw pumps and motors: a computer analysis. International Conference on Industrial Engineering. 2016. Vol. 150. P. 768–774. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.104>

10. Canessa E., Baruzzo M., Fonda C. Study of Moineau-based pumps for the volumetric extrusion of pellets. Scientific Fabrication Laboratory: The Abdus Salam International centre for theoretical physics, Trieste, Italy. 2017. Vol. 17. P. 9. doi: [10.1016/j.addma.2017.08.015](https://doi.org/10.1016/j.addma.2017.08.015)

11. Zheng L., Wu X., Han G., Li H., Zuo Yi, & Zhou D. Analytical model for the flow in progressing cavity pump with the metallic stator and rotor in clearance fit. Mathematical Problems in Engineering volume. 2018. Vol. 4. P. 1–14 doi: <https://doi.org/10.1155/2018/3696930>

12. Nguyen T., Bui K., Al-Safran E., Saasen A. Theoretical modeling of positive displacement motor performance. Kuwait University. 2017. Vol. 17 P. 1–11. [https://www.aade.org/application/files/8615/7132/1739/AADE-17-NTCE-026\\_-\\_Nguyen.pdf](https://www.aade.org/application/files/8615/7132/1739/AADE-17-NTCE-026_-_Nguyen.pdf)

13. Lee Sang Hyeop, Kwak Hyo Seo, Han Gi Bin, Kim Chul. Design of gerotor oil pump with 2-expanded cardioids lobe shape for noise reduction. Energies. 2019. Vol. 12(6). 1126. P. 16. doi: <https://doi.org/10.3390/en12061126>

14. Балденко Д. Ф., Балденко Ф. Д., Гноевых А. Н. Одновинтовые гидравлические машины. ООО «ИРЦ Газпром», 2005. Том 1. 488 с. URL: [https://rusneb.ru/catalog/010003\\_000061\\_a732d201842726ef9d523e4dfc333dc6/](https://rusneb.ru/catalog/010003_000061_a732d201842726ef9d523e4dfc333dc6/)

15. Лінчевський Є. А. Геометричне моделювання епігіпотрохідних профілів роторно-планетарних машин: автореф. дис. канд. тех. Наук : 05.01.01. Київ, 2010. 21 с. URL: [http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis\\_nbuv/cgiirbis\\_64.exe](http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe).

16. Росоха С. В., Лінчевський Є. А. Диференціальні та інтегральні характеристики епігіпотрохідних робочих профілів роторно-планетарних машин: навч.-метод. посіб. Харків: НУЦЗУ, 2010. 80 с. URL: <https://discovery.kpi.ua/Record/000287103>

17. Росоха С. В., Куценко Л. М. Геометричне моделювання об'ємів робочих камер роторно-планетарних трохіодних машин: монографія. Харків: УЦЗУ, 2007. 176 с. URL: [http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis\\_nbuv/cgiirbis\\_64.exe](http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe)

*Y. Linchevsky<sup>1</sup>, DSc, Senior Researcher of the Department*

*L. Kutsenko<sup>2</sup>, DSc, Professor, Professor of the Department*

*A. Kalinovsky<sup>2</sup>, Ph, Associate Professor, Head of the Department*

*V. Semkiv<sup>2</sup>, Adjunct*

*S. Nazarenko<sup>2</sup>, PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department*

*E. Sukharkova<sup>2</sup>, Lecturer of the Department*

<sup>1</sup>*Department of Emergency Prevention, DSNS, Kyiv, Ukraine*

<sup>2</sup>*National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*

## GEOMETRIC MODELING OF EPIHYPTROCHOID PROFILES OF SINGLE SCREW FOR MOINEAU PUMPS

A method of calculating the geometric shapes of the surfaces that limit the rotor and the body of models of single-screw pumps of the Muano system is proposed. At the same time, the contours of the normal sections of the rotor and the housing satisfy the condition of mutual conjugation in the coordinate system of a plane that is perpendicular (normal) to the axis of the pump. The concept of epihypo-

trochoid curves, convenient for calculating the interconnected surfaces of the rotor and the body, is introduced. Which consist of working profiles of periodically located epitrochoids and hypotrochoids. Descriptions of epihypotrochoid curves in a parametric form were found, where each of the equations has the form of a single analytical expression. The interconnectedness of the contours of the normal sections of the rotor and the body is illustrated by means of graphic constructions. Based on this, the following methods have been developed: a) determination of the integral characteristics and contact lines of the epihypotrochoid contours of the rotor and the body of the Muano pumps; b) description of a cylindrical helical surface with an epihypotrochoid normal section. This made it possible to calculate the volume characteristics of the pump cavities. The proposed equations of epihypotrochoid curves can be used to study their differential characteristics – construction of tangents and normals, construction of velocity and acceleration vectors for a point moving along the epihypotrochoid. And it is also convenient to use to study their integral characteristics – calculation of the area of a figure bounded by a closed epihypotrochoid curve, or a figure between two epihypotrochoids. The obtained results can form the basis for the improvement of Muano single-screw pumps, which will expand the range of their application. It should be noted that Muano single-screw pumps are used for pumping various types of liquids, which can be used in the work of emergency and rescue services. The pumps are capable of pumping sewage and sewage water, oil products, foam concrete and sand-cement solutions, etc.

**Keywords:** geometric modeling, Moineau single-screw pump, epihypotrochoid, conjugate curves, enveloping epihypotrochoid

## References

1. Wittrisch, C., Cholet, H. (2012). Progressing cavity pumps: oil well production artificial lift. Editions Technip, 219.  
URL: <http://www.editionstechnip.com/en/catalogue-detail/641/progressing-cavity-pumps.html>
2. Nelik, L., Brennan, J. (2013). Gulf pump guides: progressing cavity pumps, downhole pumps and mudmotors. Elsevier, 214. URL: <https://www.amazon.com/Gulf-Pump-Guides-Progressing-Mudmotors/dp/0976511312>
3. El-Abd, F. M., Wahba, E. M., Adam, I. G. (2020). Viscous flow simulations through multi-lobe progressive cavity pumps. *Petroleum Science*, 17, 768–780. doi: <https://doi.org/10.1007/s12182-020-00458-6>
4. Nguyen, T., Tu, H., Al-Safran, E. Saasen, A. (2016). Simulation of single-phase liquid flow in progressing cavity pump. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 147, 617–623. doi: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2014.07.009>.
5. Baroiu, N., Morosăanu, G., Teodor, V., Oancea, N. (2021). Roller profiling for generating the screw of a pump with progressive cavities. *Inventions*, 6, 34, 8 URL: <https://www.mdpi.com/2411-5134/6/2/34>
6. Baroiu, N., Morosanu, G., Frumușanu, G., Teodor, V. (2021). Study of the stator geometry for a Moineau pump. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. January, 1009, 11. doi: 10.1088/1757-899X/1009/1/012003
7. Donaldson, J., Feng, Y., Gennip, Y., Grann, H. (2006). Mathematical problems for Moineau pumps. Center for analysis, scientific computing and applications, orthopaedic biomechanics, discrete algebra and geometry, 49. URL: <https://research.tue.nl/en/publications/mathematical-problems-for-moineau-pumps/fingerprints/>
8. Gravesen, J. (2008). The geometry of the Moineau pump. *Computer Aided Geometric Design*, 25, 9, 792–800. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2008.06.012>
9. Syzrantseva, K., Syzrantsev, V. (2016). Load on multipair contact zones of operating parts of screw pumps and motors: a computer analysis. *International Conference on Industrial Engineering*, 150, 768–774. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.104>

10. Canessa, E., Baruzzo, M., Fonda, C. (2017). Study of Moineau-based pumps for the volumetric extrusion of pellets. Scientific Fabrication Laboratory: The Abdus Salam International centre for theoretical physics, Trieste, Italy, 17, 9. doi: 10.1016/j.addma.2017.08.015
11. Zheng, L., Wu, X., Han, G., Li, H., Zuo, Yi, Zhou, D. (2018). Analytical model for the flow in progressing cavity pump with the metallic stator and rotor in clearance fit. Mathematical Problems in Engineering volume, 4, 1–14. doi: <https://doi.org/10.1155/2018/3696930>
12. Nguyen, T., Bui, K., Al-Safran, E., Saasen, A. (2017). Theoretical modeling of positive displacement motor performance. Kuwait University, 17, 1–11. [https://www.aade.org/application/files/8615/7132/1739/AADE-17-NTCE-026\\_-\\_Nguyen.pdf](https://www.aade.org/application/files/8615/7132/1739/AADE-17-NTCE-026_-_Nguyen.pdf)
13. Lee, Sang Hyeop, Kwak, Hyo Seo, Han, Gi Bin, Kim, Chul (2019). Design of gerotor oil pump with 2-expanded cardioids lobe shape for noise reduction. Energies, 12(6), 1126, 16. doi: <https://doi.org/10.3390/en12061126>
14. Baldenko, D. F., Baldenko, F. D., Gnoevikh, A. N. (2005). Odnovintovie gidravlicheskie mashini. OOO «IRTs Gazprom», 1. 488. URL: [https://rusneb.ru/catalog/010003\\_000061\\_a732d201842726ef9d523e4dfc333dc6/](https://rusneb.ru/catalog/010003_000061_a732d201842726ef9d523e4dfc333dc6/)
15. Linchevskiy, Ye. A. (2010). Heometrychne modeliyuvannia epihipotrokhoidnykh profiliv rotorno-planetarnykh mashyn: avtoref. dys. kand. tekhn. Nauk : 05.01.01. Kyiv, 21. URL: [http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis\\_nbuv/cgiirbis\\_64.exe](http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe).
16. Rosokha, S. V., Linchevskiy, Ye. A. (2010). Diferentsialni ta integralni kharakteristiki yepigipotrokhoidnykh robochikh profiliv rotorno-planetarnykh mashin: navch.-metod. posib. Kharkiv: NUTSZU, 80. URL: <https://discovery.kpi.ua/Record/000287103>
17. Rosokha, S. V., Kutsenko, L. M. (2007). Geometrychne modeliyuvannia ob'emiv robochikh kamer rotorno-planetarnykh trokhoidnykh mashin: monografiya. Kharkiv: UTSZU, 176 URL: [http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis\\_nbuv/cgiirbis\\_64.exe](http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe)

Надійшла до редколегії: 17.10.2022

Прийнята до друку: 18.11.2022