

**ДЕРЖАВНА СЛУЖБА УКРАЇНИ З НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ**

**В.В. Тютюник, М.В. Кустов, О.О. Тютюник**

**ПЛАНУВАННЯ ТА  
ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ  
ЕКСПЕРИМЕНТУ У СФЕРІ  
ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ**

**Підручник**

Рекомендовано до друку і використання в освітньому процесі  
вченою радою НУЦЗ України

**Харків 2023**

Авторський колектив:

В.В. Тютюник, доктор технічних наук, професор

М.В. Кустов, доктор технічних наук, професор

О.О. Тютюник, кандидат технічних наук, доцент

**Рецензенти:** член-кореспондент Національної академії наук України, доктор технічних наук, професор **О. О. Попов**, заступник директора з науково-організаційної роботи Державної установи «Інститут геохімії навколишнього середовища Національної академії наук України»; доктор технічних наук, професор **С. Г. Удовенко**, завідувач кафедри інформатики та комп'ютерної техніки Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця; кандидат технічних наук, доцент **М. М. Удянський**, начальник факультету цивільного захисту НУЦЗ України.

Рекомендовано до друку і використання в освітньому процесі  
вченою радою НУЦЗ України (протокол від 26.10.2023 р. № 2)

**Тютюник В. В., Кустов М. В., Тютюник О. О.**

Планування та обробка результатів експерименту у сфері цивільного захисту: підручник / В. В. Тютюник, М. В. Кустов, О. О. Тютюник. – Х.: НУЦЗУ, 2023. – 308 с.

У підручнику викладено теоретичні основи планування та здійснення фундаментальних і прикладних наукових досліджень в сфері цивільного захисту, технічне та метрологічне забезпечення експерименту, основи багатофакторного експерименту та обробки експериментальних даних. Матеріал підручнику викладено відповідно до програми навчальної дисципліни «Планування та обробка результатів експерименту у сфері цивільного захисту».

Підручник призначений для здобувачів вищої освіти закладів вищої освіти III і IV рівнів акредитації, які навчаються на третьому (науковому) рівні за спеціальністю 263 «Цивільний захист» за освітньо-науковою програмою «Цивільний захист».

Підручник також може бути корисним для практичних працівників Державної служби України з надзвичайних ситуацій та для фахівців у галузі національної безпеки (цивільного захисту, пожежної безпеки, охорони праці, екологічної безпеки тощо).

Іл. 86. Табл. 22. Бібліогр.: 49 назв.

УДК 355/359+351.861

© Тютюник В. В., Кустов М.В.,

Тютюник О. О. 2023

© НУЦЗУ, 2023

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b>	6
<b>Розділ 1. Методологічні основи планування експерименту</b>	7
1.1 Фізико-хімічні аспекти надзвичайних ситуацій як об'єкти дослідження. Мета та структура дисципліни.	7
1.2 Цілі дослідження. Умови ефективності планування експерименту	28
1.2.1 Завдання і види експериментів	28
1.2.2 Стратегія і тактика експерименту	32
1.2.3 Умови ефективності планування експерименту	35
1.3 Методологічні концепції планування експерименту	37
1.3.1 Основні типи експериментів	37
1.3.2 Методологічні концепції планування експерименту	39
1.4 Основні ознаки класифікації експериментів	42
1.4.1 Класифікація експериментів	42
1.4.2 Класифікація похибок	48
1.4.3 Обрання теми наукових експериментальних досліджень	50
Контрольні питання та завдання	52
<b>Розділ 2 Технічне та метрологічне забезпечення експерименту</b>	54
2.1 Сукупність операцій експерименту. Завдання експерименту	54
2.1.1 Формулювання мети, об'єкта та предмета експериментального наукового дослідження	54
2.1.2 Структура проведення наукового експерименту	54
2.1.3 Схема збору та аналізу наукової інформації для проведення наукових експериментальних досліджень	56
2.1.4 Реплікація	59
2.2 Обладнання для проведення експерименту	60
2.2.1 Фізична величина та її систематизація. Класифікація вимірювань	60
2.2.2 Значущі цифри і правила заокруглення	66
2.2.3 Засоби вимірювальної техніки	68
2.3 Електромеханічні прилади для проведення експерименту. Вимірювальні механізми приладів і їх застосування	70
2.3.1 Загальна структурна схема електромеханічного приладу	70
2.3.2 Прилади магнітоелектричної та електромагнітної систем	71
2.3.3 Електродинамічні та феродинамічні прилади	77
2.3.4 Прилади індукційної системи та електростатичні прилади	83
2.4 Електронні аналогові та цифрові вимірювальні прилади	86
2.4.1 Електронні аналогові вимірювальні прилади	86
2.4.2 Цифрові вимірювальні прилади	92
2.5 Вимірювання електричних, магнітних та неелектричних величин. Контрольований та неконтрольований експерименти	97
2.5.1 Вимірювання електричних величин	97

2.5.2	Вимірювання магнітних величин	112
2.5.3	Вимірювання неелектричних величин	120
2.5.4	Контрольований та неконтрольований експерименти	122
2.6	Проведення експерименту в хімії	123
2.6.1	Основи планування та проведення експериментів в хімії	123
2.6.2	Етапи проведення експериментів в хімії	125
2.6.3	Методи та методики хімічного аналізу	126
2.6.4	Визначення основних величин в хімії	130
2.7	Види похибок. Умови проведення вимірювального експерименту	146
2.7.1	Класифікація похибок вимірювання. Умови проведення вимірювального експерименту	146
2.7.2	Похибки засобів вимірювань	148
2.7.3	Систематичні та випадкові похибки вимірювання	151
2.8	Похибки прямих та непрямих вимірювань. Знаходження грубих похибок	153
2.8.1	Оцінювання випадкових похибок прямих вимірювань	153
2.8.2	Методика оцінювання випадкових похибок опосередкованих вимірювань	162
2.8.3	Невизначеність вимірювань	165
2.9	Аналітична обробка результатів вимірювання. Графічне зображення результатів вимірювання	168
2.9.1.	Графічне зображення результатів вимірювання	168
2.9.2.	Аналітична обробка результатів вимірювання	171
2.9.3.	Метод найменших квадратів	173
2.10.	Аналітичні методи відображення експериментальних прямих. Кореляційний аналіз результатів вимірювань	180
2.10.1.	Рівняння регресійної моделі	180
2.10.2.	Парний регресійний аналіз	181
2.10.3.	Коефіцієнт кореляції	185
2.10.4.	Множинний регресійний аналіз	187
2.10.5.	Визначення параметрів рівняння регресії	189
2.10.6.	Аналітичне відображення експериментальних прямих за допомогою MS Excel	191
	Контрольні питання та завдання	197
	<b>Розділ 3. Повнофакторний експеримент. Обробка експериментальних даних</b>	199
3.1.	Гіпотеза та її перевірка	199
3.1.1.	Гіпотеза. Перевірка гіпотез	199
3.1.2.	Критична область. Загальна методика побудови критичних областей	201
3.1.3.	Перевірка правдивості статистичних гіпотез про рівність двох генеральних середніх	205
3.1.4.	Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу	208

генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона	
3.1.5. Порівняння двох середніх генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі (великі незалежні вибірки)	211
3.2. Основи статистичної обробки експериментальних результатів	212
3.2.1. Методи порівняння елементарних статистик	212
3.3. Дисперсійний аналіз	222
3.3.1. Основні поняття дисперсійного аналізу	222
3.3.2. Однофакторний аналіз	222
3.3.3. Двофакторний аналіз	226
3.4. Методи класифікації даних	229
3.4.1. Основні поняття факторного аналізу	229
3.4.2. Метод головних компонент	232
3.4.3. Метод головних факторів	235
3.5. Параметричні методи класифікації без навчання	241
3.5.1. Основні поняття класифікації даних	241
3.5.2. Параметричні методи класифікації без навчання	242
3.5.3. Кластерний аналіз	244
3.6. Методи класифікації з навчанням	260
3.6.1. Основні методи класифікації з навчанням	260
3.6.2. Основи застосування нейронних сіток для обробки даних	267
3.7. Основи повно факторного експерименту	280
3.7.1. Основні положення повно факторного експерименту	280
3.7.2. Побудова матриці планування	283
3.7.3. Проведення експерименту	288
3.8. Дробовий факторний експеримент та основи дробастного планування експерименту	290
3.8.1. Характеристика дробового факторного експерименту	290
3.8.2. Симплекс планування	295
3.8.3. Основи дробастного планування експерименту	299
Контрольні питання та завдання	304
<b>Список використаних джерел</b>	<b>305</b>

## ВСТУП

Ефективна реалізація на території України в мирний час та в особливий період комплексу заходів, які спрямовані на захист населення, територій, навколишнього природного середовища, майна, матеріальних і культурних цінностей від надзвичайних ситуацій та інших небезпечних подій, запобігання виникненню таких ситуацій та подій, ліквідацію їх наслідків, надання допомоги постраждалим, а також на здійснення державного нагляду (контролю) у сфері пожежної та техногенної безпеки, неможлива без підготовка науковців в галузі національної безпеки (цивільного захисту, пожежної безпеки, охорони праці, екологічної безпеки тощо), здатних організовувати, планувати та проводити експериментальні дослідження, з обробки отриманих результатів в сфері цивільного захисту. На підготовку таких науковців і спрямований матеріал цього підручника.

Структурно підручник складається з трьох розділів, в яких:

– розглянуто методологічні основи планування експерименту, наведено фізико-хімічні аспекти надзвичайних ситуацій як об'єктів дослідження, цілі дослідження, умови ефективності планування експерименту та основні ознаки класифікації експериментів;

– представлено технічне та метрологічне забезпечення експерименту, наведено сукупність операцій експерименту, завдання експерименту, обладнання для проведення експерименту, електромеханічні прилади для проведення експерименту, вимірювальні механізми приладів і їх застосування, електронні аналогові та цифрові вимірювальні прилади, вимірювання електричних, магнітних та неелектричних величин, контрольований та неконтрольований експерименти, проведення експерименту в хімії, види похибок, умови проведення вимірювального експерименту, похибки прямих та непрямих вимірювань, знаходження грубих похибок, аналітична обробка результатів вимірювання, графічне зображення результатів вимірювання, аналітичні методи відображення експериментальних прямих, кореляційний аналіз результатів вимірювань;

– розглянуто основи повнофакторного експерименту та обробки експериментальних даних, а саме, наведено основні поняття гіпотези та її перевірки, основи статистичної обробки експериментальних результатів, дисперсійний аналіз, методи класифікації даних, параметричні методи класифікації без навчання, методи класифікації з навчанням, основи повнофакторного експерименту, дробовий факторний експеримент та основи дробастного планування експерименту.

Матеріал підручника викладено відповідно до програми навчальної дисципліни «Планування та обробка результатів експерименту у сфері цивільного захисту».

Підручник призначений для здобувачів вищої освіти закладів вищої освіти III і IV рівнів акредитації, які навчаються на третьому (науковому) рівні за спеціальністю 263 «Цивільний захист» за освітньо-науковою програмою «Цивільний захист».

# РОЗДІЛ 1. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

## 1.1 Фізико-хімічні аспекти надзвичайних ситуацій як об'єкти дослідження. Мета та структура дисципліни

*Надзвичайна ситуація* – обстановка на окремій території чи суб'єкті господарювання на ній або водному об'єкті, яка характеризується порушенням нормальних умов життєдіяльності населення, спричинена катастрофою, аварією, пожежею, стихійним лихом, епідемією, епізоотією, епіфітотією, застосуванням засобів ураження або іншою небезпечною подією, що призвела (може призвести) до виникнення загрози життю або здоров'ю населення, великої кількості загиблих і постраждалих, завдання значних матеріальних збитків, а також до неможливості проживання населення на такій території чи об'єкті, провадження на ній господарської діяльності.

*Небезпечна подія* – подія, у тому числі катастрофа, аварія, пожежа, стихійне лихо, епідемія, епізоотія, епіфітотія, яка за своїми наслідками становить загрозу життю або здоров'ю населення чи призводить до завдання матеріальних збитків.

*Аварія* – небезпечна подія техногенного характеру, що спричинила ураження, травмування населення або створює на окремій території чи території суб'єкта господарювання загрозу життю або здоров'ю населення та призводить до руйнування будівель, споруд, обладнання і транспортних засобів, порушення виробничого або транспортного процесу чи спричиняє наднормативні, аварійні викиди забруднюючих речовин та інший шкідливий вплив на навколишнє природне середовище.

*Катастрофа* – велика за масштабами аварія чи інша подія, що призводить до тяжких наслідків.

*Дорожньо-транспортна пригода* – подія, що сталася під час руху дорожнього транспортного засобу, внаслідок якої загинули або зазнали травм люди чи заподіяна шкода майну. Рівень надзвичайної ситуації при дорожньо-транспортній пригоді визначається відповідно до *Порядку класифікації надзвичайних ситуацій техногенного та природного характеру*, що затверджується Кабінетом Міністрів України.

*Епідемія* – масове поширення інфекційної хвороби серед населення відповідної території за короткий проміжок часу.

*Епізоотія* – широке поширення заразної хвороби тварин за короткий проміжок часу, що значно перевищує звичайний рівень захворюваності на цю хворобу на відповідній території.

*Епіфітотія* – широке поширення на території однієї або кількох адміністративно-територіальних одиниць заразної хвороби рослин, що значно перевищує звичайний рівень захворюваності на цю хворобу на відповідній території.

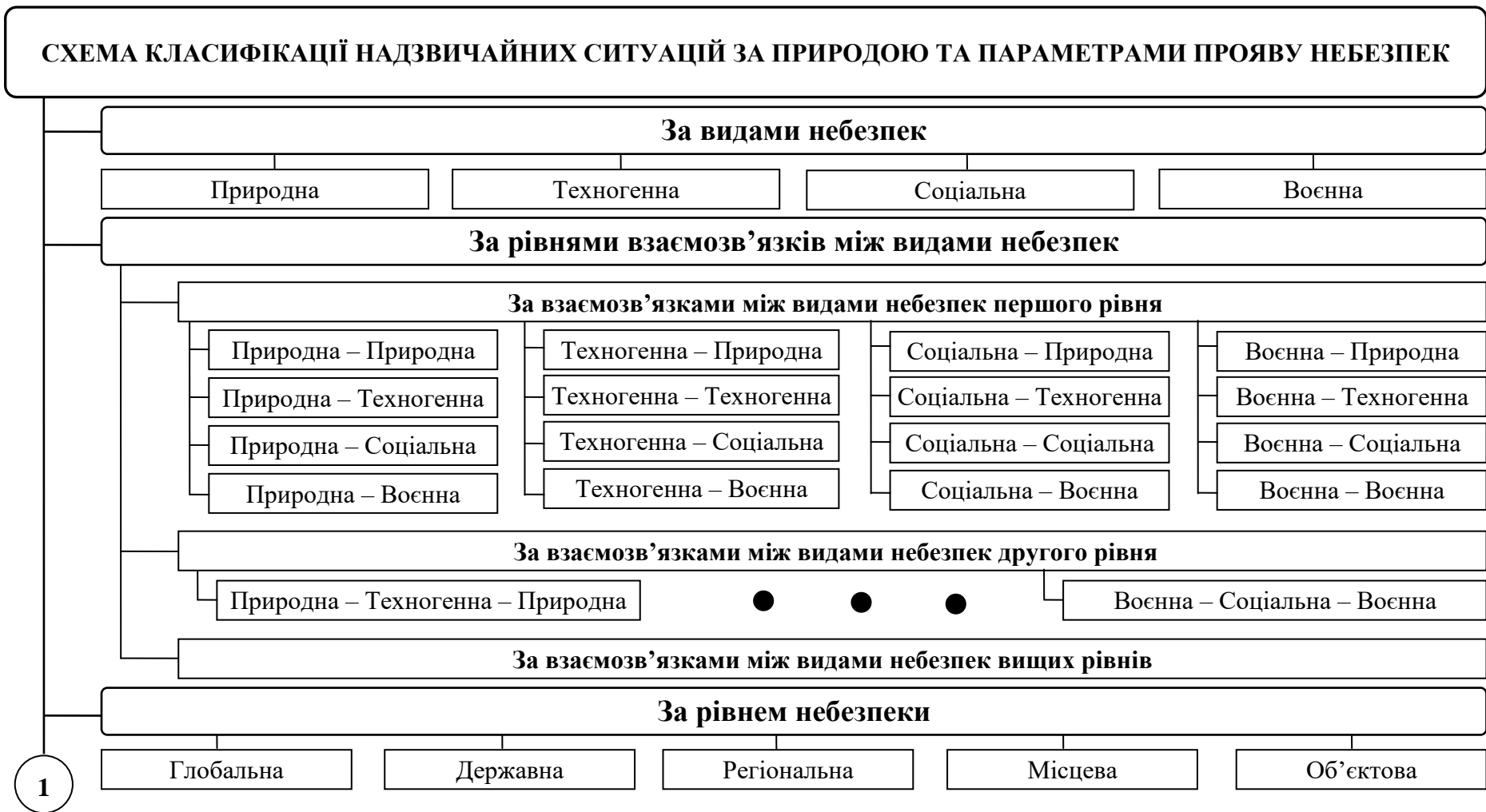


Рисунок 1.1 – Схема класифікації надзвичайних ситуацій за природою та параметрами прояву небезпек





Продовження рисунку 1.1

*Пожежа* – неконтрольований процес знищення або пошкодження вогнем майна, під час якого виникають чинники, небезпечні для істот та навколишнього природного середовища.

*Стихийне лихо* – природне явище, що діє з великою руйнівною силою, заподіює значну шкоду території, на якій відбувається, порушує нормальну життєдіяльність населення, завдає матеріальних збитків.

*Класифікаційна ознака надзвичайних ситуацій* – технічна або інша характеристика небезпечної події, що зумовлює виникнення обстановки, яка визначається як надзвичайна ситуація.

*Джерелами небезпеки виникнення надзвичайних ситуацій техногенного характеру є:*

- 1) потенційно небезпечні об'єкти та об'єкти підвищеної небезпеки;
- 2) будівлі та споруди з порушенням умов експлуатації;
- 3) суб'єкти господарювання із критичним станом виробничих фондів та порушенням умов експлуатації;
- 4) ядерні установки з порушенням умов експлуатації;
- 5) наслідки терористичної діяльності;
- 6) гідротехнічні споруди;
- 7) неконтрольоване ввезення, зберігання і використання на території України техногенно небезпечних технологій, речовин, матеріалів;
- 8) надмірне та нерегульоване накопичення побутових і промислових відходів, непридатних для використання засобів захисту рослин;
- 9) наслідки військової та іншої екологічно небезпечної діяльності;
- 10) суб'єкти господарювання, на об'єктах яких здійснюються виробництво, зберігання та утилізація вибухонебезпечних предметів;
- 11) об'єкти життєзабезпечення населення з порушенням умов експлуатації;
- 12) інші об'єкти, що можуть створити загрозу виникнення аварії.

*Зона надзвичайної ситуації* – окрема територія, акваторія, де сталася надзвичайна ситуація.

*Небезпечний чинник* – складова частина небезпечного явища (пожежа, вибух, викидання, загроза викидання небезпечних хімічних, радіоактивних і біологічно небезпечних речовин) або процесу, що характеризується фізичною, хімічною, біологічною чи іншою дією (впливом), перевищенням нормативних показників і створює загрозу життю та/або здоров'ю людини.

*Зона можливого ураження* – окрема територія, акваторія, на якій внаслідок настання надзвичайної ситуації виникає загроза життю або здоров'ю людей та заподіяна шкода майну.

*Постраждали внаслідок надзвичайної ситуації техногенного або природного характеру* – особи, здоров'ю яких заподіяна шкода внаслідок надзвичайної ситуації.

З метою забезпечення здійснення заходів із запобігання виникненню надзвичайних ситуацій в Україні проводяться постійний моніторинг і прогнозування надзвичайних ситуацій.

Моніторинг надзвичайних ситуацій – це система безперервних спостережень, лабораторного та іншого контролю для оцінки стану захисту населення і територій та небезпечних процесів, які можуть призвести до загрози або виникнення надзвичайних ситуацій, а також своєчасне виявлення тенденцій до їх зміни.

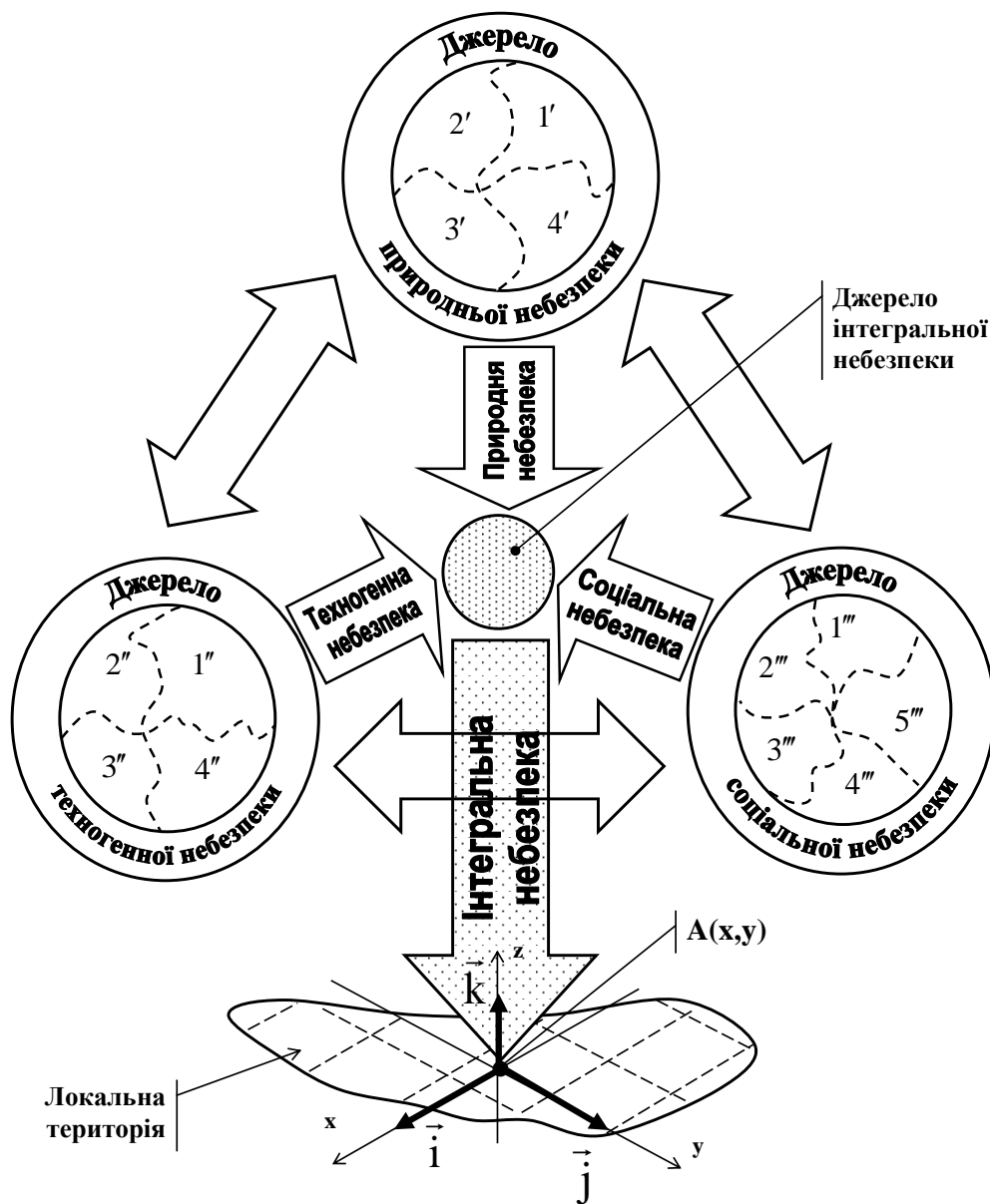


Рисунок 1.2 – Модельне уявлення процесів зародження на локальній території джерел надзвичайних ситуацій різного походження: 1' – атмосфера; 2' – біосфера; 3' – літосфера; 4' – гідросфера; 1'' – аварії на промислових об'єктах і транспорті; 2'' – вибухи; 3'' – пожежі; 4'' – вивільнення інших видів енергії; 1''' – психологічні особливості особи й особливості виховання; 2''' – несприятливе положення особи; 3''' – соціальна несправедливість; 4''' – напруженість у міжгрупових, міжконфесійних і міжнаціональних стосунках; 5''' – негативні соціальні процеси, що призводять до руйнування етичних засад і соціальної стійкості особи, законопослушності.

Таблиця 1.1 – Перелік різного походження джерел НС природного характеру, їх вражаючих факторів, характеру дій та проявів цих факторів

Джерело НС природного характеру	Найменування вражаючого фактора НС природного характеру	Характер дії та прояву вражаючого фактора НС природного характеру
Небезпечні геологічні процеси		
Землетрус	Сейсмічний  Фізичний	Сейсмічний удар. Деформація гірських порід. Вибухова хвиля. Виверження вулкана. Набігання хвиль (цунамі). Гравітаційний зсув гірських порід, снігових мас, льодовиків. Затоплення поверхневими водами. Деформація річкових русел. Електромагнітне поле
Вулканічне виверження	Динамічний  Тепловий (термічний)  Хімічний. Теплофізичний Фізичний	Струс земної поверхні. Деформація земної поверхні. Викид, випадіння продуктів виверження. Рух лави, грязьових і кам'яних потоків. Гравітаційний зсув гірських порід. Пекуча хмара. Лава, тефра, пар, гази Забруднення атмосфери, ґрунтів, гідросфери Грозові розряди
Зсув. Обвал	Динамічний  Гравітаційний	Зміщення (рух) гірських порід. Струс земної поверхні. Динамічний, механічний тиск зміщених мас. Удар
Карст (карстово-суфозійний процес)	Хімічний Гідродинамічний	Розчин гірських порід. Руйнування структури порід. Переміщення (вимивання) частинок породи

	Гравітаційний	Зміщення (обвалення) порід. Деформація земної поверхні
Просадка в лісових ґрунтах	Гравітаційний	Деформація земної поверхні. Деформація ґрунтів
Переробка берегів	Гідродинамічний  Гравітаційний	Удар хвилі. Розмивання (руйнування) ґрунтів. Перенесення (перевідкладення) частинок ґрунту. Зсув (обвал) порід у береговій частині
Небезпечні гідрологічні явища та процеси		
Підтоплення	Гідростатичний  Гідродинамічний  Гідрохімічний	Підвищення рівня ґрунтових вод. Гідродинамічний тиск потоку ґрунтових вод. Забруднення (засолення) ґрунтів. Корозія підземних металевих конструкцій
Руслова ерозія	Гідродинамічний	Гідродинамічний тиск потоку води. Деформація річкового русла
Цунамі. Штормове нагнітання води	Гідродинамічний	Удар хвилі. Гідродинамічний тиск потоку води. Розмивання ґрунтів. Затоплення території. Підпір води в річках
Сель	Динамічний Гравітаційний  Гідродинамічний  Аеродинамічний	Зсув (рух) гірських порід. Удар. Механічний тиск селевої маси  Гідродинамічний тиск селевої маси. Ударна хвиля
Повінь. Паводок. Катастрофічний паводок	Гідродинамічний Гідромеханічний	Потік (теча) води. Забруднення гідросфери, ґрунтів
Затор. Зажори.	Гідродинамічний	Підйом рівня води. Гідродинамічний тиск води

Лавина снігова	Гравітаційний Динамічний  Аеродинамічний	Зсув (рух) снігових мас. Удар. Тиск зміщених мас снігу Ударна повітряна хвиля. Звуковий удар
Небезпечні метеорологічні явища та процеси		
Сильний вітер. Шторм. Шквал. Ураган	Аеродинамічний	Вітровий потік. Вітрове навантаження. Аеродинамічний тиск. Вібрація
Смерч. Вихор	Аеродинамічний	Сильне розрядження повітря. Вихровий потік, який піднімається у вись. Вітрове навантаження
Пилова буря	Аеродинамічний	Видування та засипання верхнього покриву ґрунту, посівів
Сильні опади:		
тривалий дощ (злива)	Гідродинамічний	Потік (течія) води. Затоплення території
сильний снігопад	Гідродинамічний	Снігове навантаження. Снігові замети
сильна хуртовина	Гідродинамічний	Снігове навантаження. Вітрове навантаження. Снігові замети
ожеледь	Гравітаційний Динамічний	Навантаження від ожеледі. Вібрація
град	Динамічний	Удар
Туман	Теплофізичний	Зниження видимості (помутніння повітря)
Заморозок	Тепловий	Охолодження ґрунту, повітря
Засуха	Тепловий	Нагрівання ґрунту, повітря
Суховій	Аеродинамічний. Тепловий	Висушування ґрунту
Гроза	Електрофізичний	Електричні розряди
Пожежа ландшафтна, степова, лісова	Теплофізичний.    Хімічний	Полум'я. Нагрівання тепловим потоком. Тепловий удар. Помутніння повітря. Небезпечні дими. Забруднення атмосфери, ґрунтів, гідросфери

Таблиця 1.2 – Перелік різного походження джерел НС техногенного характеру, їх вражаючих факторів, характеру дій та проявів цих факторів

Джерело НС техногенного характеру	Найменування вражаючого фактора НС техногенного характеру
Повітряна ударна хвиля	Надмірний тиск у фронті ударної хвилі. Тривалість фази стискання. Імпульс фази стискання
Хвиля стискання у ґрунті	Максимальний тиск. Термін дії. Час зростання тиску до максимального значення
Сейсмічно вибухова хвиля	Швидкість поширення хвилі. Максимальне значення масової швидкості ґрунту. Час зростання напруження у хвилі до максимуму
Хвиля прориву гідротехнічних споруд	Швидкість хвилі прориву. Глибина хвилі прориву. Температура води. Термін існування хвилі прориву
Уламки	Маса уламку. Швидкість розльоту уламків
Екстремальний нагрів середовища	Температура середовища. Коефіцієнт тепловіддачі. Час дії джерела екстремальних температур
Теплове випромінювання	Енергія теплового випромінювання. Потужність теплового випромінювання. Час дії джерела теплового випромінювання
Іонізуюче випромінювання	Активність радіонукліда у джерелі. Щільність радіоактивного забруднення місцевості. Концентрація радіоактивного забруднення. Концентрація радіонуклідів
Токсична дія	Концентрація небезпечних хімічних речовин у середовищі. Щільність хімічного забруднення місцевості та об'єктів

Спостереження, лабораторний та інший контроль включають збирання, опрацювання і передавання інформації про стан навколишнього природного середовища, забруднення продуктів харчування, продовольчої сировини, фуражу, води радіоактивними та хімічними речовинами, зараження збудниками інфекційних хвороб та іншими небезпечними біологічними агентами.

Для проведення моніторингу і прогнозування надзвичайних ситуацій в Україні створюється та функціонує система моніторингу і прогнозування надзвичайних ситуацій.

Порядок функціонування системи моніторингу і прогнозування надзвичайних ситуацій, проведення моніторингу і прогнозування надзвичайних ситуацій, перелік установ та організацій, які належать до суб'єктів моніторингу, спостереження, лабораторного контролю і прогнозування надзвичайних ситуацій, визначаються Кабінетом Міністрів України.

Суб'єкти моніторингу, спостереження, лабораторного контролю та прогнозування надзвичайних ситуацій на регіональному, місцевому та об'єктовому рівні визначаються Радою міністрів Автономної Республіки Крим, відповідними місцевими державними адміністраціями, органами місцевого самоврядування, суб'єктами господарювання.

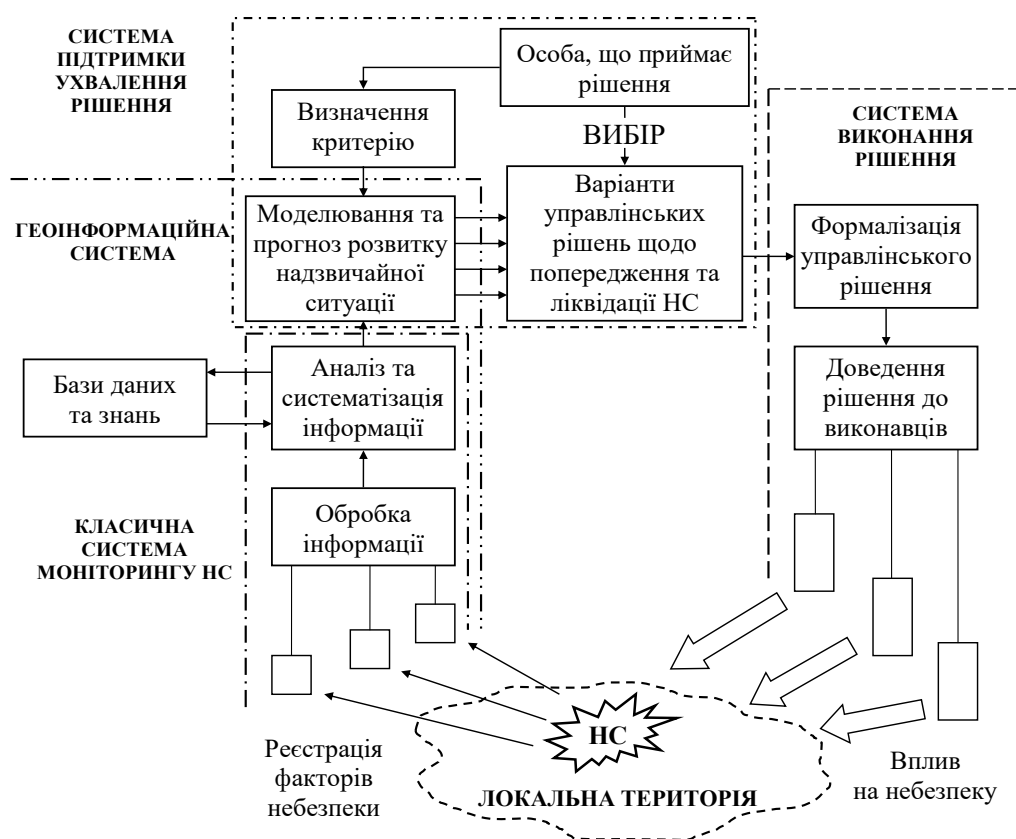


Рисунок 1.3 – Схема структури моніторингу надзвичайних ситуацій

Стан стабільності функціонування локальної території в умовах прояву НС природного, техногенного та соціального характеру і функціонування системи безпеки –  $F_{CB}$  – можна записати у вигляді системи рівнянь, базуючись на основних постулатах теорії катастроф та синергетики:

$$\begin{cases} K_{НС}^{Прир.} = f_{НС}^{Прир.}(F_{Прир.}, F_{Техн.}, F_{Соц.}, F_{Воен.}, F_{СМНС}^{Прир.}), \\ K_{НС}^{Техн.} = f_{НС}^{Техн.}(F_{Прир.}, F_{Техн.}, F_{Соц.}, F_{Воен.}, F_{СМНС}^{Техн.}), \\ K_{НС}^{Соц.} = f_{НС}^{Соц.}(F_{Прир.}, F_{Техн.}, F_{Соц.}, F_{Воен.}, F_{СМНС}^{Соц.}), \end{cases} \quad (1.1)$$



де  $K_{НС}^{Прир.}$ ,  $K_{НС}^{Техн.}$ ,  $K_{НС}^{Соц.}$  – кількісні показники виникнення НС природного, техногенного та соціального характеру;  $f_{НС}^{Прир.}$ ,  $f_{НС}^{Техн.}$ ,  $f_{НС}^{Соц.}$  – функціонали, які визначаються властивостями локальної території до прояву НС природного, техногенного та соціального характеру;  $F_{Прир.}$ ,  $F_{Техн.}$ ,  $F_{Соц.}$  – природні, техногенні та соціальні джерела НС;  $F_{СМНС}^{Прир.}$ ,  $F_{СМНС}^{Техн.}$ ,  $F_{СМНС}^{Соц.}$  – функції системи моніторингу в умовах прояву НС природного, техногенного та соціального характеру.

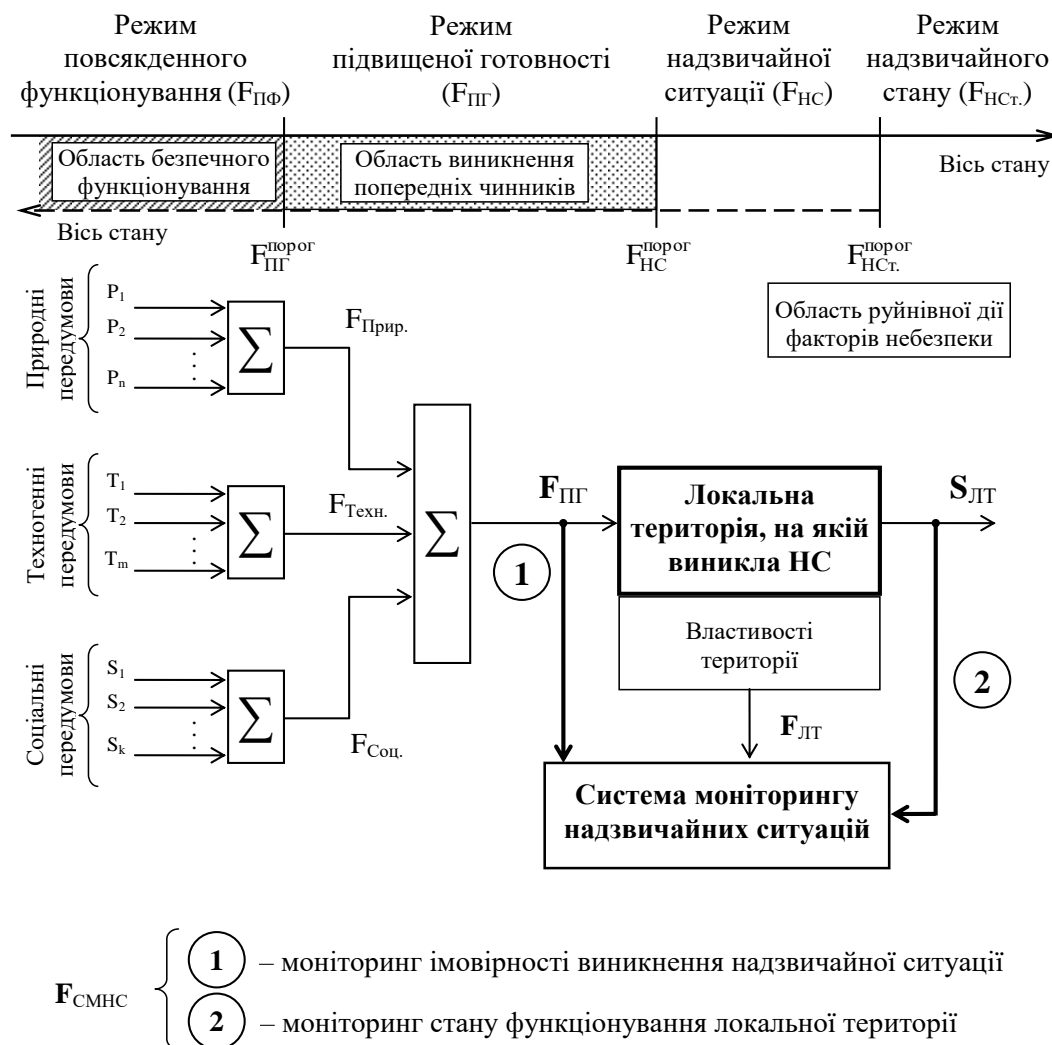


Рисунок 1.4 – Умови функціонування комплексної системи моніторингу надзвичайних ситуацій на локальній території:  $P_n$ ,  $T_m$ ,  $S_k$  – природні, техногенні, соціальні передумови небезпеки;  $F_{Прир.}$ ,  $F_{Техн.}$ ,  $F_{Соц.}$  – природні, техногенні, соціальні чинники надзвичайної ситуації;  $F_{НССт.}$  – властивості надзвичайного стану;  $F_{ЛТ}$  – властивості локальної території;  $S_{ЛТ}$  – стан небезпеки локальної території;  $F_{СМНС}$  – функції системи моніторингу надзвичайних ситуацій

Таблиця 1.3 – Номенклатура параметрів надзвичайних ситуацій природного характеру, які повинна контролювати система моніторингу

Надзвичайна ситуація	Об'єкт моніторингу	Параметри, що контролюються	Способи контролю (фізичні принципи)	Спектральний діапазон роботи засобів спостереження (оцінювання)	Примітка
Небезпечні геофізичні явища:					
землетрус	Сейсмічно небезпечні райони	1. Координати та розміри зони НС. 2. Величина вертикального зміщення. 3. Швидкість тектонічного руху рельєфу. 4. Наявність та характер руйнувань.	1. Візуальні спостереження (ВС). 2. Диференціальна радіоінтерферометрія. 3. Оптична лазерна дальнометрія. 4. Відео, фото та телевізійна зйомка. 5. Радіолокаційна (РЛ) зйомка.	1. Видимий діапазон (ВД). 2. Сантиметровий діапазон (СД). 3. Інфрачервоний діапазон (ІЧД)	Диференціальна радіоінтерферометрія та оптична лазерна дальнометрія зі штучних супутників Землі (ШСЗ) можуть використовуватись для прогнозування землетрусів.
виверження вулканів	Зони (райони) вулканічної діяльності	1. Координати зони НС. 2. Розміри, напрямки і швидкість руху потоків лави.	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. Інфрачервона (ІЧ) та понадвисокочастот	ВД; СД; ІЧД	Просторова роздільна здатність під час зйомки від 100 м до 1 км. Контактні методи

		3. Висота, розміри та напрямок руху викидів вулканічної діяльності.	на (ПВЧ) радіометрія. 4. Спектрометрія (лазерна). 5. Контактні методи.		використовуються для контролю домішок.
		4. Наявність і концентрація отруйних домішок у приземному шарі атмосфери.			
Небезпечні геологічні явища:					
зсуви	Гірські райони, береги річок	1. Координати, розміри, напрямок і швидкість переміщення зсувів. 2. Стрімкість рельєфу. 3. Структура поверхні Землі в зоні НС.	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка.	ВД; СД; ІЧД	
селі	Гірські, передгірні, селе небезпечні райони	1. Координати, розміри, напрямок і швидкість переміщення селевого потоку. 2. Стрімкість рельєфу. 3. Структура поверхні	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка.	ВД; СД; ІЧД	

		Землі в зоні НС.			
обвали (провали)	Гірські райони, береги річок	1. Координати та розміри зони обвалів (провалів). 2. Стрімкість рельєфу, висота підйому води в річках.	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка.	ВД; СД	
лавини	Гірські лавинонебезпечні райони	1. Координати, розміри, напрямок і швидкість руху лавин.	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка.	ВД; СД	
Небезпечні метеорологічні явища:					
тайфуни	Зони впливу тайфунів. Хмарні структури.	1. Координати та розміри зони НС. 2. Інтенсивність опадів. 3. Швидкість і напрямок переміщення тайфуну. 4. Швидкості вітру на різних висотах. 5. Характер руйнувань	1. ВН. 2. Відеозйомка. 3. ІЧ і ПВЧ радіометрія. 4. РЛ зйомка. 5. Контактні методи	ВД; СД; ІЧД; міліметровий діапазон	
смерчі	Зони проходження смерчу.	1. Координати зони НС. 2. Швидкості вітру.	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка.	ВД; СД; дециметровий та	

	Хмарні структури. Вихори.	3. Характеру і розміри руйнувань в міських і сільськогосподарських районах		метровий діапазони	
пилові та піщані бурі, снігові бурані	Хмарні структури. Стан поверхні Землі.	1. Координати та розміри зони НС. 2. Розмір і форма хмар. 3. Швидкість і напрямок вітру. 4. Температура і тиск. 5. Характер руйнувань	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. ІЧ і ПВЧ радіометрія. 4. РЛ зйомка	ВД; СД; ІЧД; міліметровий діапазон	
цунамі	Прибережні акваторії Чорного та Азовських морів	1. Координати, площа і характер руйнувань. 2. Висота і довжина хвиль. 3. Напрямок та швидкість переміщення хвиль. 4. Глибина проникнення приливної хвилі	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка	ВД; СД	
Гідрологічні небезпечні явища (підйом води, повені та затоплення)	Заплави річок, водосховища, дамби, греблі, морські прибережні	1. Координати зони НС. 2. Висота підйому води, площа водної поверхні.	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. ПВЧ радіометрія. 4. РЛ зйомка	ВД; СД; міліметровий діапазон	

	зони	3. Площа затоплення. 4. Інтенсивність опадів. 5. Висота снігового покриву			
Природні пожежі	Ліси, степи, торфовища, вугільні й нафтові родовища	1. Координати зони НС. 2. Розмір димового шлейфу, площа вогневої зони, температура, площа гарі. 3. Напрямок та швидкість поширення зони горіння. 4. Параметри передпожежної обстановки (температура і вологість)	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. ІЧ радіометрія. 4. ПВЧ радіометрія	ВД; СД; ІЧД; дециметровий і міліметровий діапазони	Параметри передпожежної обстановки контролюються з ШСЗ (ІЧ і НВЧ радіометрія)

Таблиця 1.4 – Номенклатура параметрів надзвичайних ситуацій техногенного характеру, які повинна контролювати система моніторингу

Надзвичайна ситуація	Об'єкт моніторингу	Параметри, що контролюються	Способи контролю (фізичні принципи)	Спектральний діапазон роботи засобів спостереження (оцінювання)	Примітка
Аварії та катастрофи на залізницях	Транспортні магістралі, мости, тунелі, рухомі засоби	1. Координати та характер руйнувань транспортних магістралей. 2. Площа забруднень від вантажів, що транспортуються	1. Візуальні спостереження (ВС). 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка	1. Видимий діапазон (ВД). 2. Сантиметровий діапазон (СД). 3. Інфрачервоний діапазон (ІЧД); сантиметровий	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м
Аварії та катастрофи морського річкового транспорту	Райони морського судноплавства, порти	1. Координати зони лиха. 2. Площа та напрямок забруднень руху	1. ВС. 2. Радіоприйом аварійних сигналів. 3. РЛ зйомка. 4. ПВЧ радіометрія	ВД. Діапазон стандартних сигналів SOS. СД; міліметровий діапазон	

Аварії та катастрофи авіаційному транспорту	Райони авіасполучень, аеродроми	1. Координати району катастрофи, характер руйнувань (пожеж), площа забруднень	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. ІЧ зйомка. 4. РЛ зйомка	ВД; СД; ІЧД	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м
Аварії на дорогах	Автодороги та прилеглі території	1. Координати зони НС. 2. Характер і площа руйнувань. 3. Площа забруднень від вантажів, що транспортуються	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. РЛ зйомка. 4. ПВЧ радіометрія	ВД; СД; міліметровий діапазон	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м
Аварії на трубопроводах і промислах	Об'єкти аварій	1. Координати та площа НС. 2. Характер, розміри і площа розливів нафти та інших забруднюючих продуктів	1. Відеозйомка з високою роздільною здатністю. 2. РЛ зйомка. 3. ПВЧ радіометрія	ВД; СД; ІЧД; міліметровий діапазон	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м
Пожежі на промислових підприємствах,	Об'єкти аварій	1. Координати та площа димового шлейфу, вогневої	1. ВС. 2. Відеозйомка. 3. ІЧ і ПВЧ	ВД; СД; ІЧД; міліметровий діапазон	Просторова роздільна здатність у разі



транспорті, шахтах і житлових будівлях		зони. 2. Хімічний склад димів	радіометрія. 4. ІК і лазерна спектрометрія		зйомки 2–5 м
Аварії на хімічно небезпечних об'єктах	Аварійні об'єкти: промислові підприємства, водойми поблизу них, атмосфера в районі аварії	1. Координати та площа зони НС. 2. Напрямок, температура та швидкість руху димового та (або) газового шлейфу. 3. Хімічний склад повітряного середовища в зоні НС. 4. Кількість хмар та інтенсивність опадів у зоні НС. 5. Напрямок та швидкість вітру	1. ВН. 2. Відеозйомка. 3. ІЧ і ПВЧ радіометрія. 4. ІЧ і лазерна спектрометрія. 5. Аналіз газів. 6. Контактні методи	ВД; СД; ІЧД; міліметровий діапазон	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м

Аварії на радіаційно небезпечних об'єктах	Атомні електростанції та інші радіаційно небезпечні об'єкти	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Координати та площа зони НС.</li> <li>2. Наявність і характер руйнувань, пожеж і радіоактивного зараження.</li> <li>3. Кількість хмар та інтенсивність опадів.</li> <li>4. Інтенсивність радіоактивного випромінювання.</li> <li>5. Напрямок та швидкість вітру</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ІЧ і НВЧ радіометрія.</li> <li>2. РЛ зйомка.</li> <li>3. Контактні методи.</li> <li>4. Відеозйомка.</li> <li>5. Відео і ІЧ спектрометрія.</li> <li>6. Дозиметричний контроль.</li> <li>7. Реєстрація іонізуючих випромінювань</li> </ol>	ВД; СД; ІЧД; міліметровий діапазон; діапазони радіоактивних випромінювань	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м
Руйнування будівель та промислових об'єктів	Райони аварій	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Координати зони НС.</li> <li>2. Площа, характер і ступінь руйнувань</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Відеозйомка</li> <li>2. РЛ зйомка</li> </ol>	ВД; СД; ІЧД	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м
Аварії у електроенергетичних системах	ТЕЦ, ГРЕС, ГЕС, ЛЕП тощо	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Координати зони НС.</li> <li>2. Характер і ступінь руйнувань, площа зони.</li> <li>3. Розміри димових шлейфів і наявність теплових аномалій</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Відеозйомка.</li> <li>2. ІЧ і ПВЧ радіометрія.</li> <li>3. РЛ зйомка</li> </ol>	ВД; СД; ІЧД; міліметровий і метровий діапазони	Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м

<p>Аварії в комунальних системах життєзабезпечення</p>	<p>Водозабори, очисні споруди тощо</p>	<p>1. Координати зони НС. 2. Характер руйнувань. 3. Хімічний склад і концентрація аерозолів у хмарах, наявність і амплітуди теплових аномалій</p>	<p>1. Відео радіометрія. 2. ІЧ і ПВЧ радіометрія. 3. РЛ зйомка. 4. Лазерна спектрометрія. 5. Контактні методи</p>	<p>ВД; СД; ІЧД; діапазон ультрафіолетового випромінювання</p>	<p>Просторова роздільна здатність у разі зйомки 2–5 м</p>
<p>Гідродинамічні аварії</p>	<p>Водосховища, дамби, греблі</p>	<p>1. Координати зони НС. 2. Висота підйому води, площа затоплення</p>	<p>1. Відеозйомка. 2. РЛ зйомка. 3. ПВЧ радіометрія</p>	<p>ВД; СД; ІЧД; міліметровий діапазон</p>	

*Сертифікація засобів цивільного захисту* організується і здійснюється з метою підтвердження відповідності продукції технічним регламентам.

Порядок та правила сертифікації засобів цивільного захисту визначаються законом.

Усі види аварійно-рятувальної, протипожежної та спеціальної техніки і обладнання, що застосовуються для запобігання пожежам та їх гасіння, ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій, повинні мати *сертифікат відповідності*.

## **1.2 Цілі дослідження. Умови ефективності планування експерименту**

### **1.2.1 Завдання і види експериментів**

*Наука* – це сфера дослідницької діяльності, що спрямована на виробництво нових знань про природу, суспільство і процеси мислення.

*Функція науки* – виробництво і використання систематизованих, об'єктивних знань про дійсність. Тобто пізнання об'єктивного світу, щоб його вивчати з метою можливого вдосконалення.

*Об'єктом науки* є пов'язані між собою форми руху матерії та особливості їх відображення у свідомості людей. На його основі визначають існування багатьох галузей знань, які об'єднуються у три великі блоки наук:

- логіко-математичні;
- природничі (фізика, хімія, біологія та ін.);
- суспільно-гуманітарні (економічні, історичні, філологічні та ін.).

*Формою здійснення розвитку науки* є наукове дослідження, тобто цілеспрямоване вивчення за допомогою наукових методів явищ і процесів, аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчення взаємодії між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних для науки і практики рішень.

Наукове дослідження є основною формою здійснення і розвитку науки.

*Наукове дослідження* – це особлива форма процесу пізнання, систематичне, цілеспрямоване вивчення об'єктів, в якому використовуються засоби і методи науки і яке завершується формуванням знання про досліджуваний об'єкт.

*Наукове дослідження* – це складний і багатогранний процес, у якому поєднуються організаційні, технічні, економічні, правові та психологічні аспекти. Дослідження різняться за цільовим призначенням, джерелами фінансування і термінами проведення, вони потребують різного технічного, програмного, інформаційного та методичного забезпечення. Однак усім їм притаманні спільні методологічні підходи й універсальні послідовні процедури.

*У процесі наукового дослідження виділяють такі складові елементи:*

- виникнення ідеї, формулювання теми;
- формування мети та завдань дослідження;
- висування гіпотези, теоретичні дослідження;

- проведення експерименту, узагальнення наукових фактів і результатів;
- аналіз та оформлення наукових досліджень;
- впровадження та визначення ефективності наукових досліджень.

*Наукове дослідження має етапи:*

- організаційний;
- дослідний;
- узагальнення, апробація, реалізація результатів дослідження.

1. *Організаційний етап.* Організація наукового дослідження передбачає вивчення стану об'єкта дослідження, конкретизація місця наукової теми у науковому дослідженні; визначення об'єкта дослідження.

2. *Дослідний етап* включає в себе спостереження, обстеження, вибираються критерії оцінки, здійснюється збирання і групування інформації за допомогою сучасних інформаційних технологій.

3. *Етап узагальнення, апробації та реалізації результатів дослідження* складається з узагальнення результатів дослідження; апробації; реалізації результатів дослідження.

4. *Реалізація результатів дослідження* здійснюється дослідним упровадженням їх у практику за участю замовника теми. При цьому виявляються недоробки, які потім усуваються дослідником, коригується звіт про НДР, дисертація, оприлюднюються кінцеві результати дослідження. Реалізація результатів дослідження завершується складанням акта впровадження за участю представників дослідника і замовника, а також здійсненням авторського нагляду за виробничим впровадженням результатів науково-технічних досліджень, захист дисертації.

*Найважливішою складовою частиною наукових досліджень є експеримент, основою якого є науково поставлений дослід із точно врахованими і керованими умовами.*

*Основною метою експерименту є виявлення властивостей досліджуваних об'єктів, перевірка справедливості гіпотез і на цій основі широке та глибоке вивчення теми наукового дослідження.*

В наш час *розвиток науки* пов'язаний з поділом і кооперацією наукової праці, створенням наукових установ, експериментального і лабораторного обладнання.

*Експеримент у ході розвитку науки* виступав потужним засобом дослідження явищ природи і технічних об'єктів.

*Але лише порівняно недавно експеримент став предметом дослідження.*

Пильна увага вчених та інженерів до того, як краще й ефективніше проводити експеримент, виникла не випадково, а є наслідком досягнутого рівня та масштабу експериментальних робіт на сучасному етапі розвитку науки і техніки.

Цей етап із розглянутої точки зору характеризується:

- зростанням загального числа проведених експериментальних робіт;

- збільшенням кількості фахівців, що займаються експериментальною діяльністю;
- суттєвим ускладненням об'єктів дослідження і використовуваного експериментального обладнання;
- тенденцією до подовження середнього часу експериментування і подорожчання досліджень;
- початком процесом впровадження засобів і систем автоматизації експерименту.

Відомо, що *нова наука* може виникнути, якщо існує об'єктивна необхідність її появи і є предмет нової науки, що являє собою загальнонауковий інтерес.

Сказане повною мірою відноситься і до *теорії планування експерименту*.  
*Предмет дослідження цього наукового напрямку – експеримент.*

Однак особливості планування, постановки експерименту розглядаються і у фізиці, і в хімії, і у прикладних науках.

Для того, щоб експеримент став предметом дослідження окремого наукового напрямку, необхідно, щоб він характеризувався деякими рисами, спільними для будь-якого експерименту, незалежно від того, в якій конкретній галузі знань експеримент проводиться.

Такими загальними рисами експерименту є необхідність:

1) контролювати будь-який експеримент, тобто виключати вплив зовнішніх змінних, не прийнятих дослідником з тих чи інших причин до розгляду;

2) визначати точність вимірювальних приладів і одержуваних даних;

3) зменшувати до розумних меж число змінних в експерименті;

4) складати план проведення експерименту, найкращий з тієї чи іншої точки зору;

5) перевіряти правильність отриманих результатів і їх точність;

б) обирати спосіб обробки експериментальних даних і форму представлення результатів;

7) аналізувати отримані результати і давати їх інтерпретацію в термінах тієї області, де експеримент проводиться.

Як і в будь-якому сформованому науковому напрямі, в теорії планування експерименту виробилася певна система основоположних понять і термінів. Наведемо найбільш важливі з них.

*Об'єкт дослідження є носієм деяких невідомих що підлягають вивченню властивостей і якостей.*

*Планування експерименту – це процедура вибору числа та умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для вирішення поставленого завдання з необхідною точністю.*

*Принципи, покладені в основу теорії планування експерименту, спрямовані на підвищення ефективності експериментування, тобто:*

- прагнення до мінімізації загального числа дослідів;

- одночасне варіювання усіма змінними, які визначають процес, за спеціальними правилами – алгоритмами;
- використання математичного апарату, що формалізує багато дій експериментатора;
- вибір чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтоване рішення після кожної серії експериментів.

Завдання, для вирішення яких може використовуватися планування експерименту, є надзвичайно різноманітними.

Пошук оптимальних умов, побудова інтерполяційних формул, вибір істотних факторів, оцінка та уточнення констант теоретичних моделей, вибір найбільш прийнятних з деякої безлічі гіпотез про механізм явищ, дослідження діаграм-властивостей – ось *приклади завдань, під час вирішення яких застосовується планування експерименту.*

*Можна сказати, що там, де має місце експеримент, є і наука про його проведення – планування експерименту.*

*Основною метою експерименту є виявлення властивостей досліджуваних об'єктів, перевірка справедливості гіпотез і на цій основі – широке та глибоке вивчення теми наукового дослідження.*

*Постановка і організація експерименту визначають його призначення.*

*Експерименти, які проводяться в різних галузях науки, є хімічними, біологічними, фізичними, психологічними, соціальними і т.д.*

*Вони різняться:*

За способом формування умов:

- природні;
- штучні.

За цілями дослідження:

- перетворювальні;
- констатуючі;
- контролюючі;
- пошукові;
- вирішальні.

За організацією проведення:

- лабораторні;
- натурні;
- польові;
- виробничі тощо.

За структурою досліджуваних об'єктів і явищ:

- прості;
- складні.

За характером зовнішніх впливів на об'єкт дослідження:

- речові;
- енергетичні;
- інформаційні.

За характером взаємодії експериментального дослідження з об'єктом дослідження:

- звичайний;
- модельний.

За типом моделей, досліджуваних в експерименті:

- матеріал;
- уявний.

За контролем величин:

- пасивний;
- активний.

За кількістю варійованих факторів:

- однофакторний;
- багатофакторний.

За характером досліджуваних об'єктів або явищ:

- технологічні;
- соціометричні.

Звичайно, для класифікації можуть бути використані й інші ознаки.

*Для проведення експерименту будь-якого типу необхідно:*

- розробити гіпотезу, що підлягає перевірці;
- створити програми експериментальних робіт;
- визначити способи і прийоми втручання в об'єкт дослідження;
- забезпечити умови для здійснення процедури експериментальних робіт;
- забезпечити умови для здійснення процедури експериментальних робіт;
- розробити шляхи та прийоми фіксації ходу і результатів експерименту (прилади, установки, моделі тощо);
- забезпечити експеримент необхідним обслуговуючим персоналом.

### **1.2.2 Стратегія і тактика експерименту**

Особливе значення для проведення експерименту має правильно розроблена методика експерименту.

*Методика* – це сукупність розумових і фізичних операцій, розміщених у певній послідовності, відповідно до якої досягається мета дослідження.

*При розробці методики проведення експерименту необхідно передбачати:*

- проведення попереднього цілеспрямованого спостереження над досліджуваним об'єктом або явищем з метою визначення вихідних даних (гіпотез, вибору факторів, що підлягають варіюванню);
- створення умов, в яких є можливим експериментування (підбір об'єктів для експериментального впливу, усунення впливу випадкових факторів);
- визначення меж вимірювань;



- систематичне спостереження за ходом розвитку досліджуваного явища і точні описи фактів, проведення систематичної реєстрації вимірів і оцінок фактів різними засобами і способами;
- створення ситуацій, що повторюються, зміна характеру умов і перехресного впливу, створення ускладнених ситуацій з метою підтвердження або спростування раніше отриманих даних;
- перехід від емпіричного вивчення до логічних узагальнень, до аналізу і теоретичної обробки отриманого фактичного матеріалу.

*Перед кожним експериментом складається його план (програма), який включає:*

- мету і завдання експерименту;
- вибір факторів, що підлягають варіюванню, обґрунтування обсягу експерименту, числа дослідів;
- порядок реалізації дослідів, визначення послідовності зміни факторів;
- вибір кроку зміни факторів, завдання інтервалів між майбутніми експериментальними точками;
- обґрунтування способів обробки та аналізу результатів експерименту.

Застосування математичної теорії експерименту дозволяє вже у процесі плануванні певним чином оптимізувати обсяг експериментальних досліджень і підвищити їх точність.

*Важливим етапом підготовки треба вибрати варійовані фактори, тобто встановити основні та другорядні характеристики, що впливають на досліджуваний процес, проаналізувати розрахункові (теоретичні) схеми процесу.*

На основі цього аналізу всі фактори класифікуються і складається з них регресний за важливістю для даного експерименту ряд.

Правильний вибір основних і другорядних факторів відіграє важливу роль в ефективності експерименту, оскільки експеримент і зводиться до знаходження залежностей між цими чинниками.

Іноді буває важко відразу виявити роль основних і другорядних факторів. У таких випадках необхідно виконувати невеликий за обсягом попередній пошуковий дослід.

*Необхідно також обґрунтувати набір засобів вимірювань (приладів) іншого обладнання, машин та апаратів.*

У зв'язку з цим експериментатор повинен бути добре обізнаний щодо роботи з вимірювальною апаратурою.

В першу чергу слід використовувати стандартні, які серійно випускаються машини і прилади, робота на яких регламентується інструкціями, державними стандартами та іншими офіційними документами.

В окремих випадках виникає потреба у створенні унікальних приладів, установок, стендів, машин для розробки теми.

При цьому розробка та конструювання приладів та інших засобів повинні бути ретельно обґрунтовані теоретичними розрахунками та практичними міркуваннями про можливість виготовлення устаткування.

Під час створення нових приладів бажано використовувати готові вузли приладів, що випускаються або реконструювати існуючі прилади.

Відповідальний момент – встановлення точності вимірювань і похибок.

*У методиці докладно розробляється* процес проведення експерименту, складається послідовність (черговість) проведення операцій вимірювань і спостережень, детально описується кожна операція, а окремо, з урахуванням вибраних засобів для проведення експерименту, обґрунтовуються методи контролю якості операцій, що забезпечують за мінімальної (раніше встановленої) кількості вимірів високу надійність і задану точність.

Розробляються форми журналів для запису результатів спостережень і вимірювань.

Важливим розділом методики є вибір методів обробки і аналізу експериментальних даних.

Обробка даних зводиться до систематизації всіх цифр, класифікації, аналізу.

*Результати експериментів повинні бути зведені в легкі для читання форми запису* – таблиці, графіки, формули, номограми, що дозволяють швидко і доброякісно зіставляти отримане і проаналізувати результати.

*Всі змінні повинні бути оцінені в єдиній системі одиниць фізичних величин.*

*Результати експериментів повинні відповідати трьом статистичним вимогам:*

1) вимога ефективності оцінок, тобто мінімальність дисперсії відхилення щодо невідомого параметра;

2) вимога спроможності оцінок, тобто за збільшення числа спостережень оцінка параметра повинна прагнути до його дійсного значення;

3) вимога незміщеності оцінок – відсутність систематичних помилок у процесі обчислення параметрів.

*Найважливішою проблемою у процесі проведення та обробки експерименту є сумісність цих трьох вимог.*

При розробці плану-програми експерименту завжди необхідно прагнути до його спрощення, наочності без втрати точності та достовірності.

Це досягається попереднім аналізом та співставленням результатів вимірювань одного і того ж параметра різними технічними засобами, а також методів обробки отриманих результатів.

В умовах інтенсифікації проведення наукових досліджень *найважливіше місце у процесі підготовки експерименту повинно відводитися його автоматизації* із введенням експериментальних даних безпосередньо з ЕОМ, з розрахунком результуючих показників, з автоматичним управлінням ходом експерименту (послідовність і повторюваність вимірів, визначення середніх значень, побудова тощо).

### 1.2.3 Умови ефективності планування експерименту

Для докладного вивчення об'єкта дослідження необхідна його докладна модель.

Моделлю, яка найбільше підходить, є «чорний ящик», введений в кібернетиці з метою вивчення складності.

Його побудова базується на принципі: оптимальне управління є можливим за умов неповної інформації. Ясне формулювання цього факту є найважливішим досягненням кібернетики.

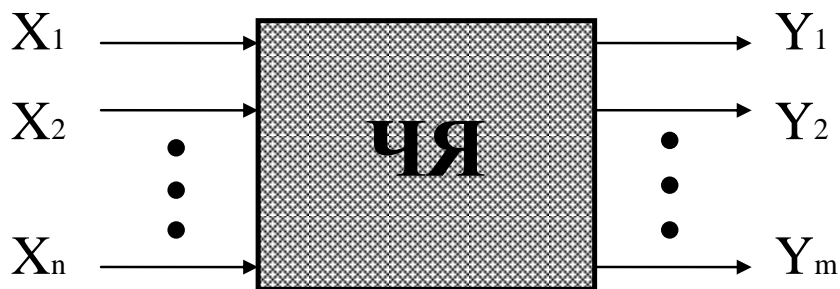


Рисунок 1.5 – Схема «чорного ящика»:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – входи;  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  – виходи.

Об'єкту дослідження відповідає прямокутник.

Виходи, що позначаються стрілками, що виходять з об'єкту, відповідають параметрам оптимізації.

Стрілки, що входять в об'єкт, – входи – відповідають можливим способам впливу на об'єкт.

У термінології планування експерименту входи називаються *факторами*.

*Фактором* називається вимірна змінна величина, що набуває в деякий момент деякого певного значення і є відповідною одному з можливих способів впливу на об'єкт дослідження.

*Число можливих впливів на об'єкт є принципово необмеженим.*

*Щоб полегшити вибір, зручно розбити їх на дві групи.*

*До першої групи належать впливи (фактори), що визначають сам об'єкт, а до другої – фактори, що визначають його стан.*

Кожен фактор має область визначення.

У плануванні експерименту розглядаються тільки дискретні області визначення факторів.

Крім того, ці області є завжди обмеженими.

Обмеження можуть бути принциповими і технічними.

Прикладом принципового обмеження може служити абсолютний нуль температури у звичайних термодинамічних системах.

Якщо в ході оптимізації фактор набув значення, близького до принципового обмеження, то можливості об'єкта вичерпані.

Прикладом технічного обмеження може служити температура плавлення матеріалу апарата.

У процесі нагрівання до цієї температури апарат просто розплавиться.

Якщо в ході оптимізації значення фактора наблизилося до технічної границі, а бажане значення параметра оптимізації ще не досягнуто, то може бути поставлено нове завдання: створити, наприклад, більш тугоплавкий матеріал для апарату.

Розв'язок цієї нової задачі дозволить продовжити оптимізацію.

*Слід указати на дві вимоги, які висуваються до сукупності факторів.*

Це – вимоги відсутності кореляції між будь-якими двома факторами і сумісності факторів.

Відсутність чинників, які корелюють, означає можливість встановлення будь-якого чинника на будь-який рівень, незалежно від рівнів інших факторів.

Якщо ці умови не виконуються, то не можна планувати експеримент.

Крім того, немає ніякої необхідності включати в експеримент фактори, які корелюють, оскільки один з них не містить ніякої інформації.

Вимога відсутності кореляції не означає, що між факторами немає ніякого зв'язку.

Достатньо того, щоб цей зв'язок не був лінійним.

Ця вимога може накладати обмеження на області визначення факторів.

Інші обмеження на область накладаються вимогою сумісності факторів.

Несумісність факторів виникає в тому випадку, якщо деякі комбінації їх значень, кожне з яких лежить всередині області визначення, не можуть бути здійснені.

Якщо в ці комбінації входять значення факторів, близькі до границь областей їх визначення, то усунення несумісності здійснюється просто скороченням областей.

Складніше йде справа тоді, коли заборонені значення лежать всередині областей.

Тоді області виявляються багатозв'язними. Це викликає труднощі, подолання яких у деяких випадках призводить до розчленування завдання на частини.

*Всі фактори можна розділити на якісні та кількісні.*

Часто у вигляді якісного чинника використовують різні взаємовиключні реагенти.

Слід мати на увазі, що за наявності якісного фактора можлива наступна альтернатива: або в одному експерименті варіювати цей чинник на всіх цікавих рівнях, або ставити незалежні експерименти (з числом факторів на одиницю менше) для кожного рівня цього чинника і потім порівнювати отримані оптимуми.

Цей вибір є неоднозначним.

Бажано ставити одне дослідження, але це може в даному випадку призвести до великих труднощів.

У кожному конкретному випадку вирішенням такого питання повинен займатися фахівець із планування.

Відбір факторів починають після того, як у розпорядженні експериментатора виявиться їх повний список.

У процесі складання такого списку слід перерахувати всі можливі фактори (що задовольняють загальним вимогам), яким би великим не було їх число.

На жаль, занадто часто експериментатори бояться збільшувати список факторів, щоб не ускладнювати завдання. Це призводить до малоефективних або навіть безглузвих досліджень і є просто наслідком незнання методів відбору факторів.

Таким чином, *головною турботою під час складання списку факторів повинна бути його повнота.*

*Краще включити кілька десятків несуттєвих змінних, ніж пропустити одну істотну.*

Відбір факторів можна здійснювати експериментально.

Але оскільки навіть невелике скорочення числа чинників призводить до значної економії дослідів, виникає питання про використання апріорної інформації для їх попереднього відсівання.

### **1.3 Методологічні концепції планування експерименту**

#### **1.3.1 Основні типи експериментів**

*Теорія експерименту* вивчає методи планування та аналізу експериментальних досліджень і *дозволяє вирішувати різноманітні проблеми*, що виникають перед дослідниками: в одному випадку необхідно виявити та перевірити причинний зв'язок між вхідними змінними (факторами) та основними характеристиками об'єкта, в іншому – відшукати оптимальні умови протікання процесу або порівняти об'єкти, що вивчаються.

Тобто *різноманіття кінцевих цілей дослідження можна узагальнено розділити на два типи* (рис. 1.6):

– знайти адекватний опис об'єкта дослідження (системи, процесу) в заданій частині факторного простору, тобто побудувати математичну модель об'єкта дослідження (тип А);

– знайти оптимальні умови протікання процесу, тобто дослідити побудовану модель на оптимум (тип Б).

Основою теорії експерименту є математична статистика, яка застосовується для аналізу експерименту в тих випадках, коли його результати можуть розглядатися як випадкові величини або випадкові процеси.

Теорія планування експерименту – це теорія засобу побудови математичних моделей різних об’єктів, систем і процесів з метою підвищення продуктивності праці дослідника і зменшення матеріальних витрат:

- скорочення часу та робочої сили;
- зменшення витрати енергії і ресурсів;
- обмеження використовуваного нестандартного устаткування, метрологічного обладнання та робочих і зразкових вимірювальних засобів, які використовуються в експерименті

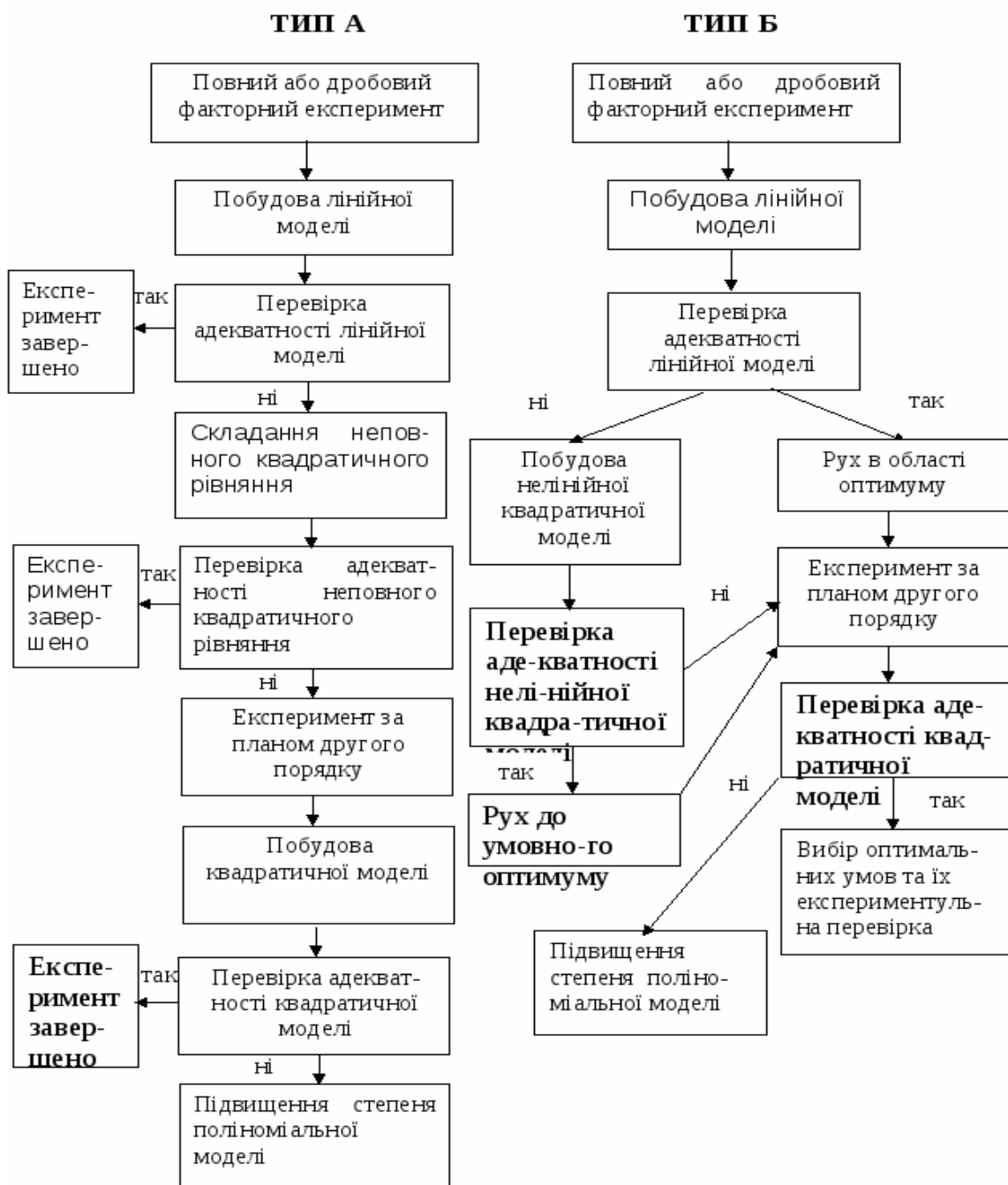


Рисунок 1.6 – Структурна схема експериментів: тип А – з метою математичного опису процесу, що досліджується; тип Б – з метою оптимізації процесу, що досліджується

### 1.3.2 Методологічні концепції планування експерименту

Зростання складності інженерних задач вимагає застосування методів, що ґрунтуються не на інтуїції та випадковості, а на чіткому врахуванні закономірностей технічних систем.

*Планування експерименту ґрунтується на врахуванні таких загальнометодологічних концепцій як:*

- системний підхід;
- регресійний аналіз;
- рандомізація;
- послідовність експерименту;
- оптимальне використання факторного простору;
- компактність інформації;
- статистичні оцінки та ін.

У процесі вивчення складних технічних об'єктів широке застосування знайшов *системний підхід* як наукова основа для раціонального дослідження різноманітних об'єктів.

*Суть системного підходу* полягає в розгляді будь-якого технічного об'єкта як системи взаємопов'язаних елементів, що створюють одне ціле, та врахування взаємних зв'язків між окремими елементами та самою системою.

*Системний підхід у дослідженні технічних систем* – це сукупність методологічних принципів та положень, що дозволяють розглядати систему як єдине ціле із узгодженням діяльності всіх її підсистем.

*Системний підхід дозволяє:*

- вивчати кожний елемент системи в його зв'язку та у взаємодії з іншими елементами;
- спостерігати зміни, що відбуваються в системі;
- виявляти специфічні системні властивості;
- висувати обґрунтовані припущення відносно закономірностей розвитку систем;
- визначати оптимальний режим її функціонування.

*Дослідження технічних об'єктів з позицій системного підходу включає в себе операції в наступній послідовності:*

- вивчення взаємопов'язаних вимог та об'єктивних законів, що визначають характер та якість функціонування системи;
- проведення структурного аналізу системи, що розкриває характер взаємозв'язку та призначення кожної підсистеми;
- дослідження особливостей управління та механізму зворотних зв'язків для найкращої реалізації законів;
- визначення характеру та міри впливу на систему умов функціонування для підвищення надійності рішень;
- дослідження процесів прийняття рішень у кожному блоці системи з врахуванням його взаємодії з іншими підсистемами.

*Цінність системного підходу для проведення експерименту* полягає в тому, що він спрямований на підвищення ефективності експериментів, на прискорення досягнення їх цілей та вдосконалення організації.

Вибір кількості та умов проведення дослідів, побудова алгоритмів оптимального управління експериментами та вибору початкових даних (факторів та параметрів оптимізації), вивчення поведінки окремих елементів та взаємодія між ними, визначення впливу різних факторів та реакції на зміни експериментальних умов, визначення сукупності величин, що реєструються, уточнення вимог до точності вимірювання параметрів та інші операції повинні також проводитися на основі системного підходу, що передбачає розгляд всіх елементів експерименту як єдиної системи. З цих позицій розглядають загальні властивості експериментів як об'єкти дослідження, проводять їх класифікацію та дають рекомендації по вибору математичних прийомів та методів, якими може користуватися експериментатор при виборі рішень у ході підготовки експерименту, під час проведення та обробки результатів.

Під час планування експерименту використовується *математичний апарат регресійного аналізу*, згідно з яким передбачається, що результати дослідів повинні являти собою незалежні *нормально розподілені випадкові величини з рівними дисперсіями*. Це означає, що результати експерименту в кожному окремому досліді повинні характеризуватися змінними величинами, що набувають певного значення з відомою мірою ймовірності в умовах, коли розподіл їх окремих значень підкоряється закону нормального розподілу, а дисперсії, що характеризують розсіяння випадкових величин, є практично рівними.

Урахування закономірностей розподілу результатів експерименту є важливим тому, що випадкова величина вважається заданою тільки в тому випадку, якщо визначена її функція розподілу. Переважним вважається нормальний розподіл, при якому математичний апарат, що застосовується для аналізу даних експерименту, звичайно є найбільш ефективним, адже на практиці закон нормального розподілу має місце в більшості випадків.

Рівність дисперсій випадкових величин необхідна для того, щоб в умовах експерименту з мінімальною кількістю дослідів забезпечити достатню надійність результатів та рішень, що приймаються. Остання вимога забезпечується, якщо дисперсія, знайдена за результатами багаторазового повторення одного досліду, не відрізняється за величиною від дисперсії, знайденої після багаторазового повторення будь-якого іншого досліду, при якому вивчається інше поєднання значень факторів. На практиці експериментальні дослідження майже завжди пов'язані з повторенням дослідів, тому перевірка гіпотези про рівність значень дисперсії в різних точках плану звичайно не є проблемою. Якщо виявляється, що умова однорідності дисперсій не дотримується, то шляхом перетворення випадкових величин вказане ускладнення усувається.

Часто неоднорідність окремих дисперсій пов'язана з помилками, допущеними під час проведення відповідних дослідів. Тому однією з важливих



передумов регресійного аналізу є підвищені вимоги до точності вимірювання факторів. При вимірюваннях факторів рекомендується забезпечувати такі умови, коли помилка вимірювань є значно меншою, в порівнянні з помилкою визначення параметрів оптимізації. З цією метою вживають спеціальних заходів задля кращої організації дослідів.

*Концепцію рандомізації* потрібно вважати найважливішою у плануванні експерименту. Вона пов'язана із забезпеченням у процесі проведення експерименту таких умов, коли дослідникові рекомендується свідомо створювати випадкові ситуації для того, щоб зробити випадковими (рандомізувати) ті систематично діючі фактори, які важко стабілізувати або контролювати. Тоді фактори можна розглядати як випадкові величини, а це дозволяє враховувати їх статистично.

Згідно *концепції послідовного експерименту* дослідження повинно складатися з окремих послідовних етапів (серій дослідів), причому схема всього експерименту заздалегідь не планується. Після здійснення кожного етапу експериментатор за результатами виконаної частини експерименту ухвалює рішення про напрями подальшої роботи та її доцільності.

На кожному етапі використовуються стандартні методи планування та аналізу експерименту, що забезпечують отримання даних, необхідних для прийняття обґрунтованого рішення. Вибір методів, що застосовуються на подальшій стадії роботи, визначається за результатами досліджень на даній стадії.

*Концепція оптимального використання факторного простору* враховує те, що під час вивчення багатофакторних залежностей ефективність експерименту підвищується пропорційно збільшенню кількості факторів, що розглядаються. У цьому випадку точність оцінки коефіцієнтів регресії поліноміального рівняння зростає зі збільшенням кількості факторів завдяки тому, що одночасно збільшується радіус сфери, що обстежується у факторному просторі, хоч кожен фактор піддається варіюванню в тих самих межах. При цьому дисперсія оцінки коефіцієнтів регресії іноді знижується, в порівнянні з дисперсією одиничного вимірювання в  $(k+1)^n$  разів, оскільки оцінка ведеться за всіма  $(k+1)^n$  дослідями, де  $k$  – кількість факторів, а  $n$  – кількість спостережень.

*Концепція компактності інформації* стосується заключної стадії досліджень та полягає в забезпеченні можливості отримання даних у формі, зручній для опублікування, зберігання та порівняння з іншими даними.

*Концепція статистичних оцінок* пов'язана з необхідністю враховувати ступінь відмінностей між знайденим рішенням та результатами експерименту. Згідно цієї концепції розв'язок інженерної задачі вважають оптимальним, якщо статистична перевірка показала, що він є достовірним з 95%-ною довірчою ймовірністю.

Особливістю більшості досліджень є необхідність урахування у процесі дослідження дуже великої кількості факторів і розв'язання так званих компромісних задач, що характеризуються визначенням багатьох критеріїв

оптимізації. Ця обставина змушує звертати підвищену увагу на правильність постановки задачі та ускладнює прийняття рішень, оскільки відомі методи розв'язання компромісних задач поки не можна вважати досконалими.

## 1.4 Основні ознаки класифікації експериментів

### 1.4.1 Класифікація експериментів

Розглянемо можливий варіант класифікації експериментів за узагальненими ознаками – рис. 1.7.



Рисунок 1.7 – Класифікація експериментів за узагальненими ознаками

*За структурою експерименти поділяють на натурні, модельні та модельно-кібернетичні (машинні).*

*У натурному експерименті засоби експериментального дослідження взаємодіють безпосередньо з об'єктом дослідження.*

*У модельному – взаємодіють не з об'єктом, а з його заміником – моделлю, яка є безпосередньо об'єктом експериментального дослідження (одночасно по відношенню до об'єкта, що вивчається, модель є засобом експериментального дослідження).*

*Модельно-кібернетичний експеримент є різновидом модельного експерименту, у процесі відповідні характеристики об'єкта, що вивчається, обчислюються за допомогою моделюючого алгоритму на ЕОМ. Цей вид експерименту відрізняється універсальністю та має широку сферу застосування.*

*За стадією наукових досліджень експерименти поділяють на лабораторні, стендові та промислові.*

*До лабораторних відносяться експерименти з вивчення загальних закономірностей різних явищ і процесів, з перевірки наукових гіпотез та теорій.*

*Стендові дослідження проводять в разі необхідності вивчити цілком конкретний процес, що протікає в об'єкті з певними фізичними, хімічними та іншими властивостями, з метою виявлення помилок, що допущені при розрахунках або конструюванні об'єкта (виробу, технологічного процесу та ін.), а також з метою отримання рекомендації відносно серійного випуску виробу та умов його експлуатації.*

*Промисловий експеримент проводять під час створення нового виробу або процесу за даними лабораторних або стендових випробувань, при оптимізації діючого процесу, у процесі проведення контрольно-вибіркових випробувань якості продукції.*

*З точки зору організації експериментів виділяють звичайні (рутинні), спеціальні (технічні), унікальні та змішані експерименти.*

*Звичайні експерименти проводяться в лабораторних умовах за нескладними методиками з використанням порівняно простого експериментального обладнання. Вони пов'язані з одноманітними вимірюваннями та обчисленнями, що багато разів повторюються протягом тривалого проміжку часу.*

*Спеціальні експерименти пов'язані зі створенням та дослідженням різних приладів та апаратів (засобів автоматики, елементів та вузлів ЕОМ).*

*Унікальні експерименти проводяться на складному експериментальному обладнанні (типу ядерного реактора, радіоелектронного комплексу, синхрофазотрона) та відрізняються великими обсягами експериментальних даних, високою швидкістю протікання процесів, що досліджуються, широким діапазоном вимірювання характеристик об'єктів дослідження. Основні галузі застосування унікальних експериментів – дослідження космосу, нових технологій та явищ.*

*Змішані експерименти містять сукупність різнотипних експериментів, об'єднаних єдиною програмою дослідження та пов'язаних один з одним результатами досліджень.*

*За способом проведення розрізняють пасивні, активні (активні з програмним управлінням, активні зі зворотним зв'язком) та активно-пасивні експерименти.*

*Пасивний експеримент проводиться під час реєстрації вхідних та вихідних параметрів об'єкта дослідження без втручання в експеримент у процесі його проведення. Пасивний експеримент передбачає застосування математико-статистичних методів тільки для обробки зібраних експериментальних даних. Дослідження впливу сукупності факторів на результати експерименту здійснюється за умови, що змінюється тільки один з факторів та фіксуються значення всіх інших. У складних системах, в яких*

велика кількість впливів не може контролюватися або змінюватися, ця умова не виконується.

*Активний експеримент* передбачає можливість впливу на об'єкт, що досліджується. В разі використання методів активного експерименту математичний опис будується у вигляді сукупності статичних і динамічних вихідних характеристик об'єкта, які реєструються у процесі подачі на його входи спеціальних збудувальних впливів. У випадку активного експерименту можна оцінити дисперсію помилки, перевірити адекватність моделі та вжити необхідних заходів для виконання умов, що необхідні для застосування методу множинного регресійного аналізу, що використовується для обробки результатів експерименту.

*Різновидом активного експерименту є активний експеримент із програмним управлінням*, що проводиться за заздалегідь складеним планом. Відповідно до цього плану експериментатор впливає на вхідні параметри об'єкта, дослідження, а змінна вихідних параметрів дозволяє з'ясувати природу процесів, що виникають в об'єкті дослідження.

У разі активного експерименту зі зворотним зв'язком, інтерпретуючи результати кожного етапу, можна вибрати оптимальну стратегію управління експериментом.

*Активно-пасивний експеримент* характеризується тим, що у процесі його проведення одна частина даних лише реєструється, а інша, крім того, обробляється у процесі експерименту та використовується для управління керованими факторами. У такому експерименті одна частина інформації про об'єкт відповідає характеристикам, що змінюються під впливом керованих факторів, а інша – відображає характеристики, які не залежать від зміни вхідних величин.

*Організація та постановка експерименту залежать* від його призначення.

*Експерименти в різних галузях науки поділяють* на хімічні, біологічні, фізичні, психологічні, соціальні тощо; їх розрізняють також:

- за способом формування умов (природних і штучних); за метою дослідження (трансформуючі, констатуючі, контролюючі, пошукові, розв'язувальні);
- за організацією проведення (лабораторні, натурні, польові, виробничі тощо); за структурою об'єктів і явищ, які вивчаються (прості, складні);
- за характером зовнішніх впливів на об'єкт дослідження (речовинні, енергетичні, інформаційні);
- за характером взаємодії засобу експериментального дослідження з об'єктом дослідження (звичайний та модельний);
- за типом моделей, досліджуваних у експерименті (матеріальний та мислений);
- за контрольованими величинами (пасивний і активний);
- за числом змінюваних факторів (однофакторний та багатофакторний);

– за характером об'єктів, які вивчаються (технологічні, соціометричні) тощо.

*Природний експеримент* передбачає проведення дослідів у природних умовах існування об'єкта дослідження (переважно використовують у біологічних, соціальних, педагогічних та психологічних науках).

*Штучний експеримент* передбачає формування штучних умов (широко застосовують у природничих і технічних науках).

*Трансформуючий (відтворювальний) експеримент* передбачає активну зміну структури і функцій об'єкта дослідження згідно з висунутою гіпотезою, формування нових зв'язків і відношень між компонентами окремого об'єкта або між об'єктами, які вивчаються.

*Констатуючий експеримент* використовують для перевірки певних передумов. У процесі такого експерименту констатують наявність того чи іншого зв'язку між дією на об'єкт дослідження та результатом цієї дії.

*Контролюючий експеримент* зводять до перевірки результатів зовнішніх впливів на об'єкт дослідження з урахуванням його стану, характеру дії та очікуваного ефекту.

*Пошуковий експеримент* виконують у тому разі, коли через відсутність достатніх апріорних даних ускладнена класифікація факторів, які впливають на досліджуване явище. За результатами пошукового експерименту встановлюють значущість факторів. При цьому неістотні фактори відсіюють.

*Розв'язувальний експеримент* виконують для перевірки вірогідності основних положень фундаментальних теорій в тому разі, коли дві чи кілька гіпотез однаково узгоджуються з багатьма явищами. Це ускладнює вибір вірогідної гіпотези. Прикладом розв'язувального експерименту може бути суперечка між Птолемеєм і Коперніком про рух Землі. Вирішальний дослід Фуко з маятником остаточно вирішив цю суперечку на користь теорії Коперніка.

*Лабораторний експеримент* виконують у лабораторних умовах з використанням типових приладів, спеціальних моделюючих установок, стендів обладнання тощо. Найчастіше в лабораторному експерименті вивчають не сам об'єкт, а його зразок. Такий експеримент дає змогу якісно вивчити вплив одних характеристик, коли піддаються варіюванню інші, здобути добротну наукову інформацію за мінімальних витрат часу та ресурсів. Проте такий експеримент не завжди повністю моделює реальний хід процесу, що вивчається, тому постає потреба проводити натурний експеримент.

*Натурний експеримент* виконують у природних умовах і на реальних об'єктах. Цей вид експерименту доцільно застосовувати у процесі натуральних випробувань виготовлених систем. Натурні експерименти поділяють на виробничі, польові, полігонні, напівнатурні тощо. Натурний експеримент завжди потребує ретельного обмірковування та планування, раціонального добору методів дослідження. Основною науковою проблемою натурального експерименту є забезпечення достатньої адекватності умов експерименту реальній ситуації, в якій працюватиме створюваний об'єкт. *До основних завдань*

*натурного експерименту* належать такі: вивчення характеристик дії середовища на досліджуваний об'єкт; ідентифікація параметрів об'єкта; оцінка ефективності функціонування об'єкта та перевірка його на відповідність заданим вимогам.

*Відкриті й закриті експерименти* широко застосовують у психології, соціології, педагогіці. У відкритому експерименті його завдання однозначно пояснюють, а в закритому (щоб здобути об'єктивні дані) приховують від осіб, певні риси яких є предметом дослідження. Оскільки будь-яка форма відкритого експерименту впливає на поведінку згаданих осіб, він є доцільним лише в тому разі, коли виключаються суб'єктивні перешкоди. Закритий експеримент має проводитися так, щоб той, хто є його об'єктом, почувався цілком природно.

*Простий експеримент* використовують для вивчення об'єктів, які не мають розгалуженої структури, з невеликою кількістю взаємопов'язаних та взаємодіючих елементів, що виконують найпростіші функції.

*У складних експериментах вивчають* явища та об'єкти розгалуженої структури зі значною кількістю взаємопов'язаних і взаємодіючих елементів, що виконують складні функції. У складних об'єктах дослідження можлива наявність кількох різних структур або задач. Проте кожний конкретний стан складного об'єкта може бути описаний.

*Інформаційний експеримент* використовують для вивчення впливу певної (різної за формою та змістом) інформації на об'єкт дослідження. До таких експериментів найчастіше вдаються в біології, психології, соціології, кібернетиці тощо, вивчаючи зміни стану об'єкта дослідження під впливом передаваної йому інформації.

*Речовий експеримент* має на меті вивчити вплив різних речових факторів на стан об'єкта дослідження (наприклад, вплив різних присадок на якість сталі тощо).

*Енергетичний експеримент* застосовують для вивчення дії різних видів енергії на об'єкт дослідження. Цей тип експерименту поширений у природничих науках.

*Звичайний (класичний) експеримент* передбачає наявність експериментатора як суб'єкта пізнання; об'єкта (предмета) експериментального дослідження та засобів (інструментів, приладів тощо), за допомогою яких виконують експеримент. У такому експерименті засоби його проведення безпосередньо взаємодіють з об'єктом дослідження.

*Модельний експеримент* має справу з моделлю досліджуваного об'єкта. Модель входить до складу експериментальної установки, причому вона заміщує не лише об'єкт дослідження, а іноді й умови, в яких він вивчається. Модельний експеримент має й недоліки, які пов'язані з тим, що різниця між моделлю та реальним об'єктом може стати джерелом похибок, тоді як екстраполяція результатів, здобутих у процесі вивчення поведінки моделі, на модельований об'єкт, потребує додаткових витрат часу й теоретичного обґрунтування правомірності такої екстраполяції.

Різниця між засобами експерименту при моделюванні дає підстави для виокремлення мисленого та матеріального експерименту. Засобами мисленого експерименту є побудовані в думці моделі досліджуваних об'єктів. Мислений експеримент називають також *ідеалізованим чи уявним*. Такий експеримент є однією з форм розумової діяльності суб'єкта, у процесі якої відтворюється в уяві структура реального експерименту. Мислений експеримент має таку структуру: побудова в думці моделі об'єкта дослідження (ідеалізовані умови експерименту та впливи на об'єкт); свідоме та планомірне змінювання, комбінування умов експерименту та впливів на об'єкт; свідоме й точне застосування на всіх стадіях експерименту об'єктивних законів науки. У результаті експерименту формулюються висновки.

*Матеріальний експеримент* має аналогічну структуру. Проте в ньому використовують матеріальні, а не ідеалізовані об'єкти дослідження. На відміну від мисленого, такий експеримент являє собою форму об'єктивного матеріального зв'язку свідомості із зовнішнім середовищем, тоді як мислений експеримент є специфічною формою теоретичної діяльності суб'єктів.

*Мислений експеримент* має ширшу сферу застосування, ніж матеріальний, оскільки до нього вдаються не лише під час підготовки та планування реальних дослідів, а й у випадках, коли їх проведення є неможливим. А. Ейнштейн згадував, у зв'язку з розробкою теорії відносності, такий фрагмент своїх міркувань: "Якби можна було погнатися за світловою хвилею зі швидкістю світла, то ми б дістали незалежне від часу хвильове поле. Усе це здається неможливим! Це було першим дитячим мисленим експериментом, який стосується спеціальної теорії відносності. Відкриття є справою логічного мислення, навіть якщо кінцевий продукт є з логічною формою".

Мислені експерименти застосовують не лише вчені, а й письменники, художники, педагоги, лікарі. Такий експеримент завжди наявний у мисленні шахістів. Величезною є роль мисленого експерименту в технічному конструюванні та винахідництві. Його результати відбиваються у формулах, кресленнях, графіках, ескізних проектах.

*Пасивний експеримент* передбачає вимірювання лише обмеженої кількості показників (параметрів, змінних), що характеризують об'єкт спостережень, без жодного втручання в його функціонування. Прикладами пасивного експерименту є спостереження за інтенсивністю, складом, швидкостями руху транспортних потоків; за числом захворювань чи працездатністю певної групи людей тощо.

*Активний експеримент* пов'язаний з вибором спеціальних вхідних сигналів (факторів) і контролює вхід та вихід досліджуваної системи.

*Однофакторний експеримент* передбачає виділення сприятливих факторів, стабілізацію факторів, що перешкоджають експерименту, почергове варіювання факторів, які цікавлять дослідника.

У багатфакторному експерименті всі змінні варіюють одночасно і кожний ефект оцінюють за результатами всіх дослідів, проведених у даній серії експериментів.

*Технологічний експеримент* спрямований на вивчення елементів технологічного процесу (продукції, обладнання, діяльності робітників тощо) або такого процесу в цілому.

*Соціометричний експеримент* використовують для вимірювання існуючих міжособистісних соціально-психологічних стосунків у малих групах, з метою їх подальшого змінювання.

Запропоновану класифікацію експериментальних досліджень не можна вважати повною, оскільки з розвитком наукових знань розширюються й галузі застосування експериментального методу.

### 1.4.2 Класифікація похибок

Частіше всього похибки класифікують за характером причин, що їх викликають. При цьому похибки поділяють на *систематичні, випадкові та грубі (промахи)*.

До *систематичних* відносять похибки, які зумовлені наявністю постійно діючої причини. Вони постійні за знаком і величиною в усіх вимірюваннях. До них відносять інструментальні, методичні, реактивні похибки тощо.

*Систематичні інструментальні похибки* зумовлені в основному неправильним градуванням приладів (мірних колб, бюреток, піпеток, терезів, фотоколориметрів, рН-метрів тощо). Цей вид похибок зустрічається в основному на четвертому етапі хімічного аналізу. Періодична перевірка приладів, за допомогою яких виконуються дослідження, зводить до мінімуму інструментальні систематичні похибки.

Основний внесок у загальну систематичну похибку роблять *методичні похибки*, що зумовлені методикою визначення (похибки відбору проби, переведення проби у зручну для аналізу форму (розчинення, сплавлення, спікання), похибки розділення компонентів). Особливо можна виділити похибки, що пов'язані з природою хімічної реакції, покладеної в основу визначення компонента. Так, у гравіметричному аналізі такі похибки зумовлені частковою розчинністю осаджуваної форми, процесами співосадження, відхиленням від стехіометричного складу гравіметричної форми і т.д. У титриметричному аналізі типовою методичною похибкою є індикаторна похибка кислотно-основного титрування, яка виникає внаслідок неспівпадіння рТ індикатора зі значенням рН у точці еквівалентності; крапельна похибка титрування та ін.

Добрі методики хімічного аналізу не повинні містити суттєвих методичних похибок, або, у крайньому випадку, повинні спеціально вказувати на найбільш слабкі (з точки зору методичних похибок) моменти



аналізу, з тим, щоб аналітик виконував ці етапи дослідження особливо ретельно.

*Систематична реактивна похибка* зумовлена домішками, що містяться у реактивах, воді та інших розчинниках, які заважають визначенню.

Один із найбільш простих і поширених способів знаходження величини реактивної похибки хімічного аналізу полягає у паралельному визначенні вмісту досліджуваного компонента у досліджуваній та „холостій” пробі. „Холоста” проба повинна містити всі ті компоненти, що й досліджувана проба, за винятком досліджуваного компонента, і пройти всі етапи аналітичного дослідження. Віднімання результату аналізу „холостої” проби від результату аналізу досліджуваного зразка дозволяє виключити реактивну похибку. Правильно розроблена методика зазвичай усуває систематичну реактивну похибку. Наприклад, при фотометричному визначенні „холостий” розчин використовують як розчин порівняння. У цьому випадку систематична реактивна похибка автоматично усувається. Прийом, при якому аналітичне визначення проводять відносно іншого об’єкта, що дозволяє автоматично усунути систематичну похибку, називається *релятивізацією* (англ. *relative* – відносно, відносний). Аналогічно, якщо відбір стандартного і досліджуваного розчину проводити за допомогою однієї й тієї ж піпетки, систематична похибка, яка зумовлена неправильним калібруванням піпетки, буде усунена шляхом релятивізації.

Наявність систематичних похибок призводить до неправильних результатів аналізу. Під *правильністю* аналізу розуміють наближеність одержаного результату до істинного значення. Результати аналізу є тим більш задовільними, чим меншою є систематична похибка.

Загальноприйнятий прийом оцінювання правильності методу або методики аналізу – *аналіз стандартного зразка* (зразка, в якому точно відомий вміст досліджуваного компонента). Обов’язкова умова застосування стандартного зразка у хімічному аналізі – максимальна близькість складу та властивостей стандартного зразка і проби, що аналізується. В разі використання стандартного зразка для оцінювання правильності методу або методики проводять багаторазовий хімічний аналіз зразка і порівнюють знайдений вміст із паспортним (дійсним) вмістом компонента, що визначається. У титриметричних методах аналізу широко використовують фіксанали, які є стандартними зразками для приготування робочих розчинів.

Отже, виявлення систематичних похибок вимагає спеціальних досліджень. Як тільки систематичні похибки виявлено, їх можна усунути або оцінити їх величину і ввести відповідну поправку до результату дослідження.

*Випадкові похибки*, на відміну від систематичних, не мають прозорої причини. Точніше, причини їх появи є настільки численними і кожна з цих причин (невелика зміна температури, вологості повітря, тиску, випадкові втрати речовини, випадкові забруднення посуду і т.д.) у незначній мірі

впливає на загальний результат аналізу, що їх індивідуальний розгляд не має сенсу. Загальна випадкова похибка результату хімічного аналізу не є постійною за величиною і за знаком. Великі випадкові похибки менш імовірні, ніж малі.

Основною ознакою наявності випадкових похибок є неспівпадіння результатів повторних аналізів. Ступінь близькості результатів одиничних визначень один до одного (розсіювання одиничних результатів відносно середнього значення) характеризує *відтворюваність аналізу*.

На відміну від систематичних похибок, випадкові похибки не можна усунути, а можна тільки оцінити величину загальної випадкової похибки. Випадкові похибки можна зменшити у випадку багаторазового повторення досліджу. Оцінка загальної випадкової похибки здійснюється на основі математичної теорії похибок шляхом статистичної обробки паралельних результатів. Статистично можна обробляти як паралельно виміряні величини (значення маси, об'єму, показів приладу), так і кінцеві результати аналізу.

До початку обробки результатів хімічного аналізу методами математичної статистики систематичні похибки повинні бути виявлені, усунені або оцінені та введені як поправки, або переведені в розряд випадкових. Наприклад, систематична похибка, яка зумовлена неправильними показаннями приладу, в разі вимірювання аналітичного сигналу на різних приладах в різних лабораторіях переходить у випадкову.

Приєм, який дозволяє перевести систематичні похибки у випадкові, називається *рандомізацією систематичних похибок* (англ. *random* – випадково).

*Промах* – це похибка, яка різко спотворює результат аналізу і зумовлена несправністю вимірювальних приладів, неправильним відліком показань, різкою зміною умов під час виконання аналізу тощо.

### **1.4.3 Обрання теми наукових експериментальних досліджень**

Вибір теми, вочевидь, є найбільш відповідальним етапом у діяльності аспіранта чи здобувача, бо він часом визначає майбутню діяльність людини на все життя і вирішальним чином зумовлює результат дослідження.

*Практика показує, що правильно обрати тему – це значить наполовину забезпечити успішне її виконання.*

Розрізняють три різновиди тем:

- теми як результат розвитку проблем, над якими працює даний науковий колектив;
- ініціативні теми;
- замовлені теми.

*Найкраще обирати теми першої групи.*

*Ініціативні теми* можуть виникати у двох взаємовиключних ситуаціях: як у результаті доброї наукової підготовки здобувача, так і вразі його недостатньої кваліфікації та наукового кругозору. Науковий керівник мусить розібратися в

ситуації, по змозі підтримати ініціативу здобувача, але ця підтримка має ґрунтуватися на реальній оцінці ситуації й не може ставити під загрозу успішне виконання роботи.

*Замовлені теми*, як правило, пов'язані з основними планами науково-дослідних робіт у галузі або об'єднанні. За актуальністю й економічною значущістю замовлені теми мають ряд переваг перед іншими, тому, насамперед, їх потрібно аналізувати з позицій реальності виконання і можливості створення теоретичної бази.

*Під час обрання теми основними критеріями повинні бути*: актуальність, новизна і перспективність; наявність теоретичної бази; можливість виконання теми в даній установі; зв'язок її з конкретними господарськими планами і довгостроковими програмами; можливість отримання від впровадження результатів дослідження технічного, економічного і соціального ефекту.

Говорячи про *новизну теми*, не треба забувати відоме положення, що не все нове є обов'язково прогресивним, так само як і старе – консервативним.

*Наукова новизна теми* – це ознака, наявність якої дає дослідникові підстави використовувати поняття «вперше» при характеристиці отриманих ним результатів і під час проведення дослідження в цілому.

Поняття «вперше» означає в науці факт відсутності подібних результатів до їх публікації. Вперше може проводитися дослідження за оригінальними темами, раніше не досліджувані в тій чи іншій галузі наукового знання.

Новими можуть бути тільки ті положення дослідження, котрі сприяють подальшому розвитку науки або окремих її напрямів.

*Питання новизни є одним із найбільш суперечливих і складних як під час захисту робіт, так і під час опублікування статті.*

*За місцем отриманих знань у ряду відомих наукових даних можна виділити три рівні новизни:*

- а) перетворення відомих даних, докорінна їх зміна;
- б) розширення, доповнення відомих даних;
- в) уточнення, конкретизація відомих даних, поширення відомих результатів на новий клас об'єктів, систем.

Рівень перетворення характеризується принципово новими в даній галузі знаннями, які не просто доповнюють відомі положення, а й являють собою щось самостійне.

Самоперевірку цього рівня можна здійснити поставивши собі питання: «А що, ніхто ніколи цю задачу не вирішував?».

На цьому рівні суттєво важливо розрізнити два варіанти новизни: дискусійно-гіпотетичний і загальноновизнаний.

У першому випадку нові результати є ще не достатньо доказовими, не мають достатньої всебічної конкретизації і нерідко натрапляють на протидію, оскільки самі факти не піддаються новаторському науковому поясненню, тому залишається сумнів щодо справедливості таких наукових ідей.

На рівні доповнення новий результат розширює відомі теоретичні або практичні положення, додає до них нові елементи, доповнює знання в даній галузі без зміни їх сутності.

На рівні конкретизації новий результат уточнює відоме, конкретизує окремі положення, що стосуються поодиноких випадків. На цьому рівні відомий метод, спосіб можуть бути розвиненими і поширеними на новий клас об'єктів, систем, явищ.

Даючи оцінку *практичній значущості* обраної теми, слід знати, що ця значущість залежить від характеру конкретного наукового дослідження.

Якщо дослідження має методологічний характер, то його практична значущість може полягати у публікації основних результатів дослідження на сторінках монографій, підручників, наукових статей; у наявності авторських свідоцтв, актів про впровадження результатів дослідження на практиці; в апробації результатів дослідження на науково-практичних конференціях і симпозиумах; у використанні наукових розробок у навчальному процесі закладів освіти; в участі в розробці державних і регіональних програм розвитку тієї чи іншої галузі народного господарства; у використанні результатів дослідження для підготовки нових нормативних і методичних документів.

Самоперевірка роботи на «дисертабельність» має такі послідовні етапи:

- а) аналіз найменування дисертації;
- б) виявлення і визначення об'єкта, предмета і мети дослідження;
- в) аналіз кожного наукового результату на новизну, достовірність, практичну значущість, пріоритет;
- г) аналіз кожного висновку до розділів на конструктивність та новизну;
- д) аналіз математичних моделей на коректність;
- ж) оцінювання якості програмного забезпечення та виконаних розрахунків;
- з) аналіз відповідності публікацій та апробацій вимогам ВАК;
- к) аналіз правильності оформлення актів упровадження;
- л) перевірка коректності посилань.

Аналіз найменування роботи слід проводити за двома аспектами: на відповідність результатам, поданим на захист; на відповідність паспорту спеціальності.

### **Контрольні питання та завдання**

1. Розкрийте поняття «надзвичайна ситуація».
2. Вкажіть основні етапи алгоритму класифікації надзвичайної ситуації.
3. Розкрийте основні причини виникнення надзвичайних ситуацій в Україні.
4. Надайте класифікацію надзвичайних ситуацій за причинами виникнення.

5. Розкрийте поняття «надзвичайна ситуація техногенного характеру». Джерела надзвичайних ситуацій техногенного характеру, їх вражаючі фактори, характер дій та проявів цих факторів.

6. Розкрийте поняття «надзвичайна ситуація природного характеру». Джерела надзвичайних ситуацій природного характеру, їх вражаючі фактори, характер дій та проявів цих факторів.

7. Розкрийте поняття «надзвичайна ситуація соціального характеру».

8. Розкрийте поняття «надзвичайна ситуація воєнного характеру».

9. Надайте класифікацію надзвичайних ситуацій природного характеру. Наведіть номенклатуру основних параметрів надзвичайних ситуацій природного характеру, які повинні контролюватися.

10. Надайте класифікацію надзвичайних ситуацій техногенного характеру. Наведіть номенклатуру основних параметрів надзвичайних ситуацій техногенного характеру, які повинні контролюватися.

11. Охарактеризуйте методологічні концепції планування експерименту у сфері цивільного захисту.

12. Розкрийте основні ознаки класифікації експериментів у сфері цивільного захисту.

13. Розкрийте сутність активного та пасивного експерименту.

14. Розкрийте сутність лабораторного експерименту.

15. Розкрийте, у чому полягає сутність промислового експерименту.

16. Розкрийте, у чому полягає сутність обчислювального експерименту.

17. Розкрийте сутність констатуючого експерименту.

18. Розкрийте, у чому полягає сутність руйнуючого експерименту.

19. Що являє собою перетворюючий експеримент?

20. Розкрийте сутність комп'ютерного експерименту.

## **РОЗДІЛ 2. ТЕХНІЧНЕ ТА МЕТРОЛОГІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ**

### **2.1 Сукупність операцій експерименту. Завдання експерименту**

#### **2.1.1 Формулювання мети, об'єкта та предмета експериментального наукового дослідження**

*Об'єкт експериментального дослідження* – це та частина матеріального світу, яка привернула увагу дослідника.

Стосовно об'єкта дослідження здобувачеві необхідно усвідомити: об'єкт дослідження – новий (Н) чи традиційний (Т).

*Предмет експериментального дослідження* – це розглянутий в роботі бік об'єкта дослідження, та його досліджувані якості і галузь використання.

Щодо предмета дослідження, то тут також треба вирішити те саме питання: предмет дослідження є новим чи традиційним.

*Мета експериментального дослідження* – це запланований результат.

Результат має бути конструктивним, тобто спрямованим на вироблення суспільно корисного продукту з ліпшими, ніж було раніше, показниками якості або процесу її досягнення.

*Поставленої мети треба досягти обов'язково.*

*Аналіз наукових результатів.* Кожен науковий результат здобувачеві необхідно оцінити так, ніби він сам є опонентом своєї дисертації. Ставши ненадовго на позицію опонента, за кожним результатом відзначити:

- коротку суть наукового результату;
- новизну результату;
- достовірність результату;
- практичну значущість;
- джерело, в якому опублікований результат, і обґрунтування пріоритету.

Під час обґрунтування новизни обов'язковим є порівняння із близькими результатами інших дослідників.

Описуючи *практичну значущість*, треба вказати форму і масштаби впровадження наукового результату. У визначенні пріоритету простежується спадкоємність публікацій із цього питання за роками.

*Аналіз висновків.* Усі розділи повинні завершуватися короткими висновками, а робота – загальними.

#### **2.1.2 Структура проведення наукового експерименту**

*Структура проведення наукового експерименту:*

1. *Формування гіпотези наукового експерименту* – розкривається ідея проведення експериментальних досліджень.

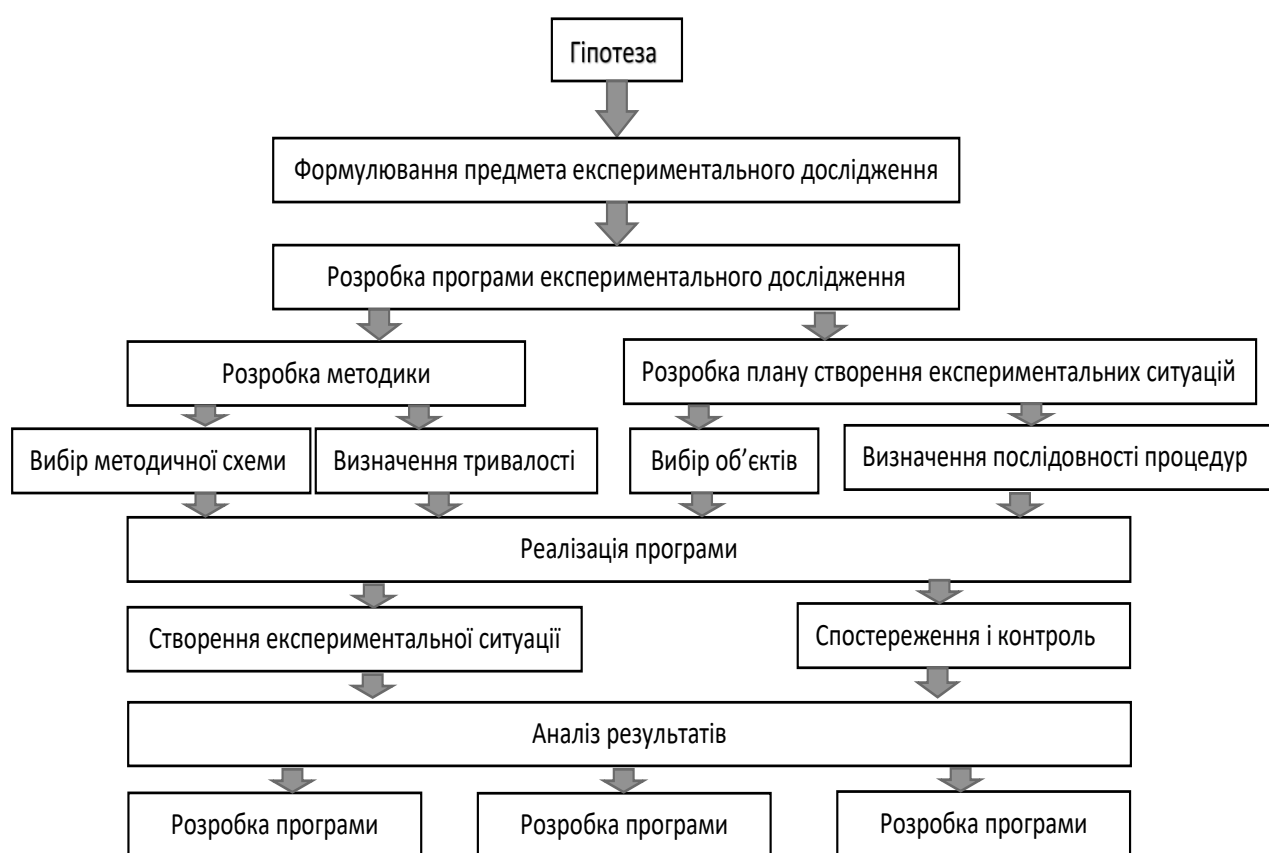
2. *Формулювання предмета експериментального дослідження.*

Предмет експериментального дослідження являє собою грань об'єкта експериментальних досліджень, для якої будуть збиратися дані й далі досліджуватися для підтвердження або спростування теоретичних положень.

3. *Розробка програми дослідження (Розробка плану проведення експерименту)*

Містить: етап розробки експериментальної ситуації; методику проведення експерименту; методику обробки результатів проведення експерименту з формулюванням висновків.

4. *Розробка плану створення експериментальної ситуації* або експериментальних ситуацій. Виділяється об'єкт дослідження, в лабораторних або польових умовах уточнюються форми прояву об'єкта і час, упродовж якого ці прояви досліджуватимуться.



5. *Розробка методики проведення експериментальних досліджень*

Методика містить послідовність у виконанні операцій в експерименті по досягненні цілей експерименту в рамках формульованого предмета.

6. *Уточнення процедур проведення експериментальних досліджень*

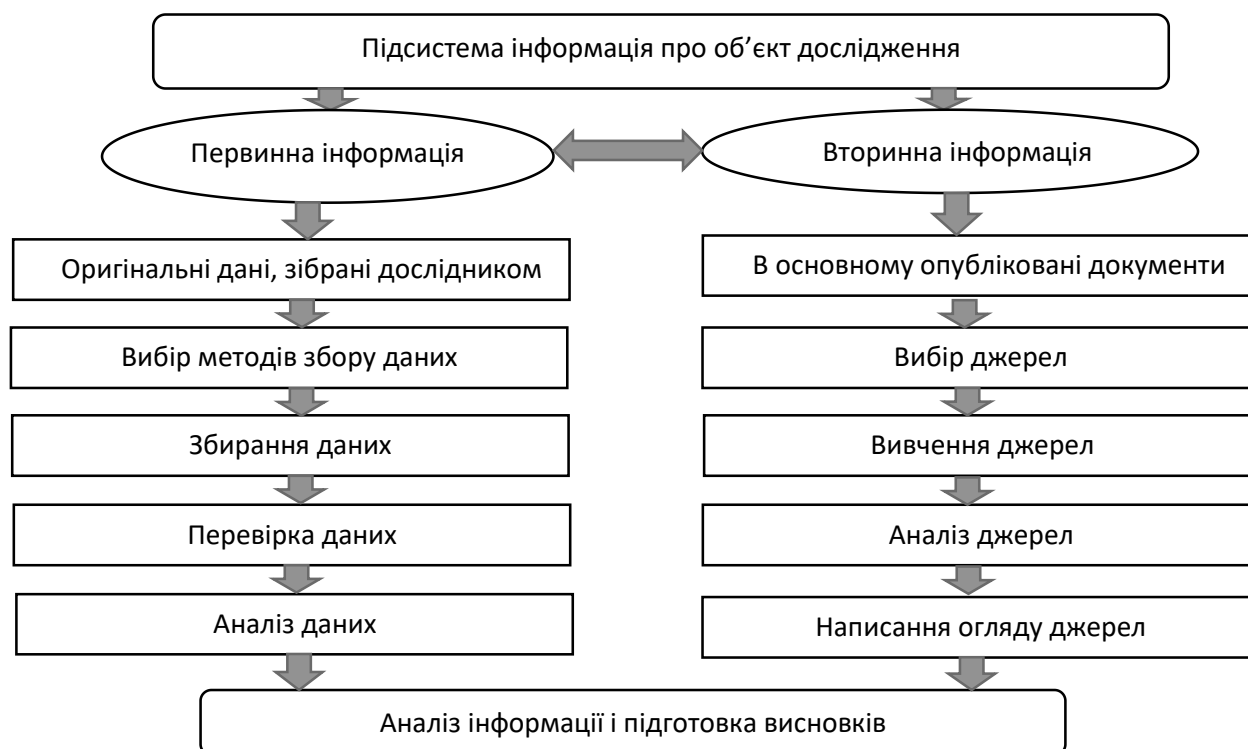
Цей етап припускає остаточну перевірку й обґрунтування застосовуваного устаткування до проведення експерименту, уточнення питань про похибки і допущення в експерименті.

7. *Реалізація програми наукового експерименту.* Відповідно до вище викладеного проводиться експеримент.

8. *Обробка результатів експерименту з використанням математичних методів і моделей.* Наприклад, використовуються методи дисперсійного, кореляційного і регресійного аналізу.

### 2.1.3 Схеми збору та аналізу наукової інформації для проведення наукових експериментальних досліджень

Відповідальним етапом наукового дослідження є *отримання й аналіз первинної та вторинної інформації з теми дослідження.*



*Первинна інформація* – це вихідна інформація, яка є результатом безпосередніх соціологічних, експериментальних досліджень, вивчення практичного досвіду.

*Вторинна інформація* – це результат аналітико-синтетичної переробки первинної інформації.

Особливе значення первинна і вторинна інформація мають для написання наукової роботи, оскільки служать теоретичним та експериментальним підґрунтям для досягнення мети дослідження і розв'язання його завдань.

Інформація є доказом обґрунтованості наукових положень у роботі, їх достовірності й новизни.

*Достовірність* – це достатня правильність, те, що не викликає сумнівів, доказ того, що названий результат (закон, закономірність, сукупність фактів та ін.) є істинним, правдивим. Достовірність – це повторюваність результату за одних і тих саме умов при багатьох перевірках на багатьох об'єктах.



*Підсистема інформації про об'єкт (предмет) дослідження* – це систематична діяльність з отримання інформації, необхідної для вирішення його мети і завдань.

До неї входять відбір джерел з теми дослідження, їх аналіз, вибір методів, збір даних, їх обробка та аналіз для отримання інформації (первинної та вторинної) для вирішення конкретної проблеми. Детальніше цей процес можна подати у вигляді схеми.

Для отримання потрібної інформації із певної теми необхідна реалізація таких етапів:

- розробка концепції дослідження:
  - визначення мети і завдань дослідження;
  - постановка проблеми;
  - формування робочої гіпотези;
  - визначення системи показників;
- отримання та аналіз вторинної інформації;
- отримання та аналіз емпіричних даних:
  - розробка інструментарію для дослідження;
  - процес отримання даних;
  - обробка та аналіз даних;
- формування основних висновків і оформлення результатів дослідження:
  - підготовка висновків і рекомендацій;
  - оформлення результатів дослідження.

*Пошук вторинної інформації щодо об'єкта наукових експериментальних досліджень*

*Знання опублікованих (вторинних) джерел інформації з теми дослідження* – неодмінна умова забезпечення якості наукового дослідження. Воно дає змогу глибше осмислити науковий матеріал, що міститься в опублікованих працях інших учених, оскільки основні питання проблеми майже завжди викладено в більш ранніх дослідженнях.

*Для складання списку джерел з вибраної теми доцільно використовувати наявні в бібліотеках:*

- *систематичні каталоги*, в яких теми досліджень розташовані за галузями знань;
- *абеткові каталоги*, в яких картки на книжки розташовані в алфавітному порядку прізвищ дослідників чи назв;
- *предметні каталоги*, що містять теми досліджень із конкретних проблем та питань;
- *бібліографічні й довідкові видання* (посібники і покажчики з окремих тем і розділів);
- *виноски і посилання* в монографіях, підручниках, енциклопедіях, енциклопедичних словниках та ін.

*Слід виявити основні періодичні видання з вибраної проблематики.*

Відбираючи основні матеріали, слід звернутися до показників статей, опублікованих протягом календарного року і розміщених у кінці останнього номера журналу за кожний рік видання.

*Далі слід створити картотеку (або список) літературних джерел із теми.* Добре складена картотека (список), навіть за умов побіжного перегляду назв джерел, допомагає охопити тему в цілому. На її основі можна вже на самому початку дослідження уточнити структуру дисертації.

*Визначення стану вивченості теми доцільно розпочинати з ознайомлення з інформаційними виданнями, які містять оперативні систематизовані відомості про документи (опубліковані, неопубліковані), найсуттєвіші сторони їх змісту.* Інформаційні видання, на відміну від звичайних бібліографічних посібників, включають не лише відомості про надруковані праці, а й ідеї та факти, що в них містяться.

*До основних інститутів і організацій України, які здійснюють централізований збір і обробку основних видів опублікованих документів, належать:* Книжкова палата України, Український інститут науково-технічної та економічної інформації, Національна бібліотека України ім. В.І. Вернадського та інші бібліотечно-інформаційні установи загальнодержавного або регіонального рівня.

Основна маса посібників названих вище інститутів і організацій поділяється на три види: *бібліографічні, реферативні та оглядові.*

*Бібліографічні видання* містять упорядковану сукупність бібліографічних записів, показують, що видано з питання, яке цікавить спеціалістів. Бібліографічні описи виконують дві функції. Вони сповіщають про появу документа (сигнальна функція) і повідомляють необхідні відомості про його місцезнаходження (адресна функція). З бібліографічних записів складають показники і бібліографічні списки.

*Реферативні видання* містять публікації рефератів, що включають скорочений виклад змісту первинних документів (або їх частин) з основними фактичними даними і висновками. До реферативних видань належать реферативні журнали, реферативні збірники, експрес-інформації, інформаційні листівки та ін.

*Поряд із інформаційними виданнями органів НТІ, для інформаційного пошуку слід використовувати автоматизовані інформаційно-пошукові системи, бази і банки даних Інтернету.*

Особливе значення для пошуку та аналізу літератури, що видана в минулі роки, має *ретроспективна бібліографія*, призначенням якої є підготовка і поширення бібліографічної інформації про надруковані результати досліджень за певний період часу в минулому.

Широке використання бібліографічних показників, баз і банків даних, а також Інтернету забезпечить повноту відбору опублікованих і неопублікованих джерел із досліджуваної теми.

*Отримання та аналіз первинної інформації щодо об'єкта наукових експериментальних досліджень*

Для підтвердження достовірності висновків і результатів дослідження, перевірки робочої гіпотези, конкретизації проблеми важливе значення має первинна інформація, яка є складовою підсистеми інформації.

*Робоча гіпотеза дослідження* – це своєрідний алгоритм вирішення досліджуваної теми; вона допомагає встановити межі й основні напрями дослідження. Робоча гіпотеза має забезпечити достовірність, передбачуваність, перевірку положень на емпіричному матеріалі.

Для збору первинної інформації можна використати кілька методів отримання даних: *опитування, спостереження, експеримент, панель, тестування, анкетування* тощо. Кожний із названих вище методів може бути реалізований за допомогою відповідного лише цьому методу джерела інформації: анкета, опитувальний лист, тест.

Первинна і вторинна інформація, зібрана в результаті проведеного дослідження, обробляється за допомогою сучасних статистичних методик і моделей. Основні результати досліджень – висновки і рекомендації – мають бути аргументованими і достовірними. Виклад сутності проведеного дослідження здійснюється в першому розділі основної частини роботи, де висвітлюється мета дослідження, для кого і як це проводилося, дається характеристика вибірки, термін проведення, методи збору інформації, джерела отримання інформації.

#### **2.1.4 Реплікація**

*Реплікація* – повторення експерименту. Але це не просто повторення вимірювань, а повернення до попередніх умов після широкої серії досліджень, проведених за умов різних, відмінних від початкових, параметрів установок.

*Просте повторення дій чи операцій не є реплікацією.*

Приклади реплікацій:

*Приклад 1.* Досліджується тепловий лічильник на вплив оточуючої температури за різних витрат теплоносія.

Розв'язок. Реплікація здійснюється, якщо повторення експерименту відбувається при змінених режимах живлення лічильника з поверненням до початкових умов, за яких задавалась конкретна оточуюча температура і витрата теплоносія.

*Приклад 2.* Досліджується відтворюваність сигналу фоторезисторного перетворювача за різних температур фоторезистора.

Розв'язок. У результаті експерименту отримано криві температурного гістерезису, які графічно інтерпретують реплікацію.

Сигнал фоторезисторного перетворювача  $U_c$  отримується за різних температур фоторезистора  $T$  спочатку в експерименті №1, де відхилення сигналу є меншими, ніж в експерименті №2, який проводив після експерименту №1 за тих самих початкових умов, тобто при  $T=293\text{ K}$ .

*Приклад 3.* Досліджується вплив мінеральних добрив на врожайність сільськогосподарських культур.

Розв'язок. Експерименти ставляться на різних виробничих ділянках за однакових початкових умов і за умов однакового догляду за станом ділянок, чим досягається реплікація експериментів.

## 2.2 Обладнання для проведення експерименту

### 2.2.1 Фізична величина та її систематизація. Класифікація вимірювань

#### *Фізична величина та її систематизація*

*Фізична величина* (ФВ) – це властивість, загальна в якісному відношенні у багатьох матеріальних об'єктів та індивідуальна в кількісному відношенні у кожного з них.

ФВ – властивість явища чи тіла, яка може бути розрізнена якісно і визначена кількісно.

Формалізованим відображенням якісних відмінностей вимірюваних величин є їх розмірність, а кількісною характеристикою – їх *розмір*.

Отримання достовірної кількісної експериментальної інформації про розмір ФВ – це *основний зміст вимірювання*.

Значення (фізичної) величини – відображення фізичної величини у вигляді числового значення величини з позначенням її одиниці

$$\dot{A} = \{A\}[A],$$

де  $\{A\}$  – числове значення ФВ, тобто число, що дорівнює відношенню розміру вимірюваної величини до розміру одиниці цієї ФВ, чи кратної одиниці;  $[A]$  – позначення номера одиниці.

Наприклад: значення електричної напруги  $U = 220\text{В}$ , значення сили електричного струму  $I = 10\text{А}$ .

Існують системи ФВ, тобто сукупності взаємопов'язаних ФВ, в яких декілька величин приймають за незалежні, а інші визначають як залежні від них. ФВ, що входить до систем величин і взята за незалежну від інших величин цієї системи, є *основною* ФВ, а ФВ, що входить до системи величин та визначається через основні величини цієї системи, є *похідною* ФВ.

*Розмірністю* ФВ є вираз, що відображає її зв'язок з основними величинами системи величин:

- основної ФВ – умовний символ ФВ у даній системі величин;
- похідної ФВ – добуток розмірностей основних величин, піднесених до відповідних степенів.

Наприклад: розмірність швидкості  $V$  у системі величин  $L$  (довжина),  $M$  (маса),  $T$  (час) -  $\dim V = LT^{-1}$ .

*Одиницею* ФВ є величина певного розміру, взята за угодою для кількісного відображення однорідних із нею величин:

- основна одиниця системи одиниць (сукупності одиниць певної системи величин) – основної величини;
- похідна – похідної ФВ у певній системі величин.

*Позасистемна одиниця ФВ* – одиниця величини, що не належить до даної системи одиниць.

Наприклад: електронвольт ( $eV$ ) – позасистемна одиниця енергії відносно системи SI; доба, година, хвилина – позасистемні одиниці часу відносно системи SI.

У країнах світу є загальноприйнятою Міжнародна система одиниць ФВ (Systeme Internationale d'unités, SI), яку було прийнято XI Генеральною конференцією з мір та ваги (Conference Generale des Poids et Mesures, CGPM, ГКМВ) у жовтні 1960 року і уточнювалася протягом XII-XX ГКМВ.

Система складається з 7 основних і 2 додаткових одиниць, а також 113 похідних одиниць, в тому числі й одиниць електричних і магнітних величин – 40. Основні одиниці системи SI: довжина – метр ( $m$ ); маса – кілограм (кг); час – секунда ( $s$ ); сила електричного струму – ампер (А); термодинамічна температура – кельвін (К); сила світла – кандела (кд); кількість речовини – моль (моль); а додаткові одиниці: плоский кут – радіан (рад); тілесний кут – стерadian (ср).

*Основна одиниця електрики і магнетизму* – ампер, що дорівнює силі незмінного струму, який під час проходження по двох паралельних прямолінійних провідниках безмежної довжини і мізерно малого кругового перерізу, розташованого на відстані 1 м один від іншого у вакуумі, викликав би на кожній ділянці провідника довжиною 1 м силу взаємодії, що дорівнює  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.

18 похідних одиниць SI ГКМВ мають спеціальні назви і 16 одиниць, які мають назви за прізвищами учених, в тому числі: ват (Вт, W), вебер (Вб, Wb), вольт (В, V), генрі (Гн, H), герц (Гц, Hz), кулон (Кл, C), ом (Ом,  $\Omega$ ), сіменс (См, S), тесла (Тл, T), фарад (Ф, F) (Додаток В).

На практиці широко застосовуються кратні та частинні одиниці ФВ. *Кратна одиниця ФВ* – це одиниця величини, яка в ціле число разів є більшою за одиницю, від якої вона утворюється; *частинна одиниця* – одиниця, яка в ціле число разів є меншою за одиницю, від якої вона утворюється. Множники, префікси та їх означення для кратних і частинних одиниць системи SI наведені у Додатку Г.

В Україні регламентується застосування одиниць величин системи SI. Міжнародні стандарти *Міжнародної організації зі стандартизації* (ISO, МОС) ISO 31/0:1992-ISO 31/13:1992 та ISO 1000:1992 встановлюють одиниці ФВ, які рекомендовані до застосування у країнах світу, в тому числі ISO 1000:1992 – основні одиниці SI, а ISO 31/5:1992 – похідні одиниці SI електричних та магнітних величин.

Розгляд фізичних величин в їх різних аспектах обмежимо лише тими ознаками, які викликають найбільший інтерес з точки зору отримання вимірювальної інформації (рис. 2.1).



Рисунок 2.1 – Систематизація фізичних величин

Основною ознакою систематизації є належність величин до однієї з трьох основних сторін явища – *речової, енергетичної та інформаційної*.

Вимірювання величин *речової групи* є необхідним для вивчення фізичних і фізико-хімічних властивостей матеріалів, речовин та їх складу для управління технологічними процесами.

Вимірювання величин *енергетичної групи* є необхідним для вивчення і управління процесами перетворення, передавання та використання енергії.

Величини *інформаційної групи* відображають динамічні та статичні характеристики процесів. Вимірювання зазначених величин є необхідним для якісного й ефективного управління.

За родом величини всі фізичні величини поділяють на *електричні, неелектричні та магнітні*.

Відзначимо, що число електричних і магнітних ФВ, що підлягають вимірюванню, нині стабілізувалось і не перевищує 100. У той самий час число неелектричних ФВ, які вимірюються і які необхідно вимірювати, з кожним роком зростає і на початок ХХІ ст. перевищило 4000. Це свідчить про випереджальний розвиток аналітичного приладобудування, засобів технологічного контролю, засобів вимірювань і контролю навколишнього середовища, а також засобів контролю речовин, матеріалів виробів.

За числом значень, яких може набути вимірювана величина на скінченному проміжку часу чи простору, ФВ поділяються на *неперервні* (аналогові) й *дискретні*.

*Аналоговою* названо фізичну величину, яка на кінцевому часовому інтервалі в заданому діапазоні набуває нескінченної кількості значень.

*Квантованою* називають фізичну величину, що поділена на рівні за розміром частини – кванти.

Найбільш пристосовані до квантування адитивні ФВ.

*Адитивні величини* – це величини, які підсумовуються експериментально. Природно квантована фізична величина поділена на кванти від природи (електричний заряд, маса). Штучно квантована ФВ поділена штучно на кванти або інтервали, наприклад: довжина лінійки з нанесеними на ній відмітками; інтервал часу поділений рівновіддаленими імпульсами.

Розрізняють неперервну за значенням і в часі ФВ, квантовану за значенням і неперервну в часі ФВ, неперервну за значенням і дискретизовану в часі ФВ, квантовану за значенням і дискретизовану в часі ФВ.

За наявністю розмірності розрізняють *розмірні (абсолютні) ФВ* *безрозмірні (відносні) ФВ*.

Розмірною є величина, в розмірності якої розмірність хоча однієї з основних величин піднесена до степеня, що не дорівнює нулю.

Безрозмірною є величина, в розмірності якої всі степені розмірностей основних величин дорівнюють нулю.

Відмінність ФВ, визначена різними властивостями явищ, відображає лише один їх бік – якісний. А поняття ФВ містить і іншу сторону – кількісну, що є індивідуальною для кожного об'єкта й оцінюваною числовим виразом величини. Останнє дає можливість порівнювати фізичні величини і виконувати над ними математичні операції.

Вимірювання фізичних величин є одним з найважливіших експериментальних методів пізнання, що ґрунтується на принципі відображення, в якому чітко розрізняють предмет відображення, в даному випадку ФВ певного розміру, і результат відображення, тобто значення ФВ. Вимірювання починається експериментально, а завершується аналітично їх значеннями, тому методологічно виправданою є і відповідна форма рівняння вимірювання.

Основною операцією, що дозволяє отримати результати вимірювання, є операція порівняння вимірюваної величини  $X$ , та величини, взятої за зразком  $[\chi]$ . Відома аксіома Евдокса–Архімеда: «Якщо на прямій дано два відрізки  $A > B$ , то можна  $A$  повторити додатними стільки разів, щоб сума була більшою  $B$ »:  $A + A + \dots + A = A \cdot (N + 1) > B$

Якщо  $A \cdot N < B$ ,  $BA \cdot N < B$ ,  $B \gg A$ , то з цієї аксіоми отримуємо рівняння, що ґрунтується на припущенні рівності всіх відрізків  $A$ , які підсумовуються всередині відрізка  $B$ :

$$N = \frac{B}{A}.$$

Прийнявши  $X = B_a$ , а  $A = [\chi]$ , отримаємо:

$$N = \frac{X}{[\chi]}.$$

Останнє співвідношення, подане у вигляді

$$X = N \cdot [\chi],$$

називають *основним рівнянням вимірювання*.

Таким чином, для реалізації вимірювання у самому тривіальному випадку необхідно виконати дві операції:

- операцію відтворення зразкової величини  $[\chi]$ ;
- операцію порівняння  $X$  і  $[\chi]$ .

Кількісна оцінка вимірюваної величини має відповідати двом вимогам:

- внаслідок вимірювання потрібно отримати не просто число, а число іменоване, тобто в певних одиницях, загальноприйнятих для даної величини (наприклад,  $I = 5[A]$ );
- результат виміру має містити оцінку точності отриманого значення вимірюваної величини ( $I = 5[A] \pm \Delta$ ).

Характерною рисою вимірювання є також те, що цей процес обов'язково передбачає той чи інший, простий чи складний фізичний експеримент. Кількісну інформацію про величину не можна отримати тільки теоретичними розрахунками. Якщо значення величини отримують розрахунком, то використані в цих випадках розрахункові формули обов'язково повинні містити значення інших величин, що визначаються експериментально.

### *Класифікація вимірювань*

Найбільш поширеними характеристиками матеріальних об'єктів та процесів є величини і залежності між ними. Якраз про них створюється інформація за допомогою засобів вимірювання. Вимірювання є дуже різноманітними, і кількість їх різноманіть зростає. Свідченням цього є динамічні вимірювання та сумісні вимірювання величин.

Для класифікації вимірювань необхідно встановити їх найбільш суттєві ознаки. До найбільш суттєвих ознак різних вимірювань відносяться (рис. 2.2):

- відсутність чи наявність у процедурі вимірювання перетворення роду вимірюваної величини та обчислення її значення за відомими залежностями;
- вид рівняння вимірювання;
- призначеність вимірювання для незмінних чи змінних у часі вимірюваних величин;
- особливості визначення похибок вимірювань;
- наявність чи відсутність розмірності у вимірюваної величини;
- співвідношення між кількістю вимірюваних величин та кількістю вимірювань.





Рисунок 2.2 – Класифікація вимірювань

За відсутністю чи наявністю у процедурі вимірювань перетворення роду вимірюваної ФВ та обчислення її значення за відомими залежностями вимірювання класифікують на прямі та непрямі.

*Пряме вимірювання.* Вимірювання однієї величини, значення якої знаходять безпосередньо без перетворення її роду та використання відомих залежностей.

Для реалізації прямих вимірювань фізичної величини  $X$  необхідно мати компаратор, а також багатозначну міру з відповідним діапазоном зміни значень, чи однозначну міру та масштабний вимірювальний перетворювач. За всіх інших однакових умов прямим вимірюванням властиві мінімальні похибки.

*Непряме вимірювання.* Вимірювання, в якому значення однієї чи декількох вимірюваних величин визначають після перетворення роду величини чи обчислення за відомими їх залежностями від декількох величин аргументів, що вимірюються прямо.

Непрямі вимірювання поділяються на *опосередковані, сумісні та сукупні.*

*Опосередковане вимірювання.* Непряме вимірювання однієї величини з перетворенням її роду чи обчисленнями за результатами вимірювань інших величин, з якими вимірювана величина пов'язана явною функційною залежністю.

Характерними для опосередкованих вимірювань є не вимірювальне перетворення, яке здійснюється або шляхом фізичного вимірювального перетворення, або шляхом числового вимірювального перетворення.

При автоматичних опосередкованих вимірювальних перетвореннях прямі вимірювання вхідних величин аргументів та числові вимірювальні перетворення результатів їхніх вимірювань, із метою знаходження значення опосередковано вимірюваної величини, здійснюється автоматично всередині засобу вимірювання.

*Сукупне вимірювання.* Непряме вимірювання, в якому значення декількох одночасно вимірюваних однорідних величин отримують розв'язанням рівнянь, що пов'язують різні сполучення цих величин, які вимірюються прямо чи опосередковано.

Метою сукупних вимірювань є знаходження шляхом числових вимірювальних перетворень значень декількох ФВ, за неможливості їхнього окремого прямого вимірювання. При цьому, завдяки усередненню, інколи досягається ще і зменшення випадкової похибки вимірювання.

Прикладом сукупних випромінювань може бути вимірювання опору кожного з двох резисторів  $R_1$ ,  $R_2$ , з'єднаних послідовно та паралельно. В результаті прямого вимірювання омметром паралельно з'єднаних резисторів становить  $1/R_{\text{пар}} = 1/R_1 + 1/R_2$ . Із систем двох рівнянь із двома невідомими обчислюємо шукані значення сукупно вимірюваних опорів  $R_1$ ,  $R_2$ .

### 2.2.2 Значущі цифри і правила заокруглення

Вимірюючи будь-яку величину, дослідник одержує певне число, зчитуючи його зі шкали вимірювального приладу. При цьому кількість цифр (розрядів) числа не може бути довільною. Вона визначається розмахом шкали та ціною однієї її поділки. Так, під час вимірювання об'єму розчину бюреткою ємністю  $25 \text{ см}^3$  з ціною поділки  $0,1 \text{ см}^3$  найменше достовірне значення об'єму становить  $0,1 \text{ см}^3$ , а значення, одержані оцінкою «на око» часток поділки, наприклад,  $0,13$ ;  $0,27$  вже є сумнівними у другому знаку. Тому, звичайно, приймають, що похибка зчитування даних зі шкал приладів становить половину однієї поділки, у даному випадку  $0,05 \text{ см}^3$ . Таким чином, значення  $17,256 \text{ см}^3$ , одержане за допомогою такої бюретки, не має сенсу, а всі мислимі значення об'ємів, зчитані з її шкали, лежать у діапазоні  $0,05 \div 25,00 \text{ см}^3$ .

На наступному етапі проводиться обчислення результатів аналізу з використанням конкретних функціональних залежностей (формул), аргументами яких є значення безпосередньо вимірюваних величин. Результати аналізу і результати обчислень прийнято виражати тільки *значущими цифрами*, якими називаються всі достовірні цифри плюс перша із недостовірних (сумнівних). Отже, всі результати під час їх представлення треба заокруглювати до першої недостовірної цифри.

Визначити, які цифри в експериментально одержаних значеннях є достовірними, не завжди просто. Для цього треба знати величину випадкової та

систематичної похибки кожного представленого результату, тобто недостовірність кожного представленого результату, що не завжди можливо.

Як *статистичні критерії недостовірності серії паралельних вимірювань* (як критерії оцінки випадкової похибки) можна використовувати стандартне відхилення і довірчий інтервал. Недостовірність *одиничних вимірювань* оцінити з допомогою статистичних критеріїв не можна, оскільки поняття «відтворюваність» не поширюється на одиничні вимірювання. Для одиничних вимірювань недостовірність оцінюють величиною максимально можливої систематичної похибки, за значення якої приймають, як правило, ціну найменшої поділки на шкалі приладу, якщо немає спеціальних вказівок.

*Правило 1. Значність добутку або частки від ділення визначається значністю співмножника з найменшим числом значущих цифр.*

Якщо користуватися цим несуворим правилом, то у відповіді треба залишити чотири значущі цифри і результат записати як 98,50, оскільки в числах 0,2000 і 15,15 міститься по чотири значущі цифри, а в числі 190,70 – п'ять значущих цифр. Хоча в разі використання цього правила є ризик помилитися, як у розглянутому прикладі 1.5; все-таки у більшості випадків користуються саме цим правилом.

*Примітка.* Нуль у числах може бути значущим і незначущим. Нулі, що стоять у десятковому дробові на початку числа, завжди є незначущими і слугують лише для вказування місця коми у десятковому дробові. Наприклад, число 0,02 містить одну значущу цифру (2). Нулі, що стоять між цифрами, є завжди значущими. Наприклад, у числі 0,301 три значущі цифри.

Нулі у кінці числа можуть бути значущими і незначущими. Нулі, що *стоять у кінці числа після коми у десятковому дробові*, вважаються значущими. Наприклад, у числі 190,70 п'ять значущих цифр. Нулі, що стоять у кінці цілого числа, можуть бути значущими, а можуть просто вказувати на порядок числа. Наприклад, у числі 300 може бути одна значуща цифра (цифра 3), дві значущі цифри (цифри 3 і 0) і три значущі цифри (цифри 3, 0 і 0). Щоб уникнути невизначеності, рекомендується у таких випадках представити число у вигляді добутку числа, що містить тільки значущі цифри, на  $10^n$ . Наприклад, якщо в числі 300 одна значуща цифра, то його треба записати як  $3 \times 10^2$ , якщо дві значущі цифри –  $3,0 \times 10^2$ , якщо три значущі цифри –  $3,00 \times 10^2$ .

Вище було розглянуто несуворе правило для оцінки значності добутку або частки від ділення. Розглянемо правила визначення значності при інших арифметичних діях.

*Правило 2. При додаванні або відніманні значність суми або різниці визначається значністю числа, що має найменшу кількість десяткових знаків (має найбільшу абсолютну недостовірність). Числа, що мають степені, перетворюють приводячи показники степенів доданків до найбільшого.*

*Правило 3. При піднесенні числа у степінь відносна недостовірність збільшується у число разів, що є рівним показникові степеня.*

Так, в разі піднесення числа у квадрат відносна недостовірність збільшується у два рази.

При добуванні кореня квадратного також необхідно враховувати *відносну недостовірність* підкореневого числа.

*Правило 4.* Відносна недостовірність результату добування кореню є удвічі меншою відносної недостовірності підкореневого числа.

*Правило 5.* При логарифмуванні числа кількість значущих цифр у мантисі дорівнює кількості цифр, яку містив нестепеневий член числа. Характеристика логарифма не входить у кількість значущих цифр, оскільки вона вказує лише на порядок числа, котре логарифмують.

*Правило 6.* При обчисленні антилогарифма кількість значущих цифр у нестепеновому члені одержаного числа дорівнює кількості цифр у мантисі.

### 2.2.3 Засоби вимірювальної техніки

*Виміром* називається знаходження значень фізичних величин дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

В Україні прийнята Міжнародна система одиниць (СІ). Основними одиницями СІ є: метр (м), кілограм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвін (К), кандела (кд), моль (моль). Крім основних одиниць, встановлено похідні одиниці.

В табл. 2.1 наведено найбільш вживані похідні одиниці електричних і магнітних величин.

Найменування кратних і часткових одиниць утворюються шляхом застосування приставок: піко- ( $10^{-12}$ ), нано- ( $10^{-9}$ ), мікро- ( $10^{-6}$ ), мілі- ( $10^{-3}$ ), санти- ( $10^{-2}$ ), деци- ( $10^{-1}$ ), дека- ( $10^1$ ), гекто- ( $10^2$ ), кіло- ( $10^3$ ), мега- ( $10^6$ ), гіга- ( $10^9$ ), тера- ( $10^{12}$ ).

*Засобами електричних вимірів* називають технічні засоби, які використовують під час електричних вимірів і які мають нормовані похибки. Розрізняють наступні види засобів електричних вимірів: міри, електровимірювальні прилади, вимірювальні перетворювачі, електровимірювальні установки, вимірювальні інформаційні системи.

*Мірою* називається засіб вимірів, призначений для відтворення фізичної величини заданого розміру, наприклад, вимірювальна котушка опору, конденсатор, гиря. Набір мір являє собою спеціально підібраний комплект мір для відтворення ряду однойменних величин різного розміру. Прикладами набору мір є магазини опорів, ємностей і т.д.

*Електровимірювальними приладами* називають засоби електричних вимірювань, призначені для вироблення сигналів вимірювальної інформації, тобто інформації про значення вимірюваної величини, у формі, доступній для безпосереднього сприйняття спостерігачем, наприклад, амперметр, вольтметр, ватметр, фазометр.

Таблиця 2.1 – Основні та похідні одиниці фізичних величин

Назва		Позначення		Фізична величина	Вираження	
українська	міжнародна	українське	міжнародне		через інші одиниці СІ	через основні одиниці СІ
радіан	radian	рад	rad	плоский кут	1	м/м
стерадіан	steradian	ср	sr	просторовий кут	1	м <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
герц	hertz	Гц	Hz	частота		с <sup>-1</sup>
ньютон	newton	Н	N	сила		м·кг·с <sup>-2</sup>
паскаль	pascal	Па	Pa	тиск	Н/м <sup>2</sup>	м <sup>-1</sup> ·кг·с <sup>-2</sup>
джоуль	joule	Дж	J	енергія, робота	Н·м	м <sup>2</sup> ·кг·с <sup>-2</sup>
ват	watt	Вт	W	потужність, потік енергії	Дж/с	м <sup>2</sup> ·кг·с <sup>-3</sup>
кулон	coulomb	Кл	C	електричний заряд	А·с	с·А
вольт	volt	В	V	напруга, електричний потенціал	Вт/А	м <sup>2</sup> ·кг·с <sup>-3</sup> ·А <sup>-1</sup>
фарад	farad	Ф	F	електрична ємність	Кл/В	м <sup>-2</sup> ·кг <sup>-1</sup> ·с <sup>4</sup> ·А <sup>2</sup>
ом	ohm	Ом	Ω	електричний опір	В/А	м <sup>2</sup> ·кг·с <sup>-3</sup> ·А <sup>-2</sup>
сіменс	siemens	См	S	електрична провідність	А/В	м <sup>-2</sup> ·кг <sup>-1</sup> ·с <sup>3</sup> ·А <sup>2</sup>
вебер	weber	Вб	Wb	потік магнітної індукції	В·с	м <sup>2</sup> ·кг·с <sup>-2</sup> ·А <sup>-1</sup>
тесла	tesla	Тл	T	магнітна індукція	Вб/м <sup>2</sup>	кг·с <sup>-2</sup> ·А <sup>-1</sup>
генрі	henry	Гн	H	індуктивність	Вб/А	м <sup>2</sup> ·кг·с <sup>-2</sup> ·А <sup>-2</sup>
градус Цельсія	degree Celsius	°C	°C	термодинамічна температура		К
люмен	lumen	лм	lm	світловий потік	кд·ср	кд
люкс	lux	лк	lx	освітленість	лм/м <sup>2</sup>	кд·м <sup>-2</sup>
бекерель	becquerel	Бк	Bq	радіоактивність		с <sup>-1</sup>
грей	gray	Гр	Gy	поглинута доза іонізуючого випромінювання	Дж/кг	м <sup>2</sup> ·с <sup>-2</sup>
зіверт	sievert	Зв	Sv	ефективна доза іонізуючого випромінювання	Дж/кг	м <sup>2</sup> ·с <sup>-2</sup>
катал	katal	кат	kat	активність каталізатора		с <sup>-1</sup> ·моль

*Вимірювальні перетворювачі* – технічні засоби з нормованими метрологічними характеристиками, що служать для перетворення вимірюваної величини в іншу величину або вимірюваний сигнал, зручний для обробки, зберігання, подальших перетворень, індикації та передачі, але який безпосередньо не сприймається оператором. Вимірювальний перетворювач або входить до складу якого-небудь вимірювального приладу (вимірювальної установки, вимірювальної системи та ін.), або використовується разом з яким-небудь засобом вимірювань.

*Електровимірювальна установка* складається з ряду засобів вимірювань (мір, вимірювальних приладів, вимірювальних перетворювачів) і допоміжних пристроїв, розташованих в одному місці. За допомогою таких установок можна в ряді випадків виконувати більш складні й більш точні вимірювання, ніж за допомогою окремих вимірювальних приладів. Електровимірювальні установки широко використовуються, наприклад, для перевірки та градування електровимірювальних приладів і випробувань магнітних матеріалів.

*Вимірювальні інформаційні системи* – це сукупність засобів вимірювань і допоміжних пристроїв, з'єднаних між собою каналами зв'язку. Вони призначені для автоматичного одержання вимірюваної інформації від ряду її джерел, а також для її передачі й обробки.

## **2.3 Електромеханічні прилади для проведення експерименту. Вимірювальні механізми приладів та їх застосування**

### **2.3.1 Загальна структурна схема електромеханічного приладу**

*В електромеханічних приладах енергія вимірюваної величини перетворюється в механічну.*



Рисунок 2.3 – Загальна структурна схема електромеханічного приладу

*Електромеханічний прилад містить у собі:*

ВП – вхідний перетворювач (подільовач напруги, шунти, діоди тощо);

ВМ – вимірювальний механізм, що складається з рухомої та нерухомої частин;

ПВ – відліковий пристрій (шкала із числовими позначками);

X – вхідна (вимірювана) величина;

$Y_1$  – перетворена величина;

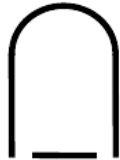
$Y_2$  – величина, перетворена в механічну (кутове переміщення рухомої частини).

## 2.3.2 Прилади магнітоелектричної та електромагнітної систем

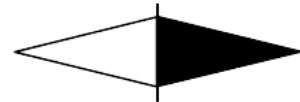
### Прилади магнітоелектричної системи

В основі дії цих приладів лежить принцип взаємодії магнітного поля, створеного постійним магнітом, з вимірюваним струмом, що протікає по рухомій рамці.

Використовують магнітоелектричні прилади з рухомою рамкою і рухомих магнітом.



а



б

Рисунок 2.4 – Графічні позначення приладів магнітоелектричної системи: а – з рухомою рамкою; б – з рухомих магнітом

Найпоширенішими є механізми із рухомою рамкою.

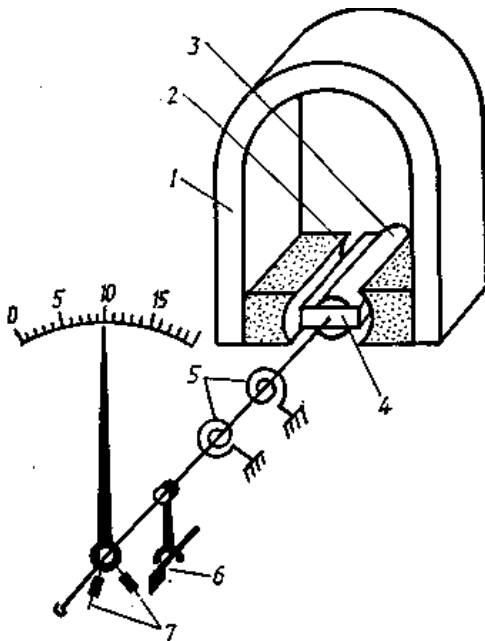


Рисунок 2.5. – Вимірювальний механізм приладу магнітоелектричної системи, які складається з п'яти основних частин: 1 – постійний магніт; 2 – полюсні наконечники; 3 – сталевий циліндр; 4 – алюмінієва рамка, наклеєна на сталевий циліндр; 5 – спіральні пружини, через які подається вимірюваний струм у рамку

### Принцип дії

У проміжку між полюсними наконечниками та сердечником, де діє сильне магнітне поле, встановлюється рамка.

Вимірюваний струм пропускають крізь рамку; при цьому провідники зі струмом опиняються в полі постійного магніту, де на них діє сила, прямо пропорційна магнітній індукції поля та силі струму у провіднику. Ця взаємодія

викликає обертальний момент, під дією якого рамка, а разом із нею й циліндр, почнуть повертатися. Спиральні пружини створюють протидіючий момент.

Якщо обертальний момент дорівнює протидіючому, то покажчик стрілки відхилиться на кут  $\alpha$ , пропорційний сталій силі струму в рамці.

*Рівняння шкали*

$$\alpha = S \cdot I,$$

де  $S$  – чутливість приладу, що показує, на який кут відхиляється стрілка приладу за зміни сили струму  $I$  на одиницю.

Як видно з рівняння шкали, шкала магнітоелектричного приладу є рівномірною. Також можна дійти висновку, що за допомогою магнітоелектричних приладів можна вимірювати тільки постійні струм і напругу, а також опір.

*Переваги:*

- 1) рівномірною шкалою;
- 2) має сильне власне магнітне поле (не має потреби в захисті);
- 3) споживає малі струми та відноситься до приладів із малими власними втратами;
- 4) велика чутливість, тому можуть виконувати роль нульових покажчиків.

*Недоліки:*

- 1) складність конструкції;
- 2) не розраховані на перевантаження;
- 3) робота можлива тільки в колах постійного струму.

Промислово виготовляються магнітоелектричні амперметри й вольтметри щитові та переносні, однограничні та багатограничні всіх класів точності від 0,1 і нижче.

### *Гальванометри магнітоелектричної системи*

*Гальванометром* називається електровимірювальний прилад, що має високу чутливість до струму або напруги. Гальванометри широко використовуються в електровимірювальній техніці в якості нуль-індикатора, а також для вимірювань малих струмів і напруги.

У гальванометрів чутливість є підвищеною за рахунок значного зменшення протидіючого моменту, для чого рухоми рамку приладу встановлюють на розтяжках або підвісках із тонкого дроту, чим досягається малий питомий протидіючий момент.

Крім цього, для гальванометрів використовують постійні магніти з найбільшою магнітною індукцією, що також підвищує чутливість приладу.

Балістичні гальванометри дозволяють вимірювати малі кількості електрики  $Q$  (імпульси струму), що протікають протягом коротких проміжків часу – часток секунди.



Рівняння шкали балістичного гальванометра:

$$\alpha = S_Q \cdot I,$$

де  $S_Q$  – балістична чутливість, що, на відміну від чутливості струму, залежить від опору зовнішнього кола, на якому замкнений гальванометр.

Чутливість  $S_Q$  підвищується зі збільшенням опору зовнішнього кола, тому перед застосуванням гальванометра необхідно визначити його балістичну сталу при тому опорі кола, при якому гальванометр буде працювати.

### *Логометр магнітоелектричної системи*

*Логометр магнітоелектричної системи* – прилад без протидіючої пружини, що має дві рухомі рамки, розташовані під кутом одна до одної на загальній осі.

Живлення до котушок подається через тонкі стрічки, що не створюють протидіючого моменту. Під час протікання струмів через котушки створюються два протилежно спрямованих обертальних моменти.

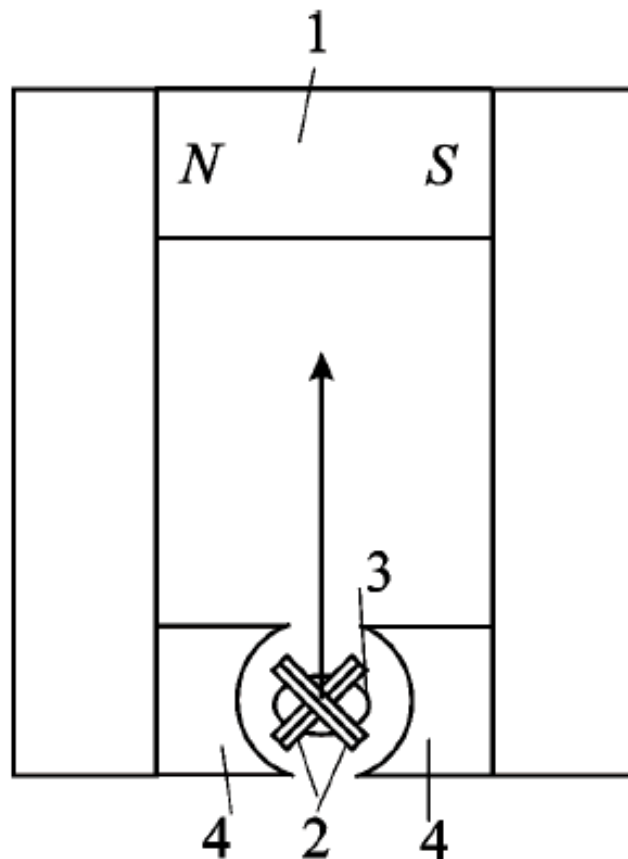


Рисунок 2.6 – Будова магнітоелектричного логометра: 1 – постійний магніт; 2 – рухомі рамки; 3 – сердечник; 4 – полюсні наконечники

## Рівняння шкали

$$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right).$$

Кожному відношенню струмів у рамках відповідає певний кут відхилення стрілки.

Логометри магнітоелектричної системи широко використовуються під час вимірювання опору (мегомметри, омметри).

## Прилади електромагнітної системи

Це прилади, в яких обертальний момент виникає в результаті взаємодії поля електромагніту з феромагнітним сердечником.

Існують три конструкції електромагнітних вимірювальних механізмів: із плоскою котушкою, із круглою котушкою та із замкнутим магнітопроводом. Із названих механізмів останній є найбільш досконалим.

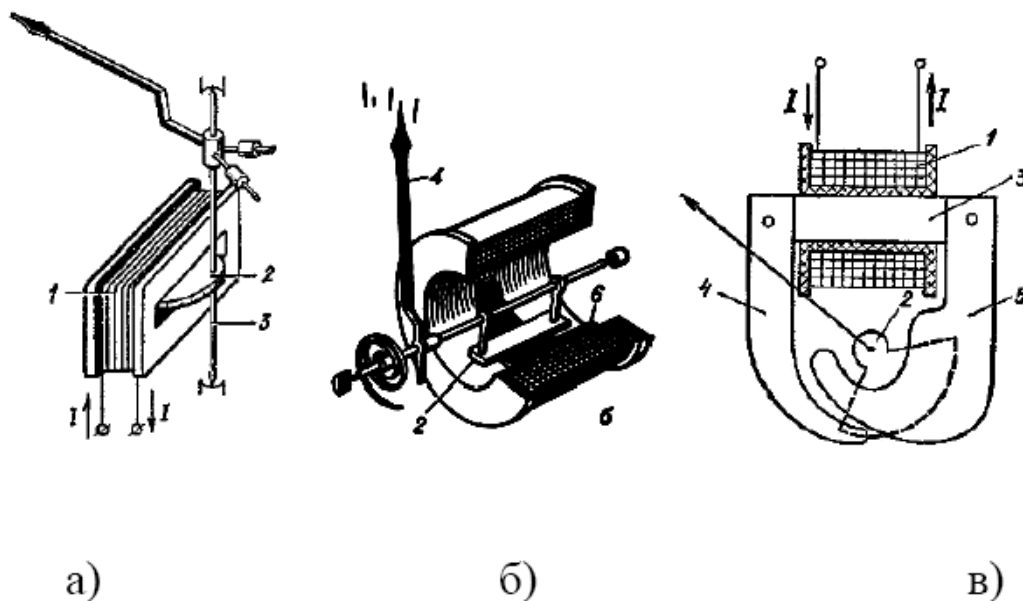


Рисунок 2.7 – Будова механізмів приладів електромагнітної системи: а – із плоскою котушкою; б – із круглою котушкою; в – із замкнутим магнітопроводом

Будова механізму із плоскою котушкою: 1 – неферомагнітний каркас із котушкою з товстого дроту; 2 – феромагнітний сердечник (пластина); 3 – вісь із опорами.

Будова механізму із круглою котушкою: 2 – рухомий сердечник; 4 – стрілка; 6 – нерухомий сердечник.

Будова механізму із замкнутим магнітопроводом: 1 – котушка; 2 – рухомий сердечник з магнітом'якої сталі або пермалою; 3 – нерухомий магнітопровід; 4, 5 – полюсні наконечники.

Принцип дії електромагнітних вимірювальних приладів розглянемо на прикладі механізму із плоскою котушкою (рис. 2.7 а). Вимірюваний струм, що протікає через котушку 1, створює намагнічувальну силу; ця сила зтягує феромагнітний сердечник 2 всередину котушки, що викликає поворот стрілки приладу.

Для створення протидіючого моменту використовуються протидіючі пружини (як показано на рис. 2.7 б) або розтяжки. Для зупинення коливань рухомої частини в електромагнітних вимірювальних механізмах зазвичай використовують повітряні або рідинні заспокоювачі.

#### *Рівняння шкали*

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot W} \cdot \frac{dL}{d\alpha} \cdot I^2 = A \cdot I^2 = S \cdot I,$$

де  $W$  – енергія, створювана протидіючими пружинами або розтяжками;  $L$  – індуктивність котушки;  $A$  – стала приладу, залежна від питомого протидіючого моменту, конструкції й розмірів котушки та магнітної проникності середовища, що знаходиться усередині котушки;  $S = A \cdot I$  – чутливість електромагнітного приладу.

Із рівняння шкали випливає, що кут відхилення стрілки залежить від квадрата струму, тому приладами електромагнітної системи можна вимірювати як постійний струм, так і змінний. Електромагнітні вимірювальні механізми використовуються в амперметрах і вольтметрах.

#### *Переваги:*

- 1) простота конструкції;
- 2) можуть вимірювати більші струми, тому що котушки нерухомі та їх можна намотати провідником великого перерізу;
- 3) витримують як короткочасні, так і тривалі навантаження;
- 4) можуть працювати в колах постійного і змінного струму.

#### *Недоліки:*

- 1) нерівномірність шкали і відносно низька чутливість при вимірюваннях малих струмів;
- 2) залежність показників приладу від впливу зовнішніх магнітних полів;
- 3) низький частотний діапазон вимірювань;
- 4) велике власне споживання енергії.

Промислово виробляється: переносні амперметри класу точності 0,5 з верхньою межею вимірювань від 10 мА до 10 А на частоти до 1500 Гц; щитові однограничні амперметри класів точності 1,0; 1,5; 2,5 на струми до 300 А із вбудованими трансформаторами струму; переносні вольтметри класу точності 0,5 з верхньою межею вимірювань від 1,5 до 600 В; щитові вольтметри класів точності 1,0; 1,5; 2,5 з верхніми межами вимірювань від 0,5 до 600 В

безпосереднього включення і до 450 кВ із трансформаторами напруги на різні фіксовані частоти від 50 до 1000 Гц.

### *Логометр електромагнітної системи*

Широкого використання на змінному струмі набули *електромагнітні логометри*. Електромагнітні логометричні механізми бувають двомоментні та тримоментні.

Двомоментний логометр електромагнітної системи складається із двох нерухомих котушок і двох сердечників, закріплених на одній осі.

Котушки зі струмами й сердечниками закріплені так, що в разі збільшення кута повороту  $\alpha$  і зміни положення сердечників відносно котушок індуктивність однієї котушки зростає, а іншої - спадає. Обертальні моменти, що діють на сердечники, спрямовані у протилежні боки. Для статичної рівноваги, за якої обертальні моменти, створювані першою та другою котушками, дорівнюють  $M_1 = M_2$ , можна записати:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dL_1}{d\alpha} \cdot I_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL_2}{d\alpha} \cdot I_2^2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = f(\alpha),$$

де  $L_1$  і  $L_2$ ,  $I_1$  і  $I_2$  – відповідно індуктивності та струми першої та другої котушок.

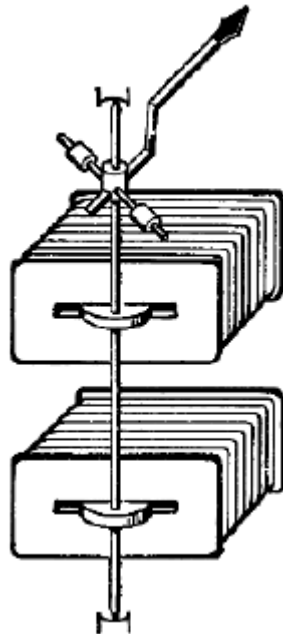


Рисунок 2.8 – Будова двомоментного магнітоелектричного логометра

*Електромагнітні вимірювальні логометричні механізми* використовуються у фазометрах і частотомірах, але є менш поширеними, ніж логометри магнітоелектричної та електродинамічної систем.

### 2.3.3 Електродинамічні та феродинамічні прилади

#### *Електродинамічні прилади*

Це прилади, в яких обертальний момент створюється за рахунок взаємодії магнітних полів нерухомої та рухомої котушок зі струмами.

На рис. 2.9 показано будову і зовнішній вигляд *електродинамічного вимірювального механізму*.

На рисунку 2.9 позначені: 1 – нерухома котушка з товстого дроту з малою кількістю витків; 2 – рухома котушка з тонкого дроту з великою кількістю витків.

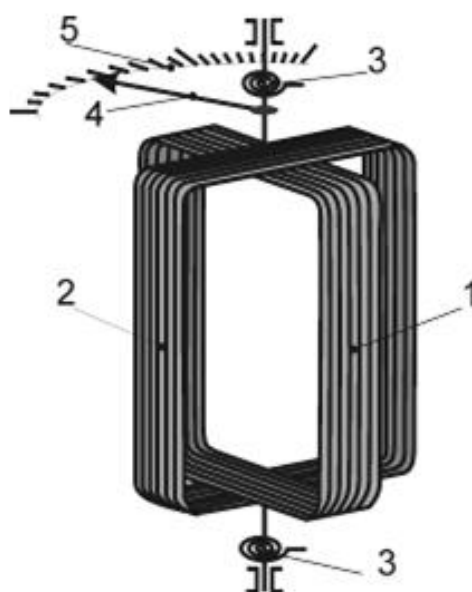


Рисунок 2.9 – Будова механізму електродинамічного приладу

Нерухома котушка 1 зазвичай складається із двох однакових частин, розділених повітряним проміжком. Нерухома котушка виготовляється з товстого дроту, намотаного на ізоляційний каркас. Рухома котушка 2 виконується безкаркасною з мідного або алюмінієвого дроту. Для введення обмотки рухомої котушки в коло вимірюваного струму використовують спіральні пружинки (як показано на рис. 2.9) або розтяжки.

Власне магнітне поле електродинамічного вимірювального механізму є невеликими, тому для захисту від впливу зовнішніх полів використовують *екранування* (вимірювальний механізм розташовують всередині одного або двох екранів з феромагнітного матеріалу) або *астазування* (використовується астатичний вимірювальний механізм, що складається із двох пар котушок, причому магнітні поля нерухомих котушок спрямовані взаємно протилежно).

#### *Принцип дії*

Під час протікання струму  $i_1$  по нерухомій котушці створюється магнітний потік, що взаємодіє зі струмом рухомої котушки. Під час протікання

струму  $i_2$  через рухому котушку в ній виникає електромагнітна сила, що діє на кожний її виток.

Сили, що виникли, прагнуть повернути рухому котушку, а разом із нею і стрілку приладу так, щоб магнітні потоки рухомої та нерухомої котушок збігалися. Для заспокоєння рухомої частини використовують повітряні або магніто індукційні заспокоювачі.

*Рівняння шкали для постійного струму*

$$\alpha = \frac{1}{W} \cdot \frac{dM_{1,2}}{d\alpha} \cdot I_1 \cdot I_2 = S \cdot I_1 \cdot I_2,$$

де  $M_{1,2}$  – взаємна індукція між нерухомою і рухомою котушками;  $I_1$  і  $I_2$  – струми відповідно нерухомої та рухомої котушок.

*Рівняння шкали для змінного струму*

$$\alpha = \frac{1}{W} \cdot \frac{dM_{1,2}}{d\alpha} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos \psi = S \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos \psi,$$

де  $\psi$  – кут зсуву між струмами нерухомої та рухомої котушок.

У колах змінного струму обертальний момент електродинамічного механізму залежить від миттєвих або діючих значень.

*Електродинамічними приладами можна вимірювати струми, напруги та потужності в колах змінного і постійного струму.*

### *1. Вимірювання струму*

Під час вимірювань малих струмів (до 0,5 А) котушки включаються послідовно (рис. 2.10 а); при цьому  $I_1 = I_2$ .

Під час вимірювань великих струмів (більше 0,5 А) котушки включаються паралельно (рис. 2.10 б). У кола котушок включаються такі додаткові резистори, щоб кут зсуву фаз між струмами в котушках дорівнював нулю. У цьому випадку струм у кожній котушці є пропорційним загальному струму в колі.

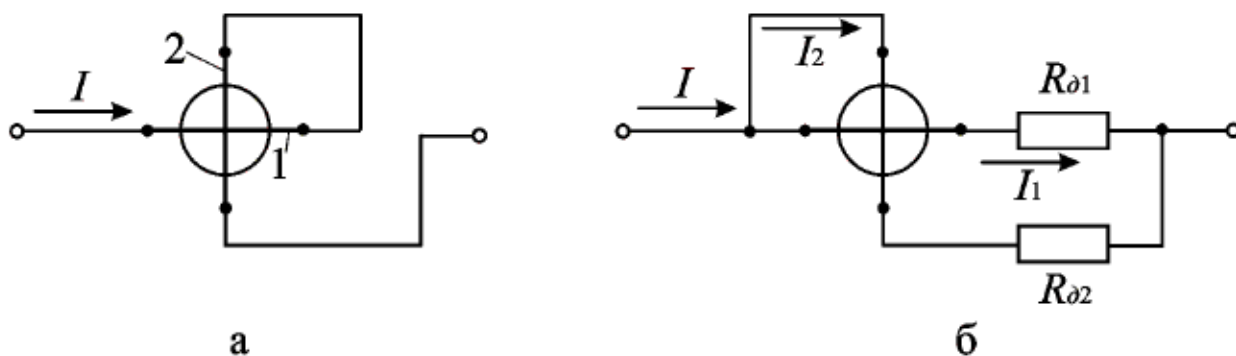


Рисунок 2.10 – Включення котушок електродинамічного приладу під час вимірювання струму

*Рівняння шкали*

$$\alpha = S_A \cdot I^2,$$

де  $S_A$  – чутливість амперметра струму.

*2. Вимірювання напруги*

В електродинамічних вольтметрах нерухома і рухома котушки з'єднані послідовно разом із додатковим резистором. Секціонуванням додаткового резистора можна одержати різні межі вимірювання.

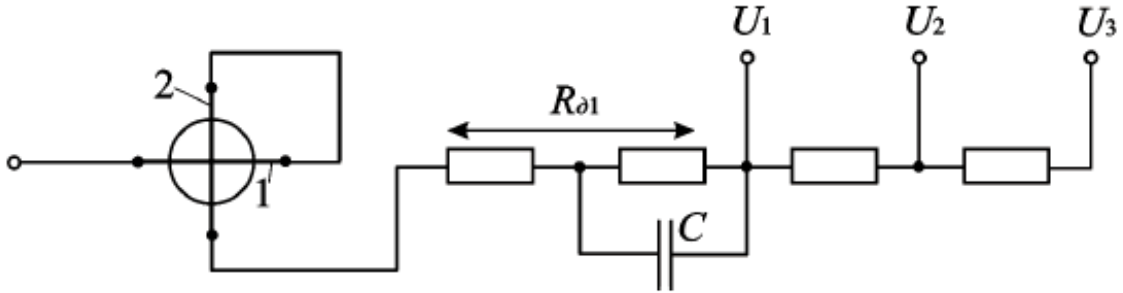


Рисунок 2.11 – Включення котушок електродинамічного приладу під час вимірювання напруги

*Рівняння шкали*

$$\alpha = S_V \cdot U^2,$$

де  $S_V$  – чутливість вольтметра до напруги.

*3. Вимірювання потужності*

Початки намоток котушок (генераторні затискачі) з'єднують між собою і включаються з боку живлення; при цьому нерухома котушка включається послідовно з навантаженням, а рухома – паралельно. Для обмеження струму рухомої котушки послідовно з нею включається додатковий резистор.

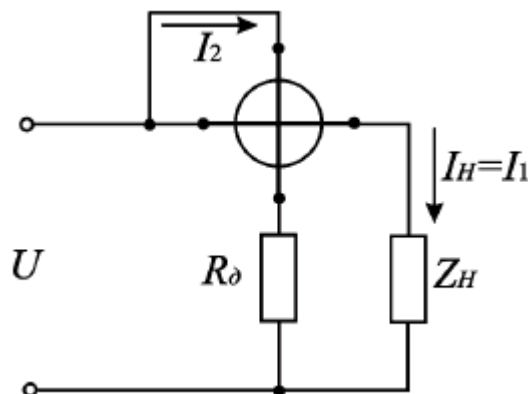


Рисунок 2.12 – Включення котушок електродинамічного приладу під час вимірювання потужності

### *Рівняння шкали в колі постійного струму*

$$\alpha = S_p \cdot P,$$

де  $S_p$  – чутливість ватметра.

### *Рівняння шкали в колі змінного струму*

$$\alpha = S_p \cdot P \cdot \cos \varphi,$$

де  $\varphi$  – кут зсуву між струмом нерухомої котушки і напругою рухомої котушки.

#### *Переваги:*

- 1) працюють у колах змінного і постійного струму;
- 2) висока точність вимірювань у колах постійного струму;
- 3) рівномірність шкали під час вимірювання потужності;
- 4) можливість використання для обліку електроенергії в колах постійного струму;
- 5) вимірювання активної й реактивної потужності в колах змінного струму.

#### *Недоліки:*

- 1) нерівномірність шкали у процесі вимірювань струму і потужності;
- 2) велике власне споживання потужності;
- 3) незахищеність від зовнішніх магнітних полів;
- 4) залежність показників приладів від частоти струму й температури навколишнього середовища;
- 5) обмеженість меж вимірювань за струмом і напругою через близьке розташування котушок.

Зазначені властивості електродинамічних механізмів дозволяють на їх основі випускати лабораторні багатограничні прилади високих класів точності (0,5; 0,2; 0,1) для вимірювань на постійному і змінному струмі. Випускаються міліамперметри та амперметри з межами від 1 мА до 10 А на частоти до 10 кГц, багатограничні вольтметри з межами від 1,5 до 600 В на частоти до 5 кГц, багатограничні однофазні ватметри з межами за струмом від 25 мА до 10 А і за напругою від 15 до 600 В.

### *Електродинамічний логометр*

Пристрій електродинамічного логометра показаний на рис. 2.13. Прилад має дві рухомі та дві нерухомі котушки. Рухомі котушки закріплені на одній осі та живляться через тонкі стрічки, що не створюють протидіючого моменту. У процесі роботи логометра нерухомі котушки включаються послідовно в коло з навантаженням, рухомі котушки включаються паралельно навантаженню, але послідовно з додатковими опорами. При взаємодії струму нерухомих котушок



$I_H$  зі струмами рухомих котушок  $I_1$  і  $I_2$  створюються два обертальні моменти  $M_1$  і  $M_2$ .

Котушки приладу розташовують так, що при певному напрямку струмів  $I_1$  і  $I_2$  напрямки моментів  $M_1$  і  $M_2$  були протилежними. Тому рухома система приладу відхиляється разом зі стрілкою в бік дії більшого обертального моменту доти, доки моменти не врівноважаться.

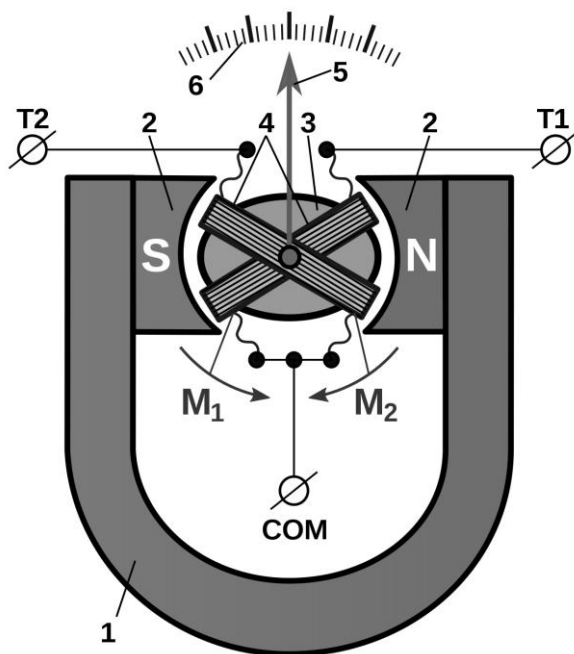


Рисунок 2.13 – Будова електродинамічного логометра

*Рівняння шкали*

$$\alpha = S \cdot \frac{I_1 \cdot \cos \psi_1}{I_2 \cdot \cos \psi_2},$$

де  $\psi_1$  і  $\psi_2$  – кути зсуву фаз між струмами, що протікають у рухомих котушках, і струмом нерухомої котушки.

*Електродинамічні логометри* застосовуються під час виготовлення щитових і переносних фазометрів і частотомірів промислової частоти.

### ***Феродинамічні прилади***

Відрізняються від електродинамічних тим, що нерухома й рухома котушки мають свої магнітопроводи, виконані з фероматеріалу, тому магнітні поля котушок є значно сильнішими. Ці магнітні поля, взаємодіючи між собою, викликають появу обертального моменту на осі рухомої котушки. Рухома система разом зі стрілкою повертається доти, доки обертальний момент не врівноважиться протидіючим моментом.

На рис. 2.14 зображені дві конструкції феродинамічних механізмів: однією котушкою (рис. 2.14 а); з двома котушками (рис. 2.14 б).

*Рівняння шкали*

$$\alpha = \frac{c}{W} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos \psi = S \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos \psi ,$$

де  $c$  – коефіцієнт, обумовлений конструктивними параметрами і вибором системи одиниць.

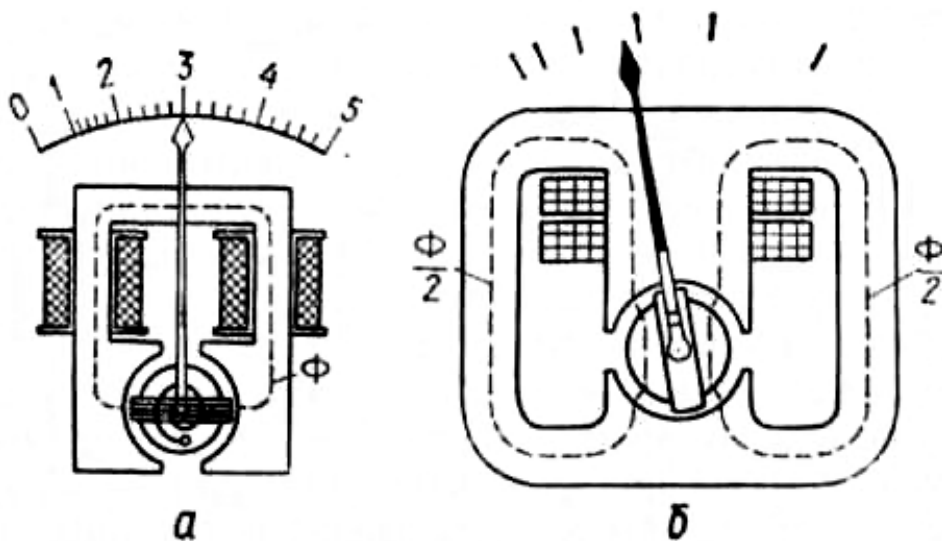


Рисунок 2.14 – Конструкції феродинамічних приладів: а – із двома котушками; б – з однією котушкою

*Переваги:*

- 1) не піддаються впливу зовнішніх магнітних полів;
- 2) менше, ніж в електродинамічних приладах, власне споживання потужності;
- 3) більший, ніж в електродинамічних приладах, обертальний момент.

*Недоліки:*

- 1) відносно мала точність.
- 2) менший, ніж в електродинамічних приладів, частотний діапазон.

Зазначені властивості феродинамічних приладів визначають галузь їх застосування – в якості щитових і переносних приладів змінного струму, а також як самописні прилади. Промислово виготовляються щитові феродинамічні амперметри та вольтметри класів точності 1,5 і 2,5, переносні амперметри й вольтметри класу 0,5, щитові та переносні ватметри класів точності 0,2 і 0,5.

Застосовуються вони переважно на змінному струмі промислової частоти.

## 2.3.4 Прилади індукційної системи та електростатичні прилади

### Прилади індукційної системи

Це прилади, у яких змінні магнітні поля взаємодіють зі струмами, індукованими ними в металевому диску, в результаті цього створюється обертальний момент, що діє на диск.

Застосовуються як лічильники електроенергії.

На рис. 2.15 представлено конструкцію приладу індукційної системи: 1, 4 – два магнітопроводи: на один намотана обмотка із дроту великого перерізу з малим числом витків, а на інший – малого перерізу з більшим числом витків; 2 – черв'як, що передає рух диска на обліковий пристрій; 3 – обліковий пристрій; 5 – постійний магніт (створює протидіючий момент); 6 – алюмінієвий диск.

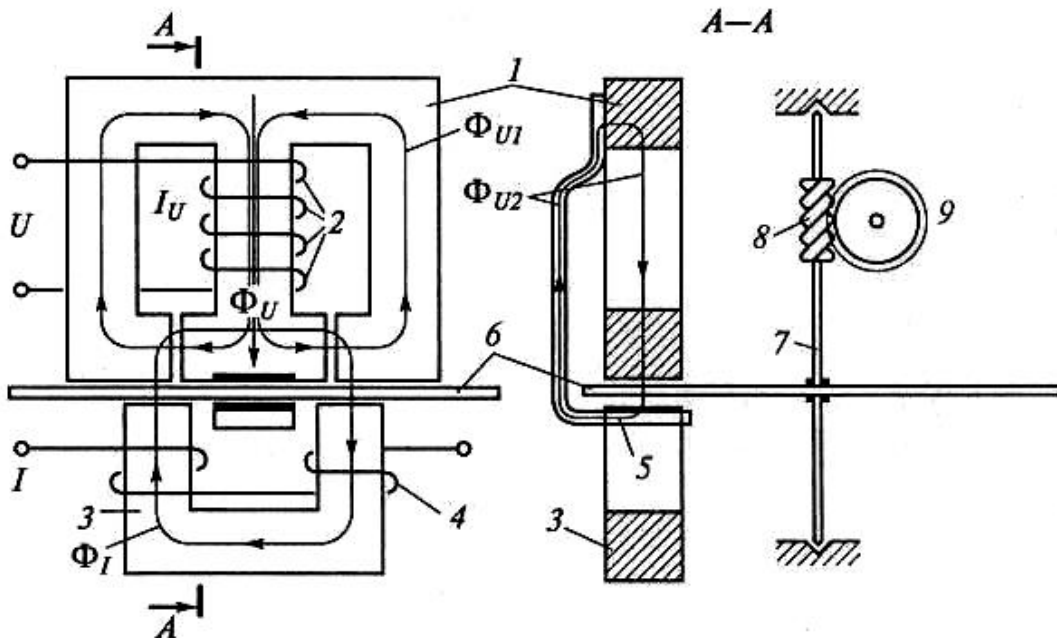


Рисунок 2.15 – Будова механізмів індукційної системи

### Принцип дії

Змінний струм, що протікає в першій котушці, створює магнітний потік, що пронизує алюмінієвий диск, і в ньому наводиться ЕДС індукції. Під дією наведеної ЕДС в алюмінієвому диску виникають вихрові струми. Від взаємодії цих вихрових струмів із магнітним полем другої котушки виникає електромагнітна сила, що прагне повернути алюмінієвий диск. Аналогічно протікають фізичні процеси з вихровими струмами, наведеними магнітним полем другої котушки. Результуючий обертальний момент є пропорційним добутку магнітних потоків, що пронизують алюмінієвий диск, і синусу кута зсуву фаз  $\psi$  між ними:

$$M_{BP} = M_{BP1} - M_{BP2} = \kappa \cdot f \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \sin \psi ,$$

де  $\kappa$  – коефіцієнт пропорційності, що залежить від геометричних розмірів магнітопроводів, їх матеріалу і розташування, від числа витків котушок, опору алюмінієвого диска та інших факторів;  $f$  – частота струму.

*Рівняння шкали*

$$\alpha = \frac{\kappa}{W} \cdot f \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin \psi = S \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin \psi .$$

*Перевага* індукційних вимірювальних механізмів полягає у зручності їх використання в інтегруючих приладах, таких як лічильники змінного струму.

*Недоліки:*

- 1) залежність від частоти й зовнішніх магнітних полів;
- 2) велике власне споживання потужності.

### *Електростатичні прилади*

Робота приладів ґрунтується на взаємодії між зарядженими тілами, одне з яких є рухомим. В електростатичних вимірювальних механізмах, на відміну від механізмів інших систем, переміщення рухомої частини здійснюється за рахунок дії безпосередньо прикладеної напруги. Тому електростатичні механізми застосовуються у вольтметрах.

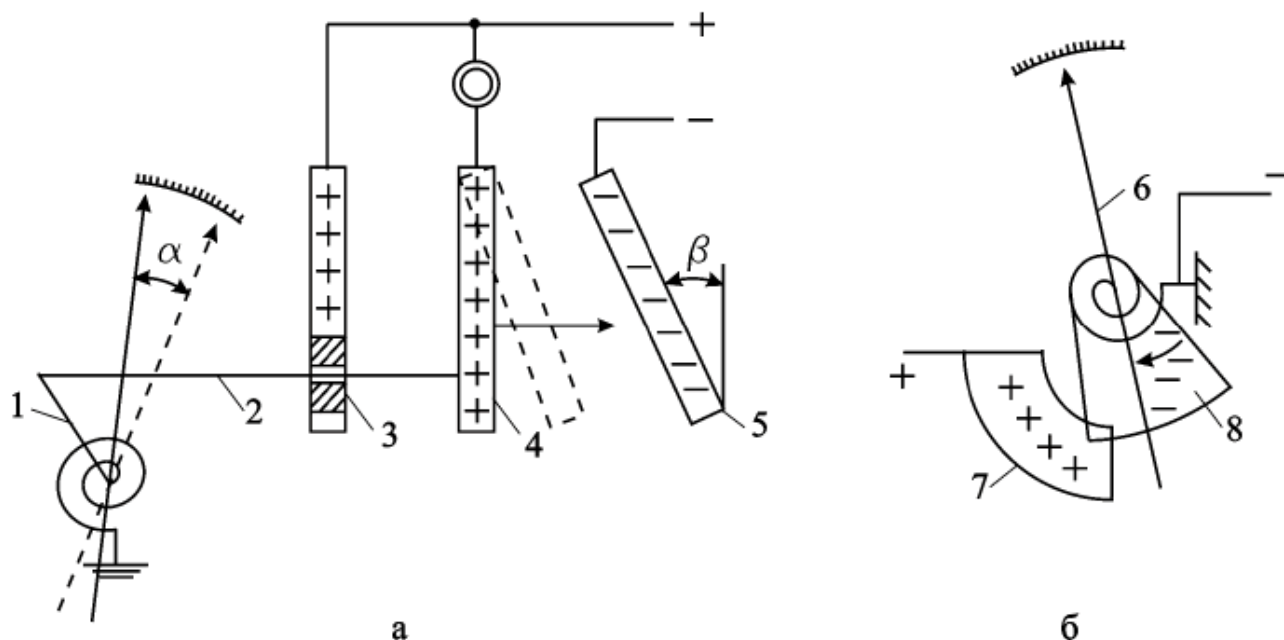


Рисунок 2.16 – Будава механізмів електростатичної системи: а – змінюється відстань між зарядженими тілами; б – змінюється активна площа заряджених пластин

В електростатичних вимірювальних механізмах відхилення рухомої частини пов'язане зі зміною ємності. Практичне застосування одержали механізми, у яких зміна ємності відбувається або внаслідок зміни відстані між зарядженими пластинами (рис. 2.16 а), або зміни активної площі пластин (рис. 2.16 б). Перший тип механізмів використовується для створення кіловольтметрів, а другий – для вольтметрів (у десятки й сотні вольт).

На рис. 2.16 прийнято наступні позначення: 1 – дротик; 2 – спеціальна тяга; 3, 5 – нерухомий електрод; 4 – рухомий електрод; 6 – стрілка; 7 – два паралельно розташованих електроди; 8 – рухомий електрод.

#### *Принцип дії*

Роботу електростатичного механізму розглянемо на прикладі рис. 2.16 а.

На електродах 3, 4, 5 накопичуються заряди: додатні й від'ємні. У результаті взаємодії зарядів рухомий електрод 4 починає рухатися, через спеціальну тягу 2 і дротик 1 рух передається на стрілку. Стрілка буде відхилятися доти, доки обертальний момент не врівноважиться протидіючим моментом, створюваним спіральними пружинками.

Для заспокоєння рухомої частини механізму частіше застосовують магнітоіндукційні заспокоювачі.

#### *Рівняння шкали*

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot W} \cdot \frac{dC}{d\alpha} \cdot U^2 = S \cdot U,$$

де  $C$  – ємність;  $S$  – чутливість електростатичного приладу.

Електростатичні вимірювальні механізми застосовуються у вольтметрах постійного і змінного струмів. Розширення меж виміру на змінному струмі здійснюється за рахунок включення ємнісного розподільника напруги, а на постійному – резистивного.

#### *Переваги:*

- 1) показники не залежать від частоти й форми вимірюваної напруги, а також від температури;
- 2) працює в широкому діапазоні вимірюваних напруг від мВ до кВ;
- 3) практично не споживають активної потужності.










#### *Недоліки:*

- 1) нерівномірність шкали;
- 2) залежність від електричних і електростатичних полів (необхідно екранувати);
- 3) мала чутливість і звідси – невисока точність.

Промислово виготовляються переносні та щитові, однограничні й багатограничні електростатичні вольтметри класів точності 0,5; 1,0; 1,5 на напругу від 10 В до 300 кВ і частоту до 10 МГц, що мають вхідну ємність від 4 до 65 пФ і вхідний опір  $10^{10}$ – $10^{12}$  Ом.

У таблиці 2.2 наведено основні характеристики та способи застосування вимірювальних приладів наведених вище механізмів.

Таблиця 2.2 – Способи застосування вимірювальних приладів різних систем

Система приладу	В яких ВП застосовується	Рід струму	Рівняння шкали	Частотний діапазон, Гц
	$A, V, \Omega$	—	$\alpha = S \cdot I$	—
	$\Omega$	—	$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$	—
	$A, V$	$\sim$	$\alpha = \frac{1}{2 \cdot W} \cdot \frac{dL}{d\alpha} \cdot I^2 = A \cdot I^2 = S \cdot I$	45-1500
	$\varphi, Hz$	$\sim$	$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$	45-1500
	$A, V, W$	$\sim$	$\alpha = S \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos\psi$	0-5000
	$\varphi, Hz$	$\sim$	$\alpha = S \cdot \frac{I_1 \cdot \cos\psi_1}{I_2 \cdot \cos\psi_2}$	0-5000
	$A, V, W$	$\sim$	$\alpha = S \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos\psi$	0-5000
	$kWh$	$\sim$	$\alpha = S \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin\psi$	50
	$V$	$\sim$	$\alpha = \frac{1}{2 \cdot W} \cdot \frac{dC}{d\alpha} \cdot U^2 = S \cdot U$	0-10 <sup>7</sup>

## 2.4 Електронні аналогові та цифрові вимірювальні прилади

### 2.4.1 Електронні аналогові вимірювальні прилади

Являють собою засоби вимірювань, в яких перетворення сигналів вимірювальної інформації здійснюється за допомогою аналогових електронних пристроїв. Показники цих приладів є безперервною функцією зміни вимірюваної величини.

Електронні вимірювальні перетворювачі та пристрої в якості вихідних пристроїв використовують магнітоелектричні механізми або електронно-променеві трубки.

Найбільш широко серед аналогових електронних вимірювальних приладів використовуються електронні вольтметри, осцилографи, частотоміри,

фазометри, аналізатори спектра, прилади для вимірювань параметрів електричних і електронних схем (опорів, ємностей, індуктивностей).

Прилади, що промислово виготовляються, поділяються на 20 підгруп, які позначають прописними буквами (наприклад, підгрупа В: В2 – вольтметри постійного струму, В3 – вольтметри змінного струму, В4 – вольтметри імпульсного струму, В7 – вольтметри універсальні; підгрупа Г: Г3 – генератори гармонійних коливань низькочастотні, Г4 – генератори гармонійних коливань високочастотні, Г5 – генератори імпульсів; підгрупа Е: Е3 – вимірювачі індуктивності, Е6 – вимірювачі опорів, Е7 – вимірювачі ємностей; підгрупа З: З – універсальні осцилографи, З7 – осцилографи швидкісні, стробоскопічні; підгрупа Ф: Ф2 – вимірювачі фазового зсуву; підгрупа Ч: Ч3 – частотоміри електронно-обчислювальні).

У позначенні комбінованого приладу, призначеного для виміру декількох величин, до основного позначення підгрупи прийнято додавати букву К.

### ***Електронні вольтметри***

До складу *електронних вольтметрів* входять підсилювачі постійної та змінної напруг, перетворювачі змінної напруги в постійну (випрямлячі) та постійної - у змінну (інвертори), розподільник напруги. В якості вихідних пристроїв найчастіше використовується *магнітоелектричний вимірювальний механізм*.

Метрологічні характеристики вольтметра (чутливість, діапазон частот вимірюваних напруг) визначаються типом і характеристиками підсилювача.

Електронні вольтметри постійної напруги в якості вихідного вимірювального механізму мають магнітоелектричні мікроамперметри зі струмом повного відхилення 50–500 мкА й опором рамки 500–1000 Ом.

Структурна схема електронного вольтметра постійного струму подана на рис. 2.17.

Вимірювана напруга  $U_x$  подається на вхідний пристрій, що являє собою багатограничний високоомний розподільник на резисторах. Із поділювача напруга надходить на підсилювач постійного струму й далі – на вимірювальний механізм. Розподільник і підсилювач постійного струму доводять рівень напруги до значень, необхідних для нормальної роботи вимірювального механізму.

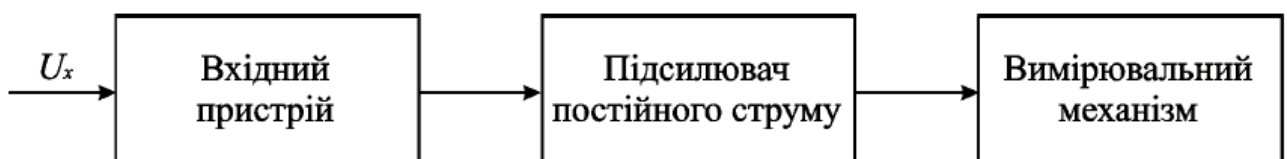


Рисунок 2.17 – Структурна схема електронного вольтметра постійного струму

Вхідний опір електронного вольтметра становить зазвичай кілька десятків мегаомів. Це дозволяє робити виміри у високоомних колах без помітного споживання потужності від об'єкта виміру. Діапазон вимірюваних напруг – від десятка мілівольтів до декількох кіловольтів. Для вимірювань малих напруг використовують мікрвольтметри з перетворенням постійного струму у змінний.

У таких приладах підсилення вимірюваного сигналу здійснюється на змінному струмі, що дозволяє досягти більших значень коефіцієнта підсилення й знизити поріг чутливості до декількох мікрвольтів. Робочий діапазон електронних мікрвольтметрів лежить у межах  $10^{-8}$ – $1$  В.

Електронні вольтметри змінного струму виготовляються за двома схемами, що представлені на рис. 2.18.

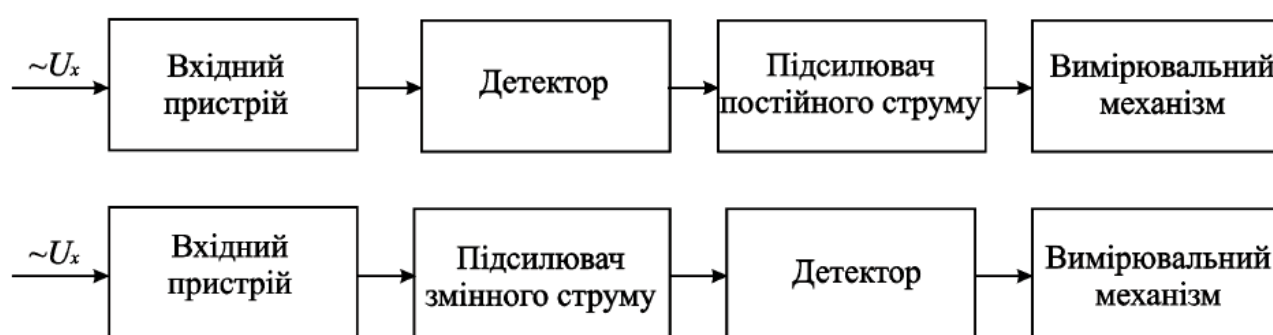


Рисунок 2.18 – Структурні схеми електронного вольтметра змінного струму

У першій з цих схем вимірювана змінна напруга спочатку перетворюється в постійну за допомогою детектора, а потім підвищується підсилювачем постійного струму і впливає на вимірювальний механізм. У другій схемі підсилення відбувається на змінному струмі, а потім попередньо підсилений сигнал випрямляється детектором і відхиляє стрілку вимірювального механізму.

За першою схемою можуть будуватися вольтметри з широким частотним діапазоном (10 Гц–1000 МГц), але не здатні вимірювати напруги, більші декількох десятків часток вольта. Друга схема дозволяє створювати чутливі вольтметри, нижня межа вимірювань яких становить одиниці мікрвольтів. Однак ці прилади мають менший частотний діапазон.

*Переваги:*

- 1) великий вхідний опір (більше 1 МОм);
- 2) мале споживання потужності;
- 3) висока чутливість;
- 4) широкий діапазон вимірюваних напруг (від десятків нановольтів на постійному струмі до десятків кіловольтів на змінному);
- 5) працюють у широкому частотному діапазоні до сотень МГц.



До *недоліків* електронних вольтметрів можна віднести необхідність окремого джерела живлення і складність самої конструкції.

На рис. 2.19 як приклад представлено фотографії сучасних електронних аналогових вольтметрів: мікровольтметра ВЗ-57 (рис. 2.19 а) і мілівольтметра АВМ-1071 (рис. 2.19 б).



Рисунок 2.19 – Зовнішній вигляд електронних аналогових вольтметрів: а – мікровольтметр ВЗ-57; б – мілівольтметр АВМ-1071

Мікровольтметр ВЗ-57 має такі технічні характеристики: межа вимірювань – від 0,01 мВ до 300 В; частотний діапазон – від 5 Гц до 5 МГц; клас точності, залежно від межі вимірювань, – від 1 до 4; вхідний опір/ємність – 5 МОм/27 пФ, споживана потужність – 20 ВА. Характеристики мілівольтметра АВМ-1071: межа вимірювань – від 300 мкВ до 100 В; діапазон робочих частот – від 10 Гц до 2 МГц; похибка вимірювань  $\pm 3\%$  (відносно 1 кГц).

### ***Електронно-променевий осцилограф***

*Електронно-променевий осцилограф* – прилад, призначений для візуального спостереження електричних процесів, представлених у формі напруги, а також вимірювань параметрів сигналів, що визначають їх миттєві значення і часові характеристики. Крім того, осцилограф може бути використаний для вимірювань фазового зсуву між двома синусоїдальними напругами, частоти і складових комплексного опору.

*Електронний осцилограф* має високу чутливість, широкий частотний діапазон і малі власні споживання потужності. Осцилографи мають наступні класи точності: 1-й клас ( $\pm 3\%$ ); 2-й клас ( $\pm 5\%$ ); 3-й клас ( $\pm 10\%$ ); простий клас ( $\pm 12\%$ ). Точність вимірювань залежить від розміру робочої частини екрана та ширини променя і вказується для випадку, коли розміри зображення займають не менше 30% розміру екрана.

Сучасний універсальний осцилограф має смугу пропускання до 350 МГц і діапазон амплітудних досліджень сигналів від мілівольтів до сотень вольтів.

За призначенням і галуззю застосування універсальні осцилографи поділяються на *багатофункціональні зі змінними блоками, широкосмугові, низькочастотні, двопробеневі, прецизійні та польові*. За допомогою низки осцилографів можна вимірювати частоту, струм, напругу, температуру.

Спрощена функціональна схема осцилографа представлена на рис. 2.20. На ньому позначені: 1 – нитка розжарення; 2 – катод; 3 – модулятор (сітка) або керуючий анод; 4 – фокусуючий анод; 5 – прискорювальний анод; 6 – відхиляючі пластини за вертикаллю й горизонталлю; 7 – екран із люмінофором; БЖ – блок живлення; ПН – розподільник напруги (атенюатор); ПК – підсилювач сигналів керування променем; БС – блок синхронізації; БР – блок розгортки; П – потенціометр.

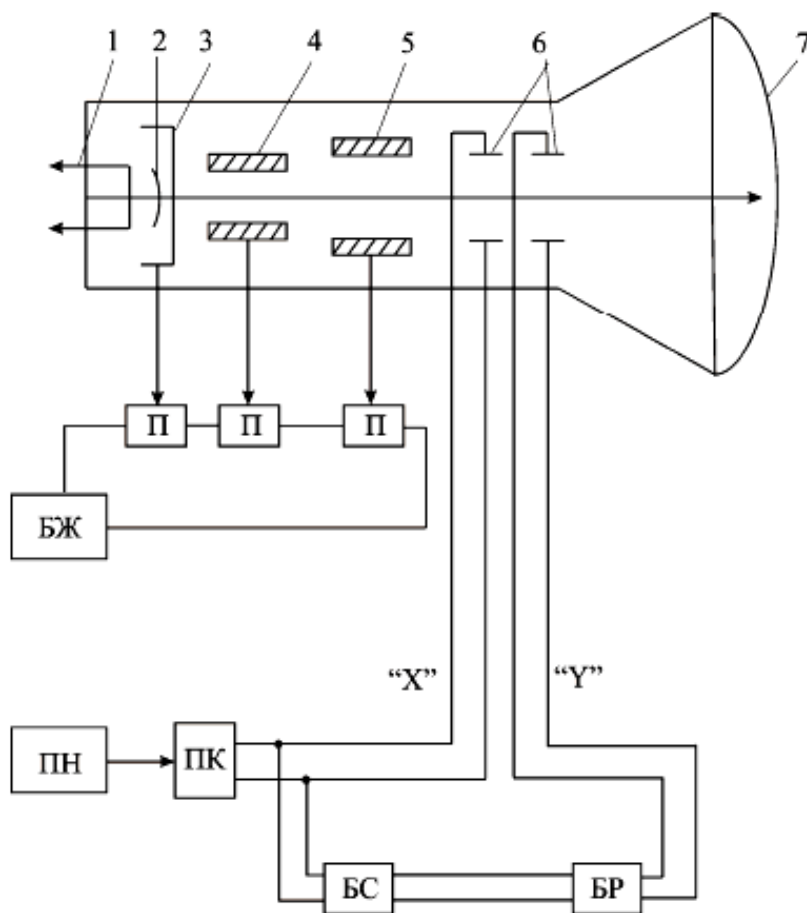


Рисунок 2.20 – Спрощена функціональна схема електронного осцилографа

### *Робота осцилографа*

Основною частиною *електронного осцилографа* є електронно-променева трубка, що являє собою скляний балон, з якого відкачане повітря, де розташовані катод, що підігрівається, модулятор, фокусуючий та прискорювальний аноди, дві пари взаємно перпендикулярних пластин.

Внутрішня поверхня дна балона вкрита люмінофором, здатним світитися під дією бомбардування електронами.

Сукупність електродів 2, 3, 4, 5 називають *електронною пушкою*.

*Електронна пушка* випромінює вузький пучок електронів – електронний промінь; для цього на електроди пушки подають відповідні напруги.

Інтенсивність електронного променя регулюють шляхом зміни напруги на модуляторі, що приводить до зміни яскравості свічення люмінофора. Напруга на першому аноді фокусує потік електронів у вузький пучок, що дозволяє одержати на екрані трубки світлову пляму малого розміру. Для прискорення електронів до швидкості, необхідної для свічення люмінофора, на другий анод подають високу позитивну напругу.

Напруга на модулятор, фокусуючий та прискорювальний аноди подається від блока живлення (БЖ) через ряд потенціометрів (П).

До горизонтальних відхиляючих пластин осцилографа подається так звана пилкоподібна напруга, отримана за допомогою блока розгортки (БР) і блока синхронізації (БС). За допомогою цих блоків можна змінювати параметри пилкоподібної напруги.

Електронний промінь проходить між парами відхиляючих пластин і під дією напруги, прикладеної до цих пластин, відхиляється, відповідно, за осями координат  $X$  і  $Y$ , викликаючи зсув світлової плями на екрані трубки.

У сучасних осцилографах використовують також і більш складні, зокрема багатопроменеві, трубки для спостереження відразу двох і більше сигналів.

На рис. 2.21 представлений зовнішній вигляд сучасного двоканального електронного аналогового осцилографа С1-157/1.

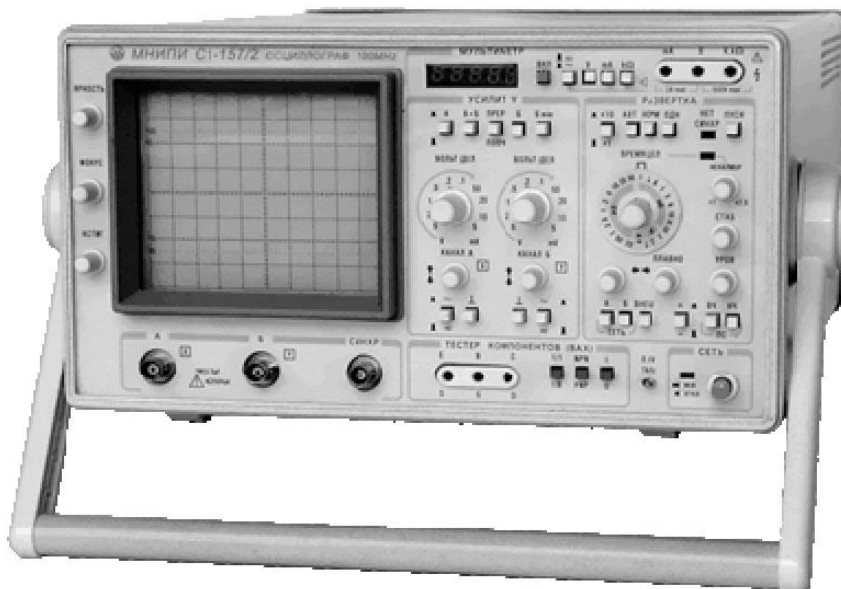


Рисунок 2.21 – Зовнішній вигляд електронного аналогового осцилографа С1-157/1

*Характеристики осцилографа:* смуга пропускання – від 0 до 100 МГц; частота дискретизації – 50 МГц; розгортка – від 1 мкс/поділ до 20 с/поділ;

режим самописа; цифрова індикація; 5 режимів синхронізації; споживана потужність – 80 ВА; похибка установки  $\pm 3\%$ ; вхідний опір – 1 МОм.

## 2.4.2 Цифрові вимірювальні прилади

*Цифровий вимірювальний прилад (ЦВП)* – це прилад, в якому вхідний сигнал перетворюється в дискретний вихідний сигнал і подається в цифровому вигляді. Під дискретним сигналом розуміється переривчастий сигнал, в якому інформація міститься не в інтенсивності носія сигналу (наприклад, у значенні напруги, струму), а в числі елементів сигналу (наприклад, у числі імпульсів напруги) та їх взаємному розташуванні в часі та просторі. Систему таких сигналів для подання інформації називають *кодом*.

Вимірювана величина, що подається на вхід ЦВП, є величиною безперервною, тобто на кінцевому інтервалі вона має незліченну кількість значень. Безперервну величину часто називають *аналоговою величиною*. Процес перетворення аналогової величини в цифрову називається *аналогово-цифровим перетворенням*, а перетворювач, що здійснює це перетворення, – *аналогово-цифровим перетворювачем (АЦП)*.

Узагальнена функціональна схема ЦВП представлена на рис. 2.22.

Вимірювана величина подається на вхідний пристрій ВП, призначений для масштабного перетворення вхідної величини та відділення її від перешкод. АЦП перетворює величину  $x$  в код  $N$ , що подається на цифровий відліковий пристрій ЦВП, де відображається у вигляді ряду цифр або виводиться на зовнішній пристрій. Як пристрій керування ПК у сучасних ЦВП використовуються мікроконтролери.

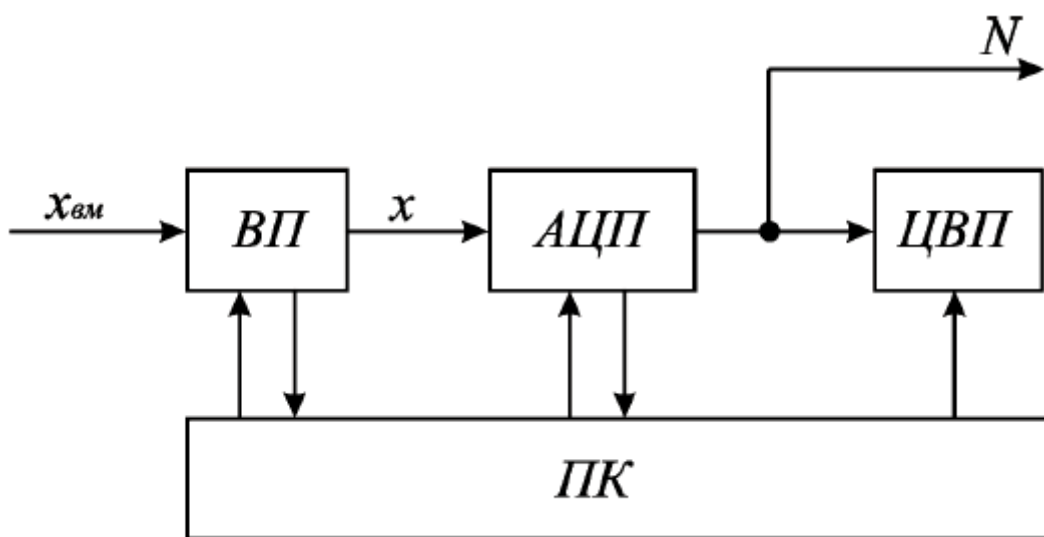


Рисунок 2.22 – Узагальнена функціональна схема ЦВП

АЦП широко використовуються для зв'язку первинних перетворювачів електричних і неелектричних величин із мікропроцесорами та іншими пристроями накопичення й обробки результатів спостережень.

За видом вимірюваних величин ЦВП поділяються на:

1. Вольтметри постійного та змінного струму;
2. Омметри й мости постійного та змінного струму;
3. Комбіновані прилади;
4. Вимірювачі частоти та інтервалів часу;
5. Спеціалізовані ЦВП, призначені для вимірювань температури, маси вантажів, швидкостей тощо.

### *Цифрові вольтметри постійного та змінного струму*

*Цифрові вольтметри (ЦВ) постійного струму становлять найпоширенішу групу ЦВП. Вони дозволяють вимірювати напруги від 1 мкВ до 1000 В з похибкою 0,01–0,1 % при вхідному опорі  $10^9$ – $10^7$  Ом.*

Аналогово-цифрові перетворювачі в ЦВ будуються на основі різних методів перетворення, однак найчастіше застосовують методи врівноваженого перетворення і методи інтегрування.

АЦП врівноваженого перетворення мають високу швидкодію, високу точність перетворення й низьку перешкодостійкість.

АЦП двотактного інтегрування за порівняно невисокої швидкодії мають високу точність і високу перешкодостійкість.

Структурна схема ЦВ урівноваженого перетворення показана на рис. 2.23.

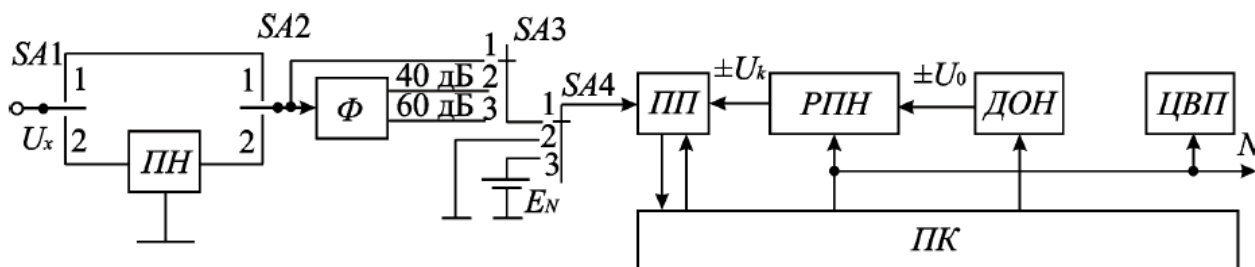


Рисунок 2.23 – Структурна схема ЦВ урівноваженого перетворення

Вимірювана напруга  $U_x$  безпосередньо (перемикачі SA1 і SA2 в позиції 1) або через розподільник напруги (ПН) (перемикачі SA1 і SA2 в позиції 2), за допомогою якого вибирається потрібний діапазон вимірювань, а потім через фільтр (Ф) або безпосередньо подається на перемикач SA3.

Фільтр призначений для відділення сигналу від перешкод промислової частоти 50 Гц і має два виходи із погашенням перешкоди в 40 і 60 дБ відповідно. Фільтр, усуваючи перешкоди, одночасно збільшує інерційність ЦВ, і тим інтенсивніше, чим глибше погашення перешкоди.

Тому, якщо необхідності у фільтрі немає, його виключають за допомогою переведення SA3 в позицію 1.

Розподільник напруги має вхідний опір 10 МОм; цим значенням визначається вхідний опір вольтметра у процесі вимірювання напруги понад 3 В.

Якщо  $U_x < 3$ , то розподільник напруги вимикається і  $U_x$  подається через SA3 і SA4 безпосередньо на вхід порівнювального пристрою (ПП), що має більше значення вхідного опору ( $10^9$ – $10^{10}$  Ом). На другий вхід ПП подається напруга, що компенсує  $U_k$ , що знімається з виходу регульованого розподільника напруги 60 (РПН). Максимальний діапазон  $U_k=0$ –3 В, це пояснюється вимогою  $U_x < 3$ .

Регульований подільювач напруги являє собою коло резисторів, які перемикаються транзисторним перемикачем; при цьому коефіцієнт передачі подільювача КД є прямо пропорційним коду N, що подається на перемикач РПН

$$K_D = \alpha \cdot N$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт пропорційності.

Напруга на вхід РПН  $\pm U_0$  надходить від джерела опорної напруги (ДОН).

Очевидно, що  $U_k = U_D \cdot U_0$ .

*Пристрій керування (ПК)* автоматично встановлює у схемі рівновагу  $U_x = U_k = U_D \cdot U_0 = \alpha \cdot U_0 \cdot N$ , звідки

$$N = \frac{U_x}{\alpha \cdot U_0},$$

тобто залежність між кодом і вимірюваною напругою є прямо пропорційною.

Потім код N подається на цифровий відліковий пристрій ЦВП, де у вигляді цифр відображається значення вимірюваної напруги. Перемикач SA4 має положення 2 і 3 для корекції адитивної та мультиплікативної складової похибки ЦВ.

*Цифрові вольтметри* мають низький поріг реагування (зазвичай 10 або 1 мкВ), тому важливо, щоб результат вимірювань мало залежав від похибки наведень у вхідному колі ЦВ, рівень яких часто є вищим за рівень реагування вольтметра. У ЦВП розрізняють перешкоди нормального вигляду й перешкоди загального вигляду. Перешкоди нормального вигляду виникають за рахунок дії зовнішніх змінних електромагнітних полів. Для зниження цих перешкод площу провідного контуру прагнуть зробити мінімальною й підключати джерело живлення до ЦВ коаксіальним кабелем або двома звитими провідниками. Перешкоди загального вигляду виникають через розходження потенціалів точок заземлення джерела і ЦВП. Перешкода може містити постійну і змінну складові. Захист від перешкод загального вигляду здійснюється шляхом ретельно продуманого і добре виконаного монтажу ЦВП, а також екрануванням вхідного кола ЦВ. Внутрішній екран ретельно ізолюють від корпусу ЦВ.

Внутрішній екран спеціальним третім провідником підключається до заземленої точки джерела сигналу.

Боротьба із перешкодами нормального вигляду промислової частоти 50 Гц у ЦВ врівноваженого перетворення ведеться за допомогою фільтрів у вхідному колі. Як фільтри використовуються подвійні Т-подібні мости.

Ступінь погашення перешкоди  $K_n$  прийнято характеризувати відношенням значення перешкоди до її погашення  $e_n$  до значення перешкоди після її погашення  $e_n^*$  і виражати це значення в децибелах

$$K_n = 20 \cdot 1g \frac{e_n}{e_n^*}$$

*Переваги ЦВ:*

- 1) висока точність вимірювань;
- 2) широкі межі вимірювань;
- 3) значна швидкодія;
- 4) можливість обробки результату вимірювань за допомогою комп'ютера.

*До недоліків ЦВ* можна віднести складність схеми і конструкції

Сучасна промисловість випускає ряд типів ЦВ: щитові постійного струму (ОММ 37D) з діапазоном вимірювань від 200 мВ до 200 В, точністю 0,1 %; щитові змінного струму (ОМ 47АС); універсальні ЦВ (В7-91 (рис. 2.24)) з діапазоном вимірювань 10 мкВ–1000 В, похибкою вимірювань  $\pm 0,05$  % для постійного струму, з діапазоном вимірювань 1 мВ–750 В, похибкою вимірювань  $\pm 0,05$  % для змінного струму.



Рисунок 2.24 – Зовнішній вигляд цифрового вольтметра В7-91

## *Цифрові осцилографи*

Можна виділити наступні переваги *цифрового осцилографа* в порівнянні з електронно-променевим:

- висока точність вимірювань;
- яскравий, добре сфокусований екран на будь-якій швидкості розгортки;
- можливість відображення сигналу до моменту запуску;
- можливість зупинки оновлення екрана на довільний час;
- можливість детектування імпульсних перешкод;
- автоматичні засоби вимірювань параметрів сигналів;
- можливість підключення принтера для створення звітів вимірювань;
- можливість статистичної обробки сигналу;
- засоби самодіагностики й самокалібрування;
- різко окреслені контури зображення сигналу;
- можливість детального дослідження перехідних процесів;
- зчитування попередньо записаних даних;
- широкі аналітичні можливості та спрощена архівація;
- можливість порівняння попередньо записаних даних із поточними.

*Цифрові осцилографи* випускаються або у вигляді самостійних приладів, або у вигляді приставки до персонального комп'ютера (ПК). Пристрої на основі ПК відносяться до нового напрямку у вимірювальній техніці – *віртуальні прилади*. Тепер фахівцеві достатньо підключити до комп'ютера додатковий пристрій – модуль цифрового осцилографа – для того, щоб почати вимірювання й аналіз фізичної величини. При цьому програмна частина віртуального приладу емулює передню керуючу панель стаціонарного вимірювального пристрою.

Комп'ютерною мишкою та клавіатурою здійснюється керування приладом за допомогою спеціальних програм, обробка інформації, що надійшла, а також її зберігання на накопичувачі (жорсткому диску).

Тими ж можливостями володіють осцилографи з рідкокристалічним дисплеєм (РКД). Всі можливості, пов'язані з автоматизацією вимірювань, вбудовані в *цифровий осцилограф*.

У наш час на ринку вимірювальної техніки наявні безліч виробників цифрових запам'ятовувальних осцилографів (ЦЗО). Найбільш відомі виробники: «АКТАКОМ», «Tektronix», «Hitachi-Denshi», «Agilent Technologies», «LeCroy», «GaGe Applied Technologies», Good Will instrument Co. Ltd, фірма «Chauvin Arnoux», корпорація «Fluke».

На рис. 2.25 зображено зовнішній вигляд двоканального цифрового осцилографа ATTEN ADS1022C.

*Характеристики осцилографа*: смуга пропускання – 25 МГц; частота дискретизації – 500 Мбіт/с; довжина внутрішньої пам'яті – до 4 К. 32 вбудовані автоматичні функції вимірювань, включаючи такі як вимірювання тимчасових затримок між сигналами, фази між двома сигналами та інші вимірювання між





Для точних вимірювань (з похибкою 1–1,5 %) використовують мости, потенціометри та цифрові прилади. Для більш грубих вимірювань використовують електромеханічні прилади. При цьому використовують або прилади, градуйовані в одиницях вимірюваної величини (омметри, фарадметри), або декілька приладів, за показниками яких можна розрахувати вимірювану величину (непрямі методи вимірювань).

*1) Прямі методи вимірювань активних опорів:*

За величиною опори поділяються на 3 групи: 1) малі опори ( $\leq 1$  Ом); 2) середні (від 1 Ом до 0,1 МОм); 3) великі (від 0,1 МОм і більше).

Активні опори твердих провідників звичайно вимірюють на постійному струмі, а опори провідників, що мають велику вологість (рідини, заземлення), – на змінному.

*Мостом постійного струму*

Для вимірювань середніх опорів до 1 МОм дуже часто використовують одинарні мости постійного струму.

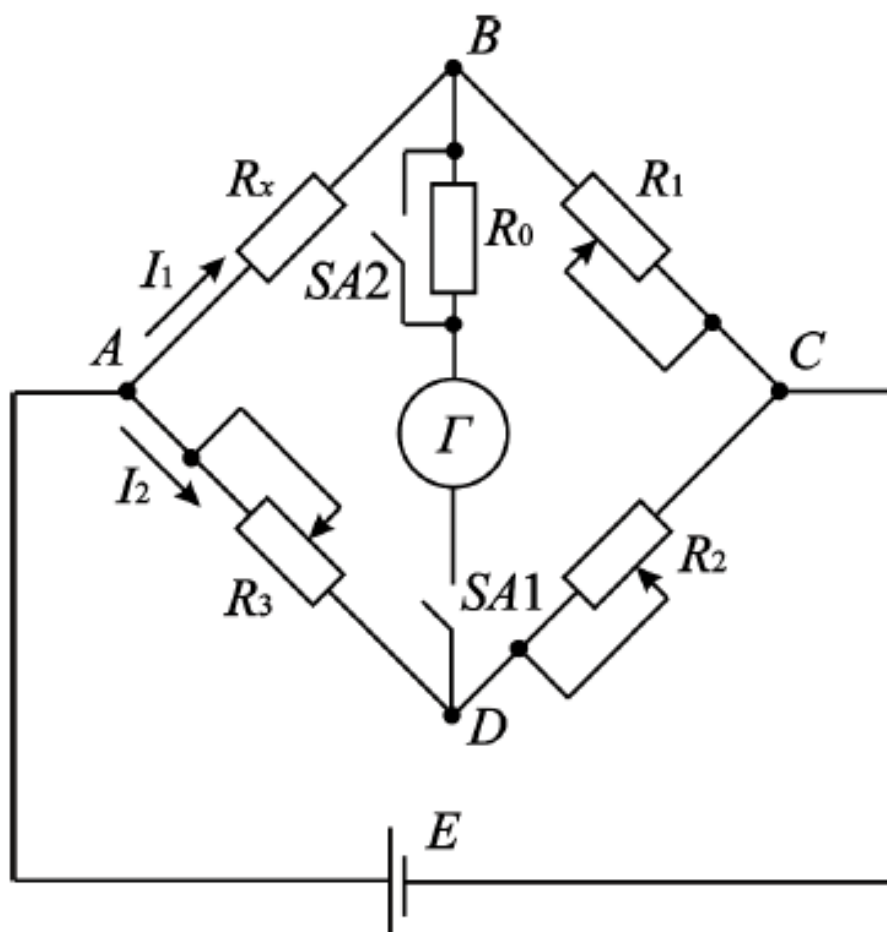


Рисунок 2.26 – Схема одинарного мосту постійного струму

Перш ніж вибрати вимірювальний міст і режим його роботи, встановлюють приблизне значення вимірюваного опору. На заводській табличці та на передній панелі вимірювального моста зазвичай зазначено схему й рекомендації до вибору доцільного режиму залежно від діапазону вимірюваного опору.

Одинарний міст постійного струму складається із трьох зразкових резисторів  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  (зазвичай регульованих), які включають із вимірюваним опором  $R_x$  у мостову схему, тобто у плечі моста. До однієї з діагоналей цієї схеми подають живлення від джерела ЕРС  $E$ . А в іншу діагональ, через вимикач SA1 і обмежувальний опір  $R_0$ , включають високочутливий гальванометр Г.

Схема працює в такий спосіб. Під час подачі напруги через резистори  $R_x$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  проходять струми  $I_1$  і  $I_2$ . Ці струми викликають у резисторах падіння напруг  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{AD}$  і  $U_{DC}$ . Якщо ці падіння напруги будуть різними, то потенціали точок  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$  і  $\varphi_D$  будуть неоднаковими. Тому якщо вимикачем SA1 підключити гальванометр, то через нього буде проходити струм  $I_G = \frac{\varphi_B - \varphi_D}{R_0}$ .

Завдання вимірювань полягає в тому, щоб урівноважити міст, тобто зробити потенціали точок  $\varphi_B$  і  $\varphi_D$  однаковими; інакше кажучи, зменшити струм гальванометра до нуля. Для цього починають змінювати опори резисторів  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  доти, доки струм гальванометра не буде дорівнювати нулю. При  $I_G = 0$ ,  $\varphi_B = \varphi_D$ , а напруги  $U_{AB} = U_{AD}$  і  $U_{BC} = U_{DC}$ . Виразивши ці напруги через струми та опори:  $U_{AD} = I_2 \times R_3$ ,  $U_{BC} = I_1 \times R_1$ ,  $U_{DC} = I_2 \times R_2$ ,  $U_{AB} = I_1 \times R_x$ , одержимо дві рівності:

$$I_1 \cdot R_x = I_2 \cdot R_3;$$

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2.$$

Розділивши першу рівність на другу, одержимо

$$R_x \cdot R_2 = R_1 \cdot R_3.$$

Ця рівність називається *умовою балансування одинарного моста*, або *умовою рівноваги моста*. З неї випливає, що міст стабілізується тоді, коли добутки опорів протилежних плечей будуть однаковими. Звідси вимірюваний опір визначається за формулою

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}.$$

## Омметр

Омметр – це прилад магнітоелектричної системи, послідовно або паралельно з яким включається вимірюваний опір.

Зазвичай прилади, призначені для вимірювань опорів до 100 Ом, мають паралельну схему включення і пряму шкалу (рис. 2.27 б). Прилади для вимірювань опорів порядку декількох тисяч Ом виконуються за послідовною схемою й мають зворотну шкалу (рис. 2.27 а).

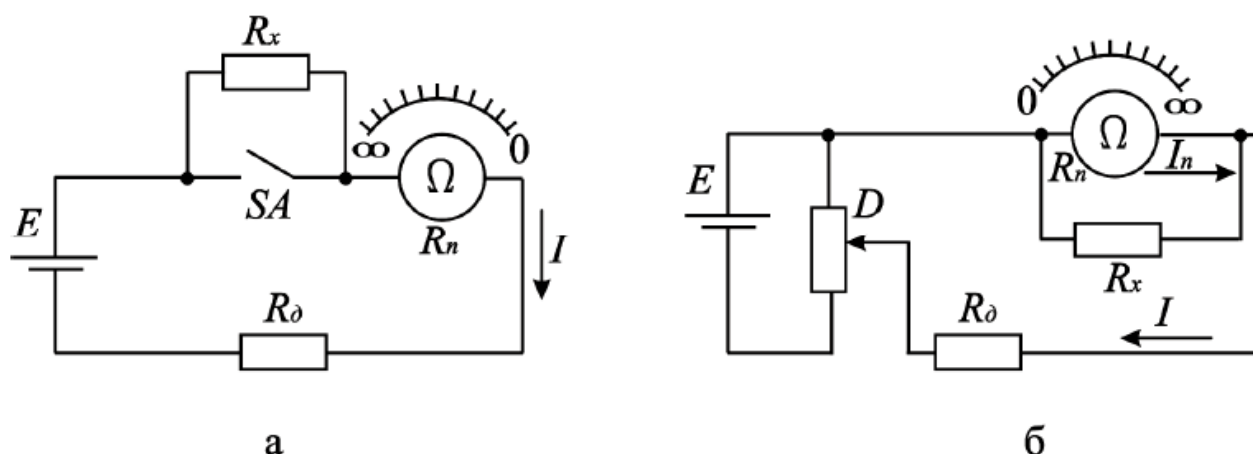


Рисунок 2.27 – Схеми включення омметра: а – послідовне включення (у випадку вимірювання опорів більше 100 Ом); б – паралельне включення (в разі вимірювання опорів до 100 Ом)

*Послідовне включення омметра з вимірюваним опором  $R_x$  (для  $R_x > 100$  Ом)*

Струм, що протікає через прилад (рис. 2.27 а):

$$I = \frac{E}{R_x + R_d + R_n},$$

де  $E$  – ЕРС джерела живлення;  $R_d$  – опір, що обмежує силу струму;  $R_n$  – внутрішній опір приладу.

Оскільки  $R_d$  і  $R_n$  є постійними, то значення струму в колі буде залежати від вимірюваного опору  $R_x$ , отже шкалу приладу можна відградувати в одиницях вимірюваного опору.

Рівняння шкали у випадку послідовного включення:

$$\alpha = \frac{E}{(R_x + R_d + R_n) \cdot C_I} = F(R_x),$$

де  $C_I$  – ціна розподілу приладу за струмом.

Працюють омметри в такий спосіб. Перед вимірюванням натискають кнопку SA (рис. 2.27 а), що шунтує вимірюваний опір, і за допомогою магнітного шунта встановлюють стрілку на контрольну позначку. Відпускаючи кнопку, включають у коло вимірюваний опір  $R_x$ . Стрілка приладу покаже значення вимірюваного опору.

Особливість омметра з послідовною рамкою полягає в тому, що в цьому приладі зворотна шкала, тобто нульова позначка, знаходиться праворуч від шкали, а позначка максимального значення опору – ліворуч. Це пояснюється тим, що під час вимірювання великих опорів через рамку приладу протікає незначний струм.

*Паралельне включення омметра з вимірюваним опором  $R_x$*   
(для  $R_x < 100 \text{ Ом}$ )

Струм, що протікає через зовнішнє (щодо вимірювального механізму) коло (рис. 2.27 б):

$$I = \frac{E}{R_d + \frac{R_n \cdot R_x}{R_x + R_x}}$$

Струм, що протікає через прилад:

$$I_n = I \cdot \frac{R_x}{R_p + R_x} = \frac{E}{\frac{R_d(R_n + R_x)}{R_x} + \frac{R_n \cdot R_x}{R_x}} = \frac{E}{\frac{R_d \cdot R_n}{R_x} + R_d + R_n}$$

Рівняння шкали у випадку паралельного включення:

$$\alpha = \frac{E \cdot C_1}{\frac{R_d \cdot R_n}{R_x} + R_d + R_n} = f(R_x)$$

Звичайно омметри виготовляються у вигляді переносних приладів порівняно невеликої точності (класів 1,5 або 2,5) і як джерела живлення мають суху батарею. Із часом напруга батареї падає, тому підтримується постійним добуток  $V \cdot U = \text{const}$ . Для цього в магнітну систему приладу вбудовується магнітний шунт – феромагнітна пластина, яка замикає полюси так, що частина магнітного потоку проходить через корисний повітряний проміжок, а частина – через магнітний шунт. Регулювання положення феромагнітної пластини відносно полюсних наконечників шунта здійснюється за допомогою регулювального гвинта, що розташований на корпусі приладу.

На рис. 2.28 представлено зовнішній вигляд омметра М419. Прилад призначений для вимірювань опорів від 0 до 5 МОм. Клас точності приладу –

2,5. Працює на частотах від 45 до 500 Гц. Споживана потужність – не більше 1 Вт. Вхідний опір – 250 кОм.



Рисунок 2.28 – Зовнішній вигляд омметра M419

Сучасна промисловість виготовляє цілу низку цифрових омметрів підвищеної точності з широким діапазоном вимірювань. На рис. 2.29 показано зовнішній вигляд цифрового міліомметра GOM-802. Діапазон вимірюваних опорів цього приладу – від 1 мкОм до 3 МОм. Похибка вимірювань – не вище  $\pm 0,1\%$ .



Рисунок 2.29 – Зовнішній вигляд цифрового міліомметра GOM-802

## Мегомметром

Мегомметр призначений для вимірювань великих опорів (кіло- та мегаОм) і являє собою магнітоелектричний логометр. У ньому є джерело живлення – генератор постійного струму з паралельним збудженням і ручним приводом.

Кут відхилення стрілки приладу залежить від відношення струмів, що протікають через рамки, і практично не залежить від поданої напруги.

Послідовно з однією з рамок включається зразковий опір, а послідовно з іншою – вимірюваний опір. Рівняння шкали мегомметра:

$$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right),$$

де  $I_1$ ,  $I_2$  – струми відповідно першої та другої рамок.



Рисунок 2.30 – Зовнішній вигляд мегомметра ЗС 0210

Шкала мегомметра охоплює діапазон вимірювань від 0 до  $\infty$ . Перехід від вимірювань кОм до МОм здійснюється за допомогою перемикача на два положення. Перевірку справності приладу здійснюють перед вимірюваннями до включення в коло: під час обертання ручки генератора стрілка повинна бути

встановлена на «0» – при перемикачі в положенні «кОм», і на  $\infty$  – в положенні «МОм».

Перед вимірюванням опору необхідно переконатися, що електричні кола не перебувають під напругою.

*Переваги мегомметра:*

- 1) простота у виготовленні;
- 2) є зручними в користуванні.

До *недоліків* мегомметра можна віднести невисоку точність вимірювань.

Промислово виготовляють мегомметри з номінальними напругами 100, 500 і 1000 В та межами вимірювань опору ізоляції від 0 до 1000 МОм типів М1101М, М1102/1, М503М, МС-0,5 та інші.

На рис. 2.30 показано зовнішній вигляд мегомметра ЭС 0210, розрахованого на вимірювання опорів від 0,5 до 100000 МОм.

2) *Вимірювання ємності та індуктивності прямими методами:*

*Мостом змінного струму*

*Мостом змінного струму* можна виміряти: індуктивність, ємність, добротність і кут діелектричних втрат  $\text{tg } \delta$ .

Міст змінного струму збирають із трьох змінних комплексів опорів  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$  і вимірюваного опору  $\underline{Z}_x$ . Міст живиться від джерела змінного струму промислової частоти, або всередині приладу встановлюють генератор змінного струму з частотою 1–10 кГц. У вимірювальну діагональ можна включити вібраційний гальванометр, електронний прилад, магнітоелектричний гальванометр, призначений для роботи в колі змінного струму.

Умова рівноваги мосту в комплексній формі:

$$\underline{Z}_x \cdot \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3.$$

Два комплексних числа є рівними, коли в них є рівними модулі й аргументи. Дві умови рівноваги мосту змінного струму:

$$\begin{cases} Z_x \cdot Z_2 = Z_1 \cdot Z_3 \\ \varphi_x \cdot \varphi_2 = \varphi_1 \cdot \varphi_3 \end{cases}.$$

Зазвичай в мостах змінного струму в якості  $Z_1$  і  $Z_2$  використовують активні опори  $R_1$  і  $R_2$ , тому друга умова рівноваги мосту зводиться до рівності:

$$\varphi_x = \varphi_3.$$



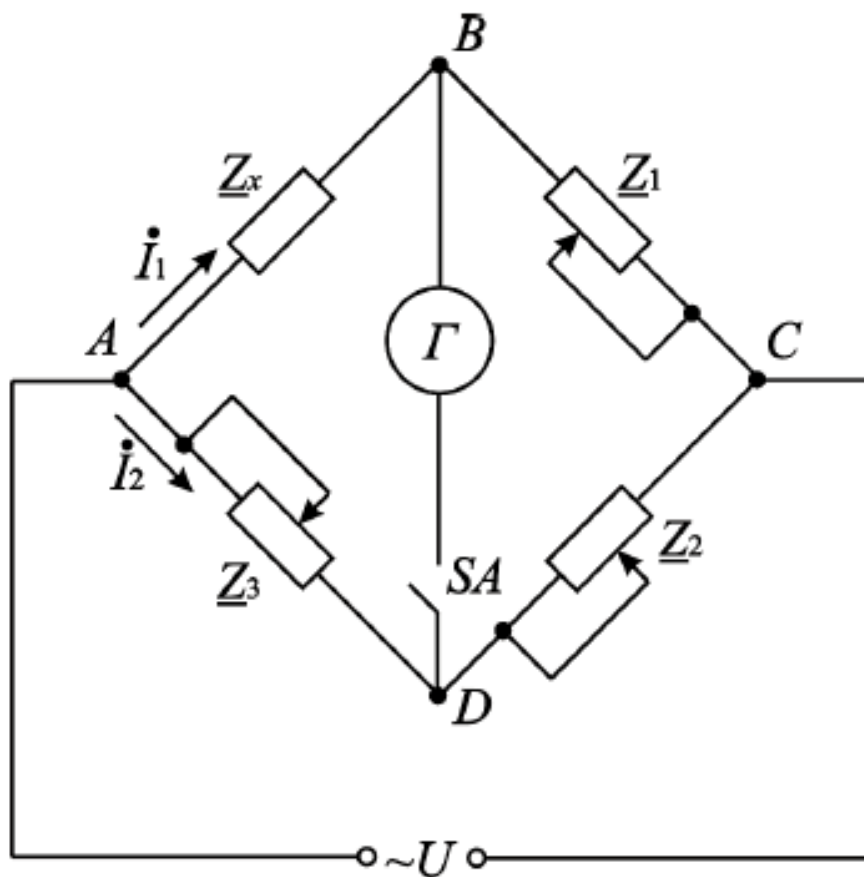


Рисунок 2.31 – Схема вимірювального мосту змінного струму

Таким чином, характер комплексного опору в третьому плечі буде визначатися характером вимірюваного опору.

Добротність котушки:

$$Q = \frac{X_K}{R_K} = \frac{\omega \cdot L_x}{R_x} = \frac{\omega \cdot L_3}{R_3}.$$

Кут діелектричних втрат:

$$\operatorname{tg} \delta = \omega \cdot C_x \cdot R_x = \omega \cdot C_3 \cdot R_3$$

### Вимірювання ємності фарадметром

*Фарадметр* – логометр електродинамічної системи. Нерухому котушку логометра з'єднують послідовно з конденсатором постійної ємності  $C$  і підключають до напруги живлення  $U$  мережі змінного струму.

Послідовно з однією з рухомих котушок включена зразкова ємність  $C_0$ , а послідовно з іншою – вимірювана ємність  $C_x$ . Опори котушок роблять настільки малими в порівнянні з опором конденсаторів, що струми в котушках будуть залежати тільки від ємності, тоді  $I_1 = U \times \omega \times C_x$ ,  $I_2 = U \times \omega \times C_0$ , де  $\omega$  –

кутова частота. Оскільки струми збігаються за фазами, то рівняння шкали має вигляд:

$$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = f\left(\frac{C_x}{C_0}\right)$$

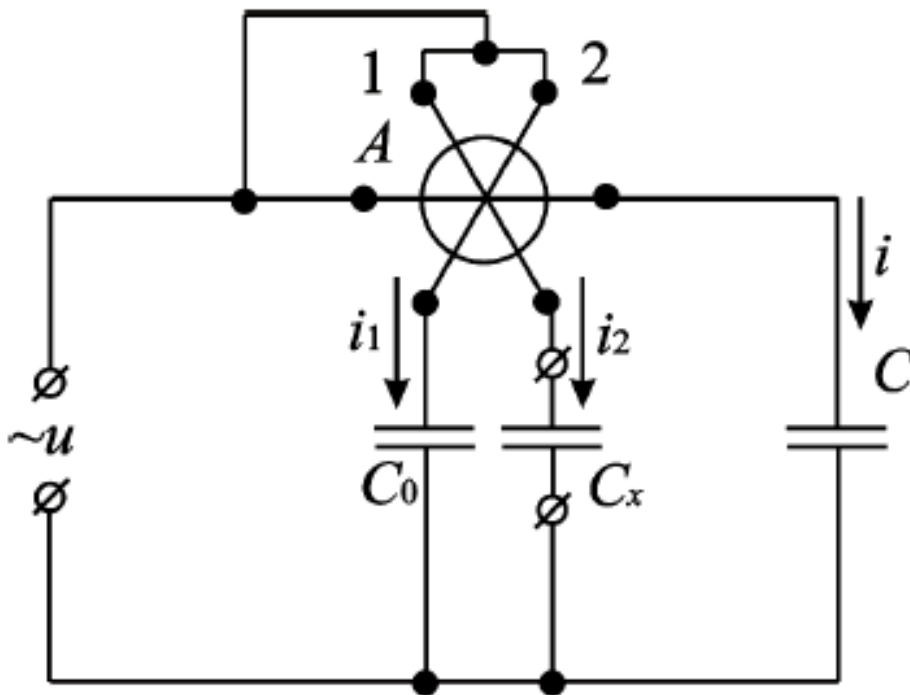


Рисунок 2.32 – Схема підключення фарадметра

Кожному значенню ємності  $C_x$  за постійної зразкової ємності відповідає певний кут відхилення стрілки логометра. Тобто шкалу логометра можна відградуювати в одиницях ємності.

*Недоліки фарадметра:*

- 1) похибка вимірювань становить 2–4 %;
- 2) обмежений діапазон вимірювань;
- 3) залежність показників вимірювань від частоти.

Промислово виготовляються декілька видів фарадметрів для вимірювань ємності, наприклад, Д524М, Д595.

На рис. 2.33 показано зовнішній вигляд ручного електронного фарадметра ДМ-9023. Межа вимірювань приладу становить від 200 пФ до 20000 мкФ. Похибка вимірювань – не більше  $\pm 2\%$ . Джерело живлення – батарея 9 В.



Рисунок 2.33 – Зовнішній вигляд ручного фарадметра DM-9023

*Вимірювання ємності балістичним гальванометром і вольтметром*

Метод оснований на вимірюванні балістичним гальванометром заряду  $Q$ , що накопичується конденсатором  $C_x$  в разі включення його на вимірювану напругу  $U$ . Схема вимірювання ємності показана на рис. 2.34.

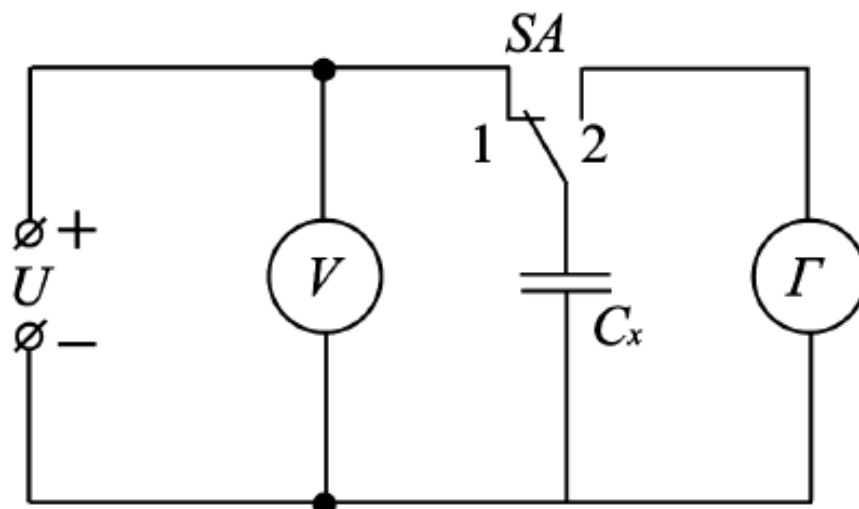


Рисунок 2.34 – Схема вимірювання ємності балістичним гальванометром і вольтметром

Спочатку перемикач SA встановлюють в положення 1, заряджають конденсатор до напруги  $U$ , яку вимірюють вольтметром  $V$  з великим внутрішнім опором.

Потім перемикач встановлюють у положення 2, конденсатор розряджається через балістичний гальванометр, і покажчик гальванометра починає відхилятися до якогось максимального значення  $\alpha_{\max}$ . Знаючи балістичну постійну гальванометра  $C_g$  із його паспорта, можна визначити вимірювану ємність:

$$C_x = \frac{Q}{U} = \frac{C_g \cdot \alpha_{\max}}{U}$$

де  $C_g$  – балістична постійна гальванометра;  $\alpha_{\max}$  – максимальне відхилення покажчика гальванометра;  $U$  – напруга, вимірювана вольтметром.

### **Вимірювання потужності в колах постійного струму**

Потужність споживача, включеного в коло постійного струму, залежить від напруги  $U$  на його затискачах і струму  $I$ . Значення потужності можна визначити за формулою

$$P = U \cdot I = I \cdot R^2 = \frac{U^2}{R} = U^2 \cdot G,$$

де  $R$  – опір навантаження;  $G$  – провідність навантаження.

Зрозуміло, що потужність у колі постійного струму можна виміряти декількома непрямими методами.

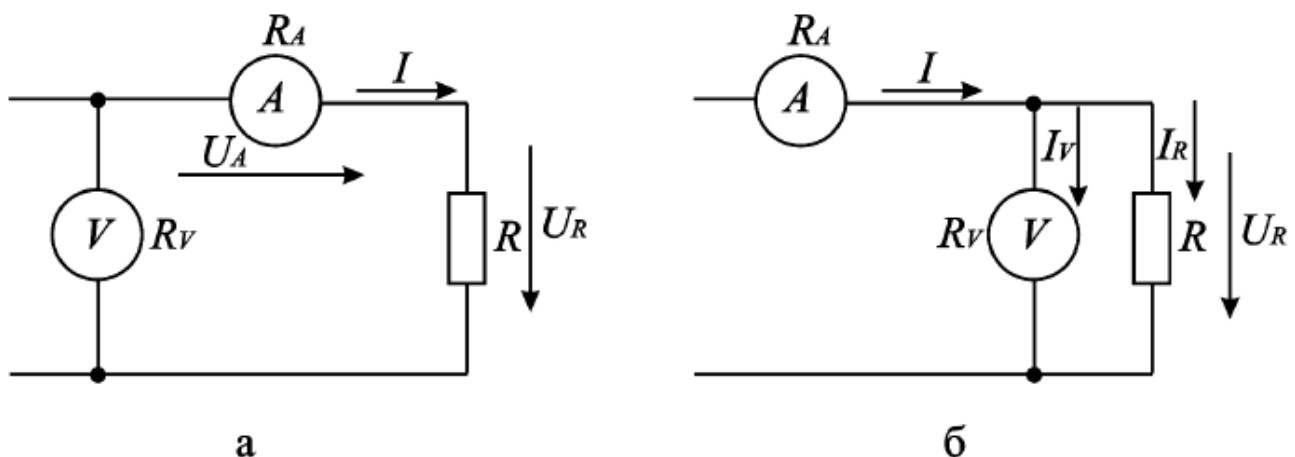


Рисунок 2.35 – Схеми включення амперметра і вольтметра під час вимірювання потужності: а – якщо навантаження має великий опір; б – якщо навантаження має невеликий опір

Один із таких методів набув широкого застосування – метод вимірювань потужності в колі постійного струму магнітоелектричними амперметром і вольтметром. При використанні цього методу необхідно враховувати опір навантаження і, залежно від цього, вибирати схему включення приладів.

Якщо навантаження має великий опір, то вольтметр потрібно включати до амперметра (рис. 2.35 а). У цьому випадку, виконавши множення показників приладів, одержуємо:

$$P = U \cdot I = (U_A + U_R) \cdot I = U_A \cdot I + U_R \cdot I = \Delta P_A + P_H,$$

де  $U_A$  – падіння напруги в амперметрі;  $U_R$  – падіння напруги в навантаженні;  $\Delta P_A$  – потужність, що розсіюється в амперметрі;  $P_H$  – потужність навантаження.

Зрозуміло, що вимірюване значення потужності  $P$  виявляється більшим дійсної потужності навантаження  $P_H$  на величину  $\Delta P_A$ , отже, відносна похибка вимірювань

$$\delta = \frac{\Delta P_A}{P} \cdot 100 = \frac{R_A}{R} \cdot 100,$$

де  $R_A$  – опір амперметра.

Видно, що чим більшим є опір навантаження  $R$  і чим меншим опір амперметра  $R_A$ , тим із більшою точністю можна виміряти потужність.

Якщо навантаження має незначний опір, то вольтметр варто включати після амперметра (рис. 2.35 б). Добуток показників приладів

$$P = U \cdot I = U_R \cdot (I_V + I_R) = U_R \cdot I_V + U_R \cdot I_R = \Delta P_V + P_H$$

де  $I_V$  – струм, що протікає в колі вольтметра;  $I_R$  – струм навантаження;  $\Delta P_V$  – потужність, споживана вольтметром.

У цьому випадку вимірюване значення потужності більше дійсної потужності навантаження на величину  $\Delta P_V$ , тобто похибку в результат вимірювань вносить вольтметр:

$$\delta = \frac{\Delta P_V}{P} \cdot 100 = \frac{R}{R_V} \cdot 100,$$

де  $R_V$  – опір вольтметра.

Зрозуміло, що чим меншим є опір споживача  $R$  і чим більшим опір вольтметра  $R_V$ , тим із більшою точністю можна виміряти потужність.

Найбільш просте й точне вимірювання потужності здійснюється за допомогою одноелементного електродинамічного ватметра. Включення такого

ватметра в коло постійного струму необхідно здійснювати з дотриманням правильного з'єднання генераторних затискачів обмотки кола струму й напруги.

На рис. 2.36 показано включення ватметра  $PW$  для вимірювань потужності  $P$ .

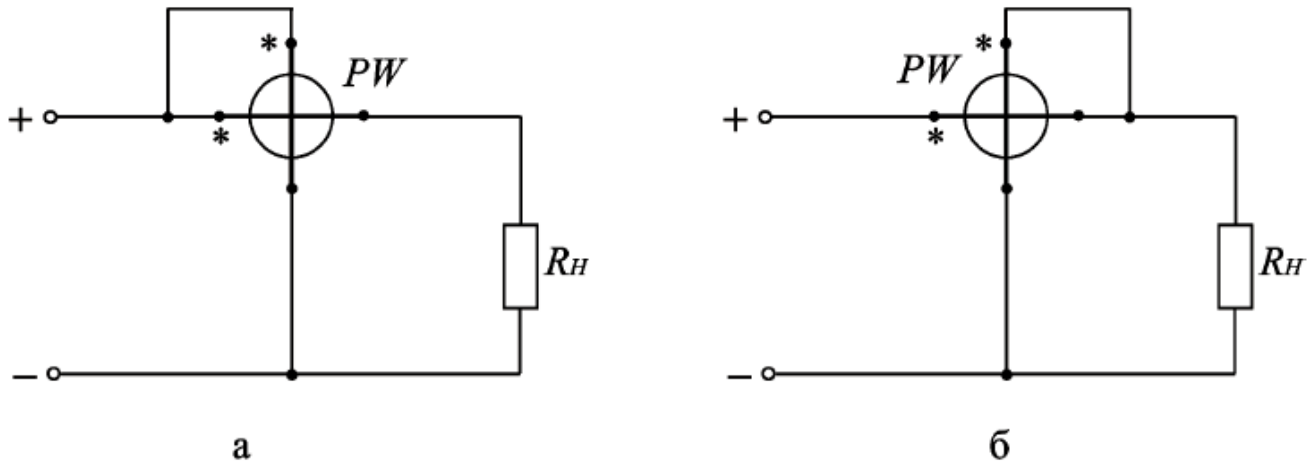


Рисунок 2.36 – Включення ватметра для вимірювань потужності: а – якщо навантаження має великий опір; б – якщо навантаження має невеликий опір

Генераторні затискачі струмової обмотки ватметра завжди включаються в напрямку джерела живлення. Генераторний затискач обмотки напруги, з метою зменшення методичної похибки, може бути включений так, як це показано на рис. 2.36 а або рис. 2.36 б. Схема рис. 2.36 а використовується в разі досить великого опору навантаження  $R_H$ , а схема на рис. 2.36 б – за відносно малого значення опору навантаження.

У більшості випадків застосування ватметрів опір навантаження  $R_H$  є відносно великим, а отже, ватметр необхідно включати за схемою на рис. 2.36 а.

Для того щоб визначити потужність за показниками приладу, потрібно показники приладу в позначках  $n$  помножити на ціну розподілу  $C_p$ :

$$P = n \cdot C_p = n \cdot \frac{U_H \cdot I_H}{N},$$

де  $U_H, I_H$  – відповідно номінальне значення напруги та струму обмоток ватметра;  $N$  – кількість позначок у шкалі приладу.

Лабораторні ватметри випускаються зазвичай багатомезжними. На циферблаті таких приладів наводиться таблиця зі значеннями ціни розподілу для всіх можливих меж вимірювань.

Якщо напруга в мережі є більшою допустимої напруги паралельної котушки, а струм є більшим допустимого струму струмової котушки, то для

підключення приладу необхідно в колі постійного струму скористатися додатковим резистором і шунтом.

### ***Вимірювання активної потужності в однофазному колі змінного струму***

Значення активної потужності в однофазному колі змінного струму визначають за формулою

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi,$$

де  $U$  – напруга навантаження;  $I$  – струм навантаження;  $\varphi$  – фазовий зсув між напругою і струмом.

З формули зрозуміло, що потужність навантаження можна визначити непрямим методом, якщо включити три прилади: вольтметр, амперметр і фазометр. Однак у цьому випадку не можна розраховувати на значну точність вимірювань. Тому для вимірювань активної потужності в колах змінного струму використовують *ватметри електродинамічної системи*. У випадку грубих вимірювань можуть бути використані *феродинамічні ватметри*.

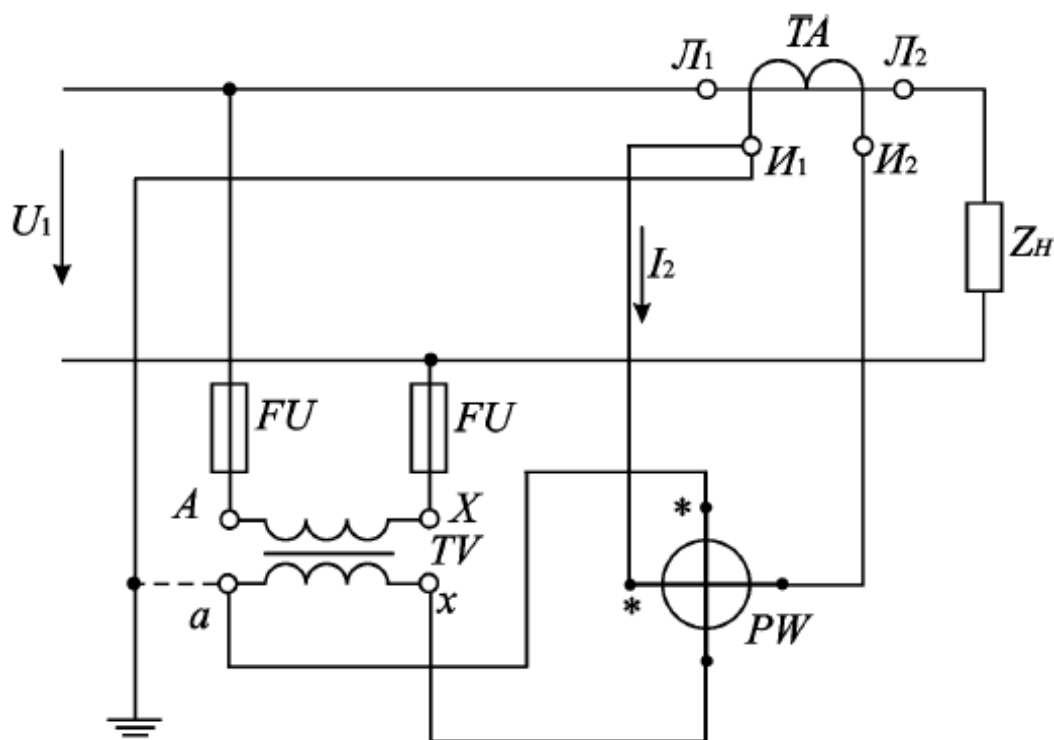


Рисунок 2.37 – Включення ватметра для вимірювань потужності у високовольтному колі змінного струму

Якщо напруга в колі є меншою межі вимірювань ватметра за напругою, струм навантаження є меншим за припустимий струм приладу, то схема включення ватметра в коло змінного струму є аналогічною схемі включення

ватметра в коло постійного струму. Щоб забезпечити правильне відхилення стрілки приладу від нуля, початки обмоток на панелі ватметра позначені крапкою або зірочкою. Затискачі, позначені таким чином, називаються генераторними, тому що їх підключають до джерела енергії.

Якщо струм навантаження є більшим 10–20 А, то струмову котушку ватметра включають через вимірювальний трансформатор струму.

Для вимірювань потужності в колах змінного струму з низьким коефіцієнтом потужності застосовують *спеціальні низькосинусні ватметри*. На їх шкалі зазначено, для яких  $\cos \varphi$  вони призначені.

Під час вимірювання потужності у високовольтному колі змінного струму використовують вимірювальні *трансформатори струму і напруги*.

Струмову котушку ватметра включають у вторинну обмотку вимірювального трансформатора струму, котушку напруги – у вторинну обмотку вимірювального трансформатора напруги. Для визначення дійсного значення потужності показники ватметра  $P_W$  множать на коефіцієнти  $\kappa_I$  і  $\kappa_U$  трансформації за струмом і напругою:

$$P = n \cdot C_p \cdot \kappa_I \cdot \kappa_U = P_w \cdot \kappa_I \cdot \kappa_U.$$

Через можливу появу високої напруги в колі вторинних обмоток трансформатора початки вторинних обмоток заземляють. Для захисту обмоток вимірювального трансформатора напруги від появи можливого струму короткого замикання первинну обмотку підключають через плавкі запобіжники або автоматичні вимикачі.

### ***Вимірювання реактивної потужності в однофазних колах змінного струму***

Реактивну потужність в однофазному колі змінного струму можна виміряти непрямим методом за допомогою трьох приладів: вольтметра, амперметра й ватметра. Значення реактивної потужності можна розрахувати за формулою

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(U \cdot I)^2 - P^2},$$

де  $S$  – повна потужність;  $P$  – показники ватметра;  $U$  – показники вольтметра;  $I$  – показники амперметра.

### **2.5.2 Вимірювання магнітних величин**

Електричні й магнітні вимірювання виконуються у тісному зв'язку внаслідок єдності електричних і магнітних явищ. За допомогою магнітних вимірювань вирішується ряд завдань, до яких відносяться дослідження магнітних властивостей речовин та матеріалів, дослідження різних видів



електромагнітних механізмів, апаратів і машин для виявлення розподілу магнітних потоків і МРС, контроль якості магнітних матеріалів і виробів із них у виробничих умовах, випробування постійних магнітів і електромагнітів, дослідження магнітного поля Землі, вивчення фізичних властивостей матеріалів за їх магнітними характеристиками.

У більшості випадків при визначенні характеристик магнітних полів і матеріалів магнітні величини розраховують за експериментально отриманими значеннями електричних величин або електричних параметрів.

Магнітні характеристики прийнято поділяти на *статичні* й *динамічні*.

*Статичні характеристики* магнітних матеріалів визначають у постійних магнітних полях і використовують як для розрахунку пристроїв, де ці матеріали працюють у таких самих умовах, так і для порівняння одних матеріалів з іншими.

*Динамічні характеристики* магнітних матеріалів вимірюють у змінних магнітних полях. Останні залежать не тільки від властивостей зразка, але й від частоти магнітного поля, форми кривої поля, форми та розмірів зразка.

Найпоширенішими магнітними величинами є магнітний потік, магнітна індукція та напруженість магнітного поля.

### ***Вимірювання магнітного потоку в постійному магнітному полі:***

*За допомогою балістичного гальванометра (індукційно-імпульсний метод)*

Цей метод оснований на вимірюванні кількості електрики в імпульсі струму, що наводиться у вимірювальній котушці при зміні потокозчеплення.

Для вимірювань магнітного потоку котушка з відомим числом витків  $w_k$  підключається до балістичного гальванометра через резистор  $R_d$  і потім швидко виводиться з поля або вноситься в нього.

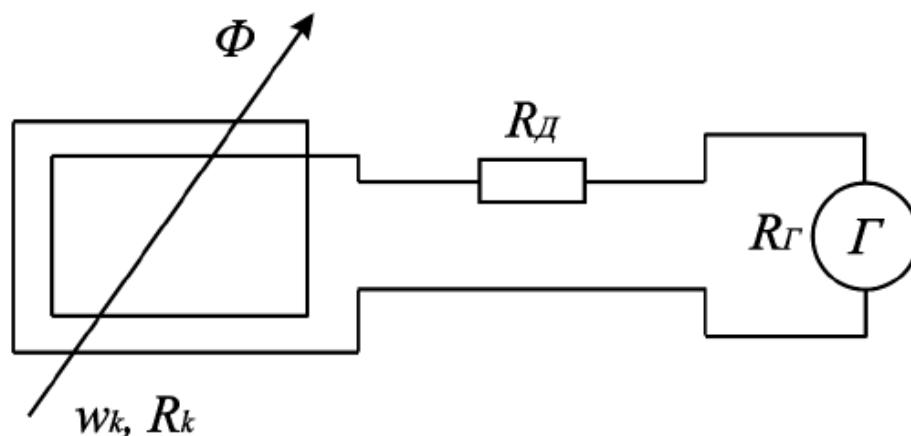


Рисунок 2.38 – Вимірювання магнітного потоку за допомогою балістичного гальванометра

Зміна потоку, зчепленого з котушкою, спричиняє в ній ЕРС

$$e = -\frac{w_{\kappa} \cdot d\Phi}{dt},$$

яка визначає струм

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{w_{\kappa}}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

де  $R = R_{\Gamma} + R_{\kappa} + R_{\text{д}}$  – загальний активний опір кола вимірювань, рівний сумі опорів гальванометра, котушки та додаткового резистора.

Зміна кількості електрики  $dQ$  пов'язана зі зміною потоку  $d\Phi$  :

$$dQ = idt = -\frac{w_{\kappa}}{R} d\Phi.$$

Інтегруючи останнє рівняння в межах від 0 до  $t_1$ , одержуємо співвідношення для кількості електрики в імпульсі струму, що визначається шляхом зміни потоку від  $\Phi$  до 0 (виведення котушки з поля):

$$Q = \int_0^{t_1} idt = -\frac{w_{\kappa}}{R} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{w_{\kappa}}{R} \cdot \Phi.$$

Якщо вимірювальна котушка є нерухомою, а зміна потоку від  $+\Phi$  до  $-\Phi$  викликається зміною струму від  $+I$  до  $-I$ , то кількість електрики в імпульсі струму, що протікає в колі, дорівнює:

$$Q = 2 \cdot \frac{w_{\kappa}}{R} \cdot \Phi.$$

За досить незначною тривалості імпульсу струму, в порівнянні з періодом вільних коливань гальванометра, можна вважати, що перше найбільше відхилення його покажчика  $\alpha_{1m}$  є пропорційним кількості електрики в імпульсі:

$$Q = C_Q \cdot \alpha_{1m},$$

де  $C_Q$  – ціна розподілу (балістична постійна) гальванометра за кількістю електрики.

Одержуємо:

$$\Phi = \frac{R}{w_k} \cdot C_Q \cdot \alpha_{1m} = \frac{C_\Phi}{w_k} \cdot \alpha_{1m},$$

де  $C_\Phi = C_Q \times R$  – ціна розподілу (балістична постійна) гальванометра за магнітним потоком.

### *Веберметр*

*Веберметр* призначений для прямого вимірювання магнітного потоку індукційно-імпульсним методом. Він являє собою магнітоелектричний гальванометр без протидіючого моменту. Градування веберметра практично не залежить від опору зовнішнього кола, якщо воно не перевищує значення, вказаного в паспортних даних приладу.

Промислово виготовляються магнітоелектричні веберметри типів Ф191 (рис. 2.39 а) і М1119 (рис. 2.39 б) із ціною розподілу  $5 \times 10^{-6}$  та  $10^{-4}$  Вб/поз. Клас точності багатограничного мікровеберметра Ф191 становить 1,0 при опорі зовнішнього кола не більше 100–1000 Ом. У мілівеберметра М1119 клас точності 1,0 при опорі зовнішнього кола – не більше 10 Ом.



а



б

Рисунок 2.39 – Зовнішній вигляд веберметрів: а – мікровеберметра Ф191; б – мілівеберметра М1119

### ***Вимірювання магнітної індукції та напруженості магнітного поля:***

#### *Індукційно-імпульсний метод*

Описаний вище метод вимірювань магнітного потоку із застосуванням балістичного гальванометра може бути використаний також для вимірювань магнітної індукції та напруженості магнітного поля. Якщо поле є однорідним і площа витків вимірювальної котушки є перпендикулярною до напрямку вектора магнітної індукції, то

$$B = \Phi \cdot S,$$

де  $S$  – площа витка.

Маємо:

$$B = \frac{C_{\Phi}}{S \cdot w_{\kappa}} \cdot \alpha_{1m}.$$

Для вимірювань магнітної індукції необхідно, як і під час вимірювання магнітного потоку, змінивши потікозчеплення вимірювальної котушки, відрахувати перше найбільше відхилення покажчика балістичного гальванометра і зробити розрахунок.

Вимірювання напруженості індукційно-імпульсним методом є аналогічним вимірюванню магнітної індукції. Воно ґрунтується на відомій функціональній залежності між ними для вакууму й повітря

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{C_{\Phi}}{\mu_0 \cdot S \cdot w_{\kappa}} \cdot \alpha_{1m} = \frac{C_{\Phi}}{\kappa} \cdot \alpha_{1m},$$

де  $\mu_0$  – магнітна постійна, що дорівнює в системі СІ  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\kappa$  – стала вимірювальної котушки.

Постійна вимірювальної котушки може бути визначена експериментально.

Для цього котушку розташовують у полі, напруженість якого  $H_0$  є відомою. Для створення зразкового поля застосовують спеціальну котушку, напруженість магнітного поля якої можна розрахувати. Постійну котушки визначають за відхиленням покажчика гальванометра при вмиканні або вимиканні струму котушки. Відповідно:

$$\kappa = \frac{C_{\Phi} \cdot \alpha_{1m1}}{H_0}.$$

*За допомогою явища ядерного магнітного резонансу*

Якщо на ядра якої-небудь речовини одночасно впливати постійним і змінним високочастотним магнітним полем, то у випадку певного співвідношення між індукцією постійного поля ( $B$ ) і частотою змінного поля ( $\omega$ ) настає режим резонансного поглинання енергії ядрами цієї речовини. Відомо, що ядро атома може мати певне число орієнтацій у зовнішньому магнітному полі; для ядра атома водню – протона – таких можливих орієнтацій дві: за полем і проти поля.

Цим двом станам відповідає певна різниця енергій, що дорівнює  $2 \cdot \mu_p \cdot B$ , де  $\mu_p$  – магнітний момент протона. Крім того, для переорієнтації протона з напрямку за полем у протилежний необхідний квант енергії  $h \cdot f$ , де  $h$  – універсальна постійна Планка,  $f$  – частота.

З вищенаведеного випливає, що

$$2 \cdot \mu_p \cdot B = h \cdot f$$

Або

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{4 \cdot \pi}{h} \cdot \mu_p \cdot B = \gamma_p \cdot B,$$

де  $\gamma_p$  – гіромагнітне відношення протона, тобто відношення його магнітного моменту до механічного, відоме в цей час із високою точністю ( $\gamma_p = 2,67512 \times 10^8$  1/(Тл·с)).

З останнього співвідношення зрозуміло, що

$$B = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\gamma_p}.$$

Структурна схема установки для визначення індукції постійного магнітного поля представлена на рис. 2.40.

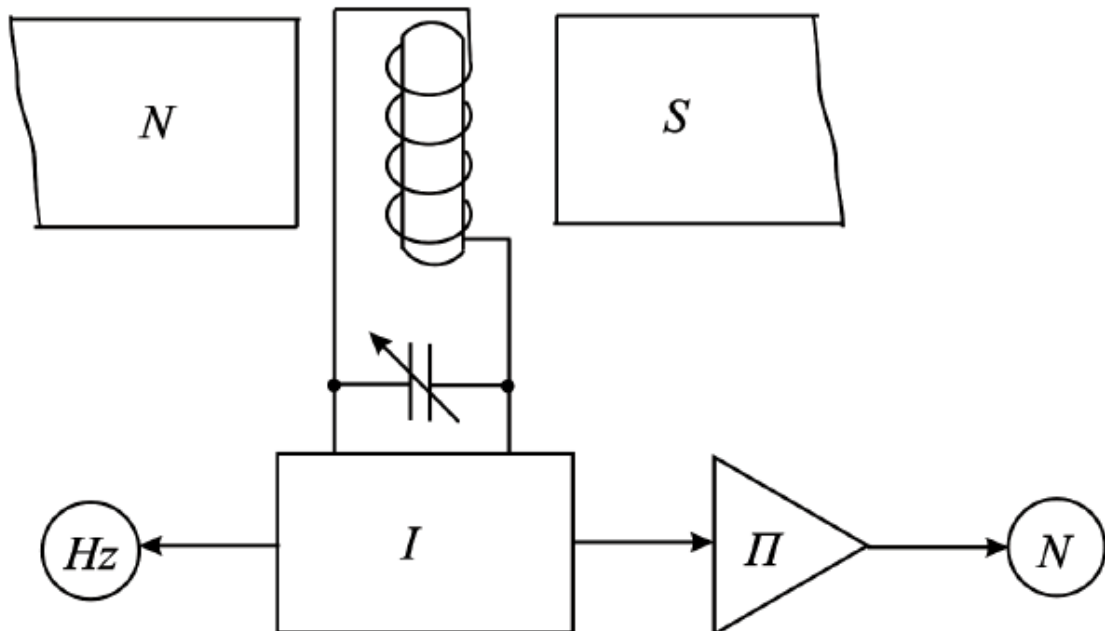


Рисунок 2.40 – Структурна схема установки для визначення індукції постійного магнітного поля

У вимірюване магнітне поле розміщується котушка коливального контуру генератора, всередині якої знаходиться скляна ампула з робочою речовиною, що містить ядра водню (протони) або ядра інших елементів, наприклад, літію або дейтерію, що мають значення гіромагнітних відношень ядер, відмінні від гіромагнітного відношення протона – це дозволяє розширити діапазон вимірювань. Як робочі речовини часто застосовують звичайну воду, водяний розчин хлористого літію, а також важку воду.

Для визначення моменту резонансу змінюють частоту коливань генератора і ведуть пошук резонансного сигналу за допомогою електронно-променевого осцилографа. Підсилювач (*П*) призначений для підсилення малого сигналу. Резонансна частота визначається частотоміром *Hz*.

Метод застосовується для вимірювань індукції та напруженості однорідних магнітних полів із похибкою, що не перевищує 0,01 %.

Промислово виготовляється ряд вимірювальних приладів, дія яких основана на явищі ядерного магнітного резонансу: це тесламетри типів Ш1-1, Ш1-2 і вимірювачі напруженості магнітного поля типу Е 11-2.

### *З використанням ефекту Холла*

Ефект Холла полягає в появі ЕРС  $E_x$  між протилежними сторонами пластини з металу або напівпровідникового матеріалу, якщо через пластину пропустити струм і помістити її при цьому в магнітне поле. Напрямки струму, вектора магнітної індукції та ЕРС Холла взаємно перпендикулярні. Для виготовлення перетворювачів Холла зазвичай застосовують напівпровідники (германій, сурм'янистий індій, миш'яковистий індій та ін.), тому що вони дають значно більшу ЕРС Холла, ніж метали.

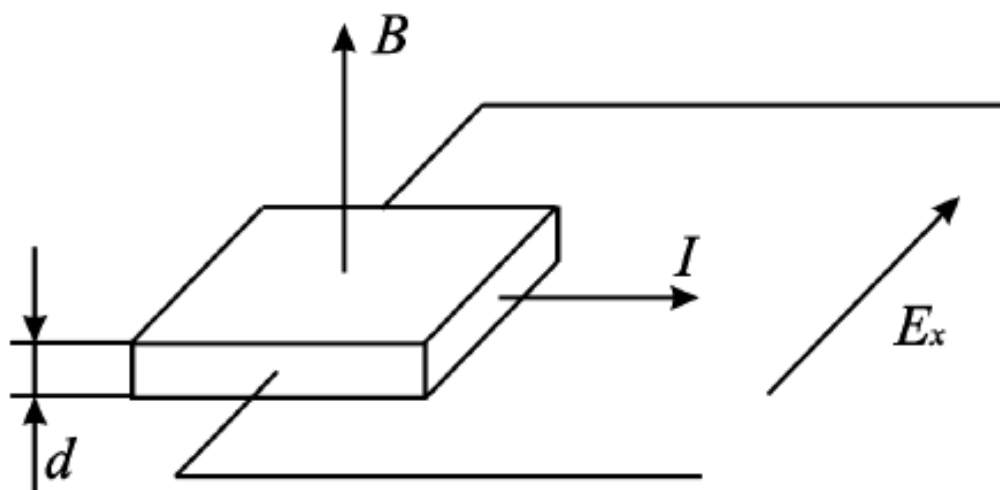


Рисунок 2.41 – Демонстрація ефекту Холла

Магнітна індукція, струм і ЕРС Холла пов'язані між собою в такий спосіб:

$$E_x = \frac{R_x \cdot I \cdot B}{d},$$

де  $R_x$  – постійна Холла;  $d$  – товщина пластини.

З вищенаведеного випливає, що

$$B = \frac{E_x \cdot d}{R_x \cdot I}.$$

*Основною перевагою* перетворювачів Холла є пропорційність ЕРС Холла індукції, малі розміри та маса, можливість їх використання для вимірювань як постійних, так і змінних полів до частот 1012 Гц. За допомогою перетворювачів Холла можна виміряти магнітну індукцію в діапазоні від 0,001 до 1–2 Тл.

*Головний недолік* – залежність постійної Холла від температури.

Промислово виготовляється ряд тесламетрів, побудованих на ефекті Холла: Ш1-8, ДХК-0.5А, «Маяк-2М», «Топаз», ТХ-4/1.



Рисунок 2.42 – Зовнішній вигляд тесламетра МТП-2000

Тесламетр МТП-2000 має діапазон вимірювань індукції постійного магнітного поля від 20 мТл до 10 Тл, а змінного магнітного поля – від 20 до 200 мТл. Клас точності приладу – 5,0.

### 2.5.3 Вимірювання неелектричних величин

Порівняно з електричними, неелектричні величини є найбільш поширеними. Розрізняють наступні типи неелектричних величин:

- величини, що характеризують простір та час (геометричні розміри, час, параметри руху);
- механічні величини (маса та сила, тиск, моменти сили, механічні напруження);
- теплові величини, які характеризують тепловий стан тіл (температура, кількість теплоти, теплопровідність);
- світлотехнічні та енергетичні характеристики світла (сила світла, світловий потік, яскравість, потужність випромінювання);
- акустичні величини, що характеризують різні сторони хвильового руху в різних середовищах (звуковий тиск, гучність звуку, акустичний шум);
- величини фізичної хімії, що характеризують фізично-хімічні властивості речовин (хімічний склад, густина розчину, молярна концентрація);
- величини, що характеризують іонізуюче випромінювання.

Вимірювання неелектричних величин електричними вимірювальними засобами стає можливим унаслідок попереднього перетворення досліджуваних неелектричних величин у функціонально пов'язані з ними електричні величини за допомогою відповідних вимірювальних перетворювачів. Таким чином, у процесі вимірювання неелектричної величини будуть брати участь первинний вимірювальний перетворювач неелектричної величини в електричну, вторинний електричний вимірювальний прилад, а також пристрої їх сполучення.

Всі методи вимірювання неелектричних величин можна розділити на *контактні* та *безконтактні*. В разі застосування контактних методів вимірювань первинний перетворювач безпосередньо контактує з досліджуваним об'єктом. Ці методи є порівняно нескладними у реалізації та забезпечують високу чутливість. Однак, за умов застосування контактного методу спостерігається зворотна дія вимірювального перетворювача на параметри досліджуваного об'єкта, що може призвести до значних похибок.

Під час безконтактних вимірювань первинний перетворювач безпосередньо не контактує з досліджуваним об'єктом і не впливає на його параметри. Однак на результати вимірювань у цьому випадку у значній мірі впливає довкілля, яке відділяє досліджуваний об'єкт від первинного перетворювача.

Можна виділити наступні переваги вимірювання неелектричних величин електричними засобами:

- *універсальність*, яка полягає в можливості вимірювань декількох чи навіть великої кількості неелектричних величин за допомогою одного електричного засобу;
- *простота автоматизації вимірювань*, унаслідок того, що в електричних колах можна виконувати логічні та цифрові операції;



– *можливість забезпечення високої чутливості, необхідної точності та швидкодії;*

– *дистанційність*, що полягає в можливості вимірювань параметрів досліджуваних об'єктів практично на будь-якій від них відстані.

За фізичними закономірностями, покладеними в основу принципу дії, вимірювальні перетворювачі можуть бути поділені на такі групи:

1. *Механічні пружинні перетворювачі.* В основу принципу дії таких перетворювачів покладено залежності між вхідними механічними зусиллями і викликаними ними переміщеннями чи механічними напруженнями в матеріалі чутливого елемента, що визначаються його пружними властивостями.

2. *Резистивні перетворювачі.* Носієм вимірювальної інформації у резистивних перетворювачах механічних величин є електричний опір, зміна якого може бути наслідком переміщення повзунка реостата чи реохорда в реостатних та реохордних перетворювачах або ж унаслідок тензоефекту в тензорезистивних перетворювачах.

3. *Ємнісні перетворювачі.* В основу принципу дії цих перетворювачів покладено залежність ємності конденсатора від відстані між його електродами, площі їх перекриття чи діелектричної проникності середовища між електродами.

4. *П'єзоелектричні перетворювачі.* Принцип дії цих перетворювачів оснований на використанні явища поляризації п'єзоелектрика унаслідок дії на нього механічних зусиль. Різновидом п'єзоелектричних є п'єзорезонансні перетворювачі, принцип дії яких оснований на використанні залежності резонансної частоти п'єзоелемента від значення вимірюваної величини, наприклад, від температури довкілля.

5. *Індуктивні перетворювачі.* Це перетворювачі, в яких використовується залежність повного електричного опору намагнічувальної обмотки від значення комплексного магнітного опору магнітного кола перетворювача, який може бути результатом зміни повітряного проміжку в магнітному колі перетворювача або результатом зміни магнітних властивостей феромагнетику внаслідок дії на нього механічних зусиль, як в індуктивних магнітопружних перетворювачах.

6. *Взаємноіндуктивні (трансформаторні) перетворювачі.* Принцип їх дії ґрунтується на використанні залежності магнітного потоку і відповідно наведеної у вторинній обмотці ЕРС від значення комплексного магнітного опору магнітопроводу, який, як і в індуктивних перетворювачах, залежить від зміни повітряного проміжку чи магнітних властивостей феромагнетику, спричинених його механічною деформацією.

7. *Індукційні перетворювачі.* Їх принцип дії ґрунтується на використанні явища електромагнітної індукції. Вхідними (вимірюваними) величинами таких перетворювачів можуть бути швидкість зміни магнітного потоку або швидкість лінійного або кутового переміщення вимірювальної котушки.

8. *Гальваномагнітні перетворювачі.* Їх принцип дії базується на використанні гальваномагнітних ефектів Гаусса або Холла. Суть ефекту Гаусса полягає у зміні електричного опору провідника чи напівпровідника під час

проходження через нього електричного струму та одночасної дії на нього магнітного поля, а ефект Холла – в появі за названих умов поперечної різниці потенціалів (ЕРС Холла). Основними різновидами гальваномагнітних перетворювачів є відповідно магніторезистивні перетворювачі Холла.

9. *Теплові перетворювачі.* Тепловими називають перетворювачі, в основу принципу роботи яких покладено фізичні ефекти, що визначаються тепловими процесами. Теплові перетворювачі – це, переважно, перетворювачі температури. Правда, непрямо вони можуть використовуватись для перетворень інших величин, що проявляються через теплові процеси, наприклад, нехімічного складу, концентрації, швидкості руху газів чи рідин тощо. Існують дві основні групи теплових перетворювачів, які широко застосовуються у вимірювальній техніці: це – терморезистори, що використовують залежність опору матеріалу від температури, та термоелектричні перетворювачі, в основу принципу дії яких покладено залежність термо-ЕРС термопари від різниці температур.

10. *Електрохімічні перетворювачі.* Принцип дії електрохімічних перетворювачів ґрунтується на залежності електропровідності електролітичної комірки від складу, концентрації, температури чи інших параметрів досліджуваного розчину (електрохімічні резистивні перетворювачі); залежності електродних потенціалів від активності водневих іонів (гальванічні перетворювачі рН-метрів); а також залежності різниці електричних потенціалів на межі розділу твердої та рідкої фаз від швидкості переміщення розчину (електрокінетичні перетворювачі).

11. *Оптичні перетворювачі.* В основу їх принципу дії покладено залежність параметрів оптичного випромінювання від значення вимірюваної величини. Остання може діяти безпосередньо на джерело випромінювання, змінюючи інтенсивність його випромінювання, як в оптичних пірметрах, або ж на оптичний канал, впливаючи на параметри оптичного потоку, як, наприклад, у вимірювача оптичної щільності.

12. *Перетворювачі іонізаційного випромінювання.* Принцип дії таких перетворювачів ґрунтується на перетворенні інтенсивності іонізаційного або рентгенівського випромінювання. У перетворювачах іонізаційного випромінювання вихідна електрична величина функціонально пов'язана з інтенсивністю іонізаційного або рентгенівського випромінювання, яка є мірою досліджуваної величини.

#### **2.5.4 Контрольований та неконтрольований експерименти**

*Експеримент* – це загальнонауковий метод отримання нових знань у керованих і контрольованих умовах.

*Натуральний експеримент* передбачає цілеспрямоване втручання дослідника у природний хід подій.

Натуральний експеримент може бути: контрольований; неконтрольований.

*Контрольований експеримент* – це спроба отримати порівняно чистий ефект впливу експериментальних факторів. Для цього ретельно вивчають і вирівнюють інші умови, що можуть виникнути та викривити вплив експериментального фактора.

*Лабораторний експеримент* проводиться у штучно організованих, власне лабораторних умовах із використанням спеціальної вимірювальної апаратури.

*Природний експеримент* відбувається в реальних, звичних умовах.

*Комплексний експеримент* – це поєднання лабораторного та природного експериментів, який дозволяє отримати більш ефективні результати, що неможливо при проведенні лише одного з вищезазначених типів експериментів.

*Пасивний експеримент* застосовується для вивчення певних показників (параметрів, змінних) через спостереження за об'єктом без втручання дослідника в його функціонування. Зазначений вид експерименту можна вважати спостереженням з інструментальним вимірюванням показників стану об'єкта дослідження.

*Активний експеримент* передбачає вибір дослідником певних вхідних факторів та здійснення контролю за тим, як змінюється об'єкт дослідження під їхнім впливом.

## **2.6 Проведення експерименту в хімії**

### **2.6.1 Основи планування та проведення експериментів у хімії**

*Аналітичний сигнал* – екстенсивна фізична величина, функціонально і однозначно пов'язана з шуканим вмістом визначуваного компонента. Прикладами таких величин можуть служити: оптична густина, інтенсивність люмінесценції, маса осаду, об'єм титранту, висота полярографічної хвилі тощо. Але аналітичний сигнал є двовимірною величиною. Екстенсивна величина реєструється або вимірюється за певного значення або в деякому інтервалі значень інтенсивного параметра або «параметра розгортки» аналітичного сигналу. Такими параметрами є: довжина хвилі у спектроскопічних методах, потенціал відновлення у полярографії. Наприклад, у спектрофотометричному аналізі крива світлопоглинання будується в координатах оптична густина – довжина хвилі:  $A = f(\lambda)$ . Довжина хвилі максимуму світлопоглинання є якісною характеристикою, а висота піку (максимальна оптична густина) – кількісною.

Аналітичний сигнал підрозділяють на *вхідний* і *вихідний*. Аналітичний сигнал, якому відповідає концентрація визначуваного компонента, виконує роль вхідного сигналу по відношенню до вимірювального пристрою. На виході цієї установки під час аналізу виникає вихідний аналітичний сигнал (I). Завдання полягає в знаходженні вихідного сигналу по вхідному, і здійснюється це за допомогою зв'язку типу «склад – властивість». Цей зв'язок може бути математичним, графічним або числовим. У процесі аналізу переданий сигнал і саме вимірювальний пристрій схильні до дії багатьох факторів, які змінюють і

спотворюють вихідний сигнал. До певної міри умовно чинники можна розділити на зовнішні "z", залежні від умов проведення аналізу, і внутрішні "z<sub>1</sub>", пов'язані з особливостями і властивостями аналізованого матеріалу:



Вихідний аналітичний сигнал можна розглядати як величину вихідного аналітичного сигналу I, що залежить не тільки від концентрації визначуваного компонента проби С, але й від впливу факторів Z і Z<sub>1</sub>:

$$I = f(C, Z, Z_1)$$

Результатом цих взаємодій є те, що в підсумку аналізу реєструється не величина дійсної концентрації визначуваного компонента, а оціночна величина  $\hat{C}$ , яка залежить від зміни значень вхідного та вихідного сигналів, що визначається похибками (помилками) вимірювання. Такі похибки різного характеру в кінцевому підсумку визначають точність аналізу.

Як ми вже говорили, *аналітичний сигнал* – величина екстенсивної властивості, яка є пропорційною концентрації (вмісту) визначуваного компонента. Тому вимірювання хімічного складу обтяжене похибками, зазвичай тим більш значними, чим складнішим є склад аналізованого об'єкта.

Припустимо, що перед нами поставлено завдання провести якісний аналіз зразка морської води. Не важко зрозуміти, що без особливих зусиль у такому зразку, крім основного компонента – води, можна виявити іони Na<sup>+</sup>, Mg<sup>2+</sup>, Ca<sup>2+</sup>, K<sup>+</sup>, Cl<sup>-</sup>, SO<sub>4</sub><sup>2-</sup>, HCO<sub>3</sub><sup>-</sup>. Також, окрім вищезазначених іонів, можна виявити у зразку іони Fe<sup>3+</sup>, Al<sup>3+</sup>, Mn<sup>2+</sup>, Br<sup>-</sup>, I<sup>-</sup>, NH<sub>4</sub><sup>+</sup>. Спеціальними високочутливими методами із застосуванням прийомів попереднього збагачення вдається виявити ще цілий ряд елементів – B, F, Zn, Li, Sr, Ba, Cu, Ti, Sn і навіть слідові кількості благородних металів. Не буде перебільшенням сказати, що в морській воді міститься велика частина елементів періодичної системи, але одні з них перебувають у більших, інші – в менших, а треті – в ультрамалих кількостях. Через це постановка завдання якісного хімічного аналізу морської води у відриві від кількісних критеріїв втрачає сенс. Логічною є постановка іншого завдання: визначити, які елементи містяться в морській воді в кількостях, не менших, ніж 0,05 %, або, скажімо, які елементи містяться в морській воді в кількостях, що перевищують 10<sup>-4</sup> %.

## 2.6.2 Етапи проведення експериментів у хімії

**1. Відбір проби.** *Пробовідбором* називають операцію, під час якої відбувається відбір достатньої кількості представницької частини, яка відображає якісний і кількісний компонентний склад об'єкта аналізу. Отже, хімічний склад представницької проби об'єкту в малій кількості (від кілька сот грамів до кількох кілограмів) повинен адекватно відображати хімічний склад великої кількості (від десятків кілограмів до сотен тонн) матеріалу, який підлягає аналізу. Наприклад, у випадку твердих тіл неоднорідного складу відбору середньої (представницької) проби повинні передувати ретельне подрібнення і багатократне перемішування матеріалу. Інакше вміст окремих компонентів у гетерогенній пробі може опинитися істотно відмінним від їхнього середнього вмісту в усій масі об'єкта аналізу. Аналіз в'язких рідин, емульсій, суспензій, пін, біологічних субстратів (крові, сечі, шлункового соку і т. п.) вимагає особливої підготовки відповідно до чинних державних стандартів, щоб уникнути відбору непередставницьких проб. На даному етапі основним джерелом похибки є відбір непередставницької проби.

**2. Пробопідготовка.** До цього етапу відносяться механічні та фізико-хімічні методи перетворення проб, операції попереднього збагачення (флотація, магнітна сепарація) та подальшої хімічної обробки (сплавлення, розчинення, вилуговування, випалення, хлорування і т. д.), кожна з яких повинна проводитися з урахуванням можливих втрат і додаткового привнесення (або навпаки, втрата легколетких сполук при термічній обробці проби) визначуваного компонента в аналізовану пробу. У ряді методів, наприклад, рентгенофлуоресцентному, важливу роль відіграє стан поверхні аналізованих зразків.

**3. Концентрування та розділення.** У хімічному аналізі широко використовують чисельні методи попереднього концентрування і розділення речовин: сорбцію, осадження, екстракцію, іонообмінну і розподільну хроматографію, ректифікацію, відгін, електроліз і деякі спеціальні методи (електрофорез, метод молекулярних сит та ін.). Проте, з огляду на те, що жоден із вказаних методів не забезпечує повного виділення і не гарантує абсолютної чистоти окремих фракцій, операції розділення неминуче обтяжені похибками, що занижують або завищують кінцевий результат.

**4. Одержання аналітичної форми.** Цей етап передує кінцевому визначенню і, як правило, полягає в додаванні специфічних реагентів. Як і попередній, він обтяжений, з одного боку, похибками, що виникають унаслідок неповного утворення сполук, і з іншого – похибками за рахунок утворення схожих сполук інших компонентів.

**5. Кінцеве визначення.** В ході кінцевого визначення вимірюється певна екстенсивна властивість (маса осаду, величина потенціалу, інтенсивність поглинання або випромінювання тощо), зазвичай пропорційна концентрації визначуваного компонента. Похибки на цьому етапі викликані недосконалістю вимірювальних систем (інструментальна помилка) і

зумовлені перешкодами, що виникають у процесі формування, передачі та реєстрації сигналів.

**6. Оцінка вмісту компонента за градуовальним графіком або калібрувальною залежністю.** *Калібрувальна залежність* – математична формула, яка пов'язує концентрацію з величиною аналітичного сигналу. *Градуовальна залежність*  $y=f(x)$  або  $y=f(C)$  – залежність аналітичного сигналу  $y$  від абсолютного вмісту  $x$  або концентрації компонента  $C$ .

У більшості фізико-хімічних і фізичних методів коефіцієнт пропорційності між аналітичним сигналом  $y$  і вмістом компонента  $x$  не є чітко постійним і залежить від конкретних умов проведення аналізу. У таких випадках результат аналізу знаходять за допомогою заздалегідь побудованого градуовального графіка, що має, як правило, лінійний характер у певному діапазоні концентрацій.

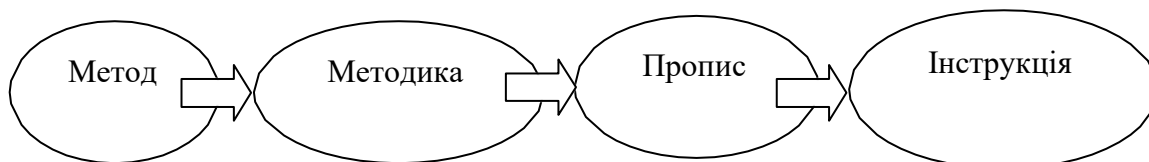
**7. Розрахунок і оцінка надійності результатів аналізу.** Коректне розв'язання задач хімічного аналізу, крім одержання основних результатів, зобов'язане містити оцінку надійності (тобто правильності та відтворюваності, про які мова буде йти у подальших розділах) результатів. Серед перерахованих етапів не всі є обов'язковими під час проведення аналізу кожного конкретного об'єкта і, насамперед, пов'язані з його природою та хімічним складом.

### 2.6.3 Методи та методики хімічного аналізу

Будь-яка методика хімічного аналізу має своїм завданням вилучення інформації про речовину з використанням тих чи інших засобів вимірювань. Таким чином, методика аналізу є складною, багатостадійною вимірювальною процедурою. Саме на стадії вимірювання (і наступної обробки та інтерпретації результатів) яскраво проявляється глибока внутрішня єдність найрізноманітніших методів аналізу, а закономірності вимірювання хімічних величин мають фундаментальне значення для всіх розділів аналітичної хімії, складаючи, по суті, її філософський базис. Вивченням загальних питань, пов'язаних із вимірюванням, обробкою та інтерпретацією результатів хімічного аналізу, займається спеціальний розділ аналітичної хімії, що називається *хімічною метрологією*.

*Методика аналізу* – це послідовність дій, за допомогою яких аналітик одержує необхідну інформацію. Методика повинна бути повністю адаптована до поставленого завдання. Аналітик повинен вибрати відповідну методику і виявити всі можливі джерела похибок. Таке дослідження називається *перевіркою* (і нерідко – *атестацією*) методики аналізу.

*Ієрархію методологічних понять*, пов'язаних з хімічним аналізом, можна стисло представити наступним чином:



Саме ці стадії аналітик у ході розробки кожної методики повинен виконати. Глибина опрацювання методики залежить від завдання, задля вирішення якої методика призначається. У процесі виконання всіх цих етапів методика буде атестована. При цьому необхідно визначити всі її аналітичні характеристики, перераховані нижче. Поняття *метод аналізу* означає фізичний принцип, використовуваний для отримання інформації про склад речовини. Прикладом може служити метод спектрофотометрії, за допомогою якого концентрацію знаходять за величиною світлопоглинання відповідним чином підготовленого розчину проби. *Методика* включає в себе адаптацію методу (за допомогою необхідних хімічних операцій), щоб він став селективним по відношенню до даного аналіту. *Пропис* являє собою письмові вказівки, необхідні для виконання методики. Саме тут починають діяти норми GLP (Good Laboratory Practice – Добра лабораторна практика) – система норм, правил і вказівок, спрямованих на забезпечення узгодженості та достовірності результатів лабораторних досліджень. Нарешті, *інструкція* – це послідовність спеціальних приписів, яким необхідно слідувати без винятків, щоб результати аналізу можна було використовувати для певної мети – наприклад, для видання нормативних актів ЕРА (Управління з охорони навколишнього середовища США – діє з початку 1980-х років) або виконання тих чи інших правових дій. Така методика повинна бути атестована на правильність результатів при визначенні даного аналіту в даній матриці. У цьому випадку методика є стандартною.

*Вибір методу (методики)*. Після того, як аналітик правильно усвідомив собі суть проблеми, він повинен вибрати відповідні метод і методику. Якщо подібні аналізи ніколи раніше не виконувалися, розробка методики зазвичай починається з вивчення наукової літератури. Важливу роль відіграє і практичний досвід самого аналітика та його колег у подібних областях діяльності.

Можливості вибору методу і методики можуть бути обмежені доступністю необхідного обладнання та досвідом роботи персоналу. Ключовий етап методики – переведення зразка у форму, що забезпечує отримання правильних результатів і сумісні з вибраним способом вимірювання. Розробка методики включає в себе вибір окремих взаємно узгоджених операцій та розробку засобів контролю, що дозволяють переконатися, що за умов послідовного виконання цих операцій вся методика в цілому дає надійні результати. Результати аналізу називаються **достовірними**, якщо вони є правильними і добре відтворюваними. Добра відтворюваність досягається шляхом мінімізації випадкових похибок, а правильність – шляхом усунення систематичних похибок.

З точки зору специфіки процедури градування методи аналізу поділяються на три класи. Під градуванням розуміється набір операцій, що проводяться в певних умовах і покликані встановити відповідність між показаннями вимірювального приладу або вимірювальної системи і відповідними їм відомими значеннями вимірюваного параметра.

*Розрахункові (абсолютні) методи* – це методи, в яких кінцевий результат знаходять із результатів вимірювань (таких величин, як маса зразка, об'єм розчину титранту, маса осаду), отриманих у процесі аналізу, шляхом обчислень, оснований на фундаментальних фізичних або хімічних законах. У разі використання розрахункових методів від аналітика вимагається лише виміряти всі величини, необхідні для отримання кінцевого результату, провести необхідні розрахунки й оцінити похибки даних. Прикладами розрахункових методів хімічного аналізу є титриметричний, гравіметричний і кулонометричний методи.

*Відносні методи* – це методи, оснований на порівнянні результатів вимірювань для аналізованого зразка і серії зразків порівняння відомого складу при використанні системи визначення, для якої залежність аналітичного сигналу від вмісту (в ідеальному випадку – лінійна) у відповідному робочому діапазоні визначається експериментально і яку не потрібно розраховувати теоретично.

Для *відносних методів* передбачається, що відмінності у валовому складі проби і зразків порівняння справляють малий (у порівнянні з похибками вимірювань) вплив на величину аналітичного сигналу. Тому їх використання часто вимагає попередньої пробо підготовки, з метою усунення ефектів, які заважають. Прикладами відносних методів можуть служити більшість сучасних спектроскопічних та хроматографічних методів.

*Порівняльні методи* – це методи, які оснований на порівнянні сигналів для аналізованого зразка і серії зразків порівняння за умов використання системи визначення, чутливої не тільки до вмісту компонента, що визначається, але і до відмінностей у складі матриці. У цьому випадку неврахування будь-яких відмінностей у складах матриць призводить до помилкових результатів. Тому для градування слід використовувати зразки порівняння (у тому числі – стандартні зразки), склад матриці яких є відомим і близьким до складу матриці проби. Такі методи є досить експресними і часто використовуються для контролю виробничих процесів (наприклад, рентгенофлуоресцентний метод аналізу із хвильовою дисперсією – в металургії, виробництві керамічних і порошкових матеріалів) і для визначення фізичних параметрів (в'язкості, розподілу часток за розмірами та ін.).

Розглянуті три категорії методів розрізняються з точки зору способів знаходження концентрації компонента, що визначається, тобто характеру зв'язку між сигналами проби і сигналами зразків порівняння. Для розрахункових (абсолютних) і відносних методів цей зв'язок встановлюється за допомогою зразків порівняння, приготованих на основі відомої кількості чистої речовини стехіометричного складу (за умови суворого контролю всіх етапів методики), а для порівняльних методів – за допомогою зразків порівняння (стандартних зразків) із відомим складом матриці, для яких вміст компонента, що визначається, надійно встановлено. Такий зв'язок,



встановлений в результаті безперервного ланцюжка дій з використанням стандартних вимірювальних процедур, називається *простежуваністю*.

Хімічні вимірювання зазвичай супроводжуються руйнуванням зразка, зважаючи на необхідність його переведення в інший фізичний стан. Перетворення, що відбувається зі зразком у ході аналізу, не повинно вплинути на його результати. Можливість простежити весь хід процесу крок за кроком називається *простежуваністю*.

Головне завдання перевірки методики полягає у стеженні за поведінкою зразка порівняння (стандартного зразка) протягом всього аналізу. *Простежуваність* – це можливість документально простежити всю історію, місцезнаходження деякого об'єкта або характер застосовуваних дій. Стосовно дохімічного аналізу це означає, що всі стадії методики необхідно виконувати і документувати таким чином, щоб мати можливість отримувати всю необхідну інформацію без спотворень. Іншими словами, всі етапи методики повинні бути пов'язані в єдиний ланцюг, протягом якого (а не тільки на заключній стадії вимірювання) слід застосовувати процедури порівняння з використанням відповідних вимірювальних стандартів, як правило, міжнародних або національних. Ними служать, зокрема, основні одиниці СІ, фундаментальні константи, стандартні зразки. Зв'язок результатів вимірювання з цими стандартами має бути чітко відображено.

Отже, залежно від типу використовуваного методу аналізу та характеристики, що визначається, для демонстрації зв'язку між сигналом приладу, вимірюваним на заключній стадії, та складом зразка, до якого він належить, необхідно використовувати різні засоби. У загальному випадку якість методики аналізу описується за допомогою аналітичних характеристик, що відносяться до двох груп.

Основні характеристики:

- відтворюваність (збіжність і відтворюваність у вузькому сенсі);
- правильність;
- чутливість.

Вторинні характеристики:

- селективність;
- діапазон лінійності сигналу (робочий діапазон);
- стійкість.

Селективність методики покликана гарантувати, що величина сигналу дійсно визначається саме вмістом досліджуваної речовини. За недостатньої селективності будь-які сторонні компоненти впливають на величину сигналу, як, наприклад, у хроматографічному аналізі з використанням неселективних детекторів (полум'яно-іонізаційного, електронозахоплювального).

*Чутливість* – головний обмежувальний фактор при визначенні слідових кількостей. Очевидно, що будь-яка методика повинна бути досить чутливою для визначення компонента у відповідному концентраційному діапазоні. Якщо чутливість вимірювального пристрою виявляється недостатньою, аналітик може розпочати різні дії для її

підвищення. При цьому, однак, необхідно змінити також вибір, спосіб оптимізації та перевірки інших стадій методики. Аналітик, зокрема, може:

- змінити спосіб реєстрації сигналу (розуміється, за наявності відповідної апаратури);
- збільшити розмір проби, відповідно змінити стадію пробопідготовки;
- ввести додаткову стадію концентрування компонента, що визначається.

#### 2.6.4 Визначення основних величин у хімії

Надрядковий індекс «\*» застосовано в розумінні «чистий», а надрядковий індекс « $\square$ » – у розумінні «стандартний». Наприклад, рівність  $C_{p,m}^{\square}(\text{H}_2\text{O}, \text{g}, 298,15 \text{ K}) = 33,58 \text{ Дж}/(\text{K}\cdot\text{моль})$  означає, що стандартна молярна теплоємність води за сталого тиску дорівнює  $33,58 \text{ Дж}/(\text{K}\cdot\text{моль})$ , а символ  $\square^*(\text{B}, p^{\square})$  позначає абсолютну активність чистої речовини В за стандартного тиску  $p^{\square}$ , значення якого треба вказувати окремо.

У виразах типу

$$\varphi(\text{B}) = \frac{x(\text{B})V_m^*(\text{B})}{\sum x(\text{A}_i)V_m^*(\text{A}_i)},$$

$\square\square\square\text{B}$ ) – об'ємна частка речовини В у суміші речовин  $\text{A}_i = \text{A}, \text{B}, \text{C}, \dots$ ;  $x(\text{A}_i)$  – молярна частка речовини  $\text{A}_i$ ;  $V_m^*(\text{A}_i)$  – молярний об'єм чистої речовини  $\text{A}_i$  усі молярні об'єми  $V_m^*(\text{A}), V_m^*(\text{B}), V_m^*(\text{C}), \dots$  узято за однакових температурі та тиску, а сума в правій частині співвідношення – за всіма речовинами  $\text{A}_i = \text{A}, \text{B}, \text{C}, \dots$ , з яких складається суміш, так, що

$$\sum x(\text{A}_i) = 1$$

( $i$  – номер речовини у суміші ( $i = 1, 2, 3, \dots$ )), а речовина В є тотожною з речовиною  $\text{A}_2$ .

**1. Відносна атомна маса** –  $[A_r]$ ; (relative atomic mass, относительная атомная масса) – фізична величина, що є характеристикою хімічного елемента і дорівнює відношенню середньої маси  $m_a$  атома досліджуваного хімічного елемента до  $1/12$  маси ізотопу вуглецю–12  $m_C$ :

$$A_r = 12m_a/m_C.$$

Раніше для цієї величини вживали назву «атомна вага», що є неправильною і не допустимою до застосування.

Відносна атомна маса є безрозмірною величиною, а її одиниця – число 1. Нагадаємо, що  $1/12$  маси атома ізотопу вуглецю–12 є позасистемною одиницею маси - (уніфікованою) атомною одиницею маси (у, а.о.м.).

2. **Відносна молекулярна маса** –  $[M_r]$ ; (relative molecular mass, относительная молекулярная масса) - фізична величина, що є характеристикою визначеної хімічної сполуки і дорівнює відношенню маси молекули  $m_M$  досліджуваної хімічної сполуки до  $1/12$  маси ізотопу вуглецю–12  $m_C$ :

$$M_r = 12m_M/m_C.$$

Відносна молекулярна маса є безрозмірною величиною, а її одиниця – число 1.

3. **Число молекул чи інших структурних елементів (частинок)** –  $[N]$ ; (number of molecules or other elementary entities, количество молекул или других структурных единиц) – кількість молекул чи інших структурних елементів у системі. Структурними елементами системи можуть бути атоми, молекули, йони, електрони, інші частинки, або визначені групи таких частинок.

Число молекул чи інших структурних елементів є безрозмірною величиною, а його одиниця – число 1.

4. **Кількість речовини** –  $[n, \square]$ ; (amount of substance, количество вещества) – фізична величина, що дорівнює числу структурних елементів, що складають систему. Якщо однорідна система містить  $N$  структурних елементів, то її кількість речовини

$$n = N/N_A,$$

де  $N_A = 6,0221367(36) \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> – стала Авогадро.

Кількість речовини є основною величиною СІ, тому розмірність їй надано довільно:

$$\dim n = \square, \quad [n] = 1 \text{ моль.}$$

*Моль* (mol, моль) дорівнює кількості речовини, що містить саме стільки структурних елементів, скільки міститься атомів у 0,012 кг вуглецю-12 (при цьому вважається, що атоми вуглецю-12 не сполучені між собою, перебувають у спокої та у своїх основних квантових станах).

Застосовуючи одиницю кількості речовини «моль», слід завжди визначати, про які саме структурні елементи системи йдеться. Рекомендовано такі кратні та частинні одиниці моля: кмоль, ммоль, мкмоль.

На основі моля утворено велику кількість питомих (молярних) величин, деякі з них наведено далі. Зауважимо, що для позначення молярних величин застосовують, як правило, підрядковий індекс «m».

4.1 **Молярна маса** –  $[M, \square]$ ; (molar mass, молярная масса) – фізична величина, що дорівнює відношенню маси  $m$  однорідної системи до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$M = m/n;$$

$$\dim M = M \square \square, \quad [M] = 1 \text{ кг/моль.}$$

*Кілограм на моль* (kg/mol, кг/моль) дорівнює молярній масі речовини, що при кількості речовини 1 моль має масу 1 кг. До застосування рекомендовано частинну одиницю молярної маси г/моль.

Між відносною молекулярною масою  $M_r$  деякої хімічної сполуки та її кількістю речовини  $M$  існують співвідношення:  $M/(\text{кг/моль}) = 10^{-3}M_r$  або  $M/(\text{г/моль}) = M_r$ , що дуже часто застосовують на практиці при визначенні кількості речовини.

**4.2 Молярний об'єм** –  $[V_m]$ ; (molar volume, молярный объем) – фізична величина, що дорівнює відношенню об'єму однорідної системи  $V$  до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$V_m = V/n;$$

$$[V_m] = 1 \text{ м}^3/\text{моль.}$$

*Кубічний метр на кілограм* ( $\text{м}^3/\text{mol}$ ,  $\text{м}^3/\text{моль}$ ) дорівнює молярному об'єму речовини, яка при кількості речовини 1 моль охоплює об'єм  $1 \text{ м}^3$ . До застосування рекомендовано такі частинні одиниці молярного об'єму:  $\text{дм}^3/\text{моль}$ ,  $\text{см}^3/\text{моль}$ , допущено – позасистемну одиницю

$$\text{літр на моль} (l/\text{mol}, L/\text{mol}; \text{л/моль}): 1 \text{ л/моль} = 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль} .$$

Молярний об'єм ідеального газу за стандартних (нормальних) умов  $T^\square = 273,15 \text{ К}$ ;  $p^\square = 101325 \text{ Па}$  дорівнює  $0,02241410 \text{ м}^3/\text{моль}$ . Цю сталу часто застосовують у розрахунках.

**5. Молярна термодинамічна величина** –  $[X_m]$ ; (molar thermodynamic magnitude, молярная термодинамическая величина) – фізична величина, що дорівнює відношенню екстенсивного термодинамічного параметра  $X$  системи до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$X_m = X/n.$$

Розмірність і одиниця молярної термодинамічної величини визначаються розмірністю та одиницею досліджуваного термодинамічного параметра  $X$ . У багатьох випадках для молярних термодинамічних величин як одиницю енергії та теплоти застосовують різновиди калорії, що не рекомендовано.

Найпоширеніші молярні термодинамічні величини наведено далі.

**5.1 Молярна внутрішня енергія** –  $[U_m]$ ; (molar thermodynamic energy, molar internal energy, молярная внутренняя энергия) – фізична величина, що дорівнює відношенню внутрішньої енергії  $U$  системи до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$U_m = U/n;$$

$$\dim U_m = L^2MT^{-2}n^{-1}, \quad [U_m] = 1 \text{ Дж/моль.}$$

Джоуль на моль (J/mol, Дж/моль) дорівнює молярній внутрішній енергії речовини кількістю 1 моль, внутрішня енергія якої 1 Дж. Рекомендовано використовувати кратну одиницю кДж/моль.

**5.2 Молярна теплоємність** –  $[C_m, C_V, C_p]$ ; (molar heat capacity, молярная теплоемкость) – фізична величина, що дорівнює відношенню теплоємності однорідної системи  $C$  до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$C_m = C/n.$$

З огляду на те, що теплоємність є водночас характеристикою системи і процесу, застосовують молярні теплоємності за постійного тиску  $C_p$  та за постійного об'ємі  $C_V$ .

$$\dim C_m = L^2MT^{-2}K^{-1}n^{-1}, \quad [C_m] = 1 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

*Джоуль на моль-кельвін* (J/(mol·K), Дж/(моль·К)) дорівнює молярній теплоємності речовини, що за кількості 1 моль має теплоємність 1 Дж/К.

**5.3 Молярна ентропія** –  $[S_m]$ ; (molar entropy, молярная энтропия) – фізична величина, що дорівнює відношенню ентропії  $S$  системи до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$S_m = S/n;$$

$$\dim S_m = L^2MT^{-2}K^{-1}n^{-1}, \quad [S_m] = 1 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

*Джоуль на моль-кельвін* (J/(mol·K), Дж/(моль·К)) дорівнює молярній ентропії речовини, що при кількості 1 моль має ентропію 1 Дж/К.

**5.4 Молярна ентальпія** –  $[H_m]$ ; (molar enthalpy, молярная энтальпия) – фізична величина, що дорівнює відношенню ентальпії  $H$  системи до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$H_m = H/n;$$

$$\dim H_m = L^2MT^{-2}n^{-1}, \quad [H_m] = 1 \text{ Дж/моль.}$$

*Джоуль на моль* (Дж/моль, Дж/моль) дорівнює молярній ентальпії речовини в кількості 1 моль, ентальпія якої 1 Дж. Рекомендовано використовувати кратну одиницю кДж/моль.

**5.5 Молярна теплота** –  $[Q_m]$ ; (molar heat, молярное количество теплоты) – фізична величина, що дорівнює відношенню теплоти  $Q$ , наданої системі чи відібраної від неї, до кількості речовини  $n$  цієї системи:

$$Q_m = Q/n;$$

$$\dim Q_m = L^2MT^{-2}n^{-1}, \quad [Q_m] = 1 \text{ Дж/моль.}$$

Джоуль на моль (J/mol, Дж/моль) дорівнює молярній теплоті такого процесу, в якому речовині в кількості 1 моль надано теплоту 1 Дж. Рекомендовано використовувати кратну одиницю кДж/моль.

**6. Концентрація молекул (або частинок) – [n];** (number density of molecules (or particles), концентрация молекул) - фізична величина, що дорівнює відношенню кількості молекул N (або частинок), які містяться в об'ємі V, до цього об'єму:

$$n = N/V;$$

$$\dim n = L^{-3}, \quad [n] = 1 \text{ м}^{-3}.$$

Метр у мінус третьому степені ( $\text{м}^{-3}$ ,  $\text{м}^{-3}$ ) дорівнює концентрації молекул (або частинок), при якій в  $1 \text{ м}^3$  міститься 1 молекула (або частинка).

**6.1 Молекулярна концентрація (компонента В) – [C(B)];** (molecular concentration of B, молекулярна концентрация компонента В) – фізична величина, що дорівнює відношенню кількості молекул N(B) компонента В, які містяться в об'ємі V суміші, до цього об'єму:

$$C(B) = N(B)/V;$$

$$\dim C(B) = L^{-3}, \quad [C(B)] = 1 \text{ м}^{-3}.$$

Метр у мінус третьому степені ( $\text{м}^{-3}$ ,  $\text{м}^{-3}$ ) дорівнює концентрації молекул компонента В, при якій в  $1 \text{ м}^3$  суміші міститься 1 молекула цього компонента.

**7. Масова концентрація (компонента В) – [ $\rho$ (B)];** (mass concentration of B, массовая концентрация компонента В) – фізична величина, що дорівнює відношенню маси m компонента В до об'єму V суміші:

$$\rho(B) = m/V.$$

$$\dim \rho(B) = L^{-3}M, \quad [\rho(B)] = 1 \text{ кг/м}^3.$$

Кілограм на кубічний метр ( $\text{кг/м}^3$ ,  $\text{кг/м}^3$ ) дорівнює масовій концентрації компонента В, при якій в об'ємі  $1 \text{ м}^3$  суміші міститься 1 кг цього компонента.

Допущено до застосування позасистемну одиницю – моль на літр (mol/l, моль/л):  $1 \text{ моль/л} = 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

**8. Молярна концентрація (компонента В) – [c( $\square\square$ );** (concentration of B, amount-of-substance concentration of B, молярная концентрация компонента В) – фізична величина, що дорівнює відношенню кількості речовини n компонента В у суміші до її об'єму V:

$$c(\square\square) = n/V;$$

$$\dim c(\square\square) = L^{-3}\square\square, \quad [c(\square\square)] = 1 \text{ моль/м}^3.$$

*Моль на кубічний метр* ( $\text{mol/m}^3$ , моль/м<sup>3</sup>) дорівнює молярній концентрації компонента В у суміші, при якій в об'ємі 1 м<sup>3</sup> суміші міститься 1 моль цього компонента. Рекомендовано таку кратну одиницю молярної концентрації компонента В як кмоль/м<sup>3</sup>.

Допущено до застосування позасистемні одиниці: моль на кубічний дециметр ( $\text{mol/dm}^3$ , моль/дм<sup>3</sup>):  $1 \text{ моль/дм}^3 = 10^{-3} \text{ моль/м}^3$ , моль на літр ( $\text{mol/l}$ , моль/л):  $1 \text{ моль/л} = 10^{-3} \text{ моль/м}^3$ .

Зауважимо, що у хімії молярну концентрацію іноді позначають символом [В].

**9. Частка компонента В** – [-]; (fraction of В, доля компонента В) – фізична величина, що дорівнює відношенню маси (об'єму, кількості речовини) компонента відповідно до маси (об'єму, кількості речовини) усієї системи (суміші, розчину, сплаву).

Частка компонента є величиною безрозмірною, а її одиниця – число 1.

**9.1 Масова частка компонента В** – [w(В)]; (mass fraction of В, массовая доля компонента В) – фізична величина, що дорівнює відношенню маси m(В) компонента В до маси m усієї системи:

$$w(\text{B}) = m(\text{B})/m.$$

**9.2 Молярна частка компонента В** – [x(В), y(В)]; (molar fraction of В, молярная доля компонента В) – фізична величина, що дорівнює відношенню кількості речовини n(В) компонента В до кількості речовини n усієї системи:

$$x(\text{B}) = n(\text{B})/n.$$

**9.3 Молярне відношення для компонента В у розчині** – [r(В)]; (molar ratio of solute В, молярное отношение для компонента В в растворе) – фізична величина, що дорівнює відношенню кількості речовини n(В) розчиненого компонента В у розчині до кількості речовини n(С) розчинника С:

$$r(\text{B}) = n(\text{B})/n(\text{C}).$$

Для розчину з одним розчиненим компонентом В із цього визначення випливає

$$r(\text{B}) = x(\text{B})/[1 - x(\text{B})].$$

**9.4 Об'ємна частка компонента В** – [ $\square$ (В)]; (volume fraction of В, объемная доля компонента В) – фізична величина, що визначається співвідношенням

$$\square(\text{B}) = x(\text{B})V_m^*(\text{B})/\sum x(\text{A})V_m^*(\text{A}),$$

де  $x(B)$ ,  $V_m^*(B)$  – молярна частка та молярний об'єм чистого компонента В;  $V_m^*(A)$  – молярні об'єми чистих речовин А суміші при однакових температури та тиску,  $\square$  – позначає суму за всіма речовинами, що складають суміш.

Іноді замість молярних об'ємів чистих речовин А суміші для визначення об'ємної частки компонента В застосовують парціальні молярні об'єми  $\{\square V/\square n(A)\}_{T,p,n(B),\dots,B},\dots$  речовин А.

**10. Моляльність розчиненого компонента В** –  $[m_\square]$ ; (molality of solute В, моляльність растворенного компонента В) - фізична величина, що дорівнює відношенню кількості речовини  $n(B)$  розчиненого компонента В до маси  $m(C)$  розчинника С:

$$m(B) = n(B)/m(C);$$

$$\dim m(B) = M^{\square\square\square\square}, \quad [m(B)] = 1 \text{ моль/кг.}$$

*Моль на кілограм (mol/kg, моль/кг)* дорівнює моляльності розчиненого компонента В, при якій 1 моль розчиненого компонента В міститься в розчиннику С масою 1 кг. Рекомендовано таку частинну одиницю моляльності: ммоль/кг.

**11. Швидкість хімічної реакції** –  $[\square\square\square\square]$ ; (rate of chemical reaction, скорость химической реакции) – фізична величина, що дорівнює відношенню зміни молярної концентрації  $dc$  вихідної речовини в розчині до інтервалу часу  $dt$ , протягом якого тривала реакція

$$\square = dc/dt;$$

$$\dim \square = L^{-3}T^{\square\square\square\square}, \quad [\square] = 1 \text{ моль/(м}^3\cdot\text{с).}$$

*Моль на кубічний метр-секунду (mol/(m<sup>3</sup>·s), моль/(м<sup>3</sup>·с))* дорівнює середній швидкості одномолекулярної реакції, при якій протягом 1 с молярна концентрація вихідної речовини в розчині змінюється на 1 моль/м<sup>3</sup>.

**12. Хімічний (термодинамічний) потенціал** –  $[\square]$ ; (chemical potential, химический потенциал) – фізична величина, що є термодинамічною функцією стану і визначає зміну термодинамічних потенціалів при зміні кількості частинок у системі. Хімічний потенціал застосовують для опису властивостей систем зі змінною кількістю частинок (відкритих систем).

Під назвою «хімічний потенціал» у різних царинах фізики та хімії часто використовують різні за визначенням величини. Так, у теоретичній статистичній фізиці та фізиці твердого тіла хімічний потенціал визначається рівностями

$$\mu = \left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{P,T},$$

де  $H$ ,  $F$ ,  $G$  – ентальпія; енергія відповідно Гельмгольца та Гіббса;  $N$  – кількість частинок у системі; параметри справа внизу біля символів частинних похідних



позначають термодинамічні параметри, що вважаються незмінними ( $S$  – ентропія;  $p$  – тиск;  $T$  – температура;  $V$  – об’єм).

Кількість частинок у системі є безрозмірною величиною, тому з наведеного визначення випливає, що розмірність хімічного потенціалу збігається з такою для інших термодинамічних потенціалів, а його одиниця – джоуль.

Якщо використати енергією Гіббса, то отримаємо таке визначення одиниці хімічного потенціалу: *джоуль* (J, Дж) – дорівнює хімічному потенціалу такої системи, над якою в ізобарно-ізотермічних умовах виконується робота 1 Дж при збільшенні кількості частинок на одиницю.

У фізичній хімії та технічній термодинаміці хімічний потенціал  $i$ -го компонента гомогенної системи (або фази гетерогенної системи) також визначається як частинна похідна від будь-якого з термодинамічних потенціалів системи (фази), але за кількістю речовини  $n_i$  цього компонента при постійних значеннях кількості речовини всіх інших компонентів (фаз) системи та параметрів стану, що відповідають цьому термодинамічному потенціалу.

Найчастіше як незалежні параметри використовують тиск  $p$  і температуру  $T$ , тому за визначенням як хімічний потенціал беруть парціальне молярне значення ізобарно-ізотермічного потенціалу  $G$  (енергії Гіббса).

Отже, для суміші, що містить кілька компонентів (B,C,...), дістанемо таке.

**12.1 Хімічний потенціал компонента B –  $[\mu_B]$** ; (chemical potential of B, химический потенциал компонента B) – фізична величина, що визначається так:

$$[\mu_B] = \left\{ \frac{\partial G}{\partial n(B)} \right\}_{T,p,n(C),\dots(C),\dots}$$

де  $n(C),\dots$  – позначає незмінність кількостей речовин інших компонентів суміші (C,...).

У найпростішому випадку чистої (монокомпонентної) речовини кількістю  $n$  замість цього співвідношення дістанемо

$$[\mu_B] = G/n = G_m,$$

де  $G_m$  – молярна енергія Гіббса.

$$\dim [\mu_B] = L^2MT^{-2}, \quad [[\mu_B]] = 1 \text{ Дж/моль.}$$

*Джоуль на моль* (J/mol, Дж/моль) дорівнює хімічному потенціалу чистої речовини, що за кількості 1 моль має енергію Гіббса 1 Дж.

**12.2 Абсолютна активність компонента B –  $[a_B]$** ; (absolute activity of B, абсолютная активность компонента B) – фізична величина, що є функцією стану однієї речовини зі суміші кількох речовин та кількісною характеристикою реакційної здатності цієї речовини у визначених умовах.

$$\square\square B) = \exp\{\square\square B)/RT\},$$

де  $\square\square B)$  – хімічний потенціал;  $R$  – молярна газова стала;  $T$  – термодинамічна температура.

Абсолютна активність є безрозмірною величиною, а її одиниця – число 1.

**12.3 Відносна активність компонента В** –  $[a\square B)\square\square B)$  речовини у заданому стані до абсолютної активності  $\square^\square\square B)$  у стандартному стані за такої самої температури.

$$a\square B) = \square\square B)/\square^\square\square B).$$

Відносна активність є безрозмірною величиною, а її одиниця – число 1.

**13. Парціальний тиск компонента В (у газовій суміші) В** –  $[p(B), p_i]$ ; (partial pressure of В in a gaseous mixture, парциальное давление) – фізична величина, що дорівнює тиску, який мав би газ, що входить до складу газової суміші, якщо б він сам охоплював об'єм усієї суміші при такій самій температурі:

$$p(B) = x(B)p,$$

де  $x(B)$  – молярна частка компонента В;  $p$  – загальний тиск газової суміші.

Розмірність парціального тиску та його одиниця *паскаль* збігаються з розмірністю та одиницею тиску.

**14. Фугативність компонента В (у газовій суміші)** –  $[f(B)]$ ; (fugacity of В in a gaseous mixture, летучість (фугитивность) компонента В) – термодинамічна функція, що визначається співвідношенням

$$f(B) = \lambda(B) \lim_{p \rightarrow 0} \{x(B)p / \lambda(B)\},$$

де  $\square(B)$ ,  $x(B)$  – відповідно активність і молярна частка компонента В у газовій суміші;  $p$  – загальний тиск газової суміші. Коефіцієнт пропорційності між  $f(B)$  та  $\square(B)$  у цій рівності є функцією лише температури.

Розмірність фугативності збігається з розмірністю тиску, а її одиниця – *паскаль*.

**15. Стандартна абсолютна активність** –  $[\square^\square]$ ; (standard absolute activity, стандартная абсолютная активность) – фізична величина, що є функцією лише температури і визначається такими співвідношеннями.

$$\lambda^\theta(B) = \frac{p^\theta}{x(B)} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\lambda(B)}{p},$$

де  $p^\ominus = 101,325$  кПа - стандартний тиск,  $x(B)$  - молярна частка компонента В;  $a(B)$  – абсолютна активність компонента В;  $p$  – тиск.

Для компонента В у рідких чи твердих сумішах:

$$a(B) = a^\ominus(B)(p^\ominus),$$

де  $a^\ominus(B)$  – абсолютна активність чистої речовини В за таких самих, що й суміш, тиску і температури;  $p^\ominus = 101,325$  кПа – стандартний тиск.

Для розчиненої речовини В у розведених рідких розчинах:

$$\lambda^\ominus(B) = \lim_{m(A) \rightarrow 0} \frac{\lambda(B, p^\ominus) \cdot m^\ominus}{m(B)},$$

де  $\sum m^\ominus$  – сума за всіма розчиненими речовинами;  $a(B, p^\ominus)$  – абсолютна активність компонента В при стандартному тиску  $p^\ominus = 101,325$  кПа;  $m^\ominus$  – стандартна молярність;  $m(B)$  – молярність компонента В.

Для розчинника А у розведених рідких розчинах:

$$a(A) = a^\ominus(A, p^\ominus),$$

де  $a^\ominus(A, p^\ominus)$  – абсолютна активність чистого розчинника А за стандартного тиску  $p^\ominus = 101,325$  кПа.

$$\dim a^\ominus = 1, \quad [a^\ominus] = 1.$$

**16. Коефіцієнт активності** –  $[f, a]$ ; (activity coefficient, коефіцієнт активності) - фізична величина, що визначається такими співвідношеннями.

Для компонента В у рідких чи твердих сумішах

$$f(B) = a(B)/[a^\ominus(B)x(B)],$$

де  $a(B)$  – абсолютна активність компонента В;  $a^\ominus(B)$  – абсолютна активність чистої речовини В за таких самих, що й суміш, тиску і температури;  $x(B)$  – молярна частка компонента В.

Для розчиненої речовини В у розведених рідких розчинах:

$$f(B) = a(B)/[m(B)/m^\ominus],$$

де  $a(B)$  – активність речовини В;  $m(B)$  – молярність компонента В;  $m^\ominus$  – стандартна молярність

$$\dim f = 1, \quad [f] = 1.$$

17. **Водневий показник, рН – [рН];** (pH value; водородный показатель, рН) – величина, що для водних розчинів, де молярні концентрації речовин не перевищують 0,1 кмоль/м<sup>3</sup>, визначається співвідношенням

$$pH = -\lg[c(H^+) \gamma_1 / c^\ominus] \approx 0,02,$$

де  $c(H^+)$  – молярна концентрація йонів водню  $H^+$ ;  $\gamma_1$  – коефіцієнт активності типового одновалентного електроліту (розчинника) у розчині (на практиці вважають  $\gamma_1 \approx 1$ );  $c^\ominus = 1$  кмоль/м<sup>3</sup> – стандартна молярна концентрація досліджуваних розчинів.

Водневий показник або рН – величина безрозмірна, а його одиниця – число 1.

При рН = 2...6 середовище називається кислим, при рН = 7 – нейтральним, а при рН = 8...12 – лужним.

Поза зазначеним діапазоном значень рН наведене раніше визначення цієї величини стає неточним. У цьому разі слід користуватися загальним операційним визначенням, наведеним далі.

Для розчину X з невідомим рН(X) виміряти електрорушійну силу  $E_X$  гальванічного елемента, який має склад:



а також електрорушійну силу  $E_S$  гальванічного елемента, який за складом відрізняється лише заміною розчину X на розчин S зі стандартним значення рН(S). Тоді

$$pH(X) = pH(S) + (E_S - E_X)F / (RT \ln 10),$$

де  $F$  – стала Фарадея;  $R$  – молярна (універсальна) газова стала;  $T$  – термодинамічна температура.

Значення рН(S) є стандартизованими.

18. **(Відносна) активність – [a, a<sub>m</sub>];** (relative activity, относительная активность) – фізична величина, що визначається такими співвідношеннями.

Для розчиненої речовини В у розведених рідких розчинах:

$$a(B) = \lambda(B) \lim_{\sum m(A) \rightarrow 0} \frac{m(B)}{m^\ominus \lambda(B)}.$$

де  $\sum$  позначає суму за всіма складовими суміші;  $m(B)$  – моляльність компонента В;  $m^\ominus$  – стандартна моляльність;  $\lambda(B)$  – абсолютна активність компонента В.

Для розчинника А у розведених рідких розчинах:

$$a(A) = \lambda(A) / \lambda^*(A),$$

де  $\mu(A)$  – абсолютна активність розчинника А в заданому стані;  $\mu^*(A)$  – абсолютна активність чистого розчинника А у стандартному стані за таких самих, що й розчин, температури й тиску.

**19. Осмотичний коефіцієнт (розчинника А в розведених рідких розчинах)** –  $[\gamma]$ ; (osmotic coefficient of solvent A (especially in a dilute liquid solution), осмотический коэффициент (растворителя А в разведенных жидких растворах)) – фізична величина, що визначається таким співвідношенням

$$\ln \gamma = - [M(A) \sum m(B)]^{-1} \ln a(A),$$

де  $M(A)$  – молярна маса розчинника А;  $\sum m(B)$  позначає суму за всіма розчиненими речовинами;  $m(B)$  – молярність компонента В;  $a(A)$  – активність розчинника А.

Осмотичний коефіцієнт є величиною безрозмірною, його одиниця – число 1.

**20. Осмотичний тиск** –  $[\pi, \Pi]$ ; (osmotic pressure, осмотическое давление) – фізична величина, що дорівнює надлишку тиску, необхідного для підтримання осмотичної рівноваги між розчином та чистим розчинником, які розділено мембраною, проникливою лише для розчинника.

Осмотичний тиск має розмірність тиску і виражається в *паскалях*.

**21. Стехіометричне число** –  $[\nu]$ ; (stoichiometric number, стехиометрическое число) – число або простий дріб, що є множником біля символу молекули, атома чи йона в рівнянні хімічної реакції

$$\sum \nu(B) \nu = 0,$$

до якої їх залучено. Тут  $\nu$  – зазначений символ, що відображає молекули, атоми або йони.

Згідно з домовленістю,  $\nu(B) < 0$  для складових, що реагують;  $\nu(B) > 0$  для продуктів реакції.

Стехіометричне число є величиною безрозмірною, його одиниця – число 1.

**22. Спорідненість (у хімічній реакції)** –  $[A]$ ; (affinity of a chemical reaction, химическое сродство) – фізична величина, що характеризує здатність компонентів системи вступати між собою в хімічну реакцію і визначається співвідношенням

$$A = - \sum \nu(B) \mu(B),$$

де  $\sum \nu(B)$  позначає суму за всіма складовими (компонентами) реакції;  $\nu(B)$  – стехіометричне число компонента В;  $\mu(B)$  – хімічний потенціал компонента В.

Спорідненість у хімічній реакції, що відбувається за постійних температури та об'єму, дорівнює молярному значенню зміни  $\Delta F$  енергії Гельмгольца системи наприкінці процесу реакції:

$$A = \square F/n,$$

де  $n$  - кількість речовини системи.

$$\dim A = L^2MT^{-2}n^{-1}, \quad [A] = 1 \text{ Дж/моль.}$$

*Джоуль на моль* (J/mol, Дж/моль) дорівнює хімічній спорідненості компонентів системи, якщо в хімічній реакції, що відбувається при постійних температурі та об'ємі, зміна енергії Гельмгольца речовини в кількості 1 моль дорівнює 1 Дж.

**23. Функція розподілу** –  $[f]$ ; (partition function, функция распределения) – фізична величина, що визначає:

➤ для класичних систем – імовірність  $dw$  перебування системи у визначений момент часу у даній ділянці фазового простору з об'ємом  $dV$ :

$$f(p, q) = dw/dV,$$

де через  $q$  та  $p$  позначено відповідно всі координати та всі імпульси системи;  $dV = dq_1dq_2\dots dq_s dp_1dp_2\dots dp_s$ ;  $s$  – число ступенів свободи системи;

➤ для квантових систем – імовірність  $dw$  перебування системи в якомусь стані з набору  $d\Gamma$  можливих станів системи, що мають визначену енергію  $E$ , тобто:

$$f(E) = dw/d\Gamma.$$

Виходячи з наведених визначень, визначити розмірність та одиницю функції розподілу неможливо. Проте в переважній більшості випадків функції розподілу нормуються на об'єм фазового простору, в якому може перебувати досліджувана класична система, або на густину станів квантової системи. У цьому разі будь-яка функція розподілу є величиною безрозмірною, а її одиниця – число 1.

Приклад однієї з функцій розподілу наведено далі.

**23.1 Функція молекулярного розподілу** –  $[q]$ ; (molecular partition function, функция молекулярного распределения) – безрозмірна величина, що визначається співвідношенням

$$q = \sum_i \exp(-\epsilon_i/kT),$$

де  $\epsilon_i$  – позначає суму за всіма зазначеними  $i$ -ми станами молекули;  $\epsilon_i$  – енергія  $i$ -го квантового стану молекули, дозволеного при заданих об'ємі та зовнішніх полях.

24. **Статистична вага** –  $[g, \square]$ ; (statistical weight, статистический вес) – фізична величини, що дорівнює числу мікростанів системи, за допомогою яких можна реалізувати її макростан.

Статистична вага є величиною безрозмірнісною, а її одиниця – число 1.

Нагадаємо, що макростан системи визначено тоді, коли визначено стани кожної частинки, з яких вона складається, а макростан - коли задано значення однієї з термодинамічних функцій стану. Якщо, як це й буває найчастіше, такою функцією стану обрати енергію системи, то статистичну вагу можна визначити як кратність виродженості квантового енергетичного рівня системи.

25. **Середня довжина вільного пробігу** –  $[\square]$ ; (mean free path, середня довжина вільного пробігу) – фізична величина, що дорівнює середній відстані, яку проходить молекула речовини між двома послідовними зіткненнями. Осереднення здійснюється за ансамблем молекул речовини.

Середня довжина вільного пробігу має розмірність довжини й виражається у *метрах*.

26. **Коефіцієнт дифузії** –  $[D]$ ; (diffusion coefficient, коэффициент диффузии) – фізична величина, що визначається як коефіцієнт пропорційності у рівнянні

$$C(B)\langle v(B) \rangle = -D \operatorname{grad} C(B),$$

де  $C(B)$  – локальна молекулярна концентрація компонента  $B$  у суміші;  $\langle v(B) \rangle$  – локальна середня швидкість молекули компонента  $B$ .

Якщо молекулярна концентрація компонента  $B$  у суміші змінюється лише уздовж одного напрямку (осі  $x$ ) і ця зміна  $\square C(B)$  є рівномірною на кожному відрізку  $\square x$ , то наведене рівняння суттєво спрощується і з нього можна дістати вираз для коефіцієнта дифузії:

$$|D| = C(B)\langle v(B) \rangle \square x / \square C(B);$$

$$\dim D = L^2 T^{-1}, \quad [D] = 1 \text{ м}^2/\text{с}.$$

*Квадратний метр на секунду* ( $\text{м}^2/\text{с}$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$ ) дорівнює коефіцієнту дифузії речовини  $B$  у такій точці суміші, де в разі локальної молекулярної концентрації цієї речовини  $1 \text{ моль}^{-1}$  та середньої швидкості її молекул  $1 \text{ м/с}$  зміна молекулярної концентрації дорівнює  $1 \text{ моль}^{-1}$  на відрізку  $1 \text{ м}$ .

27. **Зарядове число йона** –  $[z]$ ; (charge number of ion, зарядовое число иона) - фізична величина, що визначається співвідношенням

$$z = q/e,$$

де  $q$  – заряд йона;  $e$  – елементарний електричний заряд.

$$\dim z = 1, \quad [z] = 1$$

28. **Йонний еквівалент концентрації** –  $[C_n]$ ; (ionic equivalent of concentration, ионный эквивалент концентрации) – фізична величина, що дорівнює відношенню молярної концентрації  $c$  компонента до ступеня окислення  $n$ , який він виявив у відповідній сполуці:

$$C_n = c/n.$$

$$\dim C_n = L^{-3}N, \quad [C_n] = 1 \text{ моль/м}^3.$$

*Моль на кубічний метр* ( $\text{mol/m}^3$ , моль/м<sup>3</sup>) дорівнює йонному еквіваленту концентрації компонента, при якому цей компонент має молярну концентрацію 1 моль/м<sup>3</sup> і виявляє у сполуці ступінь окислення 1.

29. **Ступінь дисоціації** –  $[\alpha]$ ; (degree of dissociation, степень диссоциации) – фізична величина, що визначається співвідношенням

$$\alpha = N_d/N_0,$$

де  $N_d$  – кількість дисоційованих молекул;  $N_0$  – загальна кількість молекул.

Ступінь дисоціації є величиною безрозмірною, а його одиниця – число 1.

30. **Електролітична провідність** –  $[\sigma, s]$ ; (electrolytic conductivity, электролитическая проводимость) – фізична величина, що визначається співвідношенням

$$\sigma = J/E,$$

де  $J$  – густина струму в електроліті;  $E$  – напруженість електричного поля.

$$\dim \sigma = L^{-3}M^{-1}T^3I^2, \quad [\sigma] = 1 \text{ См/м}.$$

*Сименс на метр* ( $S/m$ ; См/м) дорівнює електролітичній провідності електроліту, в якому електричне поле напруженістю 1 В/м спричинює струм з густиною 1 А/м<sup>2</sup>.

31. **Молярна провідність** –  $[\kappa_m]$ ; (molar conductivity, молярная проводимость) – фізична величина, що визначається співвідношенням

$$\kappa_m = \sigma/c(B),$$

де  $\sigma$  – електропровідність, зумовлена компонентом  $B$  з молярною концентрацією  $c(B)$ .

$$\dim \kappa_m = M^{-1}T^3I^2N^{-1}, \quad [\kappa_m] = 1 \text{ См} \cdot \text{м}^2/\text{моль}.$$



*Сименс – квадратний метр на моль* ( $S \cdot m^2/mol$ ;  $Cm^2/моль$ ) дорівнює молярній провідності електроліту, який має електропровідність  $1 \text{ Cm}/m$ , зумовлену компонентом  $B$  з молярною концентрацією  $1 \text{ моль}/m^3$ .

**32. Електрохімічний еквівалент** –  $[k]$ ; (electrochemical equivalent, электрохимический эквивалент) – фізична величина, що дорівнює відношенню маси  $m$  речовини, яка відкладалась на електроді у процесі електролізу, до заряду  $q$ , який пройшов через електроліт протягом цього процесу:

$$k = m/q.$$
$$\dim k = MT^{-1}I^{-1}, [k] = 1 \text{ кг/Кл.}$$

*Кілограм на кулон* ( $kg/C$ ,  $кг/Кл$ ) – одиниця електрохімічного еквівалента, що дорівнює електрохімічному еквіваленту відкладеної на електроді речовини, маса якої після проходження через електроліт електричного заряду  $1 \text{ Кл}$  дорівнює  $1 \text{ кг}$ .

**33. Вологість повітря** –  $[-]$ ; (air humidity, влажность воздуха) – характеристика вмісту водяної пари в повітрі.

**33.1 Абсолютна вологість повітря** –  $[f]$ ; (absolute air humidity, абсолютная влажность воздуха) – фізична величина, що дорівнює густині водяної пари в повітрі.

Абсолютна вологість повітря має розмірність і одиницю густини речовини, тобто

$$\dim f = L^{-3}M, [f] = 1 \text{ кг}/m^3.$$

Практично завжди як одиницю абсолютної вологості використовують частинну одиницю  $1 \text{ г}/m^3$ .

У метеорології застосовують дещо відмінне визначення абсолютної вологості:

$$f = 1,058 p_p / (1 + 0,00367 t),$$

де  $p_p$  – парціальний тиск водяної пари, виражений у міліметрах ртутного стовпчика, за температури повітря  $t$  (у градусах Цельсія).

У цій науці загальноприйнятною є також одиниця абсолютної вологості  $1 \text{ г}/cm^3$ .

**33.2 Відносна вологість повітря** –  $[B]$ ; (relative air humidity, относительная влажность воздуха) – фізична величина, що дорівнює відношенню абсолютної вологості повітря за даної температури до такої абсолютної вологості, яка необхідна для отримання насиченої водяної пари за таких самих умов.

Відносна вологість повітря є безрозмірною величиною, а її одиниця – число  $1$ . Найчастіше відносну вологість виражають у позасистемних відносних одиницях *процентах*.

## 2.7 Види похибок. Умови проведення вимірювального експерименту

### 2.7.1 Класифікація похибок вимірювання. Умови проведення вимірювального експерименту

Результати вимірювання фізичної величини дають лише наближене її значення. Відхилення результату вимірювань від істинного значення вимірюваної величини називають *похибкою вимірювання*. Розрізняють *абсолютну та відносну похибки вимірювань*.

*Абсолютна похибка* вимірювання  $\Delta A$  дорівнює різниці між результатом вимірювання  $A$  та істинним значенням вимірюваної величини  $A_0$ :

$$\Delta A = A - A_0.$$

*Відносна похибка вимірювання*  $\delta_A$  – це відношення абсолютної похибки вимірювання до істинного значення вимірюваної величини, виражене у відсотках:

$$\delta_A = \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100.$$

Оскільки істинне значення вимірюваної величини є невідомим, замість нього використовують так зване *дійсне значення*, під яким розуміють значення вимірюваної величини, знайдене експериментальним шляхом і настільки наближене до істинного значення, що може бути використане замість нього. З цієї причини на практиці значення похибки вимірювання можна оцінити тільки приблизно. Похибки вважаються додатними, якщо результат вимірювання перевищує дійсне значення.

Для одержання дійсного значення вимірюваної величини в ряді випадків враховують похибки засобів вимірювання шляхом введення поправок.

*Поправкою* називається абсолютна похибка, що береться зі зворотним знаком.

*Приклад.* Результат вимірювання струму  $I = 49,9\text{A}$ , а його дійсне значення  $I_d = 50,0\text{A}$ .

Абсолютна похибка вимірювання:

$$\Delta I = I - I_d = 49,9 - 50,0 = -0,1\text{A}.$$

Відносна похибка вимірювання:

$$\delta_I = (\Delta I / I_d) \cdot 100 = (-0,1 / 50) \cdot 100 = -0,2\%$$

Поправка, яку слід ввести в результат вимірювання:

$$-\Delta I = 0,1A.$$

Похибки вимірювань мають *систематичну* й *випадкову* складові, які називають також *систематичною та випадковою похибками*.

Під *систематичними похибками* розуміють похибки, що залишаються постійними або закономірно змінюються при повторних вимірюваннях тієї ж величини. Систематичні похибки можуть бути визначені й усунуті шляхом введення відповідних поправок. Прикладом систематичних похибок може служити похибка градування приладу, тобто помилки в розміщенні розподілів, нанесених на шкалу приладу. Вплив зовнішніх факторів (наприклад, коливання температури, напруги живлення) на засоби вимірювання також викликає появу систематичних похибок.

*Випадковими* називаються похибки, що змінюються випадковим чином при повторних вимірах тієї ж величини. Випадкові похибки не можна виключити дослідним шляхом. Вони походять від впливу на результат вимірювання причин випадкового характеру, наприклад, похибка від тертя в опорах вимірювальних приладів.

Зменшення впливу випадкових похибок на результат вимірювання досягається шляхом багаторазових вимірювань величини в однакових умовах.

Якщо припустити, що систематичні похибки є близькими до нуля, то найбільш достовірне значення, яке можна приписати вимірюваній величині на підставі ряду вимірювань, є середнє арифметичне з отриманих значень, що визначається як

$$A_{CP} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) / n,$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – результати окремих вимірювань;  $n$  – число вимірювань.

Для оцінки точності результату вимірювань необхідно знати закон розподілу випадкових похибок.

У практиці вимірювань одним з найпоширеніших законів розподілу випадкових похибок є нормальний закон (Гаусса).

Математичне вираження нормального закону має вигляд:

$$\rho(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\delta^2/2\sigma^2}$$

де  $\rho(\delta)$  – щільність імовірності випадкової похибки  $\delta$ ;  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення.

Середнє квадратичне відхилення може бути виражене через випадкові відхилення результатів спостереження  $\rho$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2}{n-1}},$$

де  $\rho_1 = \alpha_1 - A_{CP}$ ;  $\rho_2 = \alpha_2 - A_{CP}$ ;  $\rho_n = \alpha_n - A_{CP}$ .

Характер кривих для двох значень  $\sigma$  показаний на рис. 2.43. Із цих кривих видно, що чим менше  $\sigma$ , тим частіше зустрічаються малі випадкові похибки, тобто тим точніше виконані вимірювання.

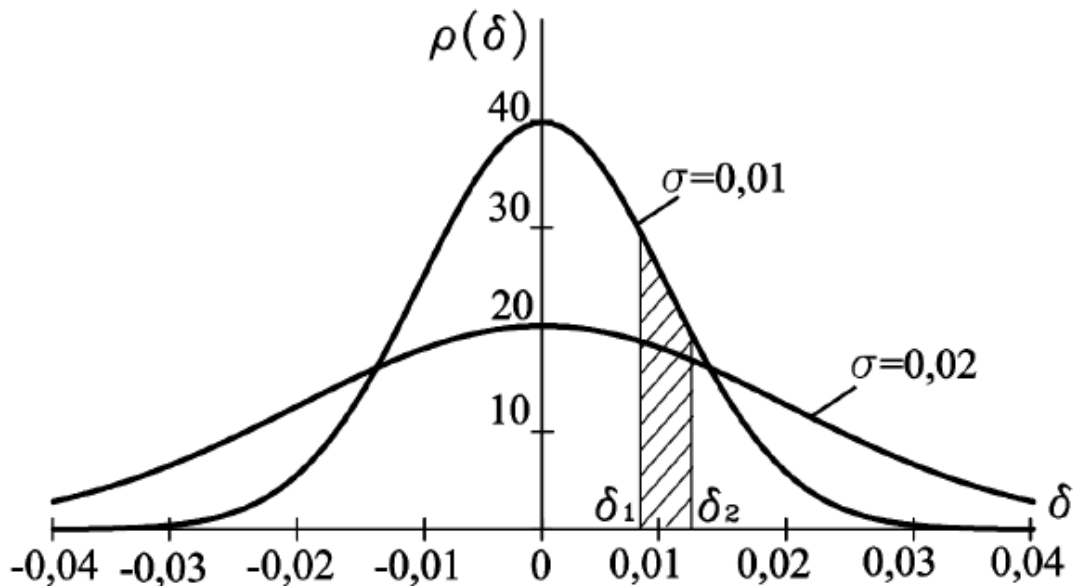


Рисунок 2.43 – Нормальний закон розподілу випадкових похибок

## 2.7.2 Похибки засобів вимірювань

Залежно від зміни в часі вимірюваної величини розрізняють наступні похибки засобів вимірювань:

*Статичну похибку*, яка виникає при вимірюванні сталої в часі величини;

*Динамічну похибку* – різницю між похибкою в динамічному режимі (тобто при зміні вимірюваної величини в часі) та статичною похибкою, що відповідає значенню вимірюваної величини в даний момент часу.

Залежно від умов виникнення похибок розрізняють:

*Основну похибку* – похибку засобів вимірювань, що використовуються у нормальних умовах, тобто за умов нормального положення, за температури навколишнього середовища  $20 \pm 5$  °С, відсутності зовнішнього електричного і магнітного полів, крім земного, і т.п.;

*Додаткову похибку* – похибку засобів вимірювань, що виникає в результаті відхилення значення однієї із впливаючих величин від нормального значення. Іншими словами, це похибка, що виникає в разі відхилення умов експлуатації від нормальних.

Розглянемо статичні похибки мір і електровимірювальних приладів.

*Похибка міри.* Кожна міра має номінальне значення, що майже завжди вказується спеціальним написом на самій мірі. При виготовленні міри практично неможливо забезпечити рівність номінального та істинного значень міри. Різниця між номінальним та істинним значеннями міри називається *абсолютною похибкою міри*.

*Похибки електровимірювальних приладів*

За способами вираження похибок вимірювальних приладів розрізняють *абсолютну, відносну і приведену похибки*.

*Абсолютна похибка приладу*  $\Delta$  – це різниця між показником приладу  $x$  і дійсним значенням  $x_d$  вимірюваної величини, тобто

$$\Delta = x - x_d.$$

*Відносна похибка приладу*  $\delta$  являє собою відношення абсолютної похибки до дійсного значення вимірюваної величини. Відносна похибка звичайно виражається у відсотках і дорівнює:

$$\delta = \frac{x - x_d}{x_d} \cdot 100 = \frac{\Delta}{x_d} \cdot 100.$$

*Приведена похибка*  $\gamma$  є виражене у відсотках відношення абсолютної похибки  $\Delta$  до значення величини, що нормується  $x_H$

$$\gamma = \frac{\Delta}{x_H} \cdot 100.$$

У реальних приладів залежність абсолютної похибки від вимірюваної величини  $x$  може бути представлена деякою смугою невизначеності, обумовленою випадковою похибкою та зміною характеристик приладів у результаті дії впливаючих величин і внаслідок старіння (див. рис. 2.44).

Тому значення абсолютної похибки, як правило, обмежене двома прямими 1, симетричними відносно осі абсцис, відстань між якими збільшується зі зростанням вимірюваної величини.

Граничні значення абсолютних похибок  $\Delta_{\max}$  можуть бути як додатними, так і від'ємними, але однаковими за модулем. Їх залежність від вимірюваної величини  $x$  характеризується прямими 1.

Рівняння прямої 1, що не проходить через початок координат, може бути виражене за допомогою двох постійних коефіцієнтів  $\alpha$  і  $b$ . Таким чином,

$$|\Delta_{\max}| = |\alpha| + |b \cdot x|$$

де  $\alpha$  називають граничним значенням *адитивної похибки*;  $b \cdot x$  – граничним значенням *мультиплікативної похибки*.

Абсолютні адитивні похибки не залежать від вимірюваної величини  $x$ , а мультиплікативні – прямо пропорційні значенню  $x$ .

*Джерела адитивної похибки* – тертя в опорах, неточність відліку, шум, наводки та вібрації. Від цієї похибки залежить найменше значення величини, що може бути виміряне приладом.

*Причини мультиплікативної похибки* – вплив зовнішніх факторів і старіння елементів та вузлів приладів.

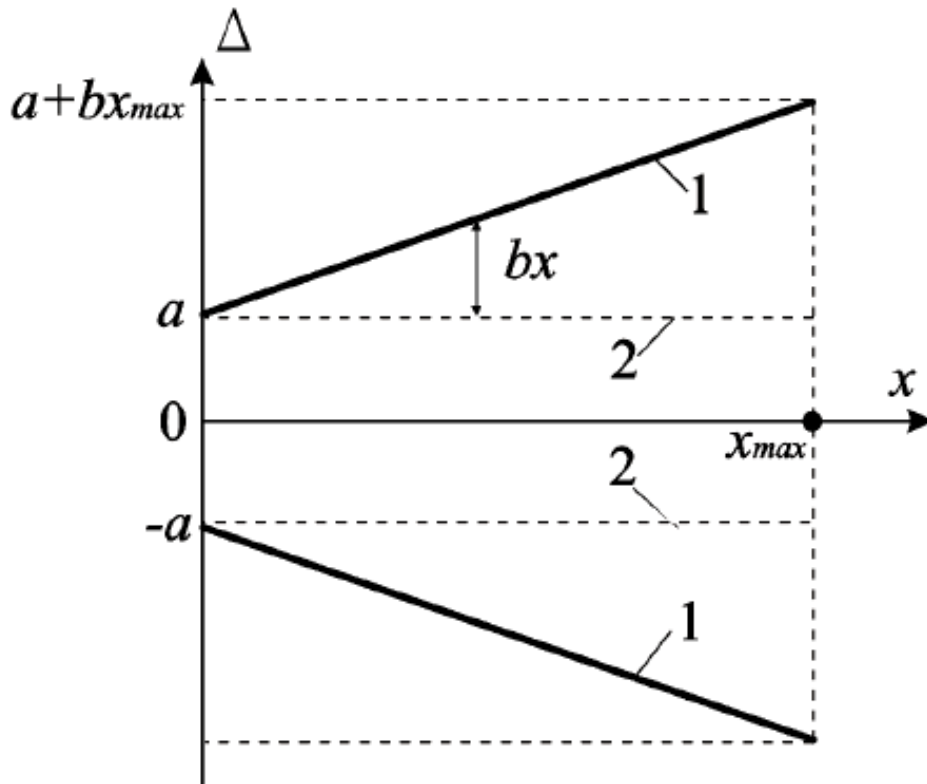


Рисунок 2.44 – Залежність абсолютної похибки приладу від вимірюваної величини

*Клас точності* – це узагальнена характеристика приладу, обумовлена межами допустимих основних і додаткових похибок.

Межі допустимих змін показань від впливу зовнішніх факторів для будь-якого приладу встановлюються залежно від класу його точності відповідно до стандартів на окремі види приладів.

Клас точності може виражатися одним числом або дробом.

У приладі, адитивна похибка яких різко переважає над мультиплікативною, всі значення похибок опиняються в межах прямих 2, паралельних осі  $OX$ .

У результаті допустимі абсолютна й приведена похибки приладу виявляються постійними в будь-якій точці його шкали. У таких приладів клас точності виражається одним числом, що обирається з ряду наступних чисел:  $1 \cdot 10^n$ ;  $1,5 \cdot 10^n$ ;  $2 \cdot 10^n$ ;  $2,5 \cdot 10^n$ ;  $4 \cdot 10^n$ ;  $5 \cdot 10^n$ ;  $6 \cdot 10^n$ , де  $n = 1; 0; -1; -2$  і т.д.

У приладів, клас точності яких виражається одним числом, основна приведена похибка у робочому діапазоні шкали, виражена у відсотках, не

перевищує значення, що відповідає класу точності. До таких приладів відносяться більшість стрілкових і самописних приладів.

Клас точності приладів, у яких адитивна та мультиплікативна складові основної похибки є співрозмірними, позначається у вигляді двох чисел, розділених косою рисою, наприклад, клас точності 0,1/0,05. Граничне значення основної відносної похибки приладів, виражене у відсотках, у цьому випадку може бути визначене шляхом розрахунку за формулою

$$|\delta_{\max}| = [c + d(x_k / x) - 1]$$

де  $x_k$  – кінцеве значення діапазону вимірювань;  $c$  і  $d$  – постійні числа, причому відношення  $c/d$  позначає клас точності приладу.

До приладів, клас точності яких виражається дробом, відносяться цифрові прилади, а також мости та компенсатори як з ручним, так і з автоматичним зрівноваженням.

### 2.7.3 Систематичні та випадкові похибки вимірювання

Якщо провести глибокий аналіз класифікації похибок у залежності від причин виникнення, способів урахування та виключення їхнього впливу на результат вимірювання, то переважно похибки – це *систематичні, випадкові та грубі*.

На практиці далеко не завжди вдається чітко розмежувати випадкові та систематичні похибки. Наприклад, при зміні положення променя зору спостерігача відносно до типового стрілкового приладу (наприклад, звичайний годинник) результати зняття даних будуть змінюватися. Цей ефект називається *паралаксом*, і він призводить до того, що істинне зняття даних зі шкали розташоване навпроти стрілки. Навіть дуже старанний експериментатор не в змозі розташувати промінь зору завжди точно навпроти стрілки; отже, вимірювання будуть містити малі похибки, пов'язані з паралаксом, і ці похибки будуть явно випадковими. З іншого боку, необережний експериментатор, який поставить стрілковий прилад з боку від себе і забуде про вплив паралаксу, привнесе систематичну похибку до усіх своїх розрахунків. Таким чином, один і той же ефект, паралакс, може призвести до випадкових похибок в одному випадку і систематичних – в іншому.

*Систематичні похибки* є найбільш небезпечними; їх виявлення пов'язане з рядом ускладнень. Часто спостерігач не знає про природу виникнення деяких систематичних похибок, а в ряді випадків навіть не має уявлення про їх існування.

В залежності від причин виникнення систематичні похибки поділяють на *інструментальні, суб'єктивні, похибки методу та зовнішніх впливів*.

Таким чином, можна зробити висновок, що поява систематичних похибок пов'язана здебільшого з недоліками засобів вимірювальної техніки або обранням методів вимірювання.

Виключення систематичних похибок в процесі вимірювання досягається використанням тих чи інших засобів вимірювань, які дозволяють або виключити похибку, що є наслідком впливу будь-якого джерела, або встановити наявність цього джерела й оцінити ступінь його впливу.

Виключенню таким шляхом піддаються, головним чином, інструментальні похибки та похибки від зовнішніх впливів. При цьому використовується ряд способів, основні з них – заміщення та компенсації.

*Випадкові похибки* не можуть (як систематичні) бути виключені з результатів вимірювання, проте у випадку проведення досить великої кількості вимірювань методи математичної статистики та теорії ймовірності дозволяють оцінити величину випадкової похибки.

Як приклад проявів випадкових та систематичних похибок розглянемо вимірювання точно визначеної довжини за допомогою лінійки. Одне у джерел похибки – це необхідність в інтерполяції між мітками (позначками) шкали, і ця похибка явно випадкова. При інтерполяції ми з рівною ймовірністю як перевищуємо, так і не перевищуємо результатів вимірювання. Але є також ймовірність того, що лінійка дефектна, а це джерело похибки буде, певно, призводити до систематичної похибки. Якщо лінійка є розтягнутою, ми завжди применшуємо результат, якщо стиснутою – завжди перевищуємо.

Подібно до цього прикладу, всі вимірювання піддаються як випадковим, так і систематичним похибкам. У свою чергу, при аналізі систематичних похибок слід вважати, що випадкові похибки відсутні. Сумарна похибка, що характеризує точність вимірювання, знаходиться шляхом підсумовування систематичної та випадкової похибок за визначеними правилами.

За характером зміни систематичні похибки поділяють на *постійні*, *прогресивні*, *періодичні* (похибки, які змінюються за складною закономірністю).

*Постійні похибки* – це похибки, які довгий час зберігають своє значення, наприклад, протягом всього часу вимірів. Такі похибки трапляються досить часто (у мір довжини, у гирях).

*Прогресивні похибки* – це похибки, які безперервно зростають або зменшуються. До таких похибок належать, наприклад, похибки внаслідок спрацювання обладнання у процесі виготовлення деталей або акумуляторних батарей і т.д.

*Періодичні похибки* – це похибки, значення яких є періодичною функцією часу або іншою функцією. Наприклад, у секундомірів, індикаторів часового типу.

Похибки, які змінюються за складним законом, виникають внаслідок сумісної дії декількох систематичних похибок. Вплив різних за своєю природою систематичних похибок на результат вимірів інколи співпадає за формою й умовами їх виявлення. В цьому випадку операції за винятком різних похибок можливо суміщати.



## 2.8 Похибки прямих та непрямих вимірювань. Знаходження грубих похибок

### 2.8.1 Оцінювання випадкових похибок прямих вимірювань

Похибки вимірювань класифікують за трьома основними класифікаційними ознаками – за способом вираження, за характером зміни, за місцем виникнення.

Класифікація похибок вимірювань наведена на рис. 2.45.



Рисунок 2.45 – Класифікація похибок вимірювання

За способом вираження похибки поділяються на абсолютні та відносні.

Класична метрологія виходить з позиції, що результат вимірювання завжди відрізняється від істинного значення вимірюваної величини. Тому під час вимірювань фізичної величини (ФВ) виникає похибка, яка дорівнює різниці між вимірним значенням  $X$  фізичної величини та її істинним  $X_1$  значенням

$$\Delta X = X - X_1 \quad (2.1)$$

За характером зміни похибки вимірювання поділяють на систематичні та випадкові.

*Систематична похибка.* Складова похибки  $\bar{\Delta}$ , що залишається сталою або прогнозовано змінюється у ряді вимірювань тієї ж величини.

*Випадкова похибка.* Складова похибки  $\overset{0}{\Delta}$ , що непрогнозовано змінюється у ряді вимірювань тієї ж величини.

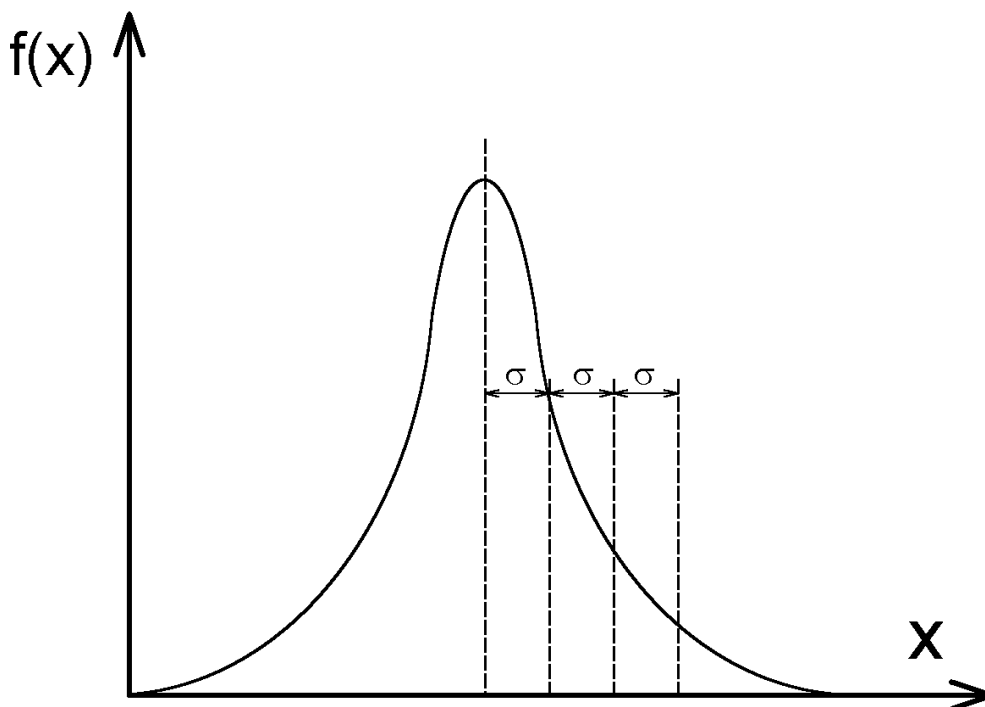
У загальному випадку похибка результату вимірювання містить систематичну і випадкову складові, навіть якщо було введено поправки на систематичні похибки, викликані відомими факторами впливу.

Пояснюється це, по-перше, тим, що значення факторів не залишаються в процесі вимірювання постійними, а по-друге, тим, що на результат вимірювання впливають фактори, дія яких у даному експерименті не передбачалася, або ж фактори, дію яких неможливо врахувати. Оскільки у похибку вимірювання входить випадкова складова, то її слід вважати величиною випадковою.

Значення повної похибки вимірювання для будь-якого моменту часу визначається:

$$\Delta = \bar{\Delta} + \overset{0}{\Delta}. \quad (2.2)$$

Використовуючи апарат підсумовування частинних /часткових/ похибок випадкового характеру і часткових /частинних/ похибок систематичного характеру, можна оцінити похибку вимірювання.



*Примітка.* У 1980 році з'явилася рекомендація робочої групи вчених Міжнародного комітету мір і ваг у Парижі, що пропонує розділити похибку результату вимірювань на дві групи – А і В. Складові групи А оцінюються

статистичними методами, а складові групи В – іншими методами. Поняття «систематична похибка» визнається неточним, тому що може вводити в оману. Вказується, що розходження між групами А і В має скоріше практичне значення, ніж фундаментальне. Рекомендується внесок у загальну похибку похибок обох категорій розглядати як випадковий, що визначає порядок підсумовування цих складових загальної похибки.

*Імовірність появи випадкових похибок.* У процесі проведення вимірювань разом із детермінованими процесами виникають стохастичні процеси, для яких не можна передбачити ступінь їхньої дії та характер ФВ, що впливає на результат виміру. При оцінці значення ФВ, що вимірюється, говорять не про одне її фіксоване значення, а про область, у якій можуть знаходитися значення вимірюваної ФВ. Отже, при повторних вимірах через зміну характеру і інтенсивності впливаючих ФВ щоразу буде з'являтися новий результат вимірювання.

Тому результати вимірювань слід розглядати як випадкові величини, які підкоряються визначеним закономірностям, що з'ясовуються при обробці ряду результатів багатократних вимірювань. Одержані результати відносяться до випадкових величин, і характер їх поведінки описується теорією імовірностей та математичною статистикою.

Проведемо ряд вимірювань ФВ  $X$ . Під дією випадкових похибок одержимо  $n$  дещо відмінних один від одного результатів, що займуть деякий діапазон значень.

Розіб'ємо весь інтервал значень на декілька піддіапазонів, що мають досить малі кроки квантування. Можна згрупувати результати вимірів у ці піддіапазони, кожний з яких буде характеризуватися кількістю результатів вимірювань, що потрапили до нього.

На основі отриманих результатів побудуємо гістограму розподілу результатів вимірів.

Висота прямокутників визначається частотою  $p$  появи результатів у кожному піддіапазоні.

В разі зменшення ширини інтервалів до нуля гістограма перейде у плавну криву, яка називається *кривою щільності розподілу імовірностей*.

Центр розподілу результатів вимірювання називається *математичним сподіванням*  $M(X)$  величини  $X$  і наближається, якщо немає систематичної похибки  $\bar{\Delta}$ , до істинного значення вимірюваної фізичної величини  $X_1$ .

Якщо змінити умови вимірів і застосувати інші вимірювальні засоби (ЗВ), то форма гістограми та кривої щільності розподілу змінюється.

У випадку застосування більш точного ЗВ крива підніметься в центрі і буде крутіше спадати при віддаленні від нього, і навпаки, – вона зменшиться в центрі, збільшиться розмах коливань результатів вимірів, коли буде використано менш точний ЗВ.

Припустимо, що виконано ряд із  $n$  рівноточних вимірювань величини  $X$ .

Вважаючи, що число вимірів, укладених в інтервалі від  $X$  до  $X + dx$ , пропорційно числу вимірів  $n$ , знайдемо число результатів  $dn$ , які увійшли в інтервал  $dx$  :

$$dn = n f_x(x) dx . \quad (2.3)$$

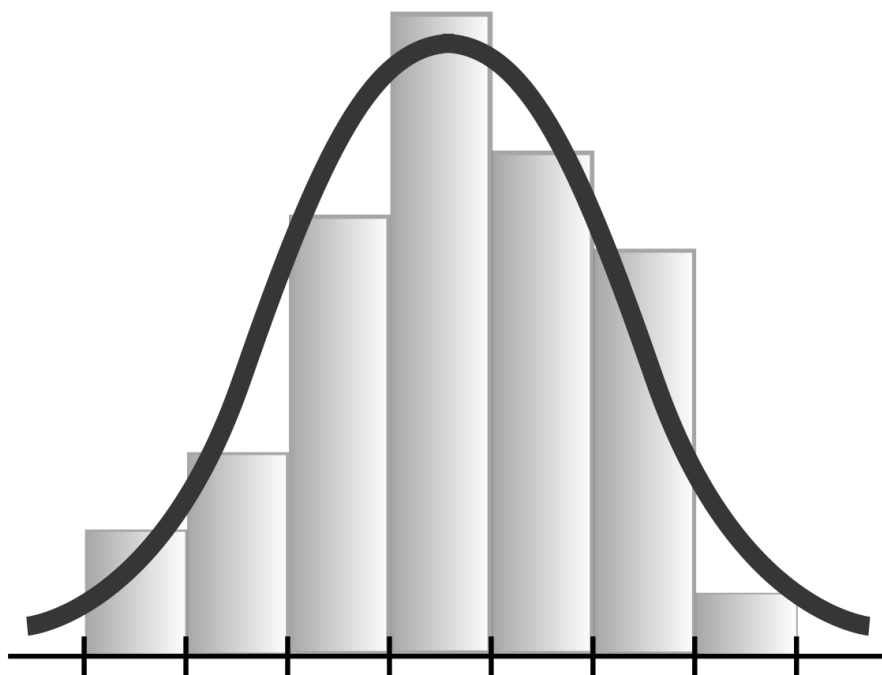
У (2.3) невідомої є  $f_x(x)$  – висота заштрихованого стовпчика, що називають *щільністю розподілу імовірностей випадкової величини  $X$* , тобто *щільністю розподілу результатів вимірювань*.

Перетворимо (2.3) до вигляду

$$\frac{dn}{n} = f_x(x) dx . \quad (2.4)$$

Новий вираз (2.4) показує імовірність появи результатів вимірів в інтервалі  $dx$ .

Функція  $f_x(x)$  може мати будь-який закон зміни.



З її допомогою можна знайти імовірність  $P$  того, що результати виміру потраплять в інтервал від  $X_H$  до  $X_B$ , для чого диференціал імовірності  $\frac{dn}{n}$  необхідно проінтегрувати:

$$P = \int_{X_H}^{X_B} f_x(x) dx . \quad (2.5)$$

де  $X_H, X_B$  – нижня і верхня межа інтервалу.

Імовірність потрапляння результатів вимірювання величини  $X$  в діапазоні з нижньою  $X_H$  і верхньою  $X_B$  межами можна записати так:

$$P(X_H < X < X_B) = \int_{X_H}^{X_B} f_x(x) dx. \quad (2.6)$$

Ліва частина цього виразу показує тільки імовірність події, що знаходиться в діапазоні від  $X_H$  до  $X_B$ .

Права частина також показує імовірність цієї події, але додатково ще вказує щільність розподілу імовірності.

Права частина (2.6) більш повна, ніж ліва. Тому ліву частину можна назвати неповною формою представлення результатів вимірювання.

*Нормальний закон розподілу.* Якщо випадкова похибка є результатом впливу більш ніж чотирьох впливаючих ФВ, рівновеликих і незалежних, які викликають похибки, що мають будь-які закони розподілу, то закон розподілу випадкової композиційної похибки наближається до так званого нормального закону розподілу імовірностей.

Нормальний закон розподілу похибок має такі дві властивості:

- число позитивних похибок дорівнює числу негативних – розподіл є симетричним;
- малі похибки зустрічаються частіше, ніж великі, поява дуже великих похибок – малоімовірна подія.

Нормальний закон розподілу називають також законом Гаусса. Щільність розподілу імовірності подається формулою

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[x - M(x)]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.7)$$

де  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення (СКВ) випадкової величини  $X$ .

Координатою центру ваги фігури, яка обмежена кривою щільності розподілу і віссю абсцис, буде математичне сподівання  $M(X)$  розглянутої сукупності випадкових величин  $X$ , яким є ряд результатів рівноточних повторних вимірювань.

Якщо вилучити з  $M(X)$  істинне значення вимірюваної величини  $X_1$ , то одержимо значення систематичної похибки:

$$\bar{\Delta} = M(X) - X_1. \quad (2.8)$$

Систематична похибка  $\bar{\Delta}$  в цьому випадку розглядається як постійна величина.

Якщо  $\bar{\Delta} = 0$ , то  $M(X) = X_1$ , і математичне сподівання збігається з істинним значенням ФВ, що вимірюється.

Значення випадкових похибок  $\Delta_i^0$ , що входять у результат  $i$ -го вимірювання, можна одержати з виразу:

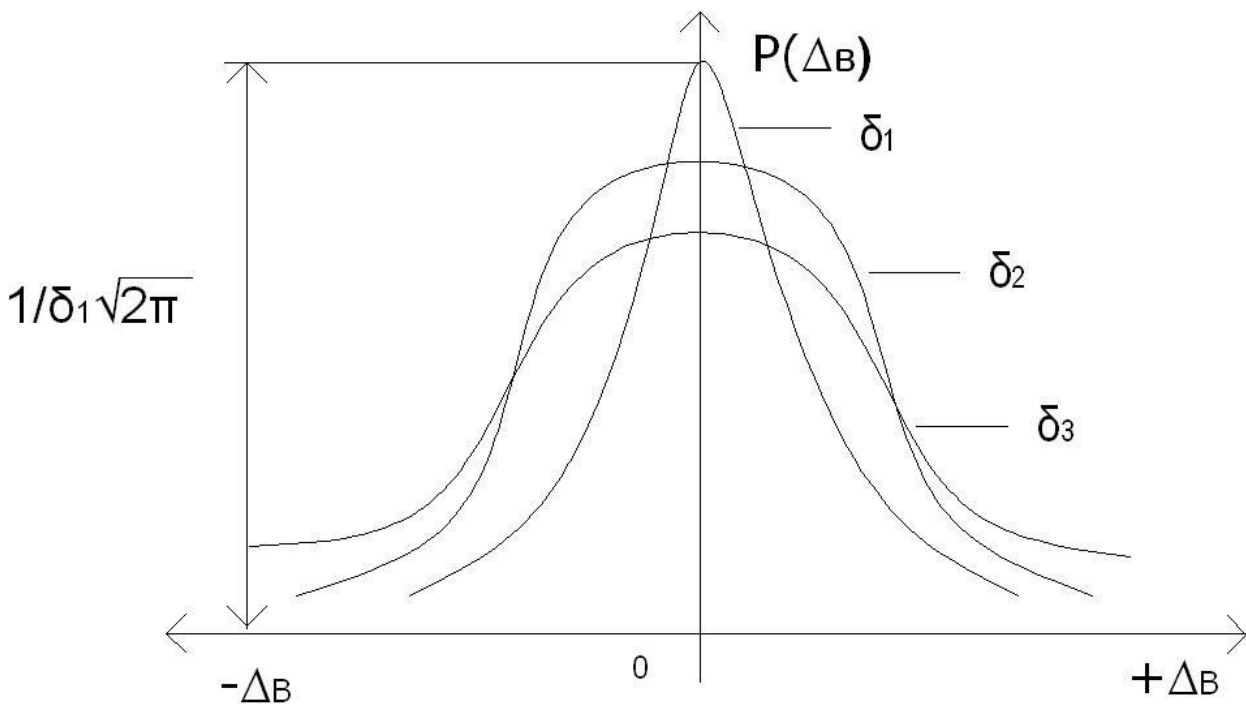
$$\Delta_i^0 = X_1 - M(X). \quad (2.9)$$

Виходячи з цієї залежності, можна, віднімаючи від результатів повторних вимірів  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  значення математичного сподівання  $M(X)$ , одержати новий ряд випадкових похибок  $\Delta_1^0, \Delta_2^0, \Delta_3^0$ .

Цей ряд має щільність розподілу, що за формою співпадає з розподілом величини  $X$ .

Його центр буде зміщений по осі абсцис на величину, рівну  $M(X)$ . Аналітичне вираження для кривої буде мати вигляд:

$$f_{\Delta}^0(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.10)$$



Імовірність перебування похибки в інтервалі від  $\Delta_H^0$  до  $\Delta_B^0$  буде визначатися виразом

$$P\left(\Delta_H^0 < \Delta < \Delta_B^0\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta_H^0}^{\Delta_B^0} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) d\Delta. \quad (2.11)$$

Формулу закону Гаусса часто видозмінюють, ввівши нормовану безрозмірну величину  $g = \Delta/\sigma$ :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-g}^g \exp\left(-\frac{g^2}{2}\right) dg. \quad (2.12)$$

Цей інтеграл не виражається через елементарні функції. Для зручності він був протабульований математиком Фішером, що склав таблиці для значень інтеграла:

$$\Phi(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^g \exp\left(-\frac{g^2}{2}\right) dg. \quad (2.13)$$

У деяких таблицях подається подвоєне значення  $\Phi(g)$ . Як нормовану безрозмірну величину взято величину, рівну  $g$ , що виражається через межі довірчого інтервалу  $\pm \alpha$ , так що  $g = \frac{\alpha}{\sigma}$ .

Інтеграл  $\Phi(g)$  називають *нормованою функцією Лапласа*. Для крайніх значень є справедливими такі рівності:

$$\Phi(-\infty) = -05; \Phi(0) = 0; \Phi(\infty) = 05.$$

Значення інтеграла  $\Phi(g)$  наводяться у довідниках із математики.

Розглянемо деякі особливості нормального розподілу похибок.

На рис. 2.46 наведено криву нормального розподілу.

Якщо вважати, що вся площа між кривою щільності розподілу і віссю абсцис дорівнює 100 %, то площа, обмежена кривою і вертикалями, проведеними через точки з значеннями  $\alpha = \pm 2\sigma$ , буде дорівнювати 95 %.

Поза цією площею будуть похибки інших 5 % результатів.

Між кривою і вертикалями, проведеними через точки  $\alpha = \pm 3\sigma$ , і віссю абсцис буде знаходитися 99,73 % площі.

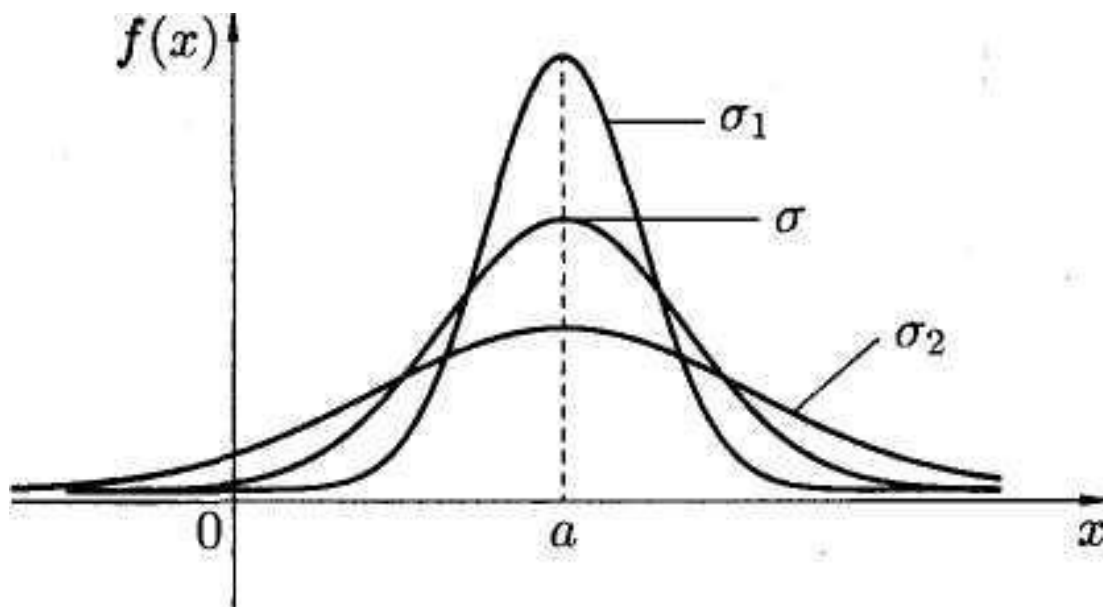


Рисунок 2.46 – Крива нормального розподілу

З цього випливає, що якщо  $\alpha = \pm 3\sigma$ , то імовірність потраплення похибки результатів виміру в цей інтервал буде дорівнювати  $P = 0,9973$ .

*Довірчим інтервалом називається інтервал, в який похибка попадає з наперед заданою імовірністю.*

Так, для нормального закону розподілу для  $P = 0,9973$  довірчий інтервал дорівнює  $\pm 3\sigma$ .

*Середнє арифметичне значення результатів багаторазових вимірювань.* Представимо  $i$ -й результат вимірювання у вигляді:

$$X_i = X_1 + \bar{\Delta} + \Delta_{i-}^0. \quad (2.14)$$

Якщо провести  $n$  повторних вимірів і знайти їх суму, то середнє арифметичне значення ряду результатів буде подано виразом

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = X_1 + \bar{\Delta} + \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^0}{n}. \quad (2.15)$$

Як видно з цього виразу, середнє арифметичне значення ряду вимірів  $\bar{X}$  буде містити  $X_1$ , систематичну похибку і усереднену випадкову складову похибки. За збільшення числа  $n$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , усереднена випадкова похибка

$$\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^0}{n} = 0 \quad \text{і} \quad \bar{X} = X_1 + \bar{\Delta}. \quad (2.16)$$



Якщо  $\bar{\Delta} = 0$ , то тоді  $\bar{X} \rightarrow X_1$ . З цього випливає, що середнє арифметичне значення ряду вимірювань за збільшення їх кількості прямує до істинного значення вимірюваної величини  $X_1$  або до її математичного сподівання:

$$\bar{X} = X_1 = M(X). \quad (2.17)$$

У звичайних умовах, коли  $n \neq \infty$ , ми маємо тільки оцінку математичного сподівання, і як така оцінка приймається середнє арифметичне  $\bar{X}$ .

*Середнє квадратичне відхилення (СКВ) результатів вимірювання.* У функції розподілу імовірності для нормального закону розподілу є символ  $\sigma$ , що називається *середнім квадратичним відхиленням*. Середнє квадратичне відхилення визначається виразом

$$\sigma = + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( \overset{0}{\Delta_i} \right)^2}{n}}. \quad (2.18)$$

Однак практичне визначення за формулою  $\overset{0}{\Delta_i} = X_i - X_1$  неможливо, тому що невідомі ні значення  $X_1$ , ні математичне сподівання  $M(x)$ .

Тому доводиться скористатися середнім арифметичним значенням. Тоді значення СКВ визначається

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}. \quad (2.19)$$

Знайдене значення СКВ характеризує будь-яке разове вимірювання, що входить у ряд значень  $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$ .

*Середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного значення результатів вимірювань.* Відзначено, що при одержанні виразу для середнього арифметичного значення вимірюваної величини  $\bar{X}$  відбувається усереднення випадкових похибок. Тому  $\bar{X}$  характеризується своїм СКВ  $S$ , що обчислюють за формулою

$$\sigma(\bar{X}) = S = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}, \quad (2.20)$$

тобто за збільшення числа вимірів у  $n$  разів СКВ  $S$   $\bar{X}$  зменшиться в  $\sqrt{n}$  разів.

## 2.8.2 Методика оцінювання випадкових похибок опосередкованих вимірювань

Шукана в непрямому (опосередкованому) вимірюванні фізична величина  $Z$  є функцією кількох величин  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , тобто її визначає розрахункова формула вимірювань:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots). \quad (2.21)$$

Похибку таких вимірювань визначають складними методами математичної статистики. У більшості практично важливих випадків можна користуватися рекомендаціями наближеної теорії, що їх подано нижче.

1. Виписати розрахункову формулу (2.21) та проаналізувати її задля з'ясування, які вимірювання потребують особливої акуратності.

2. Під час проведення непрямих вимірювань у невідтворюваних умовах, що доволі часто зустрічається в лабораторному експерименті, значення шуканої величини  $z$  обчислити для кожного вимірювання окремо, а межі довірчого інтервалу відшукати опрацюванням обчислених результатів, за алгоритмом прямих вимірювань. В іншому разі провести операції, викладені в подальших пунктах.

3. Обчислити середні арифметичні значення  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$  та абсолютні похибки  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$  для кожної з величин  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . При цьому для всіх виміряних величин значення надійності  $\alpha$  слід вважати однаковим.

4. Обчислити середнє значення шуканої величини  $\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots)$ .

5. Відшукати формули для частинних похідних функції  $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$  за кожною зі змінних:

$$z_{x_1} = \frac{df}{dx_1}, z_{x_2} = \frac{df}{dx_2}, z_{x_3} = \frac{df}{dx_3}, \dots \quad (2.22)$$

6. Визначити абсолютну похибку непрямого вимірювання

$$\Delta z = \sqrt{(z_{x_1} \cdot \Delta x_1)^2 + (z_{x_2} \cdot \Delta x_2)^2 + \dots} \quad (2.23)$$

7. Записати результат вимірювання у вигляді:

$$z = \bar{z} \pm \Delta z(\alpha). \quad (2.24)$$

8. Визначити точність вимірювань. Для цього обчислити відносну похибку результату серії непрямих вимірювань, яку виражає формула

$$\delta z = \frac{\Delta z}{z}. \quad (2.25)$$

Обчислення, що їх виконують під час опрацювання даних експерименту у непрямих вимірюваннях, завжди вносять додаткові похибки у кінцевий результат. Це пов'язано зі скінченністю кількості значущих цифр у числах, з якими їх виконують. За використання обчислювальної техніки, особливо калькуляторів, та досить складного алгоритму розрахунку (що завжди має місце при опрацюванні даних непрямих вимірювань) цей вид похибок може вельми істотно впливати на результат.

Оцінка значення відповідної похибки обчислень  $\theta_{\text{обч}}$  залежить від конкретної схеми розрахунку та може бути виконана лише з допомогою доволі складних математичних методів, наприклад, використанням графа обчислювального процесу. Проте зменшити вплив обчислювальних похибок за умов машинного опрацювання результатів досліду все ж таки можна, якщо дотримуватися таких простих правил:

1) кількість арифметичних операцій в розрахунку потрібно обирати якомога меншою;

2) результат додавання або віднімання декількох чисел залежить від послідовності операцій; для зменшення похибки обчислень слід спочатку оперувати найменшими числами;

3) слід запобігати появі результатів, що є близькими до нуля, тобто відніманню двох практично рівних чисел;

4) обчислення треба виконувати у такий спосіб, щоб порядки чисел при кожній з дій не дуже відрізнялись один від одного;

5) всі обчислення з відшукування остаточного результату потрібно здійснювати з кількістю значущих цифр, яке на одиницю перевищує кількість значущих цифр, одержаних при вимірюванні, з наступним округленням результату. При цьому остаточний результат обчислень не може містити більше значущих цифр, аніж найменш точне число з тих, які застосовувались при обчислюванні;

6) округлення здійснюють простим відкиданням наступних значущих цифр, якщо перша з них є меншою від п'яти, та збільшенням на одиницю цифри, яка стоїть перед тією, що її відкинуто, якщо остання перевищує п'ять. Якщо відкидається цифра 5 і за нею немає значущих цифр, то округлення виконують так, щоб остання цифра була парною;

7) округлення при додаванні та відніманні роблять до розряду, що на одиницю менше, ніж розряд найменш точного числа, а в результаті залишають стільки десяткових знаків, скільки їх міститься у значенні величин з найменшим числом значущих цифр;

8) при множенні та діленні в результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх міститься у значенні величини з найменшим числом значущих цифр. При піднесенні у степінь або коренюванні в результаті зберігають

стільки значущих цифр, скільки їх міститься в числі, що його підносять у степінь, або в підкорінному виразі відповідно;

9) при знаходженні логарифма наближеного числа з таблиць слід брати стільки значущих цифр, скільки їх міститься в даному числі.

Зазначимо, що сформульовані правила мають застосовуватись і в тому разі, коли окремі цифри є нулями.

### *Вилучення надмірних похибок*

Іноді в серії вимірювань величини  $x$  зустрічається аномальний результат  $x_a$ , що доволі сильно відрізняється від усіх інших, проте заздалегідь не ясно, чи є ця аномалія результатом надмірної похибки, або, навпаки, саме це значення величини містить найцікавішу інформацію про досліджуване явище.

Тоді для того щоб упевнитися в тому, що похибка є надмірною й зазначене  $x_a$  можна відкинути, слід застосувати один з так званих критеріїв відкидання.

Найпростішим з цих критеріїв є критерій Шовене.

Процедура застосування критерію Шовене містить такі операції:

1. Обчислити  $\bar{x}$  та  $S_{\bar{x}}$  з урахування всіх результатів вимірювання.
2. Визначити кількість стандартних похибок  $\tau$ , на яку аномальний результат  $x_a$  відрізняється від  $\bar{x}$ :

$$\tau = \frac{x_a - \bar{x}}{S_{\bar{x}}}. \quad (2.26)$$

3. Обчислити ймовірність  $P_0$  того, що результат вимірювання може відрізнятися від  $\bar{x}$  на  $\tau$  або більшу кількість стандартних похибок. Це можна зробити з допомогою таблиць інтегралу похибок  $P(\tau)$  (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Інтеграл похибок

$\tau$	$P, \%$	$\tau$	$P, \%$	$\tau$	$P, \%$	$\tau$	$P, \%$
0,0	0,0	0,8	57,63	1,6	89,04	2,4	98,36
0,1	7,97	0,9	63,19	1,7	91,09	2,5	98,76
0,2	15,85	1,0	68,27	1,8	92,81	2,6	99,07
0,3	23,58	1,1	72,87	1,9	94,26	2,7	99,31
0,4	31,08	1,2	76,99	2,0	95,45	2,8	99,49
0,5	38,29	1,3	80,64	2,1	96,43	2,9	99,63
0,6	45,15	1,4	83,85	2,2	97,22	3,0	99,73
0,7	51,61	1,5	86,64	2,3	97,86	3,5	99,95

В останньому випадку маємо:

$$P_0 = 100 - P(\tau). \quad (2.27)$$

4. Якщо добуток  $nP_0$ , де  $n$  – кількість вимірювань, менший від 50 %, то аномальний результат  $x_a$  слід вилучити із серії вимірювань.

Зазначимо, що з огляду на порівняно мале число вимірювань у лабораторному експерименті ( $n \leq 10$ ), в більшості випадків можна обмежитися першими двома операціями і вважати похибку надмірною та відкидати  $x_a$  вже при  $\tau \geq 0,68$ .

Ані критерій Шовене, ані якийсь інший критерій відкидання не дають змоги однозначно стверджувати, що даний аномальний результат є неправильним (промахом).

Тому за наявності в наборі даних кількох результатів, що відрізняються від інших на значну величину, слід надавати перевагу іншим методам, зокрема використовувати так звані *робастні оцінки*.

*Робастною* називають процедуру відшукування  $\bar{x}$  та  $\Delta x$ , що є нечутливою до структури масиву результатів вимірювань.

Ідея такого роду оцінок полягає у визначенні тих  $\bar{x}$ , для яких  $\Delta x$  є мінімальною.

### 2.8.3 Невизначеність вимірювань

*Невизначеність вимірювання* можна трактувати як параметр, який характеризує розсіювання значень величини, що належать вимірюваній величині на основі використаної інформації.

Невизначеність вимірювання включає в себе складові, які викликані систематичними впливами.

До них відносять:

- складові, які асоціюються із введеними на них поправками;
- складові, які пов'язані з передавальними вимірювальними еталонами значень величини;
- складові, пов'язані з невизначеністю визначення.

Інколи при оцінюванні систематичних впливів поправки не вводяться, а замість них враховують відповідні складові невизначеності.

До таких складових можна віднести стандартну невизначеність вимірювання або встановлене їй кратне значення (півширина довірчого інтервалу із заданою ймовірністю).

Невизначеність вимірювання включає в себе багато складових.

Деякі з них можуть оцінюватися невизначеністю вимірювання типу А виходячи зі статистичного розподілу значень величини, які отримані в серії вимірювань, і можуть бути охарактеризовані стандартними відхиленнями.

Інші складові можуть бути оцінені невизначеністю типу В, які також можуть характеризуватися стандартними відхиленнями, що включають

застосування функцій щільності ймовірностей, отриманих на основі експерименту або на основі іншої інформації.

Так «похибка вимірювання» – це виміряне значення величини мінус опорне значення величини.

Поняття похибки вимірювання може бути використане у випадку коли похибка є відомою (є єдине опорне значення величини або дано умовне значення величини), а також якщо похибка вимірювання є невідомою (вимірювана величина представлена унікальним істинним значенням або сукупністю істинних значень у мізерно малому діапазоні).

«Опорне значення величини» – значення величини, що використовується в якості основи для порівняння зі значенням величини такого ж роду.

Опорне значення величини може бути істинним значенням величини, яке є невідомим, або умовним значенням величини, яке є відомим.

Це значення з відповідною невизначеністю вимірювання зазвичай вказують для матеріалу (сертифікованого опорного матеріалу), устаткування, опорної методики вимірювання та порівняння вимірювальних еталонів.

В загальному випадку при виконанні звичайних вимірювань, коли опорне значення величини є невідомим, для оцінки вимірюваної величини потрібно використовувати невизначеність.

В основі розбіжностей двох концепцій метрології знаходяться різні філософські підходи до вимірювання.

Вони полягають в різних тлумаченнях двох основних понять метрології, які стосуються істинного значення вимірюваної величини та результату вимірювання.

Адекватним представленням вимірюваної величини потрібно вважати не величину з унікальним (єдиним) числовим значенням, а величину, яка характеризується набором числових значень, що знаходяться в межах деякого інтервалу.

Цей інтервал називають *невизначеністю визначення вимірюваної величини* і він визначає неповноту врахування деталей (факторів) при опису вимірюваної величини.

Невизначеність відповідає вимогам адекватності істинного значення величини його визначенню.

Метою вимірювання в концепції невизначеності є визначення інтервалу обґрунтованих значень вимірюваної величини, який базується на припущенні, що під час виконання вимірювань не було припущено помилок.

Таким чином, невизначеність визначення вимірюваної величини є мінімальною невизначеністю вимірювання.

Цей інтервал, який називається *вимірюваним значенням величини*, може бути представлений одним з його значень.

Точність вимірювання в концепції невизначеності визначається розміром довірчого інтервалу зі встановленою довірчою ймовірністю, яка приймається для вимірюваної величини.

Збільшення або зменшення цього інтервалу відповідає різним численним значенням однієї й тієї вимірюваної величини.

В 2003 році Україна приєдналася до «Угоди про взаємне визнання національних еталонів і сертифікатів калібрування та вимірювання, що видаються національними метрологічними інститутами (CIPM MRA)», що зумовлює потребу в переході до нової системи забезпечення єдності вимірювання.

*Єдність вимірювань* – стан вимірювань, за якого результати вимірювання виражають в узаконених одиницях вимірювання, а характеристики невизначеності (похибок) вимірювання відомі із заданою ймовірністю та не виходять за встановлені межі.

Єдина система забезпечення єдності вимірювання необхідна для забезпечення їхньої придатності до застосування та взаємовизнання результатів вимірювання.

Принципи єдності вимірювання:

1. Результати вимірювань є випадковою величиною;
2. Задачі вимірювання:
  - отримати значення вимірюваної величини;
  - розрахувати характеристики точності результату вимірювання (невизначеність);
  - оцінити характеристику достовірності отриманого результату (рівень довіри. Відповідний термін в теорії похибок – довірча ймовірність).
3. Функція розподілу ймовірностей – є вичерпним описом випадкової величини.
4. Щільність розподілу ймовірностей визначають як похідну від функції розподілу випадкової величини, і вона є наочним поданням розподілу ймовірностей.

Результат вимірювання завжди відрізняється від істинного значення величини через:

- недосконалість методу випробовування (вимірювання);
- недоліки засобів вимірювальної техніки (ЗВТ);
- взаємодію ЗВТ із об'єктом випробовування;
- суб'єктивні помилки оператора;
- вплив випробувального середовища тощо.

Класифікація невизначеностей.

1. За способом оцінювання розрізняють:
  - стандартну невизначеність,  $u$  – невизначеність результату вимірювання, оцінена за середньоквадратичним відхиленням:
    - а) стандартну невизначеність типу А,  $u_A$  – невизначеність, яка зумовлена дисперсією результатів вимірювання і може бути оцінена статистичними методами.
    - б) стандартну невизначеність типу В,  $u_B$  – невизначеність, спричинена різноманітними впливовими факторами і може бути оцінена ймовірнісними методами.

– сумарну невизначеність – ймовірнісну суму стандартних невизначеностей.

– розширену невизначеність – інтервал навколо результату вимірювання, в межах якого ймовірно розташована більшість розподілу значень, які з достатнім обґрунтуванням можуть бути приписані вимірюваній величині.

2. За джерелом виникнення невизначеність буває: *методична, інструментальна та суб'єктивна.*

Причини і джерела методичної складової невизначеності результатів випробовування (вимірювання):

- неточності визначення умов випробувального середовища;
- неточності відтворення умов випробування;
- недосконале врахування впливу зовнішніх факторів, неадекватне їх оцінювання;
- недосконале визначення об'єкта випробування (вимірювання), його властивостей, неповна ідентифікація вимірюваної величини;
- недосконала реалізація методики випробування;
- будь-які припущення, нехтування, апроксимація;
- похибки характеристик ЗВТ;
- взаємодія ЗВТ із об'єктом випробування (вимірювання);
- неточності перевідних коефіцієнтів, констант тощо;
- неточні значення величин, приписані робочим еталонам, стандартним зразкам;
- невідповідність фізичного об'єкта його математичній моделі (порогова невідповідність);
- невиключені систематичні похибки;
- похибки введених поправок.

## **2.9 Аналітична обробка результатів вимірювання. Графічне зображення результатів вимірювання**

### **2.9.1 Графічне зображення результатів вимірювання**

У результаті проведеного експерименту дослідник отримує, як правило, великий обсяг інформації за допомогою вимірювальних приладів або пристроїв. Всю цю інформацію належить старанно обробити.

Найпоширенішими методами обробки такої інформації є *графічний* і *аналітичний*.

*Графічний метод обробки дослідних даних* полягає у побудові графічних залежностей між досліджуваними факторами (величинами).

Графічні залежності можуть мати вигляд графіків і діаграм. Вони дають можливість стисло і наочно подати результати досліджень, в конкретній та зрозумілій формі пояснити цифрові дані і взаємозв'язок між ними.



Графічні зображення, як правило, звертають на себе більше уваги, ніж таблиці. За допомогою вдало побудованих графіків чи діаграм можна відобразити не тільки конкретні дані, а й закономірності, які вони відображають, що за допомогою таблиць зробити буває важко.

Необхідно звернути увагу також і на те, що графіки, в порівнянні з таблицями, краще запам'ятовуються.

Графічні зображення результатів досліджень найчастіше будують на основі системи прямокутних координат.

Побудову графічних залежностей здійснюють на основі рівномірних і нерівномірних (функціональних) шкал.

*Рівномірною* вважається шкала, уздовж якої відстань між двома сусідніми поділками постійно змінюється за певним математичним законом (прикладом такої шкали може бути логарифмічна).

Застосовують нерівномірні шкали для більш наочного зображення окремих графічних залежностей.

Цифрові дані, що показують динаміку яких-небудь педагогічних досліджень (зміни в успішності, фізичних здібностях, працездатності та ін.) доцільно подавати у вигляді лінійних графіків.

Більш наочно, ніж лінійні графіки, залежності між досліджуваними факторами відображають діаграми. За формою подання залежностей діаграми бувають *лінійні, площинні та об'ємні*. Найбільш поширеними є лінійні діаграми, площинні стовпчикові (вертикальні й горизонтальні) та секторні. Ступінь наочності діаграм значно підвищується за рахунок їх об'ємності, можливості нанесення словесних пояснень та різноманітних умовних позначень. У меншій мірі у процесі педагогічних досліджень застосовуються фігурні діаграми, картограми і картодіаграми.

*Лінійний графік* є умовним зображенням величин та їх співвідношень через геометричні образи – точки і лінії. За допомогою лінійного графіка звичайно передаються зміни в деяких мірних числах.

*Крім геометричного образу, графік містить низку допоміжних елементів:*

- загальний заголовок графіка;
- словесне пояснення умовних знаків і сенсу окремих елементів графічного образу;
- осі координат, шкалу із масштабами і числові сітки;
- числові дані, що доповнюють або уточнюють величину нанесених на графік показників.

*Побудова графіка включає три етапи:*

1. Вибір шкали і побудова координатної сітки з урахуванням доцільного масштабу графічного зображення;
2. Відкладання дослідних точок (тобто числових значень результатів експерименту) на координатній сітці;

3. З'єднання дослідних точок плавною лінією так, щоб вона по змозі проходила якнайближче до них.

Іноді наявні на графіку різкі викривлення пояснюються похибками вимірювань у процесі дослідження.

Дослідник повинен добре знати методики складання і аналізу графіків.

*У процесі накреслення графіків слід керуватися наступними вимогами:*

1) необхідно подавати графічно не всі, а тільки основні результати чи зведення аналізу, на які дослідник хоче звернути особливу увагу. Головною вимогою, що висувається до графіка, є його наочність, і тому графік не можна перевантажувати зайвими лініями та фігурами;

2) кожен графік повинен мати раціональні розміри. Вони мають бути зручними для креслення і читання графіка. Якщо з вихідних рисунків хочуть зняти репродукції (фотографії), рекомендовано лінійні розміри вихідного рисунка брати в 2–8 разів більше лінійних розмірів репродукції;

3) у процесі креслення графіків потрібно враховувати придатне співвідношення їхньої ширини і висоти. Виходячи з технічних вимог розмноження графіків рекомендовано, щоб менша сторона графіка була в  $\sqrt{2}$  (1,414) рази менше його більшої сторони;

4) розташування й оформлення графіків повинно сприяти їхньому читанню. На одній сторінці не повинно бути більше одного графіка, причому розміри його не повинні бути більше формату сторінки роботи. Графік найкраще розташовувати в тексті відразу після посилання на нього;

5) графік треба оформити так, щоб найбільш істотні сторони і зв'язки були найбільш помітними від менш істотних. Важливу роль при цьому відіграє застосування різних умовних позначень і шрифтів. Добре оформлені графіки легше читаються.

Осі координат графіка викреслюють суцільними лініями. На кінцях координатних осей стрілок не ставлять. На координатних осях вказують умовні позначення і розмірності відкладених величин у прийнятих скороченнях. На графіку слід писати лише умовні літерні позначення, прийняті у тексті. Написи, що стосуються кривих і точок, залишають тільки у тих випадках, коли їх небагато і вони є короткими. Багатослівні підписи заміняють цифрами, а розшифрування наводять у підрисунковому підписі.

Якщо крива, зображена на графіку, займає невеликий простір, то для економії місця числові поділки на осях координат можна починати не з нуля, а обмежити тими значеннями, в межах яких розглядається дана функціональна залежність.

Для того, щоб на лінійних графіках краще розрізняти окремі ряди чисел, для їхнього позначення використовуються різні способи. Найкраще їх було б розрізняти тоді, коли вони відзначені контрастними кольорами. Але оскільки з рисунків наукових праць треба часто робити репродукції, з метою їх розмноження, а виготовлення кольорових репродукцій є досить складним, графіки виконують у чорно-білій техніці, застосовуючи різні позначення.

Дані лінійного графіка можна зображувати й у вигляді лінійної діаграми. У цьому випадку відзначені на осях координат крапки з'єднуються з віссю абсцис. Порівняння динаміки явищ у разі виконання лінійного графіка є дещо більш ясним і наочним. Порівняння динаміки декількох явищ на одній лінійній діаграмі, особливо якщо їх більше 2–3, робить графік строкатим.

Для побудови лінійних діаграм звичайно використовують координатне поле. На осі абсцис у певному масштабі відкладається час або факторіальні ознаки (незалежні), на осі ординат – показники на певний момент чи період часу або розміри результативної незалежної ознаки. Вершини ординат з'єднуються відрізками, в результаті чого отримують ламану лінію. На лінійні діаграми можна одночасно наносити кілька показників.

Лінійну діаграму особливо доцільно використовувати для порівняння однакової ознаки двох чи декількох різних груп (середній ріст учнів, середні оцінки контрольних робіт у 10-бальній системі).

Експериментальні та контрольні класи позначаються різними лініями.

В разі графічної побудови найкращої прямої точки, які є результатами вимірювань, наносять на координатну площину.

Масштаб по осям треба вибрати таким чином, щоб графік займав приблизно квадратний простір, тобто відстань між крайніми точками по вісі абсцис і осі ординат була приблизно однаковою. У випадку лінійної залежності пряма буде мати кут нахилу приблизно  $45^\circ$ .

Масштаб треба вибрати так, щоб з ним було зручно працювати. В ідеальному випадку кожній клітинці міліметрового паперу повинна відповідати одиниця (або десята, або сота) вимірюваної величини.

## 2.9.2 Аналітична обробка результатів вимірювання

У практиці досліджень дуже часто зустрічається така задача. Залежність між змінними величинами виражається у вигляді таблиці, одержаної дослідним шляхом. Потрібно виразити цю залежність між змінними аналітично, тобто дати формулу, яка пов'язує між собою відповідні значення змінних.

Така формула представляє найбільш стислий вигляд зображення зв'язку між даними вимірювань і результатами аналізу та полегшує аналіз залежності, що розглядається.

Формули, які служать для аналітичного подання дослідних даних, називаються *емпіричними формулами* (або рівняннями).

*Завдання визначення таких формул розбивається на два етапи.*

Спочатку необхідно встановити вид залежності  $y = f(x)$ , тобто вирішити, якою вона є: лінійною, квадратичною, показниковою, степеневою тощо.

На другому етапі необхідно знайти невідомі параметри функції так, щоб функція  $f(x)$  найкраще відповідала нашим експериментальним даним.

Поки що немає відповідного методу, за яким можна було б визначити тип найдоцільнішого рівняння для подання тих чи інших експериментальних даних.

Найпоширеніший метод полягає у тому, що експериментальні дані наносять на графік у вигляді точок; проводять криву так, щоб вона проходила якомога ближче до всіх даних точок і щоб відхилення були як додатними, так і від'ємними, а потім, на основі досвіду і зразків поширених кривих, підбирають тип рівняння.

При знаходженні рівнянь часто можна виходити із припущення, що сукупність експериментальних точок описується однією із вже відомих теоретичних формул (рівнянь).

Перш ніж визначати числові значення коефіцієнтів у вибраному емпіричному рівнянні, необхідно перевірити можливість його використання методом вирівнювання, який полягає у перетворенні функції  $y = f(x)$  лінійну функцію.

Це досягається шляхом заміни змінних  $X$  і  $Y$  у новими змінними, які підбираються так, щоб одержати рівняння прямої.

Так, заміна величини  $1/x$  новою змінною  $Z$  у рівнянні  $y = \alpha + b/x$  приводить його до виду  $Y = \alpha + bz$ .

Аналогічно у рівнянні  $y = \alpha + bx^n$  заміна  $x^n$  на нову змінну  $z$  перетворює степеневу залежність у лінійну  $Y = \alpha + bz$ .

При логарифмуванні показникова залежність  $y = \alpha x^n$  перетворюється у лінійну  $\lg y = \lg \alpha + n \cdot \lg x$ .

Будь-яка залежність, що має вид степеневого двочлена  $y = \alpha x^m + bx^n$ , введенням двох нових змінних –  $t = y/x^m$  і  $V = x^{n-m}$  – може бути зведена до лінійної  $t = \alpha + bV$ .

Обчисливши за відомими значеннями  $x$  та  $y$  значення нових змінних, їх наносять на координатну площину. Якщо нанесені точки розміщуються на прямій лінії, то вибране емпіричне рівняння підходить для характеристики залежності  $y = f(x)$ .

Найчастіше при знаходженні невідомих параметрів  $\alpha$  і  $b$  функції користуються так званим *принципом найменших квадратів*. Він полягає у тому, що із ряду формул виду  $y = f(x, \alpha, b, c, \dots)$ , де  $\alpha, b, c, \dots$  – невідомі параметри, найкраще наближає експериментальні дані та, для якої сума квадратів відхилень (SQ) ординат експериментальних точок від ординат відповідних точок апроксимуючої прямої є мінімальною, тобто

$$SQ = \sum_{i=1}^n \delta_{y_i}^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i, \alpha, b, c, \dots) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Функція  $SQ = SQ(\alpha, b, c, \dots)$  є функцією змінних  $\alpha, b, c, \dots$ , а  $x_i$  і  $y_i$  – сталі числа, що знайдені експериментально.

Значення параметрів  $\alpha, b, c, \dots$  підбираються так, щоб функція  $SQ_{\alpha, b, c, \dots}$  досягала мінімуму.

Необхідна умова екстремуму функції  $SQ_{\alpha,b,c,\dots}$  – рівність нулю частинних похідних функції за кожним з параметрів:

$$\frac{dSQ}{d\alpha} = 0; \frac{dSQ}{db} = 0; \frac{dSQ}{dc} = 0; \dots$$

Із цієї системи рівнянь, яка називається *нормальною*, можна знайти невідомі параметри  $\alpha, b, c, \dots$ .

Знаходження параметрів функції  $y = f(x, \alpha, b, c, \dots)$  за цим принципом називається *методом найменших квадратів*.

Необхідно пам'ятати, що метод найменших квадратів застосовується для підбору параметрів після того, як вид функції  $y = f(x, \alpha, b, c, \dots)$  визначений.

Отже, вибравши рівняння, методом найменших квадратів визначають його коефіцієнти і одержують емпіричну формулу, яка *представляє експериментальні дані в аналітичному вигляді (аналітично)*.

Для визначення параметрів емпіричної формули необхідно мати таблицю експериментальних даних залежності між  $x$  та  $y$ .

Метод найменших квадратів є основним методом розділу математики, що одержав назву *регресійного аналізу*.

Якщо вважати прямою задачею – обчислення значень деякої функції, заданої в явному виді, за відомими значеннями її аргументу, то задачею регресійного аналізу є встановлення виду самої функції, тобто значень параметрів рівняння за відомою сукупністю значень  $x_i, y_i$ . Ця задача є оберненою до прямої задачі, звідки й назва розділу математики – *регресійний аналіз* (лат. *regredi* – йти назад).

### 2.9.3 Метод найменших квадратів

Метод найменших квадратів для випадку лінійної функції однієї змінної було розроблено К. Гауссом в 1794–1795 роках.

Завжди можна підібрати функцію  $y = f(x)$ , яка для кожного значення  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  давала б значення, достатньо близькі до відповідних заданим значенням  $y_i (i=1, 2, \dots, n)$  (рис. 2.47).

Перепишемо рівняння  $y = f(x)$  підставивши замість  $x$  та  $y$  значення, які нам відомі  $(x_1, y_1; \dots, x_n, y_n)$ , та отримаємо наступні рівняння:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) - y_1 &= \varepsilon_1 \\ f(x_2) - y_2 &= \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots \\ f(x_n) - y_n &= \varepsilon_n \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  будемо називати *відхиленнями*.

Найбільш точною вважається формула  $y = f(x)$ , для якої сума квадратів відхилень буде мати найменше значення, ніж у інших функцій.

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \Rightarrow \min$$

Розглянемо у загальному вигляді процес визначення параметрів емпіричної формули за способом найменших квадратів. Нехай підбрано емпіричну формулу виду

$$y = f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad (2.30)$$

де  $x$  – незалежна змінна;  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  – параметри (постійні коефіцієнти, що входять у формулу), які потрібно визначити.

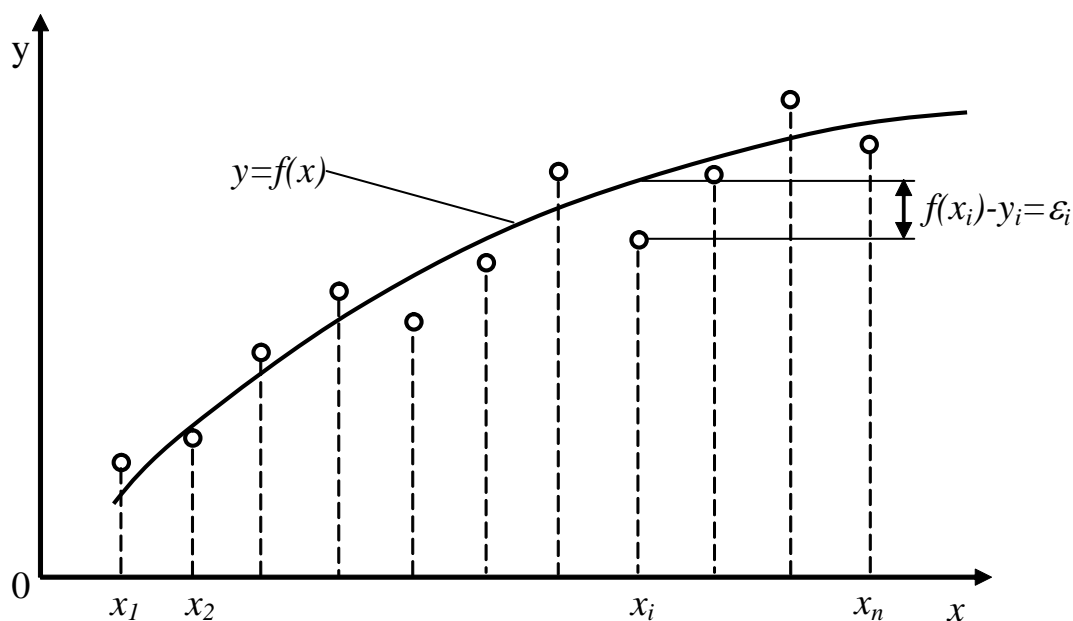


Рисунок 2.47 – Статистичні дані розвитку явища

Запишемо рівняння  $y = f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  наступним чином  $f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - y = 0$ ; підставляючи в ліву частину рівняння відомі значення  $x_i$  та  $y_i$ , отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - y_1 &= \varepsilon_1 \\ f(x_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - y_2 &= \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots \\ f(x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - y_n &= \varepsilon_n \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Відповідно до методу найменших квадратів підберемо такі значення параметрів  $\alpha_1 \dots \alpha_m$ , щоб сума квадратів відхилень була мінімальною. Складемо суму квадратів відхилень:

$$U = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m) - y_i]^2 = [f(x_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m) - y_1]^2 + [f(x_2, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m) - y_2]^2 + \dots + [f(x_n, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m) - y_n]^2.$$

Оскільки змінні  $x_1, y_1 \dots x_n, y_n$  є числами постійними, то параметри  $\alpha_1 \dots \alpha_m$ , що входять в рівняння (2.32)

$$U = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2, \quad (2.32)$$

слід розглядати як невідомі величини, які необхідно визначити. Таким чином, подання рівняння ми можемо розглядати як функцію  $m$  незалежних змінних  $\alpha_1 \dots \alpha_m$ :

$$U = f(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m). \quad (2.33)$$

Необхідно визначити, за яких  $\alpha_1 \dots \alpha_m$  функція  $U$  має мінімальне значення, для чого необхідно дослідити її на екстремум. З курсу математичного аналізу відомо, що функція, яка може бути продиференційована, має екстремум в точках, в яких всі частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю. Для функції  $U$  необхідні умови мінімуму мають наступний вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial \alpha_m} = 0.$$

Розв'язання системи рівнянь (2.34) дозволить визначити параметри  $\alpha_1 \dots \alpha_m$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_m} = 0 \end{array} \right\}. \quad (2.34)$$

Використання процедури оцінки, що базується на методі найменших квадратів, вимагає обов'язкового задоволення цілого ряду передумов, невиконання яких може призвести до значних помилок.

Випадкові помилки мають нульову середню, кінцеві дисперсії.

Кожне вимірювання випадкової похибки характеризується нульовим середнім, не залежним від значень спостережуваних змінних.

Дисперсії кожної випадкової помилки є однаковими, їх величини не є залежними від значень спостережуваних змінних.

Значення похибок різних спостережень є незалежними одна від одної.

Випадкові помилки мають нормальний розподіл.

Значення ендогенної змінної  $x$  є вільними від помилок вимірювання і мають кінцеві середні значення і дисперсії.

У практичних дослідженнях як модель тренда в основному використовують наступні функції:

– лінійну

$$y = \alpha x + b; \quad (2.35)$$

– квадратичну

$$y = \alpha x^2 + bx + c; \quad (2.36)$$

– степеневу

$$y = x^n; \quad (2.37)$$

– показову

$$y = \alpha^x; \quad (2.38)$$

– експоненційну

$$y = \alpha e^x; \quad (2.39)$$

– логістичну

$$y = \frac{\alpha}{1 + be^{-cx}}. \quad (2.40)$$

Вибір моделі у кожному конкретному випадку здійснюється за цілим рядом статистичних критеріїв, наприклад за дисперсією, кореляційним відношенням та ін. Слід зазначити, що названі критерії є критеріями



апроксимації, а не прогнозу. Проте, зважаючи на прийняту гіпотезу про стійкість процесу в майбутньому, можна припустити, що в цих умовах модель, найбільш вдала для апроксимації, буде якнайкращою і для прогнозу.

У ряді випадків для вибору виду функціональної залежності використовують прийом, що базується на тому, що певні співвідношення між змінами вхідної та вихідної величини припускають ту або іншу функціональну залежність. Дійсно, якщо виконується умова  $\Delta y / \Delta x \approx \text{const}$ , приймається лінійна модель  $y = \alpha x + \hat{\alpha}$ , де  $\alpha$ ,  $\hat{\alpha}$  – коефіцієнти, що визначаються за методом найменших квадратів;  $\Delta y$ ,  $\Delta x$  – прирости залежної і незалежної змінних, тобто  $\Delta y = y_t - y_{t-1}$ ;  $\Delta x = x_t - x_{t-1}$ .

Якщо  $\Delta \ln y / \Delta x = \text{const}$ , то приймається модель  $y = \alpha x^{\hat{\alpha}}$ ; якщо  $\Delta \ln y / \Delta \ln x \approx \text{const}$ , то  $y = \alpha \hat{\alpha}^x$ ; у разі  $\Delta y^2 / \Delta x^2 \approx \text{const}$  маємо  $y = \alpha x^2 + \hat{\alpha}x + c$ ; у випадку  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) / \Delta x \approx \text{const}$  маємо  $y = \frac{x}{\alpha + \hat{\alpha}x}$ .

Аналогічні співвідношення можна визначити і для інших залежностей.

Розглянемо приклад лінійної екстраполяції. Нехай статистичні дані розподілені так, як це показано на рис. 2.48.

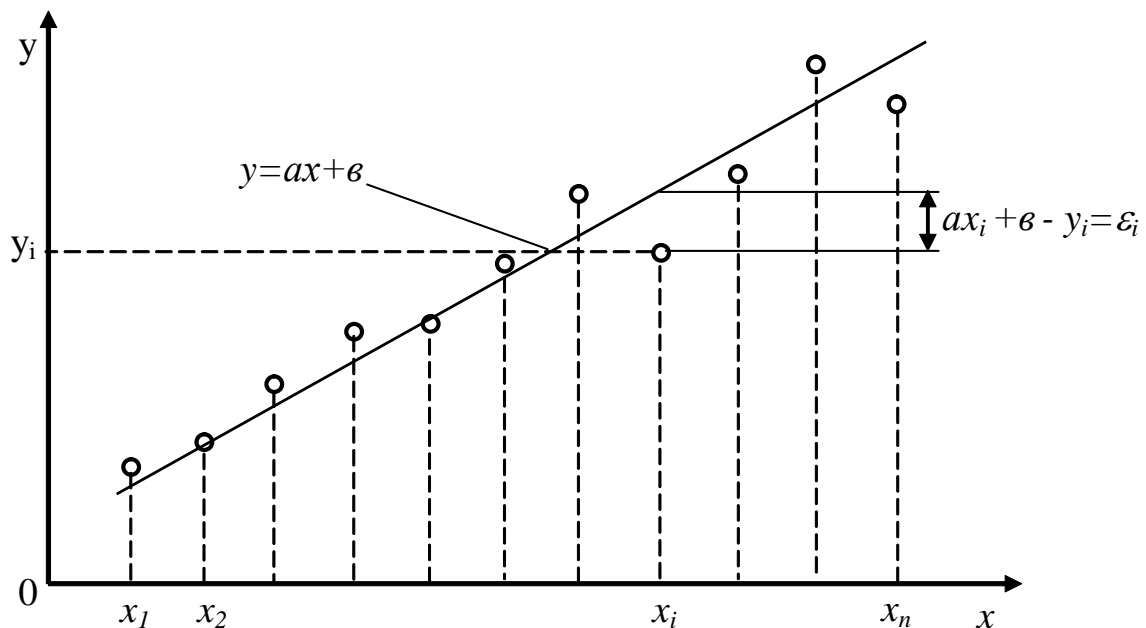


Рисунок 2.48 – Графік розподілення статистичних даних

Визначимо параметри  $\alpha$  та  $\hat{\alpha}$  функції  $y = \alpha x + \hat{\alpha}$ . Для цього випишемо  $n$  відхилень наступним чином:



Розв'язок системи нормальних рівнянь (2.46) має наступний вигляд:

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (2.47)$$

Важливим моментом отримання прогнозу за допомогою методу найменших квадратів є оцінка достовірності отриманого результату. З цією метою використовується цілий ряд статистичних характеристик:

1. Оцінка стандартної помилки:

$$S_{1.f(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2}{n - p}}, \quad (2.48)$$

де  $n$  – число спостережень;  $p$  – число коефіцієнтів, що визначаються в моделі.

2. Середня відносна помилка оцінки:

$$\hat{m}_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - f(x_i)}{y_i} 100\% \cdot \quad (2.49)$$

Наведені критерії (1, 2) демонструють ступінь наближення моделі до реальних спостережень за процесом. Важливим критерієм оцінки надійності моделі є кореляційне відношення

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - S_{1.f(x)}}{S_1^2}}, \quad (2.50)$$

де  $S_1^2$  – повна дисперсія залежної змінної, яка обчислюється за формулою:

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y})^2}{n - 1}, \quad (2.51)$$

де  $\hat{y}$  – середня арифметична залежної змінної, обчислена за емпіричними даними ряду.

Оскільки  $0 < \eta < 1$ , то наближення коефіцієнта множинної кореляції до одиниці дозволяє судити одночасно про надійність моделі й істотність зв'язку між змінними.

Загальну помилку розраховують за наступним рівнянням:

$$S_z = \sqrt{S_{1.f(x)}^2 + \frac{S_{1.f(x)}^2}{n} + \frac{S_{1.f(x)}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.52)$$

Довірчий інтервал прогнозного значення визначається таким чином:

$$y_i - t_\alpha S_z \leq y_i \leq y_i + t_\alpha S_z, \quad (2.53)$$

де  $t_\alpha$  – значення  $t$  – статистики Стюдента;  $Y_i$  – оцінка залежної змінної.

Величину  $t_\alpha$  вибирають з таблиць залежно від  $P$  – заданої імовірності здійснення прогнозу та  $\vartheta$  ( $\vartheta = n - m$ , де  $n$  – кількість рівнів ряду динаміки,  $m$  – кількість параметрів рівняння тренда; для лінійного тренда  $m = 2$ ).

## 2.10 Аналітичні методи відображення експериментальних прямих. Кореляційний аналіз результатів вимірювань

### 2.10.1 Рівняння регресійної моделі

Нехай існує  $p$  незалежних змінних  $X_1, X_2, \dots, X_p$  і залежна змінна  $Y$ . Оскільки змінна  $Y$  є випадковою величиною, то за заданих значень факторів вона має деякий розподіл. Якщо випадкова величина  $Y$  є неперервною, то можна вважати, що її розподіл при кожному припустимому наборі значень факторів  $(x_1, \dots, x_p)$  має умовну щільність розподілу  $f_{x_1, \dots, x_p}(y)$ . Найчастіше передбачається, що умовний розподіл  $Y$  для кожного припустимого набору значень факторів – нормальний. Пояснювальні змінні  $X_1, X_2, \dots, X_p$  можуть розглядатися як випадкові, так і детерміновані, тобто такі, що приймають певні значення. В класичній прогнозній моделі вони вважаються детермінованими.

Пояснена частина  $\hat{y}(X_1, \dots, X_p)$  являє собою функцію від значень факторів. Таким чином, прогнозна модель має вигляд:

$$Y = \hat{y}(X_1, \dots, X_p) + \varepsilon.$$

Найбільш природним вибором поясненої частини випадкової величини  $Y$  є її середнє значення – умовне математичне очікування  $M_x[Y]$ , що визначається при даному наборі пояснювальних змінних. Рівняння  $M_x[Y] = f(x_1, \dots, x_p)$  називається *рівнянням регресії*. У цьому випадку прогнозна модель має вигляд

$$Y = M_x[Y] + \varepsilon, \quad (2.54)$$

де  $\varepsilon$  – випадкова величина, що називається *похибкою* або *помилкою*. Рівняння (2.54) називається *рівнянням регресійної моделі*.

Відзначимо деякі властивості регресійної моделі. Знайдемо математичне очікування від обох частин виразу (2.54):

$$\begin{aligned} M_x[Y] &= M_x[M_x[Y] + M_x[\varepsilon]] \Rightarrow M_x[Y] = M_x[Y] + M_x[\varepsilon] \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_x[\varepsilon] = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Отже, у регресійній моделі очікуване значення випадкової помилки дорівнює нулю. Звідси випливає вимога некорельованості випадкових помилок і пояснювальних змінних.

Для того щоб знайти пояснену частину  $\hat{y}(X_1, \dots, X_p) = M_x[Y]$ , необхідно знати умовні розподіли випадкової величини  $Y$ . Але слід зауважити, що на практиці знайти точне значення поясненої частини неможливо.

У таких випадках застосовується стандартна процедура згладжування експериментальних даних. Вона складається із двох етапів:

- 1) визначається тип функції  $M_x[Y]$  (лінійна, показова і т.д.);
- 2) знаходять оцінки параметрів цієї функції за допомогою одного з методів математичної статистики.

Формально жодних способів вибору типу функції не існує. Однак у більшості випадків прогнози моделі є лінійними. Крім простоти, для такого вибору існують дві причини.

По-перше, якщо випадкова величина  $(X, Y)$  має спільний нормальний розподіл, то її рівняння регресії є лінійним. По-друге, лінійна регресійна модель має менший ризик значної помилки прогнозу.

Надалі ми будемо розглядати лінійні регресійні моделі. Найбільш вивченими є такі лінійні регресійні моделі, у яких виконується умова (2.55). Вони називаються *класичними моделями*.

### 2.10.2 Парний регресійний аналіз

Задача прогнозу пов'язана з розглядом регресійної моделі  $Y = M_x[Y] + \varepsilon$ . Однак оскільки одержання рівняння регресії  $M_x[Y] = f(x_1, \dots, x_p)$  потребує досить значної вибірки як пояснювальних, так і залежних змінних (що практично неможливо), то намагаються визначити криву або поверхню, яка пов'язує вхідні та вихідні змінні, наближеними методами. Ці методи одержали назву *регресійного аналізу*.

Таким чином, задачею регресійного аналізу є встановлення форми залежності між змінними, оцінка функції регресії, прогноз невідомих значень залежної змінної.

Природно, що кількість факторних змінних  $X$  може бути довільною. Чим їх більше, тим складніше проведення регресійного аналізу. Тому спочатку розглянемо випадок, коли вхідна змінна або фактор один. У цьому випадку говорять про парний регресійний аналіз або однофакторну модель.

З курсу математичного аналізу відомо, що в цьому випадку мова йде про функціональну залежність, тобто коли кожному значенню однієї або декількох незалежних змінних (аргументів) ставлять у відповідність одне й тільки одне значення функції.

Необхідно відзначити, що в більшості випадків кожному значенню вхідної або факторної змінної відповідає множина можливих значень залежної змінної. З точки зору математичної статистики, кожному значенню вхідної змінної відповідає певний розподіл результативної змінної. Така залежність одержала назву *статистичної або стохастичної*.

Поява статистичного зв'язку пояснюється наявністю в будь-якій задачі прогнозування цілого ряду неврахованих або неконтрольованих факторів, які неминуче призводять до наявності помилок. Тому, під час розв'язання задачі прогнозування розглядають усереднення залежної змінної  $Y$  за фактором  $X$ . Інакше кажучи, знаходять умовне математичне очікування  $M_x[Y]$ , тобто математичне очікування результативної змінної  $Y$  за умови, що фактор  $X$  набув конкретного значення  $x$ .

*Якщо кожному значенню факторної змінної відповідає умовне математичне очікування залежної змінної, то така статистична залежність називається кореляційною.*

Оскільки для кожного значення  $X$  умовне математичне очікування  $M_x[Y]$  буде набувати нового значення, тобто буде залежати від величини  $x$ , то, як відомо з математичної статистики, кореляційна залежність може бути представлена у вигляді

$$M_x[Y] = \phi(x), \quad (2.56)$$

де  $\phi(x) \neq \text{const}$ .

Рівняння (2.56) називається *модельним рівнянням регресії*, функція  $\phi(x)$  – *модельною функцією регресії*, а її графік – *модельною лінією регресії*.

Для одержання точного модельного рівняння регресії необхідно для кожного значення параметра  $X$  знати умовний закон розподілу вихідної змінної  $Y$ . На практиці така інформація, як правило, відсутня. Найчастіше дослідник має лише вибірку пар значень  $(x_i, y_i)$  обмеженого об'єму  $n$ . У цьому випадку мова може йти лише про оцінку або наближене значення функції регресії. Такою оцінкою є вибіркова лінія регресії

$$\hat{y} = \hat{\phi}(x, b_0, b_1, \dots, b_p), \quad (2.57)$$

де  $\hat{y}$  – вибіркова умовна середня результативної змінної  $Y$  за фіксованого значення фактору  $X = x$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_p$  – параметри кривої. На відміну від (2.56) рівняння (2.57) називається вибіркоvim рівнянням регресії. Якщо наближене значення функції  $\hat{\phi}(x, b_0, b_1, \dots, b_p)$  обрано правильно, то зі збільшенням об'єму вибірки воно повинно наближатися до модельної функції регресії  $\phi(x)$ .

Як приклад розглянемо статистичну залежність, що представлена в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
$y_i$	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Графічна інтерпретація даної залежності наведена на рис. 2.49.

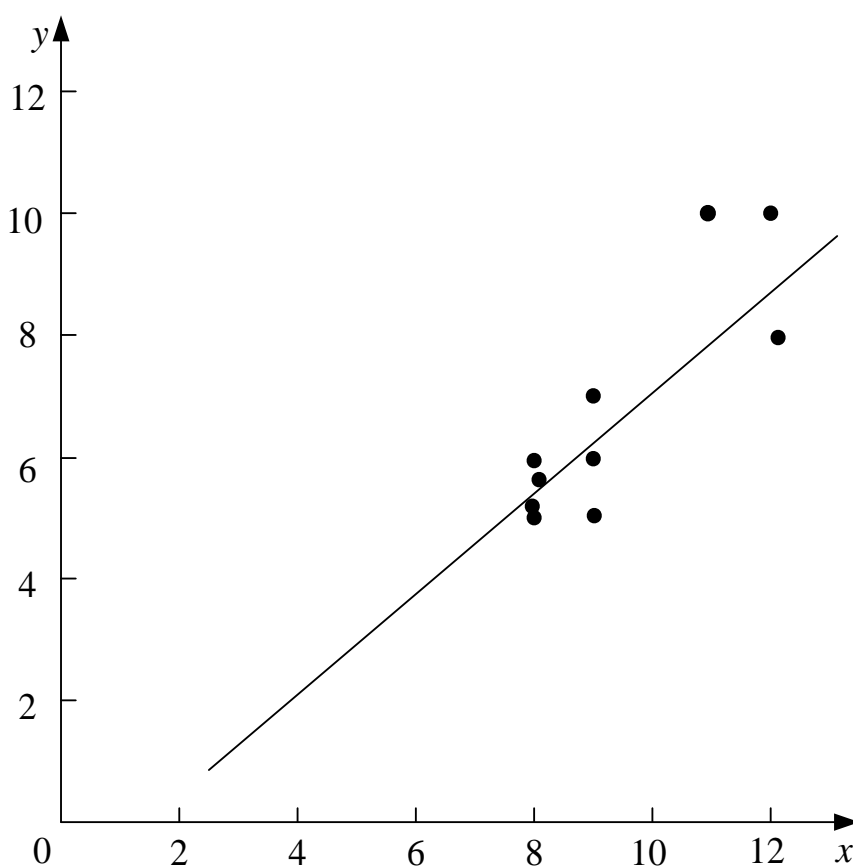


Рисунок 2.49 – Приклад статистичних залежностей

Точки, що зображають статистичну залежність вихідної змінної від факторів, називаються *полем кореляції*. За розташуванням емпіричних точок можна припустити наявність лінійної кореляційної залежності між змінними  $X$

та  $Y$ . Тому вибіркоче рівняння регресії будемо шукати у вигляді лінійного рівняння

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x. \quad (2.58)$$

Оскільки, незалежно від конкретної задачі прогнозування, загальний вид рівняння лінійної регресії є незмінним, то з'ясуємо, яким чином можна знаходити невідомі параметри рівняння  $b_0$  та  $b_1$ .

Найбільш ефективним у цьому випадку є *метод найменших квадратів*. Він полягає в тім, що невідомі параметри  $b_0$  та  $b_1$  вибирають таким чином, щоб сума квадратів відхилень емпіричних значень  $y_i$  від значень  $\hat{y}_i$ , знайдених з рівняння регресії (2.58), була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Квадрати, так само як і при обчисленні дисперсії, беруться для виключення впливу знаку відхилення на результат.

У цьому випадку ми маємо функцію двох змінних  $S = S(b_0, b_1)$ . Як відомо з математичного аналізу, для визначення екстремуму (мінімуму) функції двох змінних необхідно прирівняти до нуля її обидві часткові похідні:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - y_i) = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - y_i) x_i = 0. \end{cases}$$

Звідси одержуємо алгебраїчну систему нормальних рівнянь для визначення параметрів лінійної регресії:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (2.59)$$

Розділивши обидві частини рівнянь системи (2.59) на  $n$ , одержимо систему нормальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y}; \\ b_0 \bar{x} + b_1 \bar{x}^2 = \bar{x} \bar{y}, \end{cases} \quad (2.60)$$



де риска над змінною позначає її середнє вибіркове значення:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}, \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}.$$

Підставляючи значення

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}, \quad (2.61)$$

знайдене з першого рівняння системи (2.60), у рівняння регресії (2.58), одержимо  $\hat{y} = \bar{y} - b_1 \bar{x} + b_1 x$  або

$$\hat{y} - \bar{y} = b_1 (x - \bar{x}). \quad (2.62)$$

У виразі (2.62) коефіцієнт  $b_1$  називається *вибірковим коефіцієнтом регресії*  $Y$  по  $X$ . Він показує, на скільки одиниць у середньому зміниться залежна змінна  $Y$  при збільшенні фактору  $X$  на одиницю. Значення коефіцієнта  $b_1$  визначається із системи (2.62):

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (2.63)$$

У виразі (2.62) чисельник дорівнює вибірковому кореляційному моменту змінних  $X$  і  $Y$ , оскільки  $\text{Cov}[X, Y] = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$ , а знаменник – це вибіркова дисперсія фактору  $X$ , оскільки  $D_x = \sigma_x^2 = M[X^2] - (M[X])^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ . Таким чином,

$$b_1 = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_x^2}. \quad (2.64)$$

Відзначимо, що з (2.62) випливає те, що лінія регресії проходить через точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

### 2.10.3 Коефіцієнт кореляції

Розглянемо, яким чином можна оцінювати тісноту кореляційної залежності між  $X$  і  $Y$ . Коефіцієнт регресії  $b_1$  для цієї мети є непридатним. Незважаючи на те, що він показує, на скільки одиниць у середньому зміниться  $Y$  при збільшенні  $X$  на одну одиницю, у цього коефіцієнта є істотний недолік:

він залежить від одиниць виміру. Тому для оцінки тісноти кореляційної залежності між  $X$  і  $Y$  використовують наступний підхід.

Перетворимо рівняння (2.62) наступним чином:

$$\frac{\hat{y} - \bar{y}}{\sigma_y} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \frac{(x - \bar{x})}{\sigma_x}. \quad (2.65)$$

У даному виразі величина

$$r_{xy} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (2.66)$$

показує, на скільки одиниць  $\sigma_y$  зміниться в середньому  $Y$ , якщо  $X$  зміниться на одне  $\sigma_x$ . Величина  $r_{xy}$  є показником тісноти зв'язку між змінними і називається *вибірковим коефіцієнтом кореляції*.

На рис. 2.50 а) та рис. 2.50 б) наведено дві кореляційні залежності  $Y$  від  $X$ . Очевидно, що в першому випадку кореляційна залежність сильніше і коефіцієнт кореляції більше. Якщо  $r_{xy} > 0$ , то кореляційний зв'язок є прямим, якщо  $r_{xy} < 0$  – зворотним.

Використовуючи формулу (63) для  $b_1$ , коефіцієнт кореляції можна представити у вигляді:

$$r_{xy} = \frac{C\hat{o}v[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.67)$$

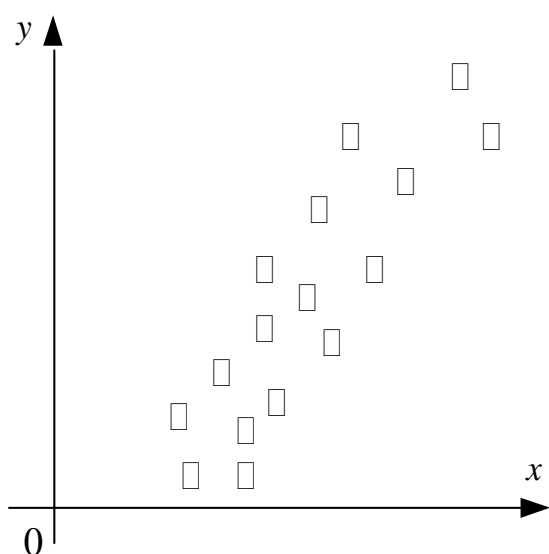


Рисунок 2.50 а

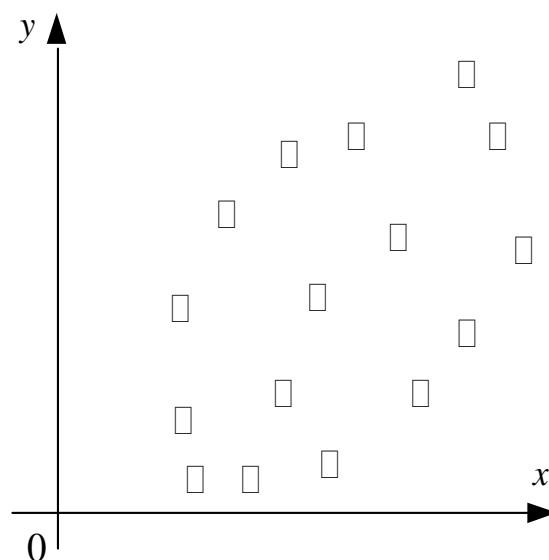


Рисунок 2.50 б

Існують і інші модифікації формули (2.67):

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y} \quad (2.68)$$

Або

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right) \\ r_{xy} &= \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}} = \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Формула (2.69) найбільш зручною для практичних цілей, тому що а цією формулою коефіцієнт  $r_{xy}$  обчислюється безпосередньо з даних спостережень без додаткових обчислень середніх значень змінних величин і відхилень від них.

Коефіцієнт кореляції має наступні властивості:

- 1) коефіцієнт кореляції змінюється в межах  $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ , чим ближче  $|r_{xy}|$  до одиниці, тим тісніше зв'язок;
- 2) при  $r_{xy} = \pm 1$  кореляційний зв'язок являє собою лінійну функціональну залежність;
- 3) при  $r_{xy} = 0$  лінійний кореляційний зв'язок відсутній.

Зокрема у вищенаведеному прикладі (табл. 2.4) коефіцієнт кореляції, обчислений за формулою (2.69), дорівнює  $r_{xy} = 0.866$ . Іншими словами, кореляційний зв'язок у цьому випадку є досить тісним, а сама кореляційна функція є близькою до лінійної.

#### 2.10.4 Множинний регресійний аналіз

Як було показано вище, у найпростіших випадках задач прогнозування

результуюча змінна  $Y$  залежить тільки від однієї пояснювальної змінної  $X$ , і ця залежність може бути описана за допомогою парної регресійної моделі. Однак у реальних задачах розвиток певних об'єктів, явищ та процесів, як правило, залежить від сукупності декількох діючих факторів. Тому виникає необхідність дослідження залежності однієї результуючої змінної  $Y$  від декількох пояснювальних змінних  $X_1, X_2, \dots, X_p$ . Ця задача розв'язується за допомогою множинного регресійного аналізу.

Нехай проведено  $n$  спостережень залежної змінної  $Y$  і факторів  $X_1, X_2, \dots, X_p$ . Тоді, за аналогією з парною лінійною регресією, модель множинної лінійної регресії можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Дана модель називається *класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії*.

Оскільки в регресійну модель у цьому випадку включається декілька пояснювальних змінних, то для розв'язання задач, пов'язаних з нею, доцільно використовувати матричні позначення.

Введемо наступні позначення:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

де  $Y$  – матриця-стовпець розміру  $n \times 1$  значень результуючої змінної;  $X$  – матриця розміру  $n \times (p+1)$  значень пояснювальних змінних (матриця плану);  $\beta$  – матриця-стовпець розміру  $p+1$  параметрів регресійної моделі;  $\varepsilon$  – матриця-стовпець розміру  $n \times 1$  похибок (випадкових помилок, залишків).

Тоді в матричній формі класична нормальна лінійна модель множинної регресії прийме вигляд:

$$Y = X\beta + \varepsilon. \quad (2.72)$$

У матрицю  $X$  введений додатковий стовпець або фіктивна змінна  $X_0$ , всі елементи якої дорівнюють одиниці, для того, щоб при множенні  $X$  на  $\beta$  в моделі множинної регресії одержати доданок  $\beta_0$ .

Так само, як і у випадку парного регресійного аналізу, оцінкою моделі

(2.72) на підставі вибірки є рівняння

$$Y = Xb + e, \quad (2.73)$$

де матриця-стовпець  $b$  є оцінкою  $\beta$  з тими ж розмірами  $p \times 1$ , матриця-стовпець  $e$  – оцінкою  $\varepsilon$  з тими ж розмірами  $n \times 1$ .

### 2.10.5 Визначення параметрів рівняння регресії

Аналогічно до випадку парної лінійної регресії, для визначення матриці-стовпця  $b$  застосуємо *метод найменших квадратів*.

Оскільки у випадку множинної регресійної моделі рівняння регресії має вигляд:

$$\hat{Y} = Xb, \quad (2.74)$$

то матриця-стовпець  $e$  визначається співвідношенням  $e = Y - \hat{Y} = Y - Xb$ . Скористаємося властивістю добутку транспонованої матриці-стовпця  $e^T$  на саму матрицю  $e$ :

$$e^T e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2. \quad (2.75)$$

Тоді умова мінімізації квадратів відхилень емпіричних значень  $y_i$  від значень  $\hat{y}_i$ , знайдених із рівняння регресії (2.75), запишеться у вигляді:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = e^T e = (Y - Xb)^T (Y - Xb) \rightarrow \min. \quad (2.76)$$

Перемножимо в (2.76) вирази у дужках, скориставшись властивістю матриць  $(Xb)^T = b^T X^T$ . Це дасть наступний результат:

$$S = Y^T Y - Y^T Xb - b^T X^T Y + b^T X^T Xb. \quad (2.77)$$

У даному виразі матриця  $Y^T Xb$  має розмір  $(1 \times n)[n \times (p+1)][(p+1) \times 1]$ , тобто  $1 \times 1$ . Оскільки транспонування подібної матриці її не змінить, то  $Y^T Xb = (Y^T Xb)^T = b^T X^T Y$ . Таким чином, остаточно маємо умову мінімізації квадратів відхилень у вигляді:

$$S = Y^T Y - 2b^T X^T Y + b^T X^T X b \rightarrow \min . \quad (2.78)$$

У виразі (2.78) матриці  $X$  та  $Y$  відомі, тому що їхні елементи одержують у результаті експерименту. Отже, зміна  $S$  залежить лише від невідомої матриці  $b$ . Але для визначення екстремуму функції декількох змінних  $S(b_0, b_1, \dots, b_p)$  необхідно її часткові похідні по цих змінних прирівняти нулю. У матричній формі це буде мати наступний вигляд:  $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ .

Скориставшись правилами матричного диференціювання  $\frac{\partial(b^T c)}{\partial b} = c$ , де  $c$  – матриця-стовпець, і  $\frac{\partial(b^T A b)}{\partial b} = 2Ab$ , де  $A$  симетрична матриця, та позначаючи  $c = X^T Y$ ,  $A = X^T X$ , знаходимо вираз:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2X^T Y + 2X^T X b = 0. \quad (2.79)$$

Звідси одержуємо матричне рівняння або, що те ж саме, систему нормальних рівнянь у матричній формі:

$$X^T X b = X^T Y. \quad (2.80)$$

Обчислимо матриці  $X^T$  і  $X^T Y$ , що входять в (80):

$$\begin{aligned} X^T X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \dots & \sum x_{ip} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \dots & \sum x_{i1} x_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ip} & \sum x_{i1} x_{ip} & \dots & \sum x_{ip}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{i1} \\ \dots \\ \sum y_i x_{ip} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

У тому випадку, коли  $p=1$ , тобто фактор один, з (2.80)–(2.82) можна

одержати систему нормальних рівнянь однофакторної моделі для визначення  $b_0$  і  $b_1$ .

Як відомо з лінійної алгебри, розв'язком матричного рівняння (2.80) буде матриця-стовпець

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (2.83)$$

де  $(X^T X)^{-1}$  – зворотна матриця. Знайти дану зворотну матрицю можна лише в тому випадку, коли вихідна матриця  $X^T X$  є невивродженою, тобто її визначник не дорівнює нулю. Отже, ранг матриці повинен дорівнювати її порядку:  $rg(X^T X) = p + 1$ . З лінійної алгебри відомо, що в цьому випадку і  $rg(X) = p + 1$ . Але це можливо лише тоді, коли стовпці матриці  $X$  є лінійно незалежними. Ця умова автоматично висуває вимогу до кількості рядків матриці  $X$ , тобто до числа спостережень над пояснювальними і результуючими змінними: їх повинно бути не менше кількості стовпців, тобто  $n \geq p + 1$ . У протилежному випадку ранг матриці стане менше  $p + 1$  і матричне рівняння розв'язати буде неможливо. На практиці для одержання надійних статистичних результатів беруть  $n \geq p + 1$ .

Таким чином, знаючи матрицю-стовпець  $b$  із рівняння множинної регресії (2.80) можна знайти значення  $\hat{Y}$  для кожного конкретного набору значень пояснювальної змінної  $X$ .

У тому випадку, коли необхідно провести порівняння впливу на залежну змінну різних пояснювальних змінних, використовують, наприклад, стандартизований коефіцієнт еластичності  $E_j$ :

$$E_j = b_j \frac{\bar{x}_j}{y}$$

Стандартизований коефіцієнт еластичності  $E_j$  показує, на скільки відсотків зміниться в середньому  $Y$  при збільшенні  $X_j$  на 1 %.

### **2.10.6 Аналітичне відображення експериментальних прямих за допомогою MS Excel**

В MS Excel існує вбудований майстер діаграм, який дозволяє не тільки будувати діаграми і графіки різних видів, а й виконувати згладжування експериментальних результатів.

Розглянемо побудову графіка за допомогою MS Excel на прикладі залежності координат тіла під час прямолінійного руху на площині  $y = f(x)$ . Нехай в експерименті виконувалися вимірювання координат тіла  $x$  і  $y$  в різні моменти часу  $t$ . Результати вимірювань представлено в наступній таблиці:

x, м	0,4	1,5	2,5	3,5	4,6	5,5	6,5	7,5	8,4	9,5	10,7	11,7	13	13,5
y, м	3,5	4,1	4,9	5,3	5,3	6,4	7,2	7,5	7,9	8,9	9,1	10,6	11	11,1

Помістимо ці дані в другий та третій рядки електронної таблиці (рис. 2.49). Виділіть (за допомогою миші або клавіатури) комірки, в яких розташовані значення: B2, C2, ... O2, B3, C3, ... O3 (B2: O3).

Над таблицею розташовано кілька панелей інструментів.

На одній з них розташована кнопка «Майстер діаграм» (рис. 2.51). Після натискання на кнопку «Майстер діаграм» з'явиться вікно «Майстер діаграм: тип діаграми» (рис. 2.52, а), в якому виберемо тип діаграми «Точкова», як показано на рисунку. Цей тип діаграми дозволяє відкладати по обох осях різні дані.

Тип «Графік» дозволяє задавати значення тільки по вертикальній осі, тому рідко підходить для відображення результатів експерименту.

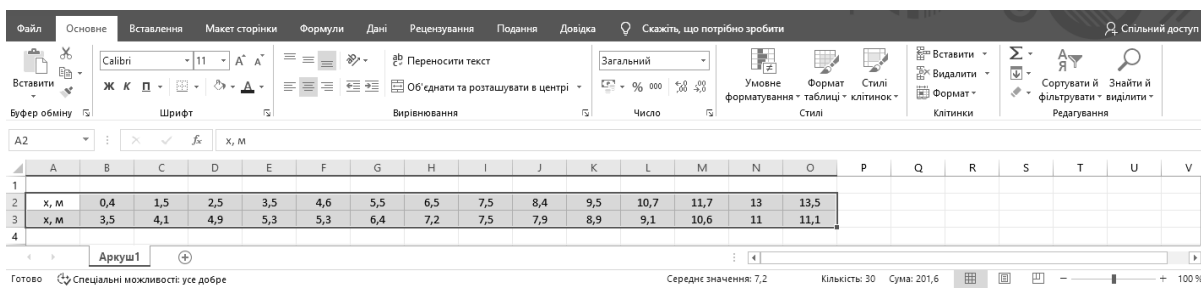


Рисунок 2.51 – Інтерфейс електронної таблиці

Для кожного типу діаграми існує кілька видів. У нашому прикладі буде використаний вид (рис. 2.52), при якому точки графіка не з'єднуються між собою. Натиснемо кнопку «ОК».

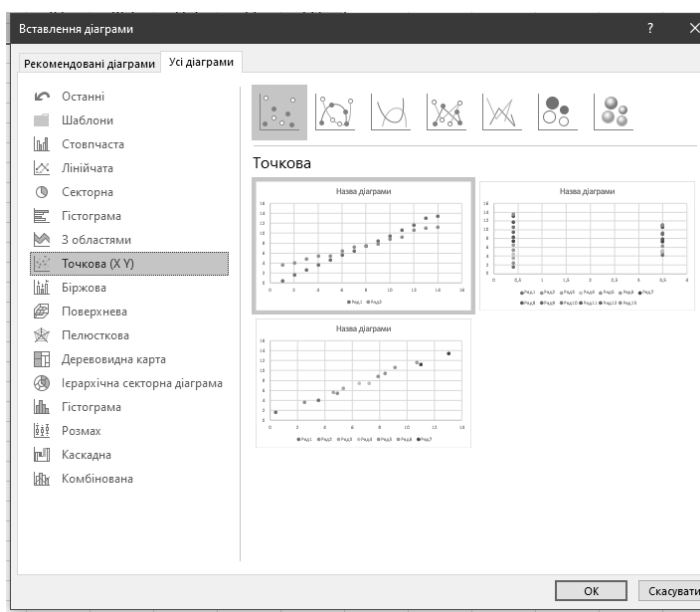


Рисунок 2.52 – Вікно «Вставлення діаграми»



Вікно «Вибір джерела даних» представлено на рис. 2.53. У цьому вікні на вкладці «Ряд» можна регулювати, з яких рядків і стовпців будуть використовуватися дані для побудови графіка.

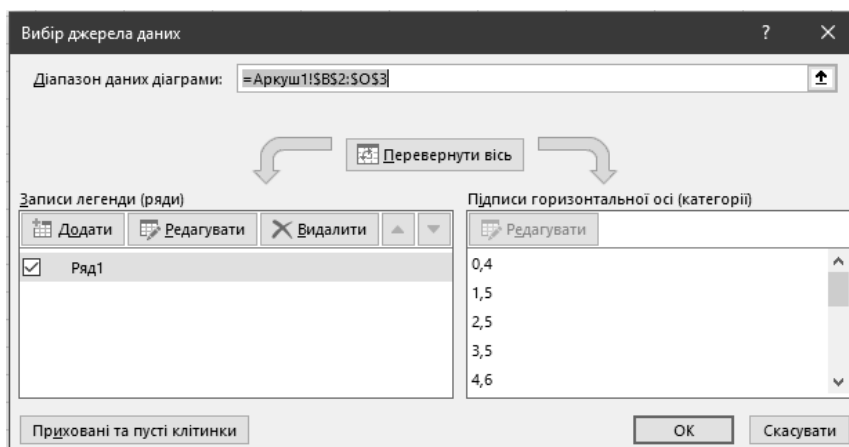


Рисунок 2.53 – Вікно «Вибір джерела даних»

Вибір місця розташування діаграми здійснюється за допомогою вікна «Переміщення діаграми», яку представлено на рис. 2.54.

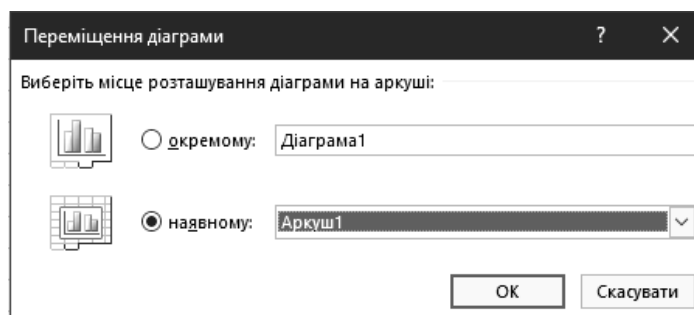


Рисунок 2.54 – Вікно «Переміщення діаграми»

В електронній таблиці з'явиться діаграма, яка (як правило) ще потребує низки налаштувань.

Розглянемо типові додаткові налаштування.

1. Якщо графік потрібно буде роздруковувати, краще змінити одну заливку фону діаграми на іншу. Для цього використовується меню «Формат області діаграми», яке представлено на рис. 2.55.

2. Діапазон значень, що відкладаються по осях на графіку за замовчуванням завжди ширше, ніж ті дані, за якими він побудований. Змінимо шкалу горизонтальної осі. Для цього на одній з цифр, підписаних уздовж горизонтальної осі, клацнемо правою клавішею миші для виклику контекстного меню, в якому виберемо пункт «Формат осі» (рис. 2.56).

З'явиться вікно «Формат осі» (рис. 2.55, б).

На вкладці «Шкала» в полях «Мінімальне значення» і «Максимальне значення» замість значень 0 та 15 введіть 0 та 14 відповідно, а значення поля «Ціна основних поділів» задайте рівним 2. Натисніть кнопку «ОК».

Аналогічно для вертикальної осі задайте мінімальне значення 2, максимальне 12, а ціну основних поділів 2.

В результаті вийде графік у вигляді, зображеному на рис. 2.57.

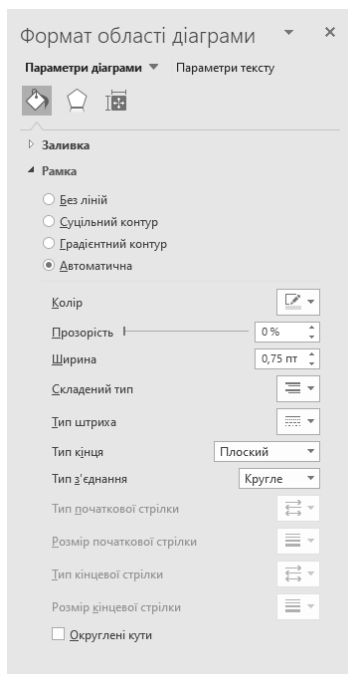


Рисунок 2.55 – Вікно «Формат області діаграми»

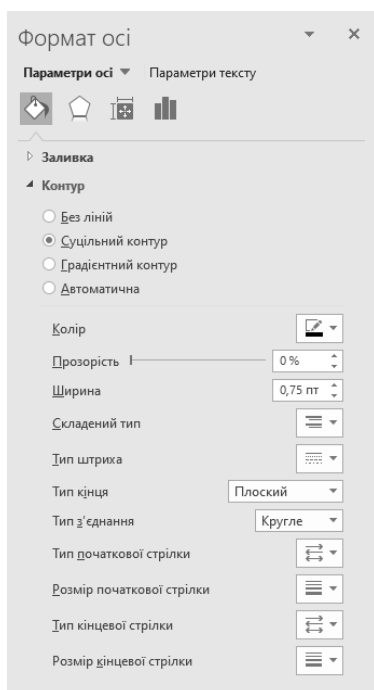


Рисунок 2.56 – Вікно «Формат осі»

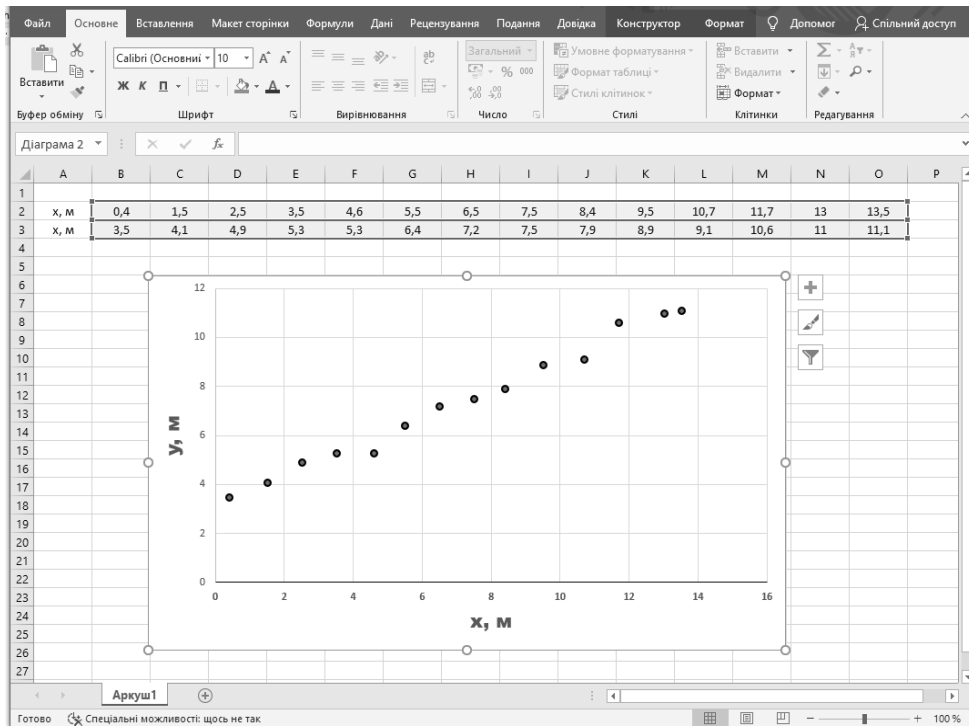


Рисунок 2.57 – Інтерфейс електронної таблиці з побудованою діаграмою

3. Побудова згладжувальної кривої. Для цього клацнемо правою клавiшею миші на одній з точок графіка, в який з'явилось контекстне меню виберемо пункт «Додати лінію тренду» (рис. 2.58).

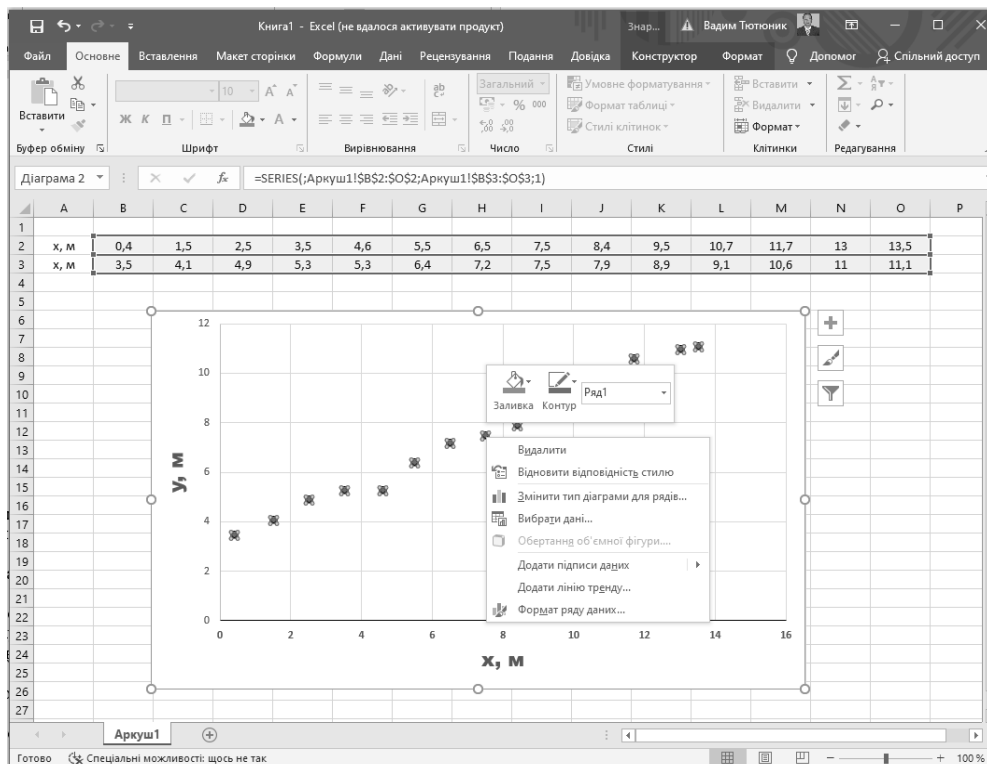


Рисунок 2.58 – Контекстне меню з пунктом «Додати лінію тренду»

З'явиться вікно «Формат лінії тренду» (рис. 2.59). Тут можна налаштувати тип і параметри кривої.

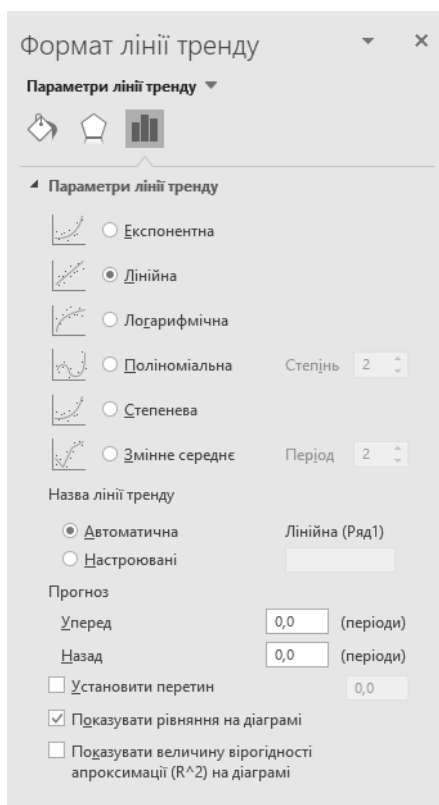


Рисунок 2.59 – Вікно «Формат лінії тренду»

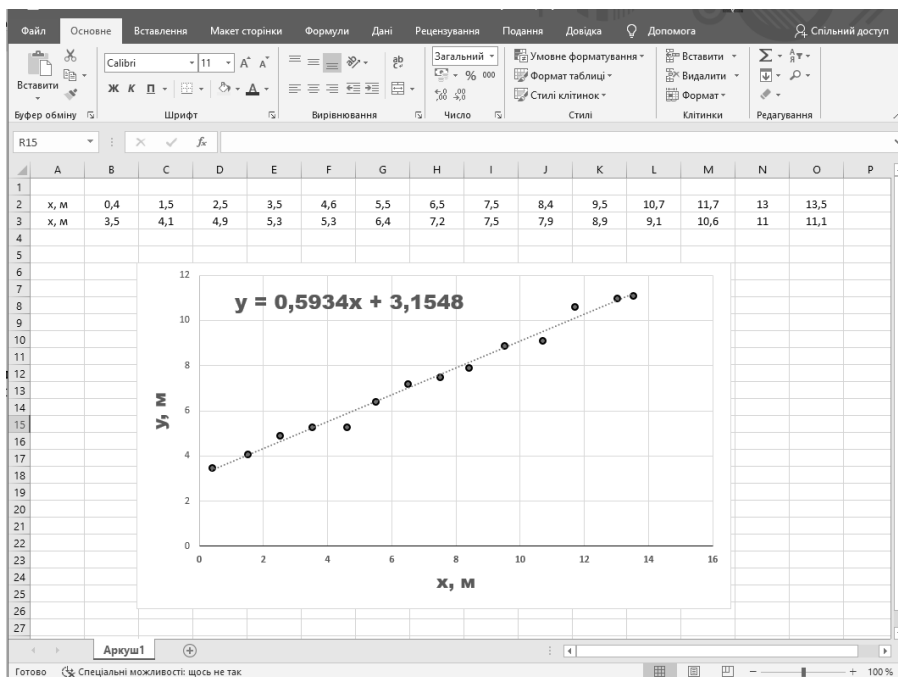


Рисунок 2.60 – Інтерфейс електронної таблиці з побудованою діаграмою, лінією тренду та рівнянням регресії

Так, доступні шість типів згладжування. В експерименті, результати якого обробляються в даному прикладі, вивчався прямолінійний рух тіла на площині, тому залежність  $y = f(x)$  повинна носити лінійний характер. Виберемо тип лінії тренда «Лінійна», а також відзначаємо «галочкою» поле «Показати рівняння на діаграмі» (рис. 2.59). Коефіцієнти згладжувальної прямої (лінії тренду) розраховуються за методом найменших квадратів.

Отримаємо графік у вигляді, представленою на рис. 2.60.

### Контрольні питання та завдання

1. Розкрийте, у чому полягає сукупність операцій експерименту.
2. Поясніть, що розуміється під завданням експерименту.
3. Поясніть, що розуміється під планом експерименту.
4. Що являє собою реплікація?
5. Назвіть основні характеристики вимірювань.
6. Наведіть та поясніть основні метрологічні характеристики вимірювальних приладів.
7. Назвіть основні види вимірювань.
8. Як відбувається поділення вимірювання за класом точності?
9. Поясніть, що розуміється під погрішністю вимірювання.
10. Розкрийте сутність абсолютної та відносної погрішності вимірювання.
11. Що являє собою приладова (систематична) погрішність вимірювання?
12. Розкрийте, у чому полягає модельна погрішність.
13. Що являє собою випадкова погрішність? Розкрийте причини які приводять до появи випадкова погрішність.
14. Сформулюйте основні помилки вимірювання і міри точності.
15. Розкрийте, у чому полягають методи виключення грубих помилок.
16. Поясніть, що розуміється під визначенням граничної похибки.
17. Розкрийте, у чому полягає визначення довірчої межі граничної похибки.
18. Розкрийте, у чому полягає визначення довірчої межі результату виміру.
19. Що являє собою електромеханічні прилади для проведення експерименту?
20. Охарактеризуйте вимірювальні механізми приладів та їх застосування.
21. Що являє собою електронні аналогові вимірювальні прилади для проведення експерименту?
22. Що являє собою цифрові вимірювальні прилади для проведення експерименту?
23. Розкрийте, у чому полягає графічне зображення результатів експерименту.
24. Розкрийте сутність методу найменших квадратів. Як отримують систему нормальних рівнянь у методі найменших квадратів?

25. Розкрийте поняття кореляції. Навіть типи кореляції. Що являє собою лінійна кореляція?
26. Розкрийте поняття регресії. Поясніть суть кореляційного та регресійного аналізу.
27. Сформулюйте основні задачі регресійного аналізу. Що являє собою рівняння регресії?
28. Яким чином записується рівняння парної регресії?
29. Дайте визначення коефіцієнта кореляції. Критерій Стюдента.
30. Що являє собою класична нормальна лінійна модель множинної регресії?

## РОЗДІЛ 3. ПОВНОФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

### 3.1 Гіпотеза та її перевірка

#### 3.1.1 Гіпотеза. Перевірка гіпотез

На практиці часто доводиться на основі результатів випробувань (вибірки) знати закон розподілу генеральної сукупності. Якщо закон розподілу є невідомим, але є підстава вважати, що він має певний вигляд (наприклад назвемо його  $R$ ), то висувають гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за законом  $R$ , тобто в цій гіпотезі мова йтиме про вигляд передбаченого розподілу.

Можливі випадки, коли закон розподілу є відомим, але його параметри є невідомими. Якщо є підстава припустити, що його невідомий параметр  $a$  рівний певному значенню  $\alpha_0$ , то висувають гіпотезу:  $\alpha = \alpha_0$ ; в цьому випадку гіпотеза припускає оцінку параметра конкретного розподілу.

Можливі й інші гіпотези: про рівність параметрів двох чи декількох розподілів, про незалежність вибірок, про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції тощо.

*Статистичною* називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри невідомих розподілів. Наприклад, *статистичними* є гіпотези:

- 1) генеральна сукупність, розподілена за нормальним законом;
- 2) коефіцієнт кореляції генеральної сукупності системи  $(x, y)$ , розподіленої нормально, відмінний від нуля.

Перевірку гіпотез на основі вибірових статистичних даних називають *статистичною перевіркою гіпотез*.

Одну з висунутих гіпотез виділяють у ролі основної й позначають, як правило,  $H_0$  (нульова); поряд з нею висувають альтернативну (конкуруючу) гіпотезу, яка суперечить основній, і позначають  $H_1$ .

Наприклад, якщо нульова гіпотеза полягає у припущенні, що математичне сподівання певного розподілу  $m_x$  рівне 5, то альтернативна гіпотеза, зокрема, може полягати в тому, що  $m_x = 5$ . Коротко це записують так:

$$H_0 : m_x = 5; \quad H_1 : m_x \neq 5.$$

Розрізняють також гіпотези за кількістю припущень. *Простою* називається гіпотеза, що має лише одне припущення, інакше гіпотеза є *складною*, тобто складається зі скінченного чи нескінченного числа простих гіпотез.

Наприклад. Якщо  $\lambda$  – параметр показникового розподілу, то гіпотеза  $H_0 : \lambda = 2$  – проста. Якщо ж гіпотеза  $H_0 : \lambda > 5$ , то вона є складною, бо складається з нескінченної множини простих гіпотез:  $H_1 : \lambda = \alpha_i$ , де  $\alpha_i$  – довільне число, більше 0.

Очевидно, що на основі статистичних даних дуже важко, іноді й неможливо, робити безпомилкові висновки щодо гіпотез. В підсумку може бути прийняте неправильне рішення, тобто можуть бути допущені помилки двох родів.

*Помилка першого роду* полягає в тому, що буде відхилена правильна гіпотеза.

*Помилка другого роду* полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза.

Правильне рішення може бути прийняте також у двох випадках:

а) гіпотеза приймається, причому і в дійсності вона є правильною;

б) гіпотеза відхиляється, причому і в дійсності вона є неправильною.

Ймовірність здійснити помилку першого роду позначають через  $p$  і називають її *рівнем значущості*. Число  $p$  задають малим і найчастіше використовують значення  $p$ , що дорівнюють 0,05; 0,001 і т.д. Якщо, наприклад,  $p = 0,01$ , то це означає, що в одному випадку зі 100 є ризик допустити помилку першого роду (відхилити гіпотезу  $H_0$ ).

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, точний чи наближений розподіл якої є відомим. Цю величину позначають через  $\Phi$ , якщо вона розподілена нормально,  $F$  – за законом Фішера–Снедекора,  $T$  – за законом Стюдента,  $\chi^2$  – за законом “хі-квадрат” і т.д. Оскільки зараз конкретний вигляд розподілу до уваги не береться, то позначають цю величину взагалі через  $K$ .

*Статистичним критерієм* (просто критерієм) називають випадкову величину  $K$ , що служить для перевірки нульової гіпотези. Для різних гіпотез ці критерії є різними.

Наприклад: а) коли перевіряють гіпотезу про рівність дисперсії двох нормальних генеральних сукупностей, то в ролі критерію  $K$  беруть відношення виправлених вибірових дисперсій:

$$K = F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Ця величина є випадковою, тому в різних випробуваннях дисперсії набувають різних, наперед невідомих значень і розподіляються за законом Фішера–Снедекора.

б) найбільш поширеним критерієм перевірки гіпотези  $H_0$  про закон розподілу ознаки генеральної сукупності є критерій узгодженості:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

де  $m$  – число інтервалів, на які розбита вибірка;  $n$  – об’єм вибірки;  $n_i$  – частота  $i$ -го інтервалу;  $p_i$  – ймовірність потрапляння значень ознаки в  $i$ -й інтервал, яка обчислюється для теоретичного закону розподілу.



Спостережуваним значенням  $K_{сп}$  називається значення критерію, обчислене за результатами вибірки.

### 3.1.2 Критична область. Загальна методика побудови критичних областей

Всю множину значень статистичного критерію  $K$  можна розбити на дві підмножини, що не перетинаються –  $A$  і  $\bar{A}$ .

Значення статистичного критерію підмножини  $A$  і  $\Omega$ , при яких нульова гіпотеза приймається, називається *областю прийняття гіпотези*, а підмножина значень  $\bar{A}$ , при яких гіпотеза  $H_0$  відхиляється, – *критичною областю*.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез формується так: якщо спостережуване значення критерію  $K_{сп}$  належить області прийняття гіпотези  $A$  – гіпотезу приймають, якщо  $K_{сп}$  належить критичній області  $\bar{A}$  гіпотезу відхиляють.

Оскільки критерій  $K$  – одновимірна випадкова величина, то всі її можливі значення належать деякому інтервалу. Тому область прийняття гіпотези  $A$  і критична область  $\bar{A}$  також є інтервальними, а значить, існують точки, котрі їх розділяють і називають *критичними* та позначаються  $K_{кр}$ .

Розрізняють односторонню (правосторонню чи лівосторонню) і двосторонню критичні області (див. рис. 3.1).

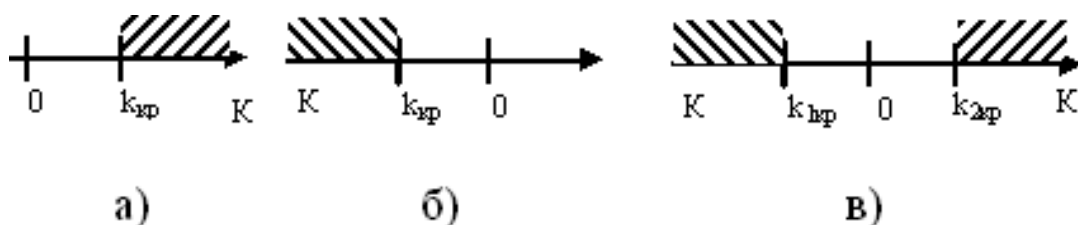


Рисунок 3.1 – Види критичних областей

*Правосторонньою* називають критичну область, що визначається нерівністю  $K > k_{кр}$ , де  $k_{кр}$  – додатне число (рис. 3.1, а).

*Лівосторонньою* називають критичну область, що визначається нерівністю  $K < k_{кр}$ , де  $k_{кр} < 0$  (рис. 3.1, б).

*Двосторонньою* називають критичну область, що визначається нерівністю  $K < k_{1кр}, K > k_{2кр}$ , де  $k_2 > k_1$  (рис. 3.1, в). Зокрема якщо критичні точки є симетричними відносно нуля, двостороння критична область визначається нерівностями:  $K < -k_{кр}, K > k_{кр}$ , або  $|K| > k_{кр} (k_{кр} > 0)$ .

*Перевірка статистичних гіпотез будь-якої природи здійснюється за такою схемою:*

1. Формулюється статистична гіпотеза  $H_0$ .
2. Вибирається статистичний критерій відповідно до сформульованої нульової гіпотези  $H_0$ .
3. Залежно від гіпотези  $H_0$  і альтернативної  $H_1$  вибирається одностороння або двостороння критична область.

Щоб побудувати критичні області, необхідно знайти значення критичних точок.

В основі побудови критичної області лежить принцип практичної неможливості здійснитися малоїмовірній випадковій події при одній спробі. Тому задається мала величина ймовірності  $\alpha$  ( $\alpha = 0,01$ ;  $\alpha = 0,05$ ) (рівень значущості) критерію перевірки правильної гіпотези  $H_0$ : на основі відомого розподілу ймовірності критерію  $K$  визначається (за допомогою даних табл. 3.1) критична точка  $\kappa_{кр}$ . За знайденим  $\kappa_{кр}$  відповідно визначиться лівостороння, правостороння або двостороння критична область.

4. За результатами вибірки обчислюється спостережене значення критерію  $K_{сп}$ .

5. Виходячи з вимоги, що в разі правильності гіпотези  $H_0$  ймовірність того, що  $K_{сп}$  потрапить до критичної області, має дорівнювати прийнятому рівню значущості  $\alpha$ , перевіряється статистична гіпотези.

Це твердження подають для лівосторонньої критичної області так:

$$P(K < \kappa_{кр}) = \alpha,$$

для правосторонньої:  $P(K > \kappa_{кр}) = \alpha$ , для двосторонньої критичної області:  
 $P(K < \kappa_{1кр}) + P(K > \kappa_{2кр}) = \alpha$ .

На практиці двосторонню критичну область будують симетрично розміщеною відносно нуля, розділяючи при цьому  $\alpha$  порівну між кінцями критичних областей, тобто

$$P(K < \kappa_{1кр}) = P(K > \kappa_{2кр}) = \alpha / 2$$

Якщо  $K$  потрапляє до критичної області, а ця подія є малоїмовірною і вона все-таки здійснилася, то нульова гіпотеза  $H_0$  відхиляється. У протилежному разі – приймається.

Розглянемо декілька прикладів статистичної перевірки статистичних гіпотез.

Таблиця 3.1 – Критичні точки розподілу Стюденту

<i>k</i>	Рівень значущості $\alpha$												
	<i>0,005</i>	<i>0,01</i>	<i>0,025</i>	<i>0,05</i>	<i>0,1</i>	<i>0,25</i>	<i>0,5</i>	<i>0,75</i>	<i>0,9</i>	<i>0,95</i>	<i>0,975</i>	<i>0,99</i>	<i>0,995</i>
<i>1</i>	7,87944	6,63490	5,02389	3,84146	2,70554	1,32330	0,45494	0,10153	0,01579	0,00393	0,00098	0,00016	0,00004
<i>2</i>	10,59663	9,21034	7,37776	5,99146	4,60517	2,77259	1,38629	0,57536	0,21072	0,10259	0,05064	0,02010	0,01003
<i>3</i>	12,83816	11,34487	9,34840	7,81473	6,25139	4,10834	2,36597	1,21253	0,58437	0,35185	0,21580	0,11483	0,07172
<i>4</i>	14,86026	13,27670	11,14329	9,48773	7,77944	5,38527	3,35669	1,92256	1,06362	0,71072	0,48442	0,29711	0,20699
<i>5</i>	16,74960	15,08627	12,83250	11,07050	9,23636	6,62568	4,35146	2,67460	1,61031	1,14548	0,83121	0,55430	0,41174
<i>6</i>	18,54758	16,81189	14,44938	12,59159	10,64464	7,84080	5,34812	3,45460	2,20413	1,63538	1,23734	0,87209	0,67573
<i>7</i>	20,27774	18,47531	16,01276	14,06714	12,01704	9,03715	6,34581	4,25485	2,83311	2,16735	1,68987	1,23904	0,98926
<i>8</i>	21,95495	20,09024	17,53455	15,50731	13,36157	10,21885	7,34412	5,07064	3,48954	2,73264	2,17973	1,64650	1,34441
<i>9</i>	23,58935	21,66599	19,02277	16,91898	14,68366	11,38875	8,34283	5,89883	4,16816	3,32511	2,70039	2,08790	1,73493
<i>10</i>	25,18818	23,20925	20,48318	18,30704	15,98718	12,54886	9,34182	6,73720	4,86518	3,94030	3,24697	2,55821	2,15586
<i>11</i>	26,75685	24,72497	21,92005	19,67514	17,27501	13,70069	10,34100	7,58414	5,57778	4,57481	3,81575	3,05348	2,60322
<i>12</i>	28,29952	26,21697	23,33666	21,02607	18,54935	14,84540	11,34032	8,43842	6,30380	5,22603	4,40379	3,57057	3,07382
<i>13</i>	29,81947	27,68825	24,73560	22,36203	19,81193	15,98391	12,33976	9,29907	7,04150	5,89186	5,00875	4,10692	3,56503
<i>14</i>	31,31935	29,14124	26,11895	23,68479	21,06414	17,11693	13,33927	10,16531	7,78953	6,57063	5,62873	4,66043	4,07467
<i>15</i>	32,80132	30,57791	27,48839	24,99579	22,30713	18,24509	14,33886	11,03654	8,54676	7,26094	6,26214	5,22935	4,60092

Продовження таблиці 3.1

<i>k</i>	Рівень значущості $\alpha$												
	<i>0,005</i>	<i>0,01</i>	<i>0,025</i>	<i>0,05</i>	<i>0,1</i>	<i>0,25</i>	<i>0,5</i>	<i>0,75</i>	<i>0,9</i>	<i>0,95</i>	<i>0,975</i>	<i>0,99</i>	<i>0,995</i>
16	34,26719	31,99993	28,84535	26,29623	23,54183	19,36886	15,33850	11,91222	9,31224	7,96165	6,90766	5,81221	5,14221
17	35,71847	33,40866	30,19101	27,58711	24,76904	20,48868	16,33818	12,79193	10,08519	8,67176	7,56419	6,40776	5,69722
18	37,15645	34,80531	31,52638	28,86930	25,98942	21,60489	17,33790	13,67529	10,86494	9,39046	8,23075	7,01491	6,26480
19	38,58226	36,19087	32,85233	30,14353	27,20357	22,71781	18,33765	14,56200	11,65091	10,11701	8,90652	7,63273	6,84397
20	39,99685	37,56623	34,16961	31,41043	28,41198	23,82769	19,33743	15,45177	12,44261	10,85081	9,59078	8,26040	7,43384
21	41,40106	38,93217	35,47888	32,67057	29,61509	24,93478	20,33723	16,34438	13,23960	11,59131	10,28290	8,89720	8,03365
22	42,79565	40,28936	36,78071	33,92444	30,81328	26,03927	21,33705	17,23962	14,04149	12,33801	10,98232	9,54249	8,64272
23	44,18128	41,63840	38,07563	35,17246	32,00690	27,14134	22,33688	18,13730	14,84796	13,09051	11,68855	10,19572	9,26042
24	45,55851	42,97982	39,36408	36,41503	33,19624	28,24115	23,33673	19,03725	15,65868	13,84843	12,40115	10,85636	9,88623
25	46,92789	44,31410	40,64647	37,65248	34,38159	29,33885	24,33659	19,93934	16,47341	14,61141	13,11972	11,52398	10,51965
26	48,28988	45,64168	41,92317	38,88514	35,56317	30,43457	25,33646	20,84343	17,29189	15,37916	13,84391	12,19815	11,16024
27	49,64492	46,96294	43,19451	40,11327	36,74122	31,52841	26,33634	21,74941	18,11390	16,15140	14,57338	12,87850	11,80759
28	50,99338	48,27824	44,46079	41,33714	37,91592	32,62049	27,33623	22,65716	18,93924	16,92788	15,30786	13,56471	12,46134
29	52,33562	49,58788	45,72229	42,55697	39,08747	33,71091	28,33613	23,56659	19,76774	17,70837	16,04707	14,25645	13,12115
30	53,67196	50,89218	46,97924	43,77297	40,25602	34,79974	29,33603	24,47761	20,59923	18,49266	16,79077	14,95346	13,78672

### 3.1.3 Перевірка правдивості статистичних гіпотез про рівність двох генеральних середніх

Нехай генеральні сукупності  $X$  і  $Y$  розподілені нормально, причому їх дисперсії є відомими. З незалежних вибірок знайдемо середні вибіркowi  $X_B, Y_B$ .

Потрібно за вибіркowymi середніми при заданому рівні значущості  $p$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0$ , яка полягає в тому, що генеральні середні (математичні сподівання) даних сукупностей є рівними між собою, тобто  $H_0: M[X] = M[Y]$ .

Враховуючи, що вибіркowi середні є незміщеними оцінками генеральних середніх, тобто  $M[X_B] = X_T, M[Y_B] = Y_T$ , нульову гіпотезу можна записати так:  $H_0: M[X_B] = M[Y_B]$ , тобто перевірити, що математичне сподівання вибіркowych середніх є рівними між собою. Якщо гіпотеза  $H_0$  є правдивою, то різниця між вибіркowymi середніми є незначною.

В ролі критерію перевірки нульової гіпотези приймається випадкова величина

$$K = Z = \frac{X_B - Y_B}{\sigma(X_B - Y_B)} = \frac{X_B - Y_B}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}},$$

$$\sigma(X_B - Y_B) = \sqrt{D(X_B - Y_B)} = \sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}.$$

Критерій  $Z$  – нормована нормальна випадкова величина, бо є лінійна комбінація нормальних величин;  $Z$  – нормована, бо  $M(Z) = 0, p(Z = 1)$  в разі справедливості гіпотези  $H_0$ .

Критична область будується в залежності від вигляду конкуруючої гіпотези.

*Перший випадок.* Нульова гіпотеза  $H_0: M[X] = M[Y]$ , конкуруюча  $H_1: M[X] \neq M[Y]$ . В цьому випадку будують двосторонню критичну область, виходячи з вимоги, що ймовірність попадання критерію в цю область, у припущенні справедливості нульової гіпотези, була рівною прийнятому рівні значущості  $p$ .

Найбільша потужність критерію (ймовірність попадання критерію до критичної області при правдивості конкуруючої гіпотези) досягається тоді, коли «ліва» і «права» критичні точки вибрані так, що ймовірність попадання критерію в кожен із двох інтервалів критичної області є рівним  $p/2$ :

$$P(Z < \kappa_{лів\ кр}) = p/2, P(Z > \kappa_{пр\ кр}) = p/2.$$

Оскільки  $Z$  – нормована нормальна величина, а розподіл такої величини є симетричними відносно нуля, то критичні точки є симетричними відносно

нуля, тобто достатньо знайти праву границю, щоб знайти саму двосторонню критичну область (нехай  $K_{np\ kр} = K_{кр}$ ,  $K_{лівкр} = -K_{кр}$ ).

Покажемо, як знайти  $k_{кр}$  – праву межу двосторонньої критичної області, користуючись функцією Лапласа  $\Phi(z)$ . Відомо, що функція Лапласа визначає ймовірність попадання нормованої нормальної випадкової величини, наприклад,  $Z$  в інтервалі  $(0, z)$ :

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z).$$

Оскільки розподіл  $Z$  є симетричним відносно нуля, то  $P(z \in [0, \infty)) = 0,5$ , то якщо розбити цей інтервал  $k_{кр}$  на інтервали  $[0, k_{кр}) \cup (k_{кр}, \infty)$ , то за теоремою додавання

$$P(0 < Z < k_{кр}) + P(k_{кр} < Z < \infty) = 1/2$$

Звідки  $\Phi(k_{кр}) + p/2 = 1/2$

$$\Phi(k_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

*Висновок 1.* Для того, щоб за заданого рівня значущості  $p$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0 : M[X] = M[Y]$  двох нормальних генеральних сукупностей з відомими дисперсіями при конкуруючій гіпотезі  $H_1 : M[X] \neq M[Y]$ , потрібно обчислити

$$K_{сп} = \frac{X_B - Y_B}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$$

і за таблицею функції Лапласа знайти критичну точку рівності

$$\Phi(k_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Якщо  $K_{сп} < k_{кр}$  – нема підстави відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо  $K_{сп} > k_{кр}$  – нульову гіпотезу відхиляють.

*Другий випадок.* Нульова гіпотеза  $H_0 : M[X] = M[Y]$ , конкуруюча  $H_1 : M[X] > M[Y]$ .

В цьому випадку будують правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб ймовірність попадання критерію в цю область у припущенні справедливості нульової гіпотези була рівна прийнятому рівню значущості  $p$ :

$$P(K > \kappa_{kp}) = p.$$

Користуючись співвідношенням  $P(0 < Z < \kappa_{kp}) + P(Z > \kappa_{kp}) = 1/2$ , маємо  $\Phi(\kappa_{kp}) + p = 1/2$  або  $\Phi(\kappa_{kp}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ .

*Висновок 2.* Щоб за заданого рівня значущості  $p$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0: M[X] = M[Y]$ , при конкуруючій гіпотезі  $H_1: M[X] > M[Y]$ , потрібно обчислити

$$K_{cn} = \frac{X_B - Y_B}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$$

і по таблиці функції Лапласа знайти критичну точку з рівності  $\Phi(\kappa_{kp}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ .

Якщо  $K_{cn} < \kappa_{kp}$  – нема підстави відхилити нульову гіпотезу. Якщо  $K_{cn} > \kappa_{kp}$  – нульова гіпотеза відхиляється.

*Третій випадок.* Нульова гіпотеза  $H_0: M[X] = M[Y]$ . Конкуруюча  $H_1: M[X] < M[Y]$ .

В цьому випадку будують лівосторонню критичну область, виходячи з вимоги, що ймовірність попадання критерію в цю область, в припущенні справедливості нульової гіпотези, була рівною прийнятому рівню значущості:

$$P(Z < \kappa'_{kp}) = \alpha$$

*Висновок 3.* При конкуруючій гіпотезі  $M[X] < M[Y]$  треба обчислити  $K_{cn}$  і спочатку за таблицею функції Лапласа знайти «допоміжну точку»  $\kappa_{kp}$  з рівності  $\Phi(\kappa_{kp}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ , а потім покласти  $\kappa'_{kp} = -\kappa_{kp}$ . Якщо  $K_{cn} > -\kappa_{kp}$  – немає підстави відхилити нульову гіпотезу. Якщо  $K_{cn} < -\kappa_{kp}$  – нульову гіпотезу відхиляють.

*Приклад.* За двома вибірками, об'ємами  $n=40$ ,  $m=50$ , взятими з нормальних генеральних сукупностей, знайдено вибіркові середні  $\bar{x}_B = 120$ ,  $\bar{y}_B = 130$ . Відомі генеральні дисперсії:  $D[X] = 80$ ,  $D[Y] = 90$ . Потрібно за рівня значущості  $0,01$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0: M[X] = M[Y]$ , при конкуруючій гіпотезі  $H_1: M[X] \neq M[Y]$ .

*Розв'язок.* Знайдемо спостережуваний критерій

$$K_{cn} = \frac{120 - 130}{\sqrt{80/40 + 90/50}} = -5,13$$

За умовою конкуруючої гіпотези  $H_1$ : критична область є двосторонньою. Знайдемо праву критичну точку з рівності. За таблицею функції Лапласа

знаходимо  $\kappa_{kp} = 2,58$ . Оскільки  $|K_{cn}| = 5,13 > \kappa_{kp}$ , то нульова гіпотеза відхиляється, тобто генеральні середні різняться істотно.

### 3.1.4 Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона

В попередніх параграфах закон розподілу генеральної сукупності припускається відомим. Якщо ж він є невідомим, але є підстава, припущення, що він має певний вигляд (наприклад  $A$ ), то перевіряють нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за законом  $A$ .

Перевірка гіпотези про припущений закон невідомого закону розподілу виконується так само, як і перевірка гіпотези про параметри розподілу, тобто з допомогою спеціально підібраної випадкової величини – *критерію узгодженості*.

*Критерієм узгодженості* називають критерій перевірки про вигляд невідомого розподілу.

Є декілька критеріїв узгодженості:  $\chi^2$  (хі-квадрат) Пірсона, Колмогорова, Смірнова тощо. Для простоти обмежимося лише описом застосування критерію Пірсона для перевірки гіпотез про нормальний розподіл генеральної сукупності, оскільки інші закони перевіряються аналогічно.

Для перевірки критерію узгодженості за конкретними формулами порівнюють емпіричні частоти (за даними вибірки)  $n_i$  і теоретичні  $n'_i$  (обчислені у припущенні, що закон розподілу генеральної сукупності заданий, наприклад, у нашому випадку – нормальний).

Природно, що емпіричні та теоретичні частоти різняться, але чи випадковою є ця розбіжність? Можливо, що розбіжність є випадковою (незначною), а можливо, розбіжність є не випадковою, і пояснюється це тим, що теоретичні частоти обчислені виходячи з неправильної гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Критерій Пірсона якраз і відповідає на поставлене питання, правда, як і всякий критерій, він не доводить справедливості гіпотези, а лише встановлює на певному рівні значущості її узгодження чи неузгодження з даними спостереженнями.

Найбільш поширеним критерієм перевірки нульової гіпотези про закон розподілу ознаки генеральної сукупності є критерій узгодженості  $\chi^2$ , що розраховується за формулою:

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}, \quad (3.1)$$

де  $m$  – число часткових інтервалів, на які поділяється статистичний розподіл вибірки;  $n_i$  – частота ознаки в  $i$ -му інтервалі;  $n'_i$  – теоретичні частоти, підраховані за відповідними формулами закону розподілу ймовірностей, який



припускається для ознаки генеральної сукупності. Теоретичні частоти знаходяться за формулою:

$$n'_i = np_i,$$

де  $n$  – об'єм вибірки;  $p_i$  – для дискретної величини є ймовірність події  $p_i = P(X = x_i)$ , для неперервної випадкової величини  $p_i$  є ймовірність того, що ознака  $X$  потрапить в  $i$ -й інтервал.

Наприклад, для гіпотези  $H_0$ , яка припускає, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу, ймовірність  $p_i$  може бути обчислена за формулою:

$$P_i = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i),$$

де  $\Phi(x)$  – функція Лапласа.

Критерій  $K$  у формулі (3.1) випадковий, і чим менше відрізняються значення емпіричних і теоретичних частот, тим менше буде значення  $K_{cn}$  і, отже, більш точно характеризує близькість теоретичного і емпіричного розподілів.

Значення критичної точки  $\kappa_{kp}$  для критерію узгодженості Пірсона залежить від рівня значущості  $\alpha$  і числа ступенів вільності  $\kappa$ . Число ступенів вільності розподілу визначається за формулою  $\kappa = l - r - 1$ , де  $l$  – число інтервалів статистичного ряду,  $r$  – число параметрів теоретичного закону розподілу, що оцінюється за даними вибірки.

Зокрема якщо припущений розподіл нормальний, то оцінюється два параметри (математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення), тому  $r = 2$ , отже,  $\kappa = l - 3$ .

Оскільки односторонній критерій більш «жорстко» відхиляє нульову гіпотезу, ніж двосторонній, то будують правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб імовірність потрапляння критерію в цю область у разі припущення правдивість нульової гіпотези була рівною прийнятому рівню значущості  $\alpha$ :

$$P(\chi^2 > \kappa_{kp}(\alpha, \kappa)) = \alpha.$$

*Висновок.* Для того, щоб за заданого рівня значущості перевірити гіпотезу  $H_0$  генеральна сукупність розподілена нормально, потрібно спочатку поррахувати теоретичні частоти, а потім спостережуваний критерій:

$$K_{cn} = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$

Після чого за таблицею критичних точок розподілу  $\chi^2$ , за заданим рівнем значущості  $\alpha$  і числом ступенів вільності  $k = l - 3$  потрібно знайти критичну точку  $\kappa_{kp}(\alpha, k) = \chi_{kp}^2(\alpha, k)$ .

Якщо  $K_{cn} < \kappa_{kp}$  – нема підстави відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо  $K_{cn} > \kappa_{kp}$  – нульову гіпотезу відхиляють.

*Зауваження.* Об'єм вибірки повинен бути досить великим (не менше 50), а кожна група з інтервалу  $(x_i, x_{i+1})$  містити не менше 5–8 варіантів; малочисленні групи слід об'єднувати в одну, сумуючи частоти.

Для контролю обчислень, формулу (3.1) перетворюють до вигляду:

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{n_i^2}{n_i'} - n \quad \left( \sum_{i=1}^l n_i = n, \quad \sum n_i' = n \right).$$

Отже, суть критерію узгодженості Пірсона полягає в порівнянні емпіричних і теоретичних частот. Емпіричні частоти знаходять експериментально, а теоретичні, наприклад, таким методом:

1. Весь інтервал спостережуваних значень  $X$  (вибірки об'єму  $n$ ) ділять на  $l$  часткових інтервалів  $[x_i, x_{i+1}]$  однакової довжини. Знаходять їх середини  $\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ , а частоти  $n_i$  варіанти  $\bar{x}_i$  беремо рівними числу варіантів, що попали в  $i$ -й інтервал.

В результаті отримано послідовність рівновіддалених варіантів з відповідними частотами:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_e \quad n_1, n_2, \dots, n_e. \quad \left( \sum_{i=1}^l n_i = n \right).$$

2. Обчислюємо вибірккову середню і вибірккове середнє квадратичне відхилення:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}, \quad \delta = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}.$$

3. Нормують випадкову величину  $X$ , тобто переходять до величини  $Z = \frac{X - \bar{x}}{\delta}$  і обчислюють кінці інтервалів  $(Z_i, Z_{i+1})$ :

$$Z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\delta}, \quad Z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\delta},$$

причому найменше значення  $Z$ , тобто  $Z_1$  покладають рівним  $(-\infty)$ , а найбільше, тобто  $Z_e$ , рівним  $(+\infty)$ .

4. Обчислюють теоретичні ймовірності  $p_i$  потрапляння  $X$  в інтервали  $(x_i, x_{i+1})$  з рівності

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

де  $\Phi(z)$  – функція Лапласа, і остаточно знаходять теоретичні частоти  $n'_i = np_i$ .

### 3.1.5 Порівняння двох середніх генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі (великі незалежні вибірки)

Нехай  $n$  і  $m$  – об'єми великих ( $n > 30, m > 30$ ) незалежних вибірок, для яких знайдено відповідні вибіркові середні  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$ . Генеральні дисперсії  $D(X), D(Y)$  є відомими.

*Правило 1.* Для того, щоб за заданого рівня значущості перевірити нульову гіпотезу  $H_0: M(X) = M(Y)$  про рівність математичних сподівань (генеральних середніх) двох нормальних генеральних сукупностей з відомими дисперсіями (у випадку великих вибірок), при конкуруючій гіпотезі  $H_1: M(X) \neq M(Y)$ , потрібно поррахувати досліджуване значення критерію

$$K_{cn} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}},$$

і знайти критичну точку  $\kappa_{kp}$  з рівності

$$\Phi(\kappa_{kp}) = \frac{(1 - \alpha)}{2}.$$

Якщо  $|K_{cn}| > \kappa_{kp}$  – нема підстави відкидати нульову гіпотезу. Якщо  $|K_{cn}| > \kappa_{kp}$  – нульова гіпотеза відкидається.

*Правило 2.* При конкуруючій гіпотезі  $H_1: M(X) > M(Y)$  знаходять критичну точку  $\kappa_{kp}$  по таблиці з рівності

$$\Phi(\kappa_{kp}) = \frac{(1 - 2\alpha)}{2}.$$

Якщо  $K_{cn} < \kappa_{kp}$  – нема підстави відкидати нульову гіпотезу, якщо ж  $K_{cn} > \kappa_{kp}$  – нульова гіпотеза відкидається.

*Правило 3.* При конкуруючій гіпотезі  $H_1: M(X) < M(Y)$  знаходять точку  $\kappa_{kp}$  за правилом 2. Якщо  $K_{cn} > -\kappa_{kp}$  – нульова гіпотеза приймається, а якщо  $K_{cn} < -\kappa_{kp}$  – нульова гіпотеза відкидається.

*Приклад.* За двома незалежними вибірками, об'єми яких  $n = 40, m = 50$ , вибраними з нормальних генеральних сукупностей, знайдемо  $\bar{x} = 130$  і  $\bar{y} = 140$ .

Генеральні дисперсії відомі:  $D(X)=80$ ,  $D(Y)=100$ . Потрібно за рівня значущості  $\alpha = 0,01$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0 : M(X) = M(Y)$  при  $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ .

Розв'язок. Знайдемо  $K_{cn} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{130 - 140}{\sqrt{\frac{80}{40} + \frac{100}{50}}} = -5$ . Оскільки

$H_1 : M(X) \neq M(Y)$ , то критична область є двосторонньою. Знайдемо  $K_{kp}$  з рівності  $\Phi\left(K_{kp} = \frac{(1-\alpha)}{2}\right) = \frac{1-0,01}{2} = 0,495$ , тобто, згідно таблиці,  $K_{kp} = 2,58$ . Оскільки  $|K_{cn}| = 5 > K_{kp} = 2,58$ , то нульова гіпотеза відкидається, тобто генеральні середні різняться суттєво.

## 3.2 Основи статистичної обробки експериментальних результатів

### 3.2.1 Методи порівняння елементарних статистик

Існує велика кількість різноманітних методів перевірки статистичних гіпотез. При виборі методу для вирішення певного конкретного завдання необхідно виходити з відповідей на такі питання:

- якою є мета перевірки гіпотези;
- в яких шкалах виміряні аналізовані дані;
- чи є аналізовані вибірки незалежними або сполученими;
- скільки вибірок необхідно порівняти.

Розглянуті в цьому розділі методи застосовують при порівнянні двох вибірок. В разі більшої кількості вибірок використовують методи дисперсійного аналізу.

Гіпотезу, що перевіряють, називають *нульовою гіпотезою* ( $H_0$ ). Прикладами нульових гіпотез можуть бути такі твердження: «Середні значення двох вибірок суттєво не відрізняються одне від одного»; «Дисперсія першої вибірки суттєво перевищує дисперсію другої»; «Розподіл вибірки відповідає нормальному закону з певними параметрами» тощо.

Гіпотезу, що суперечить нульовій, називають *конкуруючою*, або *альтернативною гіпотезою* ( $H_1$ ). Для вказаних вище нульових гіпотез конкуруючими можуть бути такі твердження: «Середні значення двох вибірок суттєво відрізняються одне від одного»; «Дисперсія першої вибірки не перевищує істотно дисперсію другої»; «Розподіл вибірки не відповідає нормальному закону із вказаними параметрами».

Для однієї нульової гіпотези у загальному випадку можна сформулювати багато різних альтернативних гіпотез.

Розрізняють *прості* та *складні гіпотези*. *Простою* називають гіпотезу, що містить тільки одне твердження. *Складні* гіпотези складаються з декількох простих (при цьому кількість простих гіпотез може бути нескінченно великою).

Зазвичай при перевірці нульової гіпотези використовують певні модельні розподіли, що приблизно відповідають розподілу досліджуваного параметра. Їх

називають *статистичними критеріями*. На практиці як критерії найчастіше використовують нормальний розподіл,  $\chi^2$ -розподіл, розподіли Стюдента і Фішера. Значенням критерію, що спостерігається, називають його величину, яку розраховують за досліджуваними вибірками.

Для перевірки гіпотези весь вибірковий простір поділяють на дві *області*, що не перетинаються: *критичну* ( $w$ ) та *область прийняття* ( $W - w$ ). *Критичною областю* називають сукупність значень критерію, за яких нульову гіпотезу слід відхилити. *Областю прийняття гіпотези* (областю допустимих значень) називають сукупність значень критерію, за яких нульову гіпотезу приймають. Перевірка гіпотези передбачає розрахунок значення критерію і перевірку його потрапляння до області прийняття гіпотези.

Вирізняють *двобічні* та *однобічні* (лівобічні, правобічні) критичні області (рис. 3.2, 3.3). Їх використання залежить від вибору конкуруючої гіпотези.

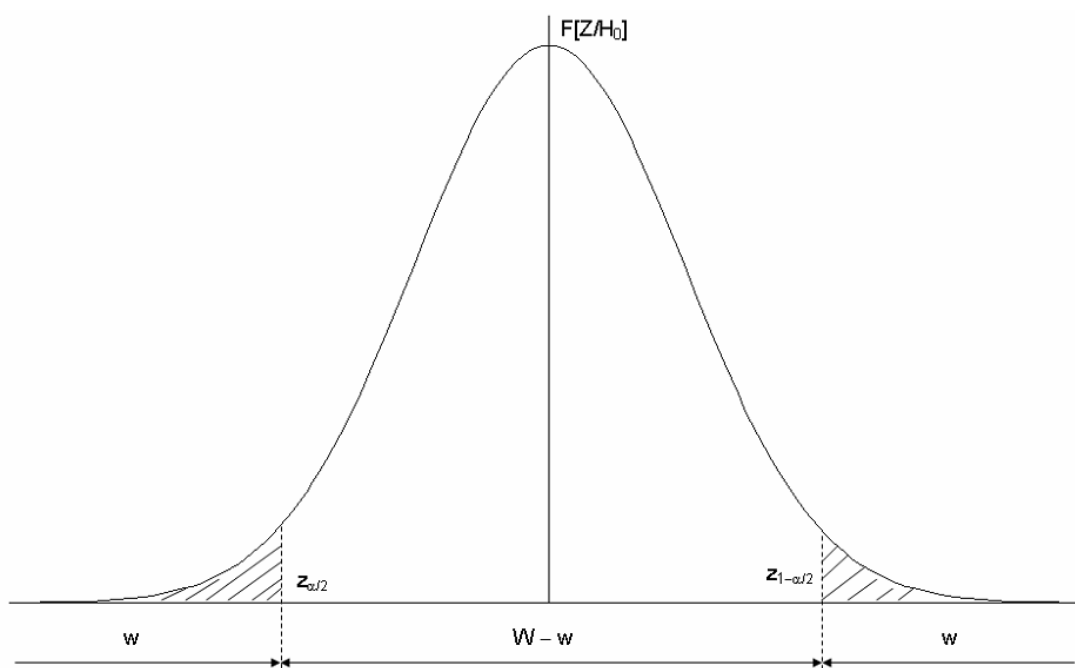


Рисунок 3.2 – Приклад двобічної критичної області

Якщо розподіл імовірності спостережень, що відповідає нульовій гіпотезі  $H_0$ , є відомим, то критичну область визначають так, щоб при виконанні  $H_0$  імовірність її відхилення була рівною заздалегідь заданій малій величині (*рівню значущості*)  $\alpha$ .

$$P(\chi \in w | H_0) = \alpha \quad (3.2)$$

Замість рівня значущості можна використовувати також *довірчий рівень*

$$p = 1 - \alpha \quad (3.3)$$

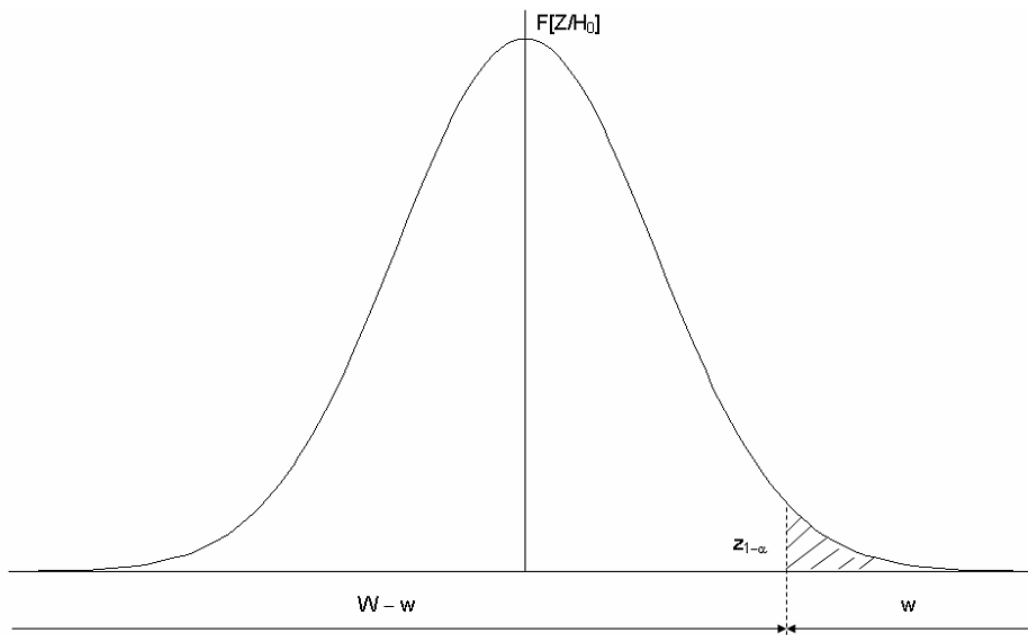


Рисунок 3.3 – Приклад правобічної критичної області

Критерії, що базуються на використанні заздалегідь заданого рівня значущості, називають *критеріями значущості*. Рівень значущості визначає розмір критичної області: що більшим є рівень значущості, то ширшою буде критична область.

Розглядають два типи помилок, що можуть виникати при перевірці статистичних гіпотез:

- *помилкою першого роду* є відхилення правильної нульової гіпотези, рівень значущості  $\alpha$  є ймовірністю такої помилки;
- *помилкою другого роду* є прийняття помилкової нульової гіпотези.

У деяких застосуваннях помилки першого та другого роду називають, відповідно, *ризиком виробника* та *ризиком споживача*.

Зменшення ймовірності помилки першого роду водночас призводить до підвищення ймовірності помилки другого роду  $\beta$ . З огляду на це додатково вводять поняття *потужності критерію*  $1 - \beta$ , яка є ймовірністю відхилення помилкової нульової гіпотези, тобто ймовірністю потрапляння критерію до критичної області за умови, що правильною є конкуруюча гіпотеза:

$$P\{\chi \in w | H_1\} = 1 - \beta. \quad (3.4)$$

*Потужність критерію можна підвищити, збільшуючи обсяг вибірки.* При визначенні критичної області її зазвичай будують так, щоб максимізувати потужність обраного критерію. За наявності декількох критеріїв, що можуть використовуватися для перевірки досліджуваної гіпотези, рекомендується обирати більш потужні з них, якщо їх застосування є обґрунтованим.

Важливим завданням є *визначення обсягу вибірки*, який дає змогу гарантувати певне значення похибки першого роду за умови, що похибка

другого роду не перевищує заданого значення. Для цього необхідно розв'язати таку систему:

$$\begin{cases} P[Z \in w / H_0] = \alpha; \\ P[Z \in W / H_1] = \beta. \end{cases} \quad (3.5)$$

Її аналітичне розв'язання є можливим лише у найпростіших випадках. Але, в багатьох випадках істотне спрощення можна отримати, якщо замінити ймовірності  $\alpha$  і  $\beta$  значеннями меж відповідних критичних інтервалів.

Загальна методика отримання висновків при перевірці гіпотез передбачає, що на першому етапі необхідно задати рівень значущості. Найчастіше його беруть рівним 0,01; 0,05 або 0,1. Обираючи рівень значущості, слід пам'ятати, що його зменшення знижує ймовірність помилки першого роду, але збільшує ймовірність помилки другого роду. Тому, виходячи з конкретних умов, потрібно знайти певний компроміс між ймовірностями допуститись помилок різного типу.

На другому етапі за даними вибірки розраховують значення критерію та порівнюють його з обчисленими для заданого рівня значущості межами критичної області. Якщо розраховане значення критерію потрапляє до них, то нульову гіпотезу відхиляють. В іншому випадку вважають, що немає підстав для відхилення нульової гіпотези і або приймають її на заданому рівні значущості, або здійснюють додаткову перевірку. Для визначення меж критичної області застосовують спеціальні таблиці або розраховують їх на основі відомих законів розподілу використовуваних критеріїв.

Можливості сучасної комп'ютерної техніки та наявного програмного забезпечення дають змогу отримувати висновки іншим шляхом. Якщо за наявними емпіричними даними розрахувати значення критерію, то на наступному етапі можна визначити, для якого рівня значущості це значення буде критичним. Ураховуючи, що рівень значущості є ймовірністю відхилення правильної нульової гіпотези, ми можемо за його значенням зробити висновок про ймовірність правильності або помилковості нульової гіпотези. Залежно від того, задовольняє нас отримана ймовірність помилки чи ні, нульову гіпотезу приймають або відхиляють.

При перевірці гіпотез доцільно застосовувати різні методи, призначені для вирішення одних і тих самих завдань та однакових типів даних.

Причинами розбіжності отримуваних при цьому результатів зазвичай є:

- помилки під час введення даних;
- непридатність окремих методик для типу даних, що розглядають;
- алгоритмічні помилки у програмах, що використовують для аналізу.

Залежно від наявності або відсутності можливості визначення напряму розбіжності порівнюваних вибірок, розрізняють *однобічні* та *двобічні критерії*. Перші застосовують, якщо наявні дані дають змогу вказати такий напрям, наприклад зробити висновок, що значення порівнюваної ознаки для однієї вибірки є вищим, ніж в іншій. Двобічні критерії дають можливість зробити

висновок лише про різницю вибірок за порівнюваною ознакою. Відповідно до цього говорять про *однобічні* та *двобічні гіпотези*. Для двобічних критеріїв рівень значущості є удвічі більшим, ніж для відповідних однобічних. При використанні однобічних критеріїв рекомендується спочатку розраховувати двобічні. Якщо за двобічним критерієм різниці між вибірками немає, то наступне порівняння за однобічним є необґрунтованим.

Дані реальних експериментів можуть бути подані незалежними або поєднаними (сполученими) вибірками. Для незалежних вибірок критерії допомагають виявити статистичну значущість різниці, що спостерігається. Прикладами незалежних вибірок є:

- мешканці двох різних населених пунктів (при демографічних дослідженнях);
- дві партії однотипної продукції, виготовлені різними працівниками на різному обладнанні (при розробці технології виробництва);
- випускники різних шкіл (при аналізі результатів зовнішнього незалежного оцінювання).

Критерії, що застосовують до вибірок із попарно сполученими даними, називають парними. Прикладами спряжених вибірок є:

- дані опитування громадської думки до і після певної суспільно значущої події;
- дві партії однотипної продукції, виготовлені одними й тими самими працівниками на одному й тому самому обладнанні до та після внесення певних змін до технології;
- одна й та сама партія виробів до і після певної технологічної обробки.

Критерії та тести, що застосовують для порівняння вибірок, поділяють на дві групи: *параметричні* та *непараметричні*. Особливістю параметричних критеріїв є припущення, що розподіл ознаки в генеральній сукупності підпорядковується певному відомому закону. Ця відповідність має бути доведена до застосування будь-якого з параметричних тестів. Переважна більшість параметричних тестів розроблена для нормально розподілених даних. Але для деяких типів гіпотез існують параметричні тести, призначені для вибірок, що підпорядковуються іншим законам розподілу.

Як правило, параметричні критерії є потужнішими за непараметричні. Застосування непараметричних критеріїв у випадках, коли можна використовувати параметричні, призводить до збільшення ймовірності прийняття помилкової нульової гіпотези, тобто помилки другого роду.

Якщо досліджувані вибірки підпорядковуються нормальному закону розподілу з відомими дисперсіями, то як критерій рівності їх середніх значень можна використовувати величину:

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \quad (3.6)$$



де  $n_1, n_2$  – кількість елементів у вибірках. Нульова гіпотеза полягає у рівності середніх.

$Z$ -критерій є випадковою величиною, що підпорядковується стандартному нормальному розподілу. Якщо конкуруючою гіпотезою є  $\bar{\chi}_1 \neq \bar{\chi}_2$ , то праву критичну точку можна визначити з умови:

$$P(0 < Z < z_{крит.}) = \Phi(z) = (1 - \alpha) / 2, \quad (3.7)$$

де  $\Phi(z)$  є функцією Лапласа (інтегралом ймовірностей), що пов'язана з функцією стандартного нормального розподілу  $F(z)$  співвідношенням  $\hat{O}(z) = F(z) - 1/2$ . Ліва і права критичні точки для одного й того самого рівня значущості пов'язані умовою  $Z_{очікув} = -Z_{крит}$ .

Нехай, наприклад, при вимірюванні певного параметра у двох серіях однакових виробів, виготовлених на різних установках, отримали такі значення:  $\bar{\chi}_1 = 184$ ,  $\bar{\chi}_2 = 181$ ,  $\sigma_1^2 = 121$ ,  $\sigma_2^2 = 107$ ,  $n_1 = n_2 = 40$ . Як нульову гіпотезу візьмемо твердження, що немає істотної різниці між параметрами виробів, виготовлених на різних установках. Тоді:

$$Z = \frac{184 - 181}{\sqrt{\frac{121}{40} + \frac{107}{40}}} \approx 1,26.$$

Беручи рівень значущості рівним 0,05 (5%), отримаємо для визначення критичної точки умову:

$$\Phi(z_{крит}) = (1 - \alpha) / 2 = 0,475$$

Для визначення величини  $z_{крит}$  можна використати функцію НОРМСТОБР електронних таблиць MS Excel, беручи як значення аргументу величину (0,5 + 0,475). Після цього одержимо:  $z_{крит} = 1,96$ . Оскільки  $Z < z_{крит}$ , ми можемо прийняти нульову гіпотезу на рівні значущості 0,05.

Використовуючи вбудовані функції електронних таблиць MS Excel, ми можемо отримати більш точну оцінку ймовірності відхилення правильності нульової гіпотези. Величина  $z_{очікувана}$  для двобічної гіпотези відповідає рівню значущості  $\alpha \approx 0,209$ . Тобто якщо ми не приймаємо нульову гіпотезу, то ймовірність помилки першого роду становить приблизно 21%. Таку ймовірність у більшості випадків вважають занадто високою. Це пов'язано з тим, що зазвичай висновок формулюють як наявність чи відсутність достатніх підстав для відхилення (а не для прийняття) нульової гіпотези. За необхідності більш чіткого обґрунтування її прийняття виконують додаткові перевірки.

Якщо конкуруючою гіпотезою є:  $\bar{\chi}_1 > \bar{\chi}_2$ , то:

$$\Phi(z_{кр}) = (1 - 2\alpha) / 2, \quad (3.8)$$

і нульову гіпотезу приймають, якщо  $Z < z_{кр}$ .

Якщо конкуруючою гіпотезою є:  $\bar{\chi}_1 < \bar{\chi}_2$ , то критичну точку  $z'$  визначають враховуючи, що  $z'_{кр} = -z_{кр}$ . Нульову гіпотезу приймають, якщо  $Z > -z_{кр}$ .

Z-критерій можна застосовувати також для порівняння середніх значень довільно розподілених незалежних вибірок великого обсягу ( $n_{1,2} \geq 30$ ), враховуючи, що в цьому разі вибіркові середні мають приблизно нормальний розподіл, а вибіркові дисперсії є достатньо точними оцінками генеральних дисперсій.

Для порівняння середніх значень вибірок застосовують *t-критерій Стьюдента*. Його запропоновано американським статистиком Уільямом Госсетом в 1908 р. за результатами дослідження проблеми скорочення кількості проб, які потрібно взяти в разі здійснення контролю за якістю продукції пивоварного заводу за умови забезпечення виконання вимог стандартів.

Розглядають дві незалежні нормальні вибірки з генеральних сукупностей, що мають рівні або нерівні, але відомі чи рівні невідомі дисперсії.

Значення критерію Стьюдента розраховують за формулою:

$$t = \frac{|\bar{\chi}_A - \bar{\chi}_B|}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}}, \quad (3.9)$$

де  $\sigma_A^2, \sigma_B^2$ , – відомі внутрішньогрупові дисперсії;  $n_A$  та  $n_B$  – чисельності груп. Для  $m$  груп рівної чисельності статистика має  $t$ -розподіл з кількістю ступенів вільності  $m(n-1)$ .

У випадку, коли обсяги вибірок є малими або істотно розрізняються, а їх дисперсії є рівними, останні замінюють вибірковим середнім квадратичним відхиленням, яке розраховують за формулою:

$$s^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}, \quad (3.10)$$

якщо стандартні відхилення вибірок оцінюють за самими вибірками, або:

$$s^2 = \frac{s_1^2 n_1 + s_2^2 n_2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad (3.11)$$

якщо їх оцінюють незалежно. Формула для визначення розрахункового значення критерію у цьому разі набуває вигляду:

$$t = \frac{|\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_2|}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}. \quad (3.12)$$

Відповідна статистика має розподіл Стьюдента з  $\kappa = n_1 + n_2 - 2$  ступенями вільності.

При застосуванні критерію Стьюдента у вигляді (3.12) необхідно спочатку перевірити гіпотезу про рівність дисперсій.

Критичні точки є симетричними відносно нуля. Нульову гіпотезу відхиляють: якщо  $|t| < t_{кр}(\alpha/2, \kappa)$  при конкуруючій гіпотезі  $\bar{\chi}_1 \neq \bar{\chi}_2$ ; якщо  $t > t_{кном}(\alpha, \kappa)$  при конкуруючій гіпотезі  $\bar{\chi}_1 > \bar{\chi}_2$ ; якщо  $t < -t_{кном}(\alpha, \kappa)$  при конкуруючій гіпотезі  $\bar{\chi}_1 < \bar{\chi}_2$ .

При аналізі сполучених вибірок їх порівняння здійснюють з метою визначення наявності ефекту від певного фактора, наприклад, впливу змін у технології на якість виробленої продукції. Вимога щодо рівності дисперсій при цьому не висувається. Нульова гіпотеза полягає у відсутності різниці між середніми. Значення критерію розраховують за формулою:

$$t = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i\right)^2}{n-1}}}, \quad (3.13)$$

де  $n$  – кількість елементів у кожній із вибірок;  $\delta_i = \chi_i - y_i$ ,  $\chi_i$  та  $y_i$  – відповідні значення елементів першої та другої вибірок.

Іноді цей критерій називають *одновибірковим критерієм Стьюдента*. Відповідна статистика має розподіл Стьюдента з кількістю ступенів вільності  $n-1$ .

Якщо дисперсії або їх відношення є невідомими і припущення про рівність дисперсій є необґрунтованим, то виникає так звана *проблема Беренса–Фішера*, що полягає у перевірці нульової гіпотези про рівність вибірових середніх за таких умов. Одним з підходів до її вирішення є застосування *критерію Уелча (Крамера–Уелча)*, запропонованого Б. Уелчем в 1947 р. Його значення розраховують за формулою:

$$d = \frac{\sqrt{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}, \quad (3.14)$$

де  $s_1^2, s_2^2$  – розраховані за вибірками оцінки дисперсії.

Статистика цього критерію є приблизно такою самою, як для розподілу Стьюдента з кількістю ступенів вільності:

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}. \quad (3.15)$$

Порівняння з (3.11) вказує, що основною відмінністю критерію Уелча з погляду прикладного аналізу, є зміна кількості степенів вільності.

*F-критерій Фішера* запропоновано британським біологом і статистиком Рональдом Фішером в 1920 р. Його використовують для порівняння дисперсій двох вибірок. Його значення розраховують за формулою:

$$F = s_1^2 / s_2^2, \quad (3.16)$$

де  $s_1^2, s_2^2$  – значення оцінок більшої та меншої дисперсій відповідно. Кількості ступенів вільності для пошуку критичного значення обирають рівними  $n_1 - 1$  та  $n_2 - 1$ . Гіпотезу про рівність дисперсій порівнюваних сукупностей відхиляють, якщо обчислене значення перевищує табличне за заданого довірчого рівня. При цьому, якщо конкуруючою є одnobічна гіпотеза  $s_1^2 > s_2^2$ , то як критичну точку беруть значення оберненого розподілу Фішера, що відповідає рівню значущості  $\alpha$  за заданої кількості ступенів вільності. Якщо ж конкуруючою є двобічна гіпотеза  $s_1^2 \neq s_2^2$ , то критичною точкою буде значення оберненого розподілу Фішера, що відповідає рівню значущості  $\alpha / 2$ .

Якщо перевіряють гіпотезу про рівність виправленої дисперсії вибірки з гіпотетичною генеральною дисперсією генеральної сукупності, то значення критерію розраховують як:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}. \quad (3.17)$$

При цьому, якщо конкуруючою є однобічна гіпотеза  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ , то як критичну точку беруть значення оберненого  $\chi^2$  розподілу, що відповідає рівню значущості  $\alpha$  при  $\kappa = n - 1$  ступенях вільності. Нульову гіпотезу приймають, якщо  $\chi^2 < \chi_{\kappa\alpha}^2(\alpha, n-1)$ .

Якщо конкуруючою є однобічна гіпотеза  $\sigma^2 < \sigma_0^2$ , то як критичну точку беруть значення оберненого  $\chi^2$  розподілу, що відповідає рівню значущості  $1 - \alpha$  при  $\kappa = n - 1$  ступенях вільності. Нульову гіпотезу приймають, якщо  $\chi^2 > \chi_{\kappa(1-\alpha)}^2(1 - \alpha, n-1)$ .

Якщо ж конкуруючою є двобічна гіпотеза  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ , то критичні точки розраховують за рівняннями:

$$\begin{aligned} P(\chi^2 < \chi_{\kappa\alpha/2}^2(\alpha/2, n-1)) &= \alpha/2; \\ P(\chi^2 > \chi_{\kappa(1-\alpha/2)}^2(\alpha/2, n-1)) &= \alpha/2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Нульову гіпотезу приймають, якщо:

$$\chi_{\kappa(1-\alpha/2)}^2(\alpha/2, n-1) < \chi^2 < \chi_{\kappa\alpha/2}^2(\alpha/2, n-1). \quad (3.19)$$

При цьому можна враховувати, що внаслідок симетрії розподілу:

$$P(\chi^2 < \chi_{\kappa(1-\alpha/2)}^2) = 1 - P(\chi^2 > \chi_{\kappa\alpha/2}^2) = 1 - \alpha/2. \quad (3.20)$$

Для оцінювання значущості отриманого значення  $\chi^2$  використовують критерій В.І. Романовського (запропонований математиком Всеволодом Івановичем Романовським у 1928 р.):

$$R = \frac{\chi^2 - \kappa}{\sqrt{2\kappa}}. \quad (3.21)$$

При  $R \geq 3$  значення  $\chi^2$  вважають значущим, а порівнювані вибірки – істотно різними.

Параметричні тести можна застосовувати також при *множинних порівняннях*, тобто при порівнянні двох груп вибірок одна з одною. Кожну групу задають подібно до того, як задають параметри масивів даних у методах двофакторного дисперсійного аналізу. При *множинних порівняннях* використовують багатовимірні узагальнення тестів, що були розглянуті вище.

### 3.3 Дисперсійний аналіз

#### 3.3.1 Основні поняття дисперсійного аналізу

*Дисперсійний аналіз* є сукупністю статистичних методів, призначених для перевірки гіпотез про зв'язок між певною ознакою та досліджуваними факторами, які не мають кількісного опису, а також для встановлення ступеня впливу факторів та їх взаємодії.

У спеціальній літературі дисперсійний аналіз часто називають «ANOVA» (від англomовної назви «Analysis of Variations»).

Вперше цей метод було розроблено Р. Фішером в 1925 р.

*Факторами* називають контрольовані чинники, що впливають на кінцевий результат.

Рівнем фактора, або способом обробки, називають *значення*, що характеризують конкретний прояв цього фактора.

Ці значення зазвичай подають у номінальній або порядковій шкалі вимірювань.

Значення вимірюваної ознаки називають *відгуком*.

Часто вихідні значення факторів вимірюють у кількісних або порядкових шкалах.

Тоді постає проблема групування вихідних даних у ряди спостережень, що відповідають приблизно однаковим значенням фактора.

Якщо кількість груп взяти надмірно великою, то кількість спостережень у них може виявитися недостатньою для отримання надійних результатів.

Якщо її взяти надмірно малою, це може призвести до втрати суттєвих особливостей впливу досліджуваного фактора на систему.

Вибір конкретного способу групування даних залежить від їх обсягу і характеру варіювання значень фактора.

Кількість і розміри інтервалів при однофакторному аналізі найчастіше визначають за принципом рівних інтервалів або за принципом рівних частот.

При багатофакторному аналізі застосовують три типи групування:

- групи з рівною кількістю спостережень;
- групи з різною кількістю спостережень;
- групи, кількості спостережень у яких відповідають певній пропорції.

#### 3.3.2 Однофакторний аналіз

Основною метою *однофакторного аналізу* зазвичай є оцінка величини впливу конкретного фактора на досліджуваний відгук.

Іншою метою може бути порівняння двох або декількох факторів один з одним з метою визначення різниці їх впливу на відгук, яку часто називають *контрастом факторів*.

Попереднім етапом є перевірка нульової гіпотези про відсутність будь-якого впливу досліджуваного фактора (факторів), тобто гіпотези про те, що

зміни значень ознаки в порівнюваних вибірках є випадковими, і всі дані належать до однієї генеральної сукупності.

Якщо нульову гіпотезу відкидають, то наступним етапом є кількісне оцінювання впливу досліджуваного фактора і побудова довірчих інтервалів для отриманих характеристик.

У випадку, коли нульова гіпотеза не може бути відкинута, зазвичай її приймають і роблять висновок про відсутність впливу. Але, якщо є підстави вважати, що такий вплив має бути наявний (наприклад, це може впливати з теоретичних уявлень про об'єкт дослідження), то необхідно перевірити наявність інших факторів, що можуть його маскувати.

При однофакторному дисперсійному аналізі вихідні дані подають у вигляді таблиць, у яких кількість стовпчиків дорівнює кількості рівнів фактора, а кількість значень у кожному стовпчику – кількості спостережень при відповідному рівні фактора (табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Форма таблиці спостережень під час проведення однофакторного дисперсійного аналізу

Результати вимірювань	Рівні фактора			
	1	2	...	$k$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1k}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k}$
...	...	...	...	...
$n_i$	$x_{n_i1}$	$x_{n_i2}$	...	$x_{n_ik}$

Для різних рівнів фактора кількість спостережень може бути різною.

При цьому виходять з припущення, що результати спостережень для різних рівнів є вибірками з нормально розподілених сукупностей, середні значення та дисперсії яких є однаковими і не залежать від рівнів.

Завданням аналізу є перевірка нульової гіпотези про рівність середніх значень сукупностей, що розглядаються.

Метод базується на основній тотожності дисперсійного аналізу, згідно з якою сума квадратів відхилень спостережень від загального середнього (загальна варіація) дорівнює:

$$\sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{\kappa} n_j (\langle x_j \rangle - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2 \quad (3.22)$$

де  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$  – загальне середнє;  $\langle x_j \rangle = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$   $j = 1, \dots, \kappa$ ;  $N = \sum_{j=1}^{\kappa} n_j$  – загальна чисельність;  $\kappa$  – кількість вибірок;  $n_j (j = 1, 2, \dots, \kappa)$  – кількість елементів у  $j$ -й вибірці;  $\langle x_j \rangle$  – середнє значення  $j$ -ї вибірки.

У правій частині (3.22) перший доданок (*факторна, або міжгрупова варіація*) є зваженою сумою квадратів відхилень групових середніх від загального середнього. Він характеризує коливання значень, зумовлені фактором, на основі якого здійснено групування даних.

Другий доданок (*залишкова, або внутрішньогрупова варіація*) є сумою квадратів відхилень спостережень від відповідних групових середніх. Він характеризує коливання значень досліджуваної ознаки, зумовлені неврахованими факторами або випадковими чинниками.

*Сутність методу* полягає в тому, що за умови правильності нульової гіпотези величини

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N - \kappa} \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2 \quad (3.23)$$

та

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{\kappa - 1} \sum_{j=1}^{\kappa} n_j (\langle x_j \rangle - \bar{x})^2 \quad (3.24)$$

є незміщеними оцінками дисперсії похибок спостережень  $\sigma^2$  і мають бути приблизно рівними одна одній.

Перша з них є мірою варіації всередині вибірок і не пов'язана з припущенням про рівність середніх значень, тому  $\sigma^2 \approx \sigma_1^2$ , незалежно від справедливості нульової гіпотези.

Друга оцінка характеризує варіацію між вибірками.

В разі справедливості нульової гіпотези  $\sigma_2^2 \approx \sigma^2$ , а при її порушенні неї величина  $\sigma_2^2$  є тим більшою, чим більше відхилення від неї.

*Значення критерію* розраховують за формулою:

$$F = \frac{(N - \kappa) \sum_{j=1}^{\kappa} n_j (\langle x_j \rangle - \bar{x})^2}{(\kappa - 1) \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2} \quad (3.25)$$

Ця величина має  $F$ -розподіл Фішера з параметрами  $\kappa - 1$  та  $N - \kappa$ . Нульову гіпотезу відхиляють, якщо ймовірність  $P(F \geq F^*)$ , де  $F^*$  – значення, розраховане за емпіричними даними.

Непараметричним аналогом однофакторного дисперсійного аналізу є *ранговий однофакторний аналіз Краскела–Уолліса*.

Він розроблений американськими математиком Вільямом Краскелом та економістом Вільсоном Уоллісом в 1952 р.

Цей критерій призначений для перевірки нульової гіпотези про рівність ефектів впливу на досліджувані вибірки з невідомими, але рівними середніми.



При цьому кількість вибірок має бути більшою, ніж дві. Нульова гіпотеза полягає в тому, що  $k$  вибірок обсягами  $n_1, n_2, \dots, n_k$  отримані з однієї й тієї самої генеральної сукупності. Критерій Краскела–Уолліса є узагальненням  $U$ -критерію Манна–Уїтні на випадок, коли кількість вибірок  $k > 2$ .

Рангові методи, у тому числі й метод Краскела–Уолліса, не передбачають нормальності розподілу результатів спостережень і можуть застосовуватися як для кількісних даних із невідомим законом розподілу, так і для порядкових ознак.

У табл. 3.3 замість спостережень заносять їх ранги  $r_{ij}$ , отримані шляхом впорядкування за зростанням усієї сукупності спостережень  $x_{ij}$ .

Таблиця 3.3 – Загальний вигляд вихідної таблиці рангового однофакторного аналізу

№ результату	№ вибірки			
	1	2	...	$k$
1	$r_{11}$	$r_{12}$	...	$r_{1k}$
2	$r_{21}$	$r_{22}$	...	$r_{2k}$
...	...	...	...	...
$n_i$	$r_{n_i 1}$	$r_{n_i 2}$	...	$r_{n_i k}$

Для кожного рівня фактора, тобто для кожного стовпця, розраховують суму рангів  $R_j = \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij}$  або відповідні середні ранги  $\langle R_j \rangle = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij}$ .

Для контролю можна використовувати тотожність:

$$\sum_{i=1}^k R_i = \frac{N(N+1)}{2}, \quad (3.26)$$

де  $N = \sum_{i=1}^k n_i$  – загальна чисельність.

Якщо між стовпцями немає систематичної різниці, то останні будуть близькими до середнього рангу, розрахованого за усією сукупністю, який дорівнює  $(N+1)/2$ . Тому величини  $\langle R_j \rangle - (N+1)/2$  мають бути відносно малими, якщо нульова гіпотеза є правильною.

Обчислення критерію здійснюють за формулами:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) \quad (3.27)$$

або

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left( \langle R_j \rangle - \frac{N+1}{2} \right)^2. \quad (3.28)$$

За  $n_i \geq 5$  і  $\kappa \geq 4$  статистика критерію асимптотично наближається до  $\chi^2$ -розподілу з кількістю ступенів вільності  $\kappa - 1$ .

У цьому випадку нульову гіпотезу відхиляють на рівні значущості  $\alpha$ , якщо  $N > \chi^2_{1-\alpha}$ , де  $\chi^2_{1-\alpha}$  – квантиль рівня  $1 - \alpha$  розподілу  $\chi^2$  з  $\kappa - 1$  ступенем вільності.

При  $\kappa = 2$  статистика Крассела–Уолліса стає еквівалентною статистиці  $W$  Уїлкоксона.

Якщо серед спостережень є рівні значення, описану вище схему аналізу можна застосовувати як наближену.

Надійність її висновків буде тим нижчою, чим більшою є кількість збігів.

Для підвищення надійності можна використовувати середні ранги; при цьому у випадку, коли вони не є цілими числами, їх не округляють.

Якщо кількість збігів є великою, використовують модифіковану форму статистики Крассела–Уолліса:

$$H' = \frac{H}{1 - \left( \sum_{j=1}^g \frac{T_j}{N^3 - N} \right)}, \quad (3.29)$$

де  $g$  – кількість груп спостережень, що збігаються;  $T_j = (t_j^3 - t_j) t_j$  – кількість спостережень, що збігаються в  $j$ -ї групі.

### 3.3.3 Двофакторний аналіз

*Двофакторний дисперсійний аналіз* застосовують для пов'язаних нормально розподілених вибірок.

Дані подають у вигляді табл. 3.4, у стовпчиках якої наводять дані, що відповідають певному рівню першого фактора, а в рядках – дані, що відповідають рівням другого.

Таблиця даних має розмірність  $n \times k$ , де  $n$  і  $k$  – кількість рівнів першого та другого факторів відповідно.

Таблиця 3.4 – Таблиця даних двофакторного дисперсійного аналізу

Рівні фактора В	Рівні фактора А			
	1	2	...	$k$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1k}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k}$
...	...	...	...	...
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nk}$

Основною відмінністю від таблиці однофакторного дисперсійного аналізу є можлива неоднорідність даних у стовпцях, якщо вплив другого фактора є суттєвим.

На практиці часто використовують і складніші таблиці двофакторного дисперсійного аналізу, зокрема такі, в яких кожна комірка містить набір даних (повторні вимірювання), що відповідають фіксованим значенням рівнів обох факторів.

Для опису даних табл. 3.4 часто можна застосовувати адитивну модель, яка передбачає, що значення відгуку є сумою внесків окремо кожного із факторів  $b_i$  і  $t_j$ , а також незалежної від факторів випадкової компоненти  $\varepsilon_{ij}$ :

$$x_{ij} = b_i + t_j + \varepsilon_{ij}. \quad (3.30)$$

У випадку, коли випадкова компонента  $\varepsilon_{ij}$  підпорядковується нормальному розподілу з нульовим середнім і рівними для всіх  $i, j$  дисперсіями  $\sigma^2$  застосовують двофакторний дисперсійний аналіз (*дисперсійний аналіз за двома ознаками*).

Нульова гіпотеза може полягати в рівності ефектів стовпчиків між собою  $H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_\kappa = 0$ , або рівності ефектів рядків між собою  $H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ , тобто в першому випадку припускають відсутність впливу фактора  $A$ , а у другому – фактора  $B$ .

Як і у випадку однофакторного дисперсійного аналізу, в цьому разі розраховують дві оцінки дисперсії. При перевірці гіпотези  $H_{01}$  першу з них розраховують за формулою:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{(n-1)(\kappa-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\kappa} (x_{ij} - \langle x_i \rangle - \langle x_j \rangle + \langle x \rangle)^2, \quad (3.31)$$

де  $\langle x \rangle = \frac{1}{n\kappa} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\kappa} x_{ij}$  – загальне середнє за всіма спостереженнями;  $\langle x_i \rangle = \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^{\kappa} x_{ij}$  – середнє за  $i$ -м рядком;  $\langle x_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$  – середнє за  $j$ -м стовпчиком.

Оцінка дисперсії  $\sigma_1^2$  є незміщеною і не залежить від справедливості нульової гіпотези.

Другу оцінку розраховують за формулою:

$$\sigma_2^2 = \frac{n}{\kappa-1} \sum_{j=1}^{\kappa} (\langle x_j \rangle - \langle x \rangle)^2. \quad (3.32)$$

Вона є незміщеною лише за умови справедливості нульової гіпотези.

Що більшою є різниця між результатами дії фактора  $A$ , то більшим є значення, розраховане за формулою (3.32).

Для перевірки справедливості гіпотези  $H_{01}$  необхідно розрахувати відношення дисперсій:

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{n(n-1)(\kappa-1) \sum_{j=1}^{\kappa} (\langle x_j \rangle - \langle x \rangle)^2}{(\kappa-1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\kappa} (x_{ij} - \langle x_i \rangle - \langle x_j \rangle + \langle x \rangle)^2}. \quad (3.33)$$

Воно має  $F$ -розподіл Фішера з кількостями степенів вільності  $(\kappa-1)$  і  $(n-1)(\kappa-1)$ .

Нульову гіпотезу приймають на рівні значущості  $\alpha_2$ , якщо  $F < F_{1-\alpha}$ , де  $F_{1-\alpha}$  –  $\alpha$ -квантиль  $F$ -розподілу з відповідними кількостями ступенів вільності.

Для перевірки нульової гіпотези  $H_{02}$  можна використовувати формулу (3.32), в якій необхідно попарно поміняти місцями величини  $n$  і  $\kappa$ , а також  $i$  та  $j$ .

Якщо припущення, необхідні для застосування двофакторного дисперсійного аналізу, не виконуються, то використовують непараметричний ранговий критерій Фрідмана (Фрідмана, Кендалла та Сміта), розроблений американським економістом Мілтоном Фрідманом наприкінці 1930 р.

Цей критерій не залежить від типу розподілу.

Передбачається лише, що розподіл величин  $\varepsilon_{ij}$  є однаковим і неперервним, а самі вони є незалежними одна від одної.

При перевірці нульової гіпотези  $H_{01}: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{\kappa} = 0$ , вихідні дані подають у формі прямокутної матриці, у якій  $n$  рядків відповідають рівням фактора В, а  $\kappa$  стовпців – рівням фактора А.

Кожна комірка таблиці (блок) може бути результатом вимірювань параметрів на одному об'єкті або на групі об'єктів за сталих значень рівнів обох факторів.

У цьому випадку відповідні дані подають як середні значення певного параметра за всіма вимірюваннями або об'єктами досліджуваної вибірки.

Для застосування критерію в таблиці вихідних даних необхідно перейти від безпосередніх результатів вимірювань до їх рангів.

Ранжування здійснюють за кожним рядком окремо, тобто величини  $x_{ij}$  впорядковують для кожного фіксованого значення  $i$ , отримуючи при цьому  $k$  значень відповідних рангів  $r_{ij}$ .

Це дає можливість усунути вплив фактора В, значення якого для кожного рядка є однаковим.

Обчислення критерію здійснюють за формулою:

$$S = \left[ \frac{12}{n\kappa(\kappa+1)} \sum_{j=1}^{\kappa} \left( \sum_{i=1}^n r_{ij} \right)^2 \right] - 3n(\kappa+1). \quad (3.34)$$

Якщо необхідно перевірити нульову гіпотезу  $H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ , то вихідні дані необхідно ранжувати за стовпчиками і повторити описану вище процедуру із заміною  $n$  на  $\kappa$  і навпаки.

У разі справедливості нульової гіпотези і  $n \rightarrow \infty$   $S$ -статистика Фрідмана асимптотично наближається до статистики  $\chi^2$  з  $\kappa - 1$  – ступенем вільності, тому нульову гіпотезу можна прийняти на рівні значущості  $\alpha$ , якщо  $S < \chi_{1-\alpha}^2(\kappa - 1)$ .

### 3.4 Методи класифікації даних

#### 3.4.1 Основні поняття факторного аналізу

У процесі дослідження складних систем часто *немає можливості безпосередньо вимірювати величини*, що визначають їх властивості (фактори).

Більше того, нерідко є невідомими кількість та зміст цих факторів.

Але можуть вимірюватися інші величини, що залежать від них.

Якщо невідомий фактор впливає на декілька вимірюваних ознак, останні виявляють певний зв'язок, наприклад корельованість, між собою.

Тому *загальна кількість факторів може бути значно меншою, ніж кількість вимірюваних ознак*.

Для виявлення таких факторів використовують *факторний аналіз*.

Зменшення кількості факторів може бути необхідним також для забезпечення збіжності алгоритмів подальшого аналізу даних, скорочення ресурсів пам'яті ЕОМ та часу, потрібних для їх обробки, бажанням візуалізувати отримані результати тощо.

Основні ідеї факторного аналізу було сформульовано Ф. Гальтоном наприкінці XIX ст. Пізніше значний внесок у розвиток його методології зробили Р. Кеттелл, К. Пірсон, Ч. Спірмен, Л. Терстоун, Г. Хотеллінг та інші дослідники.

*Формально задачу факторного аналізу можна записати у такій спосіб.*

Є масив  $p$ -вимірних спостережень:

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{ip} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.35)$$

де  $n$  – кількість спостережень (об'єктів, станів);  $p$  – кількість параметрів, що характеризують кожне спостереження.

Необхідно подати результати у вигляді нового масиву:

$$Z_i = \begin{pmatrix} z_{i1} \\ z_{i2} \\ \dots \\ z_{ip} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.36)$$

такого, що  $p'$  є значно нижчим, ніж  $p$ . Компоненти вектора  $Z'$  називають факторами. На практиці зазвичай прагнуть, щоб виконувалася одна з умов:  $p' = (0,1 \dots 0,25)p$  або  $p' = 1 \dots 3$ .

Першим етапом факторного аналізу зазвичай є вибір нових ознак (факторів), які є лінійними комбінаціями старих і відображають переважну частку загальної змінності вихідних даних. Тому вони зберігають основну частину інформації, що містили ці дані. Другим етапом є обертання факторів з метою спрощення їх інтерпретації.

Об'єктом дослідження методами факторного аналізу, як правило, є кореляційна матриця, побудована із застосуванням коефіцієнта кореляції Пірсона для кількісних ознак. Основною вимогою до цієї матриці є її додатна напіввизначеність. Згідно з умовами Сильвестра для цього достатньо, щоб усі її головні мінори були невід'ємними. З додатної напіввизначеності кореляційної матриці випливає невід'ємність усіх її власних значень.

Методами факторного аналізу вирішують три основні групи проблем:

- пошук передбачуваних неявних закономірностей, що визначаються впливом зовнішніх або внутрішніх чинників на досліджуваний процес;
- виявлення та вивчення статистичного зв'язку ознак із факторами або головними компонентами;
- стискування інформації шляхом подання процесу за допомогою узагальнених факторів або головних компонент, кількість яких є меншою за кількість обраних спочатку ознак (параметрів), але достатньою для забезпечення відтворення кореляційної матриці з потрібною точністю.

Розрізняють *R*-техніку та *Q*-техніку факторного аналізу.

Перша з них розроблена британським психологом Реймондом Б. Кеттеллом і передбачає розрахунок коефіцієнтів кореляції між параметрами (ознаками), що утворюють матрицю вихідних даних.

Її використовують для зменшення кількості параметрів. *Q*-техніку запропонував британський психолог В. Стефенсон в 1935–1936 рр. й докладно описав Р.Б. Кеттелл у 1946 р.

За її допомогою вивчають кореляцію між об'єктами або станами об'єктів. Її застосовують для зменшення кількості об'єктів.

З формального погляду, в першому випадку шукають кореляцію між стовпчиками таблиці спостережень (табл. 3.5), а у другому – між її рядками.

Таблиця 3.5 – Загальний вигляд таблиці спостережень для факторного аналізу

Номери об'єктів (станів)	Параметри об'єктів (станів)			
	1	2	...	$p$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1p}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2p}$
...	...	...	...	...
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{np}$

Крім того, розроблено  $R$ -техніку, яку використовують при дослідженні одного об'єкта, якщо значення його ознак вимірюють у різні моменти часу, а також  $Q$ -техніку,  $S$ -техніку та  $T$ -техніку, які також докладно були описані Р. Кеттеллом в 1940 р. Понад 50 % усіх завдань, що передбачають застосування факторного аналізу, вирішують за допомогою  $R$ -техніки.

*Основними методами факторного аналізу* є методи головних компонент, головних факторів, максимальної правдоподібності та центроїдний.

Усі вони ґрунтуються на припущенні, що досліджувана залежність є лінійною. Вихідні дані мають підпорядковуватися багатовимірному нормальному розподілу, але *центроїдний метод* є досить стійким до відхилень від такого закону.

Метою факторного аналізу є зменшення кількості змінних та визначення структури взаємозв'язків між змінними (класифікація даних). З формального погляду, його метою є одержання матриці факторного відображення. Її рядки є координатами кінців векторів, що відповідають  $n$  змінним у  $p$ -вимірному факторному просторі. Близькість цих векторів свідчить про взаємну залежність змінних. Якщо кількість факторів перевищує одиницю, зазвичай здійснюють обертання матриці факторного відображення для одержання більш простої її структури.

Однією з проблем, що виникають при застосуванні факторного аналізу, є необхідність знаходження власних значень кореляційної матриці.

Якщо вона є виродженою, ця задача може виявитися нерозв'язною. Для матриць високого порядку може відбуватися втрата значущості у процесі обчислень. У певних випадках проблему виродженості можна зняти виключенням лінійно залежних параметрів.

Метод Якобі дає змогу визначити власні значення і для вироджених кореляційних матриць. Але при цьому частина їх, яка дорівнює різниці між порядком та рангом матриці, буде мати значення, що не перевищують обчислювальної похибки. Завдяки цьому метод головних компонент виявляється стійкішим до аналізу відповідних даних, ніж метод максимуму правдоподібності.

Водночас він є гіршим за останній, з погляду можливості отримання точної оцінки загальності й досягнення повного відтворення кореляційної матриці.

*Обов'язковими умовами факторного аналізу є такі:*

- всі досліджувані ознаки мають бути кількісними;
- кількість ознак має бути принаймні удвічі більшою, ніж кількість змінних;
- вибірка має бути однорідною;
- вихідні змінні повинні мати симетричний розподіл.

### 3.4.2 Метод головних компонент

Метод головних компонент, або компонентний аналіз вперше був запропонований К. Пірсоном у 1901 р., який розглядав задачу найкращої (з погляду мінімізації суми квадратів відхилень) апроксимації сукупності точок прямими та площинами.

Потім він був докладно розроблений американським статистиком і економістом Гарольдом Хотеллінгом у 1933 р.

Його важливою перевагою є те, що він є єдиним математично обґрунтованим методом факторного аналізу.

За своєю сутністю метод полягає у виборі нової ортогональної системи координат у просторі спостережень.

Як першу головну компоненту обирають напрям, уздовж якого масив спостережень має найбільшу дисперсію.

Кожну наступну компоненту обирають також з умови максимізації частки дисперсії, що залишилася, уздовж неї, доповненої умовою ортогональності всіх раніше обраних компонентів.

При цьому зі зростанням номера компоненти буде зменшуватися пов'язана з нею частка загальної дисперсії.

Кількість компонент визначається значною мірою суб'єктивно, виходячи з розуміння того, яка величина загальної дисперсії відповідає випадковій змінності, що відображає похибку вимірювань, вплив неконтрольованих випадкових чинників тощо.

Основну модель можна записати в матричному вигляді:

$$\tilde{Z} = LX, \quad (3.37)$$

де  $X$  –  $p$ -вимірний випадковий вектор з вектором середніх значень  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  і коваріаційною матрицею  $\Sigma = (\sigma_{ij}), i, j = 1, \dots, p$ ;

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \dots & \ell_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_{p1} & \dots & \ell_{pp} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

– матриця факторного відображення, рядки якої задовольняють умову ортогональності.

Мірою інформативності факторів є величина:

$$I_{p'}(Z) = \frac{D_{z_1} + \dots + D_{z_{p'}}}{D_{x_1} + \dots + D_{x_p}}, \quad (3.39)$$

де  $D$  – дисперсія.

Матрицю факторного відображення вибирають з умови:



$$I_p(\tilde{Z}) = \max_{Z(X) \in F} I_p(Z), \quad (3.40)$$

де  $F(X)$  – клас допустимих перетворень досліджуваних ознак.

*Першою головною компонентою*  $\tilde{Z}_1(x)$  досліджуваної системи показників  $X = (x_1, \dots, x_p)^T$  називають таку нормовано-центровану лінійну комбінацію цих показників, яка серед усіх інших нормовано-центрованих лінійних комбінацій змінних  $x_1, \dots, x_p$  має найбільшу дисперсію.

*K-ю головною компонентою*  $\tilde{Z}_k(x)$  досліджуваної системи показників  $X = (x_1, \dots, x_p)^T$  називають таку нормовано-центровану лінійну комбінацію цих показників, яка не корельована з  $k-1$  попередніми головними компонентами і серед усіх інших нормовано-центрованих і некорельованих з  $k-1$  попередніми головними компонентами лінійних комбінацій змінних  $(x_1, \dots, x_p)$  має найбільшу дисперсію.

Центрування змінних здійснюють шляхом перетворення:

$$\tilde{x}_i^j = x_i^j - \bar{x}^j = x_i^j - \alpha^j, \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (3.41)$$

Нормування змінних здійснюють перетворенням:

$$x_{\nu}^{*i} = \frac{\tilde{x}_{\nu}^i}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}}}, \quad \hat{\sigma}_{sj} = \frac{\sum_{\nu=1}^n (x_{\nu}^s - \bar{x}^s)(x_{\nu}^j - \bar{x}^j)}{n}; \quad j, \kappa = 1, \dots, p; \nu = 1, \dots, n. \quad (3.42)$$

Для визначення головних компонент розраховують власні числа і власні вектори кореляційної матриці, розв'язуючи рівняння:

$$|\Sigma - \lambda I| = 0, \quad (3.43)$$

де  $I$  – одинична матриця.

Для дійсної симетричної матриці розміром  $p \times p$  це рівняння має  $p$  дійсних коренів  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , які є власними числами. Можна довести, що  $D_{\tilde{z}_1} = \lambda_1$ , де  $\lambda_1 = \max_j \lambda_j$ .

Кореляційну матрицю розміром  $p \times p$  обчислюють за формулою:

$$R = \frac{1}{p-1} X^* X^{*T}. \quad (3.44)$$

На головній діагоналі кореляційної матриці  $R$  стоять значення, які дорівнюють одиниці.

Розв'язуючи систему:

$$(\Sigma - \lambda_1 I) \ell_1^T = 0 \quad (3.45)$$

отримуємо значення компонент власного вектора  $\ell_1$ . Потім аналогічно розраховують інші власні вектори.

Враховуючи вказану вище властивість власних чисел, критерій інформативності можна записати у вигляді:

$$I_{p'} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{p'}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}, \quad (3.46)$$

де  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  – власні числа матриці  $\Sigma$ , впорядковані у порядку згасання.

Вибір критерію інформативності в методі головних компонент передбачає, що найбільш важливу інформацію про аналізовану систему можна відобразити лінійною моделлю, яка відповідає такому вибору системи координат у тому самому просторі, що забезпечує максимальні дисперсії для проєкцій досліджуваних об'єктів. Такий підхід є доцільним, якщо більшість вихідних ознак узгоджено впливає на властивість, що вивчається, і пригнічує вплив іррелевантних чинників на розподіл об'єктів. Адекватну модель можна отримати також у випадку, коли кількість пов'язаних інформативних ознак є невеликою, але вплив інших чинників є неузгодженим. У цьому разі не порушується однорідність еліпсоїда розсіювання, а лише зменшується його довгастість уздовж напрямку досліджуваної властивості.

У факторному аналізі використовують також інші міри інформативності, що дають змогу визначити кількість істотних факторів.

*Критерій Кайзера*, або *критерій власних чисел*, запропонований американським психологом Генрі Феліксом Кайзером, передбачає, що до моделі включають тільки фактори, для яких власні числа є не меншими, ніж одиниця. За змістом це означає, що таким факторам відповідає дисперсія, еквівалента принаймні дисперсії однієї змінної. У протилежному випадку виокремлення фактора не має сенсу. Цей критерій іноді залишає в моделі занадто багато факторів.

*Критерій кам'янистого осипу (критерій відсіювання)* передбачає побудову графіка, де по осі абсцис відкладають порядковий номер власного числа, а по осі ординат – його значення.

Згідно з Р. Кеттелом необхідно знайти точку найбільшого уповільнення спадання власних значень і враховувати лише фактори, яким відповідають власні числа, розташовані лівіше цієї точки.

На відміну від попереднього, цей критерій статистично необґрунтований й часто залишає в моделі не всі істотні фактори.

Втім у випадках, коли істотних факторів небагато, а кількість змінних є великою, обидва критерії є придатними для практичного застосування.

На практиці часто здійснюють розрахунки, використовуючи різні критерії, а потім обирають модель, що містить найбільшу кількість факторів, яким можна надати змістову інтерпретацію.

Критерії, що ґрунтуються на аналізі визначників вихідної та відтвореної кореляційної матриць, часто виявляються нестійкими.

Критерії, які базуються на величині власних значень кореляційної матриці, у підсумку призводять до аналізу відсотка дисперсії, виділеної факторами.

Усі загальні фактори, кількість яких дорівнює кількості параметрів, пояснюють 100 % дисперсії. Якщо сума відсотків за факторами перевищує 100 %, це свідчить про отримання від'ємних власних значень і, відповідно, комплексних власних векторів, що може бути наслідком некоректної редукції вихідної кореляційної матриці.

Доцільно здійснювати двохетапну процедуру аналізу. На першому етапі максимальну кількість факторів не задають. Після його проведення аналізують дисперсії, оцінюють приблизну кількість факторів і проводять повторний аналіз.

### 3.4.3 Метод головних факторів

*Цей метод використовують для зменшення кількості змінних.*

*У його основі лежить припущення, що не всі змінні, які вимірювали під час дослідження системи, є незалежними.*

Тому є можливим формування нових змінних, що достатньо повно відображають наявну інформацію.

*На відміну від методу головних компонент, метод головних факторів ґрунтується не на дисперсійному критерії інформативності множини ознак, а на поясненні кореляцій, що існують між цими ознаками.*

Він враховує, що вихідні дані можуть містити грубі помилки, які у багатовимірному аналізі призводять до помилок інтерпретації.

Тому метод головних факторів застосовують у більш складних випадках, зокрема за наявності сумісного прояву аналізованих та іррелевантних властивостей об'єктів, що є порівнянними за ступенем внутрішньої узгодженості, а також для виділення групи діагностичних показників із вихідної множини ознак.

Основну модель методу головних факторів записують у вигляді:

$$X^* = MF. \quad (3.47)$$

Матриця  $X^*$  є матрицею нормовано-центрованих значень вихідних ознак, що має розмірність  $n \times p$ .

У методі головних факторів припускають, що кожний елемент матриці  $X^*$  є результатом впливу  $m$  гіпотетичних загальних факторів та одного характерного фактора.

Характерні фактори вважають некорельованими один з одним, а також із загальними факторами.

Загальні фактори пов'язані з істотними ваговими коефіцієнтами більше, ніж з одною ознакою. Ті з них, для яких істотними є всі вагові коефіцієнти, називають *генеральними факторами*.

Перший варіант методу, запропонований Ч. Спірменом на початку 1900 р. передбачав існування одного загального та одного характерного факторів.

Пізніше у 1920 р. британський та американський психолог Раймонд Бернард Кеттел та американський психолог Карл Джон Хользінгер запропонували біфакторну модель, яка передбачала існування декількох, зазвичай двох, загальних факторів. Сучасний варіант методу головних факторів було запропоновано Г. Томсоном.

Повну факторну матрицю  $M$  можна подати як:

$$M = A + D, \quad (3.48)$$

де  $A$  та  $D$  – відповідно матриці навантажень загальних і характеристичних факторів, які мають розмірність  $F$ .

Матриця  $A$  є матрицею (значущих або незначущих) вагових коефіцієнтів загальних факторів і записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pm} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Її ненульова частина розміром  $n \times m$  є матрицею факторного відображення. Всі вагові коефіцієнти цієї матриці при характерних факторах дорівнюють нулю.

Рівняння (3.49), а також матрицю  $A$  називають *факторним відображенням*.

Матриця

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & d_p \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

є матрицею вагових коефіцієнтів характерних факторів. Усі її вагові коефіцієнти для загальних факторів дорівнюють нулю.

Матриця  $F$  є матрицею значень факторів (загальних і характерних) для всіх об'єктів. Її можна записати у вигляді:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \\ v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{p1} & v_{p2} & \dots & v_{pn} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Оскільки значення ознак є нормованими, їх загальні дисперсії дорівнюють одиниці. Можна показати, що дисперсія  $j$ -ї ознаки:

$$\hat{s}_j^2 = 1 = d_j^2 + h_j^2, \quad (3.52)$$

де  $h_j^2 = \sum_{r=1}^m a_{jr}^2$  – загальність ознаки, що є сумою відносних внесків  $m$  загальних факторів до дисперсії;  $d_j^2$  – характерність ознаки, яка відображає внесок характерного фактора  $v_j$  до дисперсії ознаки  $x_j^*$ . У свою чергу, характерність можна подати у вигляді:

$$d_j^2 = b_j^2 + c_j^2, \quad (3.53)$$

де  $b_j^2$  – специфічність ознаки, що безпосередньо відображає специфіку відповідного фактора;  $c_j^2$  – дисперсія похибки.

Використовують також поняття *надійності*:

$$r_j^2 = h_j^2 + b_j^2 = 1 - c_j^2 \quad (3.54)$$

яка є часткою загальної дисперсії, непов'язаною із похибкою.

*Повнотою факторизації* називають величину:

$$\kappa = \frac{V_0}{p} = \frac{\sum_{r=1}^m V_r}{p}. \quad (3.55)$$

Вихідна матриця  $X^*$  дає змогу отримати кореляційну матрицю  $R$ :

$$R = \frac{1}{n} X^* X^{*\Gamma}. \quad (3.56)$$

Ураховуючи (3.56), її можна також записати у вигляді:

$$R = MM^T = AA^T + DD^T = R_h + D^2. \quad (3.57)$$

Матриця  $R$  є симетрическою та дійсною. Елементами її головної діагоналі є дисперсії відповідних ознак, які дорівнюють одиниці. Тому сумарна дисперсія всіх ознак дорівнює сумі діагональних елементів матриці  $R$ .

Матрицю  $R_h$  називають *редукованою (кореляційною) матрицею*.

У випадку, коли допускається кореляція між загальними факторами,

$$R_h = R - D^2 = ACA^T, \quad (3.58)$$

де  $C = \frac{1}{n} FF^T$  – матриця коефіцієнтів кореляції між факторами.

Цей вираз називають *фундаментальною теоремою факторного аналізу*.

Якщо загальні фактори некорельовані один з одним, то матриця  $C$  є одиничною і  $R_h = AA^T$ .

Діагональними елементами редукованої матриці є загальності.

З (3.58) та властивостей кореляційної матриці випливає, що всі  $h_j^2 < 1$ .

Для вирішення завдань факторного аналізу необхідно визначити їх оцінки за вихідними даними.

Існує два підходи до їх отримання.

У методах головних факторів, центроїдному та трикутній декомпозиції, спочатку визначають загальності, а потім кількість факторів.

У методах максимальної правдоподібності й максимальних залишків використовують іншу послідовність: спочатку задають кількість факторів  $m$ , а потім підбирають значення загальностей так, щоб ранг матриці  $R_h$  наблизився до  $m$ .

Нижньою межею загальності є квадрат множинного коефіцієнта кореляції  $j$ -ї ознаки з іншими ознаками, а верхньою – квадрат коефіцієнта надійності.

Звідси:

$$R_j^2 \leq h_j^2 \leq r_j^2. \quad (3.59)$$

При розробці методів оцінювання загальностей виходять із визначення Д. Лоулі й К. Рао, згідно з яким *загальності* – це величини, які при статистично значущих факторах дають змогу найкращим чином відтворити кореляційну матрицю.

*Найчастіше використовують такі методи оцінювання загальностей.*

Перший метод ґрунтується на тому, що із зростанням кількості ознак при сталій кількості факторів нижня межа оцінки загальності (142) збігається до її істинного значення.

Завдяки цьому можна використовувати як оцінку формулу:

$$h_j^2 \approx 1 - \frac{1}{r_{jj}}, \quad (3.60)$$

де  $r_{jj}$  –  $j$ -й діагональний елемент матриці  $R^1$ .

Другий метод базується на припущенні, що за великої кількості ознак як значення загальності можна використовувати найбільший за модулем коефіцієнт кореляції даної ознаки (відповідних рядка або стовпчика) з іншими змінними, взятий зі знаком плюс.

Цей метод немає теоретичного підґрунтя, але практика свідчить, що при кількості ознак понад 20 одержувані за його допомогою результати мало відрізняються від тих, що отримують за допомогою більш точних методів.

Згідно із третім методом як значення загальності беруть не максимальне, а середнє за відповідним рядком (стовпчиком) значення коефіцієнта кореляції:

$$h_j^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq j}}^p r_{j\kappa} . \quad (3.61)$$

Й нарешті, в останньому способі (*метод триад*) в  $j$ -му рядку (стовпчику) беруть два найбільші (за модулем) значення коефіцієнтів кореляції  $r_{j\kappa}$  й  $r_{jl}$  ( $\kappa, l \neq j$ ). Після цього значення загальності обчислюють за допомогою триади:

$$h_j^2 = \frac{r_{j\kappa} r_{jl}}{r_{\kappa l}} . \quad (3.62)$$

Першим кроком *алгоритму методу головних факторів* є отримання матриці парних коефіцієнтів кореляції  $R$ , на головній діагоналі якої стоять одиниці.

Наступним кроком є одержання редукованої матриці  $R_h$  із загальностями на головній діагоналі.

Далі визначають перший загальний фактор, виходячи з умови, що його внесок  $\nu_1$  до дисперсії процесу має бути максимальним, тобто:

$$\nu_1 = \sum_{j=1}^p \alpha_{j1}^2 \rightarrow \max . \quad (3.63)$$

При цьому мають бути виконані умови:

$$r_{j\kappa} = \sum_{r=1}^m \alpha_{jr} \alpha_{\kappa r} \quad (j, \kappa = 1, \dots, p) . \quad (3.64)$$

Для розв'язування цієї задачі можна скористатися методом невизначених множників Лагранжа, який призводить до системи:

$$\sum_{\kappa=1}^p r_{j\kappa} \alpha_{\kappa 1} - \lambda_1 \alpha_{j1} = 0 , \quad (3.65)$$

де  $\lambda_1 = \sum_{j=1}^p \alpha_{j1}^2$ .





Нульову гіпотезу відхиляють, якщо отримана величина перевищує критичне значення для кількості степенів вільності  $\nu = 0,5[(p-m)^2 - p - m]$ .

### 3.5 Параметричні методи класифікації без навчання

#### 3.5.1 Основні поняття класифікації даних

У загальному випадку класифікацією (розпізнаванням образів) називають поділ досліджуваної сукупності об'єктів на однорідні в певному розумінні групи (класи) або зарахування кожного із заданої множини об'єктів до деякого із заздалегідь відомих класів.

При цьому вирізняють три групи завдань: дискримінацію, кластеризацію та групування.

Останні дві групи є близькими за метою (поділ даних на класи або групи близьких у певному розумінні об'єктів), а також за алгоритмами.

Але принципова різниця між ними полягає у тому, що у першому випадку межі класів є природними, а у другому – умовними й їх можна встановлювати суб'єктивно.

При побудові методів розв'язування цієї задачі зазвичай прагнуть мінімізувати ймовірність неправильної класифікації.

Для цього можна побудувати функцію втрат  $c(j|i)$ , що характеризує втрати від помилкового зарахування об'єкта  $i$ -го класу до  $j$ -го класу.

При  $i = j$  беруть  $c(j|i) = 0$ , а при  $i \neq j$  –  $c(j|i) > 0$ .

Якщо кількість таких помилок є  $m(j|i)$ , то загальні втрати:

$$C_n = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=1}^{\kappa} c(j|i) m(j|i), \quad (3.70)$$

де  $n$  – кількість класифікованих об'єктів;  $\kappa$  – кількість класів.

Величина  $C_n$  залежить від  $n$ . Для усунення такої залежності можна ввести питомі втрати (у розрахунку на один об'єкт) і перейти до границі при  $n \rightarrow \infty$ .

Тоді:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_n / n) = \sum_{i=1}^{\kappa} \pi_i \sum_{j=1}^{\kappa} c(j|i) P(j|i) = \sum_{i=1}^{\kappa} \pi_i C(i), \quad (3.71)$$

де  $\pi_i$  – апіорна ймовірність (питома вага)  $i$ -го класу;  $P(j|i)$  – ймовірність помилкового зарахування об'єкта  $i$ -го класу до  $j$ -го класу, величина  $C(i)$  визначає середні втрати від неправильної класифікації об'єктів  $i$ -го класу.

У багатьох випадках втрати є однаковими для будь-якої пари  $i$  та  $j$ , тобто:

$$c(j|i) = c_0 = \text{const}(i \neq j). \quad (3.72)$$

Тоді мінімізація функції втрат є еквівалентною максимізації ймовірності правильної класифікації, яка дорівнює  $\sum_{i=1}^k \pi_i P(i|i)$ .

З огляду на це, при побудові процедур класифікації часто розв'язують задачу мінімізації ймовірності неправильної класифікації:

$$\frac{C}{c_0} = 1 - \sum_{i=1}^k \pi_i P(i|i). \quad (3.73)$$

На результат класифікації істотно впливають *типи класів*.

*Найчастіше виокремлюють такі типи:*

1. *Клас типу ядра, або згущення.* У цьому випадку всі відстані між об'єктами всередині класу є меншими, ніж їх відстані до будь-якого об'єкта, що не входить до цього класу.

2. *Кластер, або згущення у середньому.* Середня відстань між об'єктами всередині класу є меншою, ніж їх середня відстань до всіх інших об'єктів.

3. Для класу типу *стрічки* існує таке  $\varepsilon > 0$ , що в цьому класі є хоча б один об'єкт  $x_i$ , для якого відстань до будь-якого іншого об'єкта цього класу  $x_j$   $d_{ij} < \varepsilon$ , а відстань до будь-якого об'єкта  $x_k$ , що не належить до цього класу,  $d_{ij} < \varepsilon$ .

4. Характеристичною властивістю *класу із центром* є існування певних граничного значення  $R$  і точки  $\chi^*$  у просторі ознак таких, що у багатовимірному шарі радіуса  $R$  з центром в точці  $\chi^*$  містяться всі елементи цього класу й немає елементів, які не належать до нього.

Слід зазначити, що один й той самий клас може задовольняти визначення декількох типів.

Тому вказана класифікація є важливою не стільки з погляду зарахування конкретного класу до певного типу, а з погляду вибору методів розділення декількох класів.

Класи, що перетинаються, можуть не задовольняти будь-які з наведених вимог.

Але в окремих випадках їх також можна розділяти за допомогою формальних алгоритмів класифікації.

### 3.5.2 Параметричні методи класифікації без навчання

У *методах класифікації без навчання* програмна система на основі визначених нею самою критеріїв здійснює класифікацію певних об'єктів (образів).

У деяких випадках можуть бути задані окремі параметри, але розподіл об'єктів за класами на основі цих параметрів виконується автоматично.

Параметричні методи класифікації без навчання використовують при класифікації об'єктів  $O_1, O_2, \dots, O_n$ , якщо апріорна інформація про класи може

бути подана у вигляді суміші параметрично заданих одномодальних функцій щільності розподілу ймовірностей  $f_j(x, \theta_j), j=1, \dots, k$  з невідомими значеннями векторних параметрів  $\theta_j$ .

Функцію  $f(x)$  називають *дискретною* або *неперервною сумішшю ймовірнісних розподілів*, якщо її можна записати у вигляді, відповідно:

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \pi_j f_j(x, \theta_j) \quad (3.74)$$

або

$$f(x) = \int f_\omega(x, \theta(\omega)) \pi(\omega) d\omega \quad (3.75)$$

У задачах класифікації зазвичай розглядають дискретні суміші.

Розв'язання задачі розщеплення суміші розподілів передбачає побудову статистичних оцінок для кількості компонентів суміші (класів)  $k$ , їх питомих ваг (ап'юріорних ймовірностей)  $\pi_j$  та функцій  $f_j(x, \theta_j)$  для кожного із компонентів за наявною вибіркою спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Основною ідеєю більшості методів розв'язування цієї задачі є прагнення зарахувати спостереження  $x_i$  до того класу, для якого функція правдоподібності буде максимальною.

У найпростішому випадку із попередніх досліджень можуть бути відомі кількість класів, їх ап'юріорні ймовірності та параметричний вигляд функцій щільності ймовірності  $f_j(x, \theta_j)$ , але невідомі значення параметрів  $\theta_j$ .

Якщо при цьому є навчальні вибірки, то ми отримуємо задачу параметричного дискримінантного аналізу.

Якщо ж таких вибірок немає, то значення параметрів необхідно оцінити за наявною вибіркою спостережень за допомогою одного зі статистичних методів оцінювання параметрів – максимальної правдоподібності, моментів тощо.

Після отримання оцінок невідомих параметрів можна застосовувати схему параметричного дискримінантного аналізу.

Аналогічний підхід використовують і в більш складних випадках, коли кількість класів та їх ап'юріорні ймовірності є невідомими.

У цьому разі їх також необхідно оцінити за наявною вибіркою.

Для розв'язання задачі розщеплення суміші розподілів часто використовують *ЕМ (Expectation – Maximization) алгоритм*, вперше запропонований в 1977 р. американськими статистиками Артуром Демпстером, Неном Лайрдом і Дональдом Рубіном.

Цей алгоритм дає змогу визначати методом найбільшої правдоподібності параметри статистичних моделей, що містять певні приховані змінні.

Він передбачає здійснення двох кроків на кожній ітерації.

Перший крок (*Expectation*) полягає в обчисленні значення функції правдоподібності за умови, що задані деякі значення прихованих змінних.

На другому кроці (*Maximization*) обчислюють значення параметрів, що максимізують функцію правдоподібності.

Обчислення виконують до виконання заданих умов збіжності.

Недоліками алгоритму є залежність результату від вибору початкового наближення (якщо функція правдоподібності не є унімодальною).

Крім того, цей алгоритм не дає змоги визначити кількість компонент суміші.

Для усунення цих недоліків пізніше було запропоновано різноманітні модифікації EM алгоритму: медіанні, стохастичний (SEM), класифікаційний (CEM), узагальнений (GEM), з додаванням компонент тощо.

### 3.5.3 Кластерний аналіз

У непараметричному випадку ми не маємо інформації про загальний вигляд функцій  $f_j(x, \theta_j)$ .

Ми можемо мати лише окремі загальні відомості про них: компактність або обмеженість діапазонів змінювання компонент класифікованих багатовимірних спостережень, неперервність або гладкість відповідних законів розподілу ймовірностей тощо.

Вихідні дані зазвичай подають у вигляді матриці спостережень, яка містить значення всіх ознак для кожного із досліджуваних об'єктів, або матриці подібності, що містить попарні відстані між класифікованими спостереженнями.

Бажано, щоб компоненти вектора  $X$  відповідали одному й тому самому типу даних.

Для цього зазвичай використовують перехід від кількісних ознак до порядкових та від порядкових до номінальних.

Але слід ураховувати, що при цьому втрачається частина корисної інформації.

Для формалізації задачі класифікації кожний об'єкт зручно інтерпретувати як точку в багатовимірному просторі ознак.

Геометрична близькість точок у такому просторі відповідає близькості досліджуваних об'єктів із погляду досліджуваних властивостей (рис. 3.4).

Наочне уявлення про зміст класифікації дає діаграма Герцшпрунга–Расселла (рис. 3.5), яка є основою для однієї з найпоширеніших класифікацій зірок за поєднанням їх світності й кольору (температури або спектрального класу).

*Залежно від мети дослідження задачу класифікації можна сформулювати як розбиття аналізованих об'єктів на певну кількість груп, усередині яких вони розташовані на порівняно малій відстані один від одного, або як виявлення природного розшарування сукупності, що вивчається, на окремі кластери.*

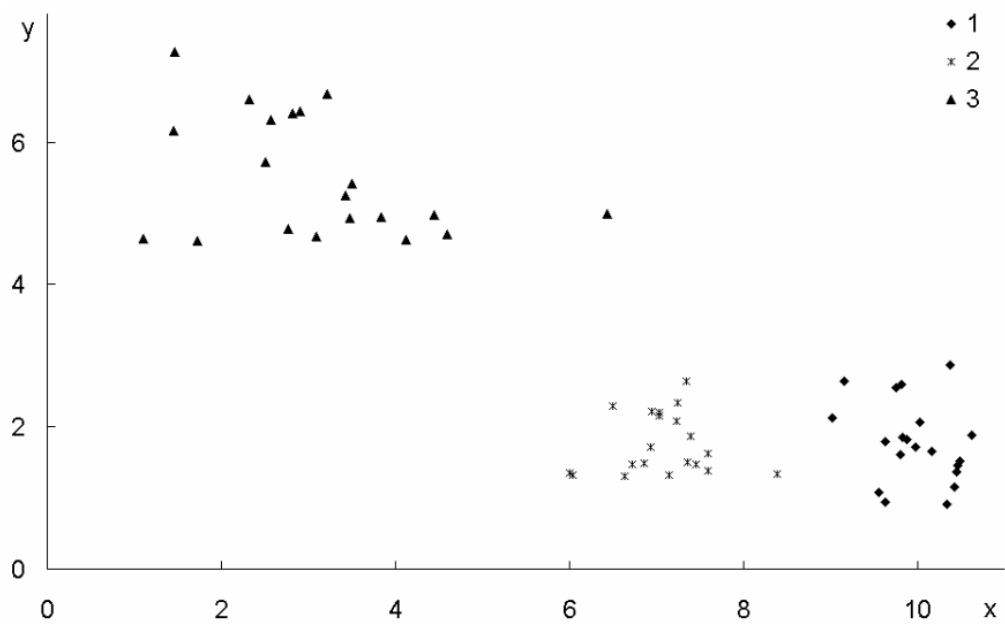


Рисунок 3.4 - Геометричне зображення сукупності об'єктів, що характеризуються двома ознаками й утворюють три кластери

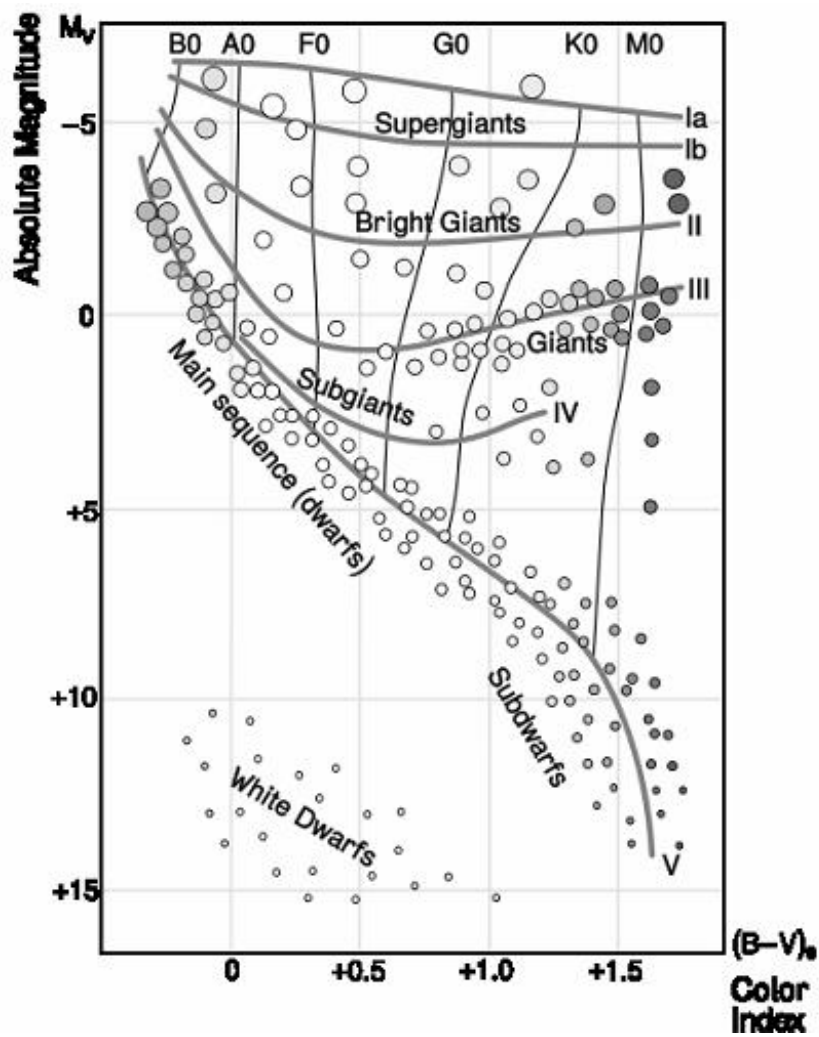


Рисунок 3.5 - Діаграма Е. Герцшпрунга-Г. Расселла

Другу задачу можна також сформулювати як визначення областей підвищеної густини точок, що відповідають наявним спостереженням.

Перша задача завжди має розв'язок, а друга може не мати розв'язку. Це відповідає відсутності природного розшарування досліджуваних об'єктів (наприклад, вони утворюють один кластер або відповідні точки рівномірно заповнюють весь простір ознак).

Класичними непараметричними методами класифікації без навчання є методи кластерного аналізу (таксономії).

За їх допомогою вирішують проблему такого розбиття (класифікації, кластеризації) множини об'єктів, за якого всі об'єкти, що належать до одного класу, були б більш подібними один до одного, ніж до об'єктів інших класів.

З формальної точки зору, основне завдання методів кластерного аналізу можна сформулювати, як визначення класів еквівалентності й рознесення за ними досліджуваних об'єктів.

Під класом, як правило, розуміють генеральну сукупність, що описується одномодальною функцією щільності ймовірності  $f(X)$  або, у випадку дискретних ознак, – одномодальним полігоном імовірностей.

Номери класів не мають змістового навантаження й використовуються лише для того, щоб відрізнити їх один від одного.

Для формування кластерів застосовують міри подібності та відмінності даних, які можуть бути поділені на три основних види:

➤ міри подібності (відмінності) типу «відстань» (при їх застосуванні об'єкти вважають тим більш подібними один до одного, чим меншою є відстань між ними);

➤ міри подібності типу «зв'язок» (у цьому випадку об'єкти вважають тим більш подібними, чим сильнішим є зв'язок між ними);

➤ інформаційна статистика.

Як міру відстані (метрику) можна використовувати будь-яку функцію  $\rho(X_i, X_j)$ , що визначена на множині  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  і задовольняє таким вимогам:

1)  $\rho(X_i, X_j) \geq 0$  для всіх  $i, j$ ;

2)  $\rho(X_i, X_j) = 0$  тоді й тільки тоді, коли  $X_i = X_j$ ;

3)  $\rho(X_i, X_j) = \rho(X_j, X_i)$ ;

4)  $\rho(X_i, X_j) \leq \rho(X_i, X_k) + \rho(X_k, X_j)$ .

Вибір міри відстані істотно впливає на результат класифікації.

Тому для отримання надійних результатів необхідно враховувати мету дослідження, змістову і статистичну природу вектора спостережень та наявні відомості про характер розподілу досліджуваних ознак.

Крім того, після закінчення розрахунків слід перевіряти адекватність отриманої класифікаційної моделі.

Найчастіше використовують евклідову та манхеттенську відстані, супремунорму, а також відстань Махаланобіса.

Вони відображають усе різноманіття підходів до цієї проблеми.

Евклідову метрику традиційно застосовують як міру відстані.

Манхеттенська відстань є найбільш відомою із класу метрик Мінковського.

Відстань Махаланобіса, що не є метрикою, за допомогою дисперсійно-коваріаційної матриці пов'язана з кореляціями змінних і широко використовується у кластерному аналізі та інших методах аналізу даних.

Вказані міри подібності можуть бути застосовані при реалізації методів ближнього зв'язку, середнього зв'язку Кінга, Уорда,  $k$ -середніх Мак-Куїна.

Як міри зв'язку для кількісних ознак можна обирати коефіцієнт кореляції Пірсона, кореляційне відношення і дисперсію-коваріацію.

Застосування коефіцієнта кореляції Пірсона є обґрунтованим лише за умови, що зв'язок між ознаками є лінійним, але в окремих випадках його можна використовувати для нелінійного зв'язку після придатного перетворення вихідних ознак.

Для порядкових ознак призначені коефіцієнти рангової кореляції Спірмена й Кендалла. Їх можна перетворити до мір подібності типу «відстань» за допомогою формул:

$$d_{ij}=1-ps; d_{ij}=1-\tau. \quad (3.76)$$

У цьому випадку їх називають, відповідно, *відстанями Спірмена й Кендалла*.

Для дихотомічних ознак та ознак, що розміщуються в таблицях сполученості, використовують хеммінгову відстань, показник Жаккара, простий коефіцієнт зустрічальності, показник Рассела й Рао, коефіцієнт асоціації Юла, коефіцієнт сполученості Бравайса.

Розглянуті показники (крім хеммінгової відстані) можна перетворити у відстані, віднімаючи обчислені значення від одиниці.

Для змішаних ознак користуються коефіцієнтом Гауера.

Перелічені міри зв'язку застосовують у методах ближнього зв'язку, кореляційних плеяд та максимального кореляційного шляху. Зазвичай за допомогою першого з цих методів класифікують об'єкти, а за допомогою двох інших – параметри.

Але шляхом транспонування матриці вихідних даних можна легко змінити тип класифікації на протилежний.

*Результати класифікації різними методами, як правило, принципово не відрізняються.*

*Вибір метрики, навпаки, може істотно впливати на результати аналізу.*

Тому для кожної конкретної задачі його необхідно здійснювати окремо.

При цьому треба враховувати головні цілі дослідження, фізичну та статистичну природу вихідних даних, повноту апріорних відомостей про тип функцій розподілу ймовірності.

Зокрема якщо кластери можна інтерпретувати як нормальні генеральні сукупності з однією й тією самою коваріаційною матрицею, то доцільно

обирати відстані типу Махаланобіса, окремими випадками якої є евклідова, зважена евклідова та хеммінгова відстані.

*Дивергенція між двома сукупностями  $i$  та  $j$  (повна середня інформаційна міра різниці двох класів, дивергенція Кульбака–Лейблера)* запропонована американськими криптоаналітиками Соломоном Кульбаком та Річардом Лейблером у 1951 р. Вона може бути розрахована за формулою:

$$J_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}[(C_i - C_j)(C_j^{-1} - C_i^{-1})] + \frac{1}{2} \text{tr}[(C_i^{-1} + C_j^{-1})(m_i - m_j)(m_i - m_j)] \quad (3.77)$$

де  $C_i, C_j$  – дисперсійно-коваріаційні матриці сукупностей  $i$  та  $j$ ;  $m_i, m_j$  – вектори середніх сукупностей  $i$  та  $j$ .

*Міра Махаланобіса (відстань Махаланобіса, узагальнена евклідова відстань)* – це відстань від точки спостереження до центра ваги в багатовимірному просторі ознак:

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^T \Delta^T \Sigma^{-1} \Delta (X_i - X_j)}, \quad (3.78)$$

де  $\Delta$  – векторна симетрична невід’ємно визначена матриця вагових коефіцієнтів, яку найчастіше обирають діагональною;  $\Sigma$  – коваріаційна матриця генеральної сукупності, до якої належать спостереження. Введена відомим індійським статистиком й антропометристом П.Ч. Махаланобісом у 1938 р. Іноді замість міри Махаланобіса використовують її квадрат.

Розглянемо деякі з інших мір відстані детальніше.

*Евклідова відстань (евклідова метрика)* є відомою із загально математичних дисциплін і визначається за формулою:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^p (x_{i\kappa} - x_{j\kappa})^2}. \quad (3.79)$$

Вона збігається з відстанню Махаланобіса у випадку, коли незалежні змінні є некорельованими.

Поряд з евклідовою відстанню, як міру близькості часто використовують її квадрат.

*Евклідову відстань доцільно обирати, якщо:*

- спостереження належать до генеральних сукупностей, які підпорядковуються багатовимірним нормальним законам, а компоненти вектора спостережень є незалежними і мають одну й ту саму дисперсію;
- компоненти вектора спостережень є однорідними з погляду змістової інтерпретації та однаково важливими для класифікації;
- простір ознак має розмірність 1, 2 або 3, і поняття близькості об’єктів у цьому просторі збігається зі звичайною геометричною близькістю.



Недоліком евклідової метрики є те, що у випадках, коли ознаки виміряні у різних одиницях, зміна масштабу одиниць вимірювання може призвести до істотної зміни результатів класифікації.

Для запобігання цьому використовують різні *методи нормування даних*.

Найпоширенішими з них є такі:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}; z_2 = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}; z_3 = \frac{x - \text{MED}}{\text{MAD}}; z_4 = \frac{x}{\bar{x}}; z_5 = \frac{x}{x_{\max}}. \quad (3.80)$$

Але слід зазначити, що *нормування також впливає на результати класифікації*.

Зокрема у випадках, коли кластери істотно розділяються за деякими ознаками й слабо за іншими, нормалізація може призвести до зменшення дискримінуючих можливостей першої групи ознак через збільшення шумового ефекту інших.

Якщо ознаки вимірюють у якісно різних одиницях, то застосування евклідової відстані взагалі може виявитися безглуздим.

*Зважену евклідову відстань* розраховують за формулою:

$$d_{ij}^* = \sqrt{\sum_{k=1}^p \omega_k (x_{ik} - x_{jk})^2}, \quad (3.81)$$

де  $\omega_k$  – невід’ємні вагові коефіцієнти, які є пропорційними ступеню важливості критерію з погляду класифікації.

Зазвичай беруть  $0 \leq \omega_k \leq 1$ .

Визначення вагових коефіцієнтів за аналізованою вибіркою, як правило, є недоцільним, оскільки може призвести до істотних помилок.

Зокрема, залежно від певних незначних варіацій змістової та статистичної природи вихідних даних, може бути обґрунтованим надання їм значень, пропорційних середньоквадратичній похибці відповідної ознаки або оберненій до цієї похибки величині.

Тому рекомендують обирати вагові коефіцієнти за результатами експертних опитувань або інших незалежних попередніх досліджень.

*Метрика Мінковського*, запропонована видатним німецьким математиком і фізиком Германом Мінковським у 1908 р., є узагальненням звичайної евклідової відстані:

$$d_{ij} = r \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}|^r}. \quad (3.82)$$

У випадку  $r=2$  вона збігається з евклідовою метрикою.

У випадку  $r=1$  метрика Мінковського дає манхеттенську відстань:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}|. \quad (3.83)$$

При  $r \rightarrow \infty$  метрика Мінковського збігається із *супремум-нормою* (відстанню Чебишева), яку було введено видатним російським математиком Пафнутієм Львовичем Чебишевим:

$$d_{ij} = \sup\{|x_{ik} - x_{jk}|\}, \quad k=1, 2, \dots, p. \quad (3.84)$$

Хеммінгову відстань, яку ввів відомий американський математик Річард Хеммінг у 1950 р., використовують як міру відстані об'єктів, що характеризуються дихотомічними ознаками. Її розраховують за формулою:

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^p |x_{is} - x_{js}|, \quad (3.85)$$

тобто вона збігається із кількістю значень відповідних ознак, що не збігаються, у  $i$ -го та  $j$ -го об'єктів (у разі, коли ознаки можуть набувати значень 0 або 1).

При конструюванні різноманітних процедур класифікації доцільно використовувати міри близькості кластерів один до одного. Найбільш поширеними з них є відстані, що вимірюють за принципами найближчого і далекого сусідів, середнього зв'язку та за центрами ваги. Вибір міри близькості кластерів є найбільш суттєвим для агломеративних ієрархічних методів кластерного аналізу.

Нехай  $S_i$  –  $i$ -й кластер,  $n_i$  – кількість об'єктів у ньому,  $(X_i)$  – центр ваги  $i$ -го кластера, тобто середнє арифметичне векторних спостережень, що його утворюють,  $\rho_{\ell m}$  – відстань між класами  $\ell$  і  $m$ . Тоді *відстань, що вимірюють за принципом найближчого сусіда (nearest neighbour):*

$$\rho_{\ell m}^{\min} = \min_{X_i \in S_\ell; X_j \in S_m} d_{ij}; \quad (3.86)$$

*відстань, що вимірюють за принципом далекого сусіда (furthest neighbour):*

$$\rho_{\ell m}^{\max} = \max_{X_i \in S_\ell; X_j \in S_m} d_{ij}; \quad (3.87)$$

*відстань, що вимірюють за принципом середнього зв'язку (середнє арифметичне всіх можливих попарних відстаней між представниками класів, які розглядають):*

$$\rho_{\ell m}^m = \frac{1}{n_\ell n_m} \sum_{X_i \in S_\ell} \sum_{X_j \in S_m} d_{ij}; \quad (3.88)$$

відстань, що вимірюють за центрами ваги:

$$\rho_{\ell m} = d(\bar{X}_\ell, \bar{X}_m). \quad (3.89)$$

Існує також узагальнена (за О.М. Колмогоровим) формула розрахунку відстаней між класами (*відстань Колмогорова, узагальнена K-відстань*):

$$\rho_{\ell m}^K = \left[ \frac{1}{n_\ell n_m} \sum_{X_i \in S_\ell} \sum_{X_j \in S_m} d_{ij}^\tau \right]^{1/\tau}. \quad (3.90)$$

При  $\tau \rightarrow -\infty$  вона переходить до формули (3.86), при  $\tau \rightarrow +\infty$  – до формули (3.87), а при  $\tau=1$  – до формули (3.88).

Якщо  $S_w$  є новим класом, отриманим як об'єднання класів  $m$  і  $q$ , то його узагальнену відстань від класу  $S_\ell$  можна розрахувати за формулою:

$$\rho_{\ell w}^K = \left[ \frac{n_m (\rho_{\ell m}^K)^\tau + n_q (\rho_{\ell q}^K)^\tau}{n_m + n_q} \right]^{1/\tau}. \quad (3.91)$$

Для перерахунку відстані між класами використовують також загальну формулу Ланса та Уїльяма:

$$\rho_{\ell m} = a_m \rho_{\ell m} + a_q \rho_{\ell q} + b \rho_{mq} + c |\rho_{\ell m} - \rho_{\ell q}|, \quad (3.92)$$

де  $a_m, a_q, b, c$  – параметри, що визначають спосіб розрахунку відстані між класами.

Зокрема для відстаней ближнього зв'язку:  $a_m = a_q = \frac{1}{2}$ ,  $b=0$ ,  $c = -\frac{1}{2}$ ;

для відстаней далекого зв'язку:  $a_m = a_q = c = \frac{1}{2}$ ;  $b=0$ ;

для відстаней середнього зв'язку:

$$a_m = \frac{n_m}{n_m + n_q}; a_q = \frac{n_q}{n_m + n_q}; b=c=0. \quad (3.93)$$

Для розрахунку ступеня близькості класів використовують також розглянуті вище інформаційну відстань Каллбека (у випадку, коли класи можна розглядати як багатовимірні нормальні сукупності) та відстань Махаланобіса (якщо додатково відомо, що вони мають однакові коваріаційні матриці).

Порівняння різних способів розбиття досліджуваної сукупності об'єктів на класи здійснюють за допомогою функціонала якості розбиття  $Q(S)$ .

Найкращим вважають розбиття, при якому забезпечується екстремум цього функціонала.

Не існує чітких методів обрання функціоналів якості.

У випадку, коли кількість класів є заданою, як функціонали якості найчастіше обирають такі. Сума внутрішньокласових дисперсій:

$$Q_1(s) = \sum_{\ell=1}^{\kappa} \sum_{X_i \in S_\ell} d^2(X_i, \bar{X}(\ell)). \quad (3.94)$$

Сума попарних внутрішньокласових відстаней між елементами:

$$Q_2(s) = \sum_{\ell=1}^{\kappa} \sum_{X_i, X_j \in S_\ell} d_{ij}^2 \quad (3.95)$$

або

$$Q_2'(s) = \sum_{\ell=1}^{\kappa} \frac{1}{n_\ell} \sum_{X_i, X_j \in S_\ell} d_{ij}^2. \quad (3.96)$$

У більшості випадків вона приводить до тих самих результатів, що й попередній критерій.

Узагальнену внутрішньокласову дисперсію можна розраховувати як показник середньоарифметичної або середньгеометричної дисперсії, відповідно, за формулами:

$$Q_3(s) = \det \left( \sum_{\ell=1}^{\kappa} n_\ell \Sigma_\ell \right); \quad (3.97)$$

$$Q_4(s) = \prod_{\ell=1}^{\kappa} (\det \Sigma_\ell)^{n_\ell},$$

де елементи вибіркової коваріаційної матриці  $\Sigma$  класу  $S_\ell$  розраховують як:

$$\sigma_{qt}(\ell) = \frac{1}{n_\ell} \sum_{X_i \in S_\ell} (x_i^{(q)} - \bar{x}^{(q)}(\ell))(x_i^{(t)} - \bar{x}^{(t)}(\ell)); q, t = 1, 2, \dots, p. \quad (3.98)$$

Такі функціонали доцільно застосовувати, якщо допускають можливість зосередженості розбитих на класи спостережень у просторі меншої розмірності, ніж  $p$ .

За невідомої кількості класів функціонали якості розбиття зазвичай обирають у вигляді простої алгебраїчної комбінації (суми, різниці, добутку, частки) двох функціоналів, один з яких є незростаючою функцією кількості класів і характеризує внутрішньокласовий розкид спостережень, а другий – незгасаючою функцією кількості класів.

Останній може характеризувати взаємну віддаленість (близькість) точок, втрати від надмірної деталізації вихідного масиву даних, концентрацію наявної структури точок тощо.

У схемі О.М. Колмогорова для побудови такого функціонала використовують міру концентрації точок:

$$Z_{\tau}(S) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\nu(X_i)}{n} \right)^{\tau} \right]^{1/\tau}, \quad (3.99)$$

де  $\nu(X_i)$  – кількість елементів у кластері, що містить точку  $X_i$ , а вибір параметра  $\tau$  залежить від мети розбиття.

Такий функціонал відповідає середній мірі внутрішньокласового розсіювання  $I_{\tau}^{(K)}(S)$ .

При визначенні слід ураховувати, що:

$$\begin{aligned} Z_{-\infty}(S) &= \min_{1 \leq i \leq \kappa} \left( \frac{n_i}{n} \right); \\ Z_{-1}(S) &= 1/\kappa; \\ \log Z_0(S) &= \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{n_i}{n} \log \frac{n_i}{n}; \\ Z_1(S) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\nu(X_j)}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{\kappa} n_i^2; \\ Z_{\infty}(S) &= \max_{1 \leq i \leq \kappa} \left( \frac{n_i}{n} \right); \end{aligned}$$

де  $\kappa$  – кількість різних кластерів у розбитті  $S$ ;  $n_i$  – кількість елементів у  $i$ -му кластері.

Величина  $Z_0$  є природною інформаційною мірою концентрації.

За будь-якого  $\tau$  міра має мінімальне значення  $1/n$  при розбитті досліджуваної множини на  $n$  одноточкових кластерів і максимальне значення 1 при об'єднанні всіх вихідних даних в один кластер.

Як середню міру внутрішньокласового розсіювання можна використовувати величину:

$$I_{\tau}^{(K)}(S) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu(X_i)} \sum_{X_l \in S(X_i)} d_{il}^{\tau} \right]^{1/\tau}. \quad (3.100)$$

Тоді сумарне розсіювання характеризує величина  $n(I_{\tau}^{(K)}(S))^{\tau}$  й оптимальною слід вважати таку кількість кластерів, за якої величина набуває мінімального можливого значення:

$$\frac{\Delta[n(I_{\tau}^{(K)}(S))^{\tau}]}{\Delta Z_{\tau}(S)}. \quad (3.101)$$

Залежно від кількості вихідних спостережень виділяють задачі класифікації невеликих за обсягом (до декількох десятків точок) масивів спостережень і задачі класифікації великих масивів.

Такий поділ зумовлений різницею процедур, які доцільно використовувати при класифікації відповідних даних.

*З погляду апріорної інформації про кількість кластерів вирізняють такі типи задач:*

- із заданою кількістю класів;
- з невідомою кількістю класів, яку треба оцінити;
- з невідомою кількістю класів, яку не потрібно оцінювати (таку задачу зазвичай формулюють як побудову ієрархічного дерева, або дендрограми вихідної сукупності).

*Найпоширенішими методами кластерного аналізу є:*

- ієрархічні методи (ближнього зв'язку, середнього зв'язку Кінга, Уорда, далекого зв'язку);
- ітеративні методи групування (метод  $k$ -середніх Мак-Куїна);
- алгоритми типу розрізування графа (кореляційних плеяд Терентьєва, вроцлавська таксономія).

*Ієрархічні (агломеративні та дивізімні) методи* призначені переважно для побудови ієрархічних дерев відносно невеликих за обсягом сукупностей. Іноді їх використовують також для задач класифікації перших двох типів. У цьому випадку реалізацію ієрархічного алгоритму продовжують до досягнення кількості класів, яка дорівнює заздалегідь заданому числу  $k$ , або до досягнення екстремуму одного із критеріїв якості розбиття.

*Перевагами ієрархічних методів* є можливість більш повного і тонкого аналізу структури досліджуваної сукупності порівняно з іншими методами, а також наочність подання результатів кластеризації.

Їх *основними недоліками* є громіздкість обчислювальної процедури, яка пов'язана з перерахунком усієї матриці відстаней на кожному кроці, а також «скінченна неоптимальність» гранично оптимальних алгоритмів у багатьох випадках.

*Метод ближнього зв'язку* є найпростішим для розуміння ієрархічних агломеративних методів кластерного аналізу. Процес класифікації в цьому випадку починають із пошуку та об'єднання двох найближчих один до одного об'єктів у матриці подібності.

На наступному етапі знаходять два наступні найближчі об'єкти й так само до повного вичерпання матриці подібності. Як правило, робота алгоритму закінчується, коли всі спостереження об'єднані в один клас. Для виокремлення кластерів після закінчення кластеризації задають пороговий рівень подібності, на якому можна виділити більше, ніж один кластер.

Описана процедура не завжди приводить до утворення одного великого кластера на останньому етапі. Часто вона закінчується явним розбиттям досліджуваних об'єктів на кластери.

У методі ближнього зв'язку два об'єкти потрапляють до одного й того самого кластера в тому випадку, коли існує ланцюжок близьких один до одного об'єктів, які їх з'єднують. Іноді це призводить до необґрунтованого зарахування об'єктів до одного й того самого кластера (*ланцюжковий ефект*). У процесі кластеризації можна явно простежити утворення таких ланцюжків. Для запобігання цьому ефекту можна задавати обмеження на максимальну відстань між елементами одного кластера.

Сучасний варіант цього методу, зважений алгоритм найближчих сусідів, запропонували в 2005 р. іспанські математики Роберто Паредес та Енріке Відал.

Кластери, одержувані за методом ближнього зв'язку, не обов'язково бувають опуклими. Залежно від обставин це можна розглядати і як *перевагу*, і як *недолік методу*.

Після проведення кластеризації рекомендується візуалізувати результати шляхом побудови *дендрограми*, яка дає можливість отримати уявлення про загальну конфігурацію об'єктів.

Результати ієрархічних методів кластерного аналізу стають більш наочними, якщо їх подати у вигляді дендрограми (дендограми).

Типовий вигляд дендрограми наведено на рис. 3.6.

Пари об'єктів при побудові дендрограми з'єднують згідно з рівнем зв'язку, який відкладають по осі ординат.

Задаючи кількість кластерів, наприклад  $n = 3$ , знаходять, на якому рівні кількість перетинів горизонтальної лінії, яка відповідає рівню зв'язку, і вертикальних ліній, що відповідають об'єктам, дорівнює трьом.

У нашому випадку такої кількості кластерів відповідає рівень зв'язку, що знаходиться приблизно в межах від 38 до 45 одиниць.

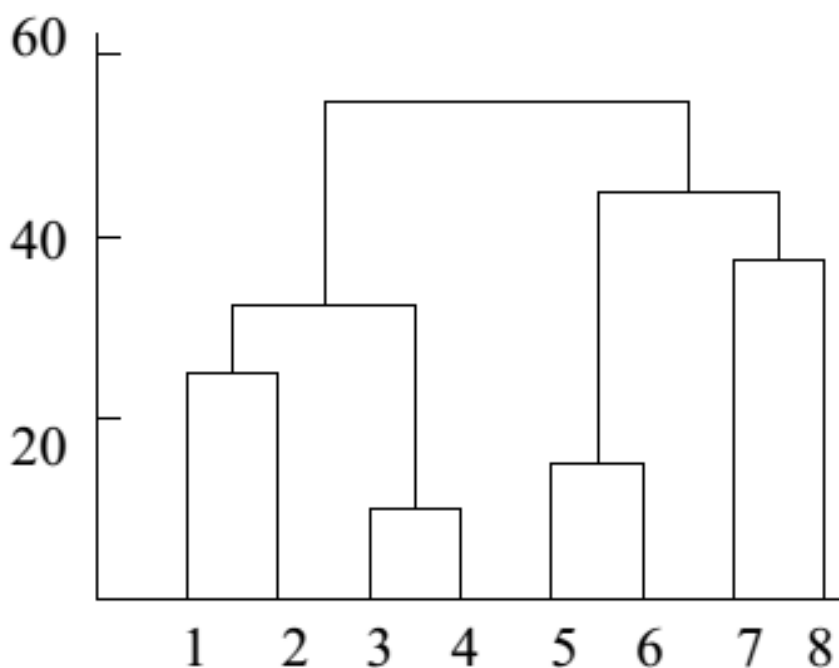


Рисунок 3.6 – Приклад дендрограми

*Метод середнього зв'язку Кінга* подібний до методу ближнього зв'язку. Його відмінність полягає в тому, що об'єднані до одного кластера об'єкти надалі вважають одним об'єктом з усередненими за кластером параметрами.

При цьому новому об'єкту надають номер меншого з номерів об'єднаних об'єктів, а об'єкти, що залишилися, перенумеровують.

Таким чином їх загальна кількість зменшується на одиницю. Подальша процедура є подібною до попереднього методу. В іншому варіанті методу середнього зв'язку відстань між класами розраховують як середнє значення відстаней між усіма можливими парами представників цих класів.

При використанні методу середнього зв'язку у процесі кластеризації також простежується формування ланцюжків об'єктів, що дає змогу задати пороговий рівень подібності, на якому можна виділити більше, ніж один кластер.

Часто процедура кластеризації закінчується явним розподілом об'єктів на кластери.

Після закінчення кластеризації також доцільно здійснити візуалізацію результатів шляхом побудови дендрограми.

*К-узагальнена ієрархічна процедура* ґрунтується на тому, що перелічені відстані, а також відстань, що вимірюється за принципом далекого сусіда, яка застосовується в методі далекого зв'язку, є окремими випадками узагальненої відстані Колмогорова, яку й використовують у цьому випадку як міру близькості.

Описані вище методи можна розглядати як окремі випадки *К-узагальненої ієрархічної процедури*.

*Порогові ієрархічні процедури* передбачають задання монотонної послідовності порогів  $c_1, c_2, \dots, c_t$ .

В агломеративних методах на першому кроці попарно об'єднують елементи, відстані між якими не перевищують  $c_1$ .

На другому кроці об'єднують елементи або групи елементів, відстані між якими не перевищують  $c_2$  тощо.

При достатньо великих значеннях  $c_t$  на останньому кроці всі елементи будуть об'єднані до одного загального кластера.

*Недоліком* цих процедур є можливість перетину класів, тому вони бувають ефективними за умови, що ланцюжковий ефект слабо виражений, а вихідна сукупність природно поділяється на достатньо віддалені одне від одного скупчення точок у досліджуваному просторі ознак.

*Метод Уорда*, запропонований Дж. Уордом у 1963 р., є близьким до методу середнього зв'язку Кінга. Він відрізняється тим, що підставою для приєднання об'єкта до кластера є не близькість у значенні певної міри подібності, а мінімум дисперсії всередині кластера після поміщення до нього обраного об'єкта.

Паралельні ітеративні процедури передбачають одночасне використання всіх наявних спостережень, тому їх застосовують для розв'язання задач класифікації перших двох типів при порівняно малих обсягах досліджуваних сукупностей.



Послідовні ітераційні процедури на кожному кроці використовують лише невелику кількість спостережень, а також результат попереднього кроку кластеризації. Як правило, їх застосовують для розв'язання перших двох типів задач кластеризації при великих обсягах досліджуваних сукупностей.

Прикладом послідовної ітеративної процедури є метод *k-середніх Мак-Куїна*. Ідея цього методу запропонована в 1956 р. відомим польським математиком Гуго Штейнгаузом, який в 1920–1941 р. працював професором Львівського університету і є одним із засновників львівської математичної школи.

Стандартний алгоритм методу було розроблено в 1957 р. Стюартом Ллойдом, а назву введено в 1967 р. американським математиком Дж.Б. Мак-Куїном.

Ще один поширений алгоритм цього методу запропонований у 1965 р. Г. Боллом та Д. Холлом.

Розв'язується задача розбиття  $n$  об'єктів на  $k$  ( $k < n$ ) однорідних у певному розумінні кластерів.

На початковому етапі його реалізації вихідні точки впорядковують (можливо випадковим чином) і перші  $k$  точок у подальшому розглядають як окремі кластери, яким надають одиничні вагові коефіцієнти.

Потім беруть точку  $X_{k+1}$  і з'ясовують, до якого з наявних кластерів вона є найближчою.

Цей кластер замінюють новим, розташованим у центрі ваги вихідного кластера й точки  $X_{k+1}$ .

При цьому ваговий коефіцієнт отриманого кластера збільшують на одиницю порівняно із ваговим коефіцієнтом вихідного.

Якщо точка  $X_{k+1}$  є рівновіддаленою від декількох кластерів, то її вміщують до кластера з найменшим номером або з найбільшим ваговим коефіцієнтом.

Потім по чергово приєднують до наявних кластерів точки, що залишилися.

При достатньо великих обсягах досліджуваних вибірок центри ваги отримуваних кластерів згодом перестають змінюватися, тобто ітераційна процедура збігається до певної границі.

Якщо ж вона не збігається за задану кількість кроків, то використовують один із таких прийомів.

Перший передбачає, що після розгляду останньої точки  $X_n$  повертаються до точок  $X_1$ ,  $X_2$  тощо.

Другий підхід передбачає багаторазовий повторний вибір вихідних кластерів.

При цьому на кожному етапі як вихідні обирають точки, що є найближчими до фінальних кластерів, що найчастіше отримували на попередніх етапах.

Особливістю методу є алгоритмічне гарантування того, що кожний із класифікованих об'єктів буде зарахований лише до одного з кластерів.

При застосуванні цього методу немає особливої необхідності у візуалізації результатів. Але для наочності можна здійснити її за допомогою зображення просторових еліпсоїдів, що містять класифіковані об'єкти (якщо розмірність не перевищує трьох), або двовимірних зрізів простору.

У багатьох випадках метод  $k$ -середніх дає змогу отримати розбиття, близьке до найкращого з погляду функціонала якості.

Якщо кількість класів є невідомою, необхідно задати дві константи: міру грубості  $\varphi$  та міру точності  $\psi$ .

На нульовому кроці беруть довільне значення кількості класів  $K_0$ , вихідні точки впорядковують і розглядають  $K_0$  перших точок як центри кластерів, яким надають одиничні вагові коефіцієнти.

Потім здійснюють огрубіння вихідних кластерів. Для цього послідовно розраховують попарні відстані між ними і, якщо відстань між двома кластерами не перевищує  $\varphi$ , їх об'єднують до одного, який є їх зваженим середнім і має ваговий коефіцієнт, що дорівнює сумі вагових коефіцієнтів вихідних кластерів.

Після закінчення цієї процедури ми отримуємо  $\kappa_0^* \leq \kappa_0$  кластерів.

Далі здійснюють послідовне рознесення точок, що залишилися, за кластерами.

Для кожної точки визначають найближчий до неї кластер.

Якщо відстань між ними не перевищує  $\psi$ , то відповідну точку приєднують до цього кластера за вищеописаною процедурою.

У протилежному випадку її вважають центром нового кластера, якому надається одиничний ваговий коефіцієнт.

Після рознесення усіх точок за кластерами повторюють процедуру огрубіння і переходять до чергового кроку ітерацій.

Обираючи різні значення констант  $\varphi$  та  $\psi$ , можна отримати різні розбиття вихідної сукупності.

Вибір вважають задовільним, якщо результат класифікації є близьким до оптимального за оцінками експертів або з погляду функціонала якості.

Можна довести, що алгоритм методу Мак-Куїна збігається із локальним мінімумом суми внутрішньокласових дисперсій.

Глобальний мінімум цього функціоналу може бути досягнутий за допомогою алгоритму Р. Дженсена, який базується на застосуванні динамічного програмування.

Сутність *методу кореляційних плеяд* є такою.

Візуально результати класифікації можна подати у вигляді кореляційного циліндра, розсіченого площинами, перпендикулярними до його осі.

Площини відповідають рівням від нуля до одиниці з кроком 0,1.

На цих рівнях об'єднують класифіковані параметри або об'єкти.

Метод наближається до методу ближнього зв'язку з фіксованими рівнями об'єднання.

Графічно результати зображають у вигляді кіл зрізів (плеяд) кореляційного циліндра.

На них відмічають класифіковані об'єкти, зв'язки між якими вказують за допомогою хорд, що з'єднують відповідні точки кіл.

Метод кореляційних плеяд є основою для багатьох порогових алгоритмів.

У методі вроцлавської таксономії визначають пари чисел, які вказують порядок з'єднання попарно найближчих один до одного об'єктів (параметрів), що підлягають класифікації.

Одержуваний незамкнений найкоротший шлях можна відобразити графічно у вигляді певного оптимального дерева (дендриту).

Цей метод є подібним до методу ближнього зв'язку, але його алгоритм належить до алгоритмів розрізання графів.

Якщо мірою подібності обрати коефіцієнт кореляції, ми отримаємо метод найбільшого кореляційного шляху.

У методі вроцлавської таксономії результати розрахунків відображають (рис. 3.7) у вигляді графа (дендриту). Розміщення на площині точок, що є зображеннями параметрів або об'єктів, і з'єднуючих їх відрізків, які зображають зв'язки, є довільним.

При цьому рівні зв'язку відображають максимальні значення зв'язків відповідних параметрів (об'єктів) з іншими параметрами (об'єктами).

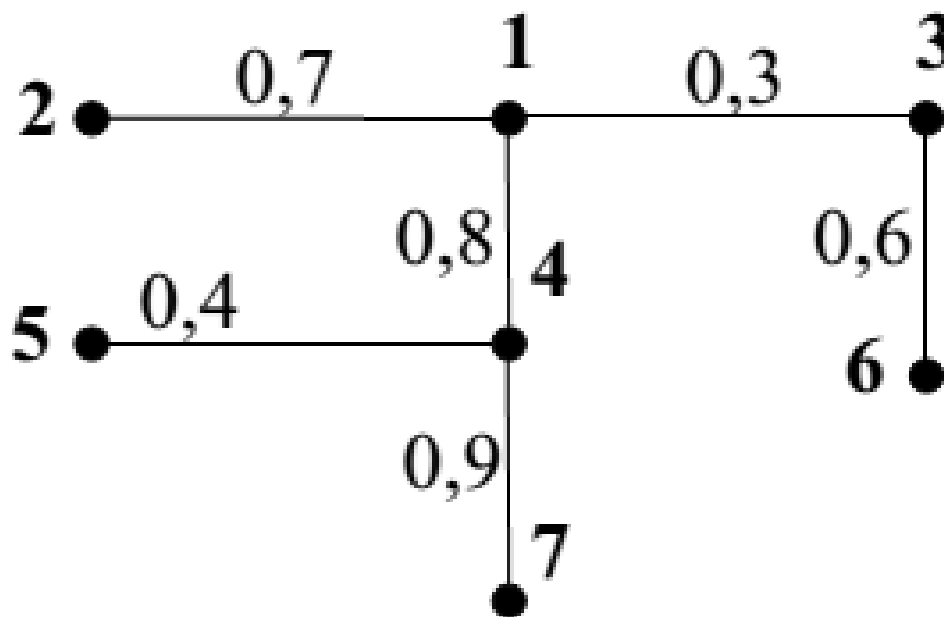


Рисунок 3.7 - Приклад графа, що відображає зв'язок між параметрами

Аналізуючи отриманий граф, можна дійти висновку про взаємозв'язки тих чи інших параметрів або груп параметрів, зокрема про те, що для графа, наведеного на рис. 3.7, параметри умовно поділяються на три групи: (1, 3, 6), (2) та (4, 5, 7).

Перед застосуванням процедур класифікації рекомендується дослідити наявні ознаки з метою вибору найбільш інформативних з них і скорочення

розмірності простору ознак. З цією метою буває доцільним розглянути компоненти  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$  як об'єкти, що підлягають класифікації.

Це дає змогу виявити групи компонентів, що відображають окремі властивості або групи властивостей досліджуваних об'єктів, і при подальшому аналізі враховувати лише по одному представнику з кожної такої групи.

### 3.6 Методи класифікації з навчанням

#### 3.6.1 Основні методи класифікації з навчанням

*Методи розпізнавання образів з навчанням* призначені для зарахування некласифікованих об'єктів до заздалегідь описаних класів (кластерів; навчальних вибірок).

Програму (пристрій) розпізнавання зазвичай називають *класифікатором*, а в разі, коли вона видає відповідь у вигляді дійсного числа або вектора дійсних чисел, – *предиктором (локалізатором)*.

*Задачу побудови оптимальної класифікації у цьому випадку можна сформулювати так.*

Є відомими  $p$ -вимірні спостереження  $X_1, X_2, \dots, X_n$  та функції щільності розподілу  $f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)$ , які задають  $k$  класів і можуть розглядатися як навчальні вибірки.

Спостереження, що підлягають класифікації, можна розглядати як вибірки з генеральної сукупності, яка описується сумішшю  $k$  одномодальних функцій розподілу (класів):

$$f(X) = \sum_{j=1}^k \pi_j f_j(X), \quad (3.102)$$

де  $\pi_j$  – апіорна ймовірність (питома вага)  $j$ -го класу.

*Розв'язувальним правилом (дискримінантною функцією)* називають функцію  $\delta(X)$ , що має такі властивості.

Її значеннями можуть бути тільки додатні цілі числа  $1, 2, \dots, k$ .

При цьому ті спостереження  $X$ , для яких вона має значення  $j$ , зараховують до  $j$ -го класу  $S_j$ , тобто:

$$S_j = \{X: \delta(X) = j\}. \quad (3.103)$$

Функцію  $\delta(X)$  будують так, щоб об'єднання класів  $S = \bigcup_{j=1}^k S_j$  охоплювало

всі можливі значення аналізованої багатовимірної ознаки  $X$ , і для будь-яких  $i \neq j$  виконувалася умова  $S_i \cap S_j = \emptyset$ .

Розв'язувальні правила дають можливість зараховувати досліджувані об'єкти до заданих класів. Їх можна отримати у вигляді:

- імовірності діагнозу при заданому комплексі симптомів (метод Байєса);
- простих функцій, що класифікують (лінійний дискримінантний аналіз Фішера);
- дискримінантних функцій (канонічний дискримінантний аналіз);
- певних характеристик: групова кореляційна матриця, груповий вектор середніх та визначник коваріаційної матриці (лінійний дискримінантний аналіз);
- настроєної ваги синапсів і зміщень нейронів (нейронна мережа, що навчається).

Розв'язувальне правило називають *оптимальним (байєсівським)*, якщо воно забезпечує мінімальні втрати серед усіх можливих процедур класифікації.

Оптимальне розв'язувальне правило можна задати так:

$$S_j^{(opt)} = \left\{ X: \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K \pi_i f_i(X) c(j|i) = \min_{1 \leq \ell \leq K} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K \pi_i f_i(X) c(\ell|i) \right\}. \quad (3.104)$$

Це означає, що спостереження  $X_v$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ) зараховують до  $j$ -го класу у випадку, коли відповідні втрати будуть меншими порівняно із втратами від його зарахування до будь-якого іншого класу.

Якщо  $c(j|i) = c_0 = const$ , то спостереження  $X_v$  зараховують до  $j$ -го класу за умови:

$$\pi_i f_i(X_v) = \max_{1 \leq \ell \leq K} \pi_\ell f_\ell(X_v). \quad (3.105)$$

Це розв'язувальне правило можна сформулювати так: спостереження  $X_v$  зараховують до класу  $j_0$ , якщо:

$$\frac{f_{j_0}(X_v)}{f_j(X_v)} \geq \frac{\pi_j}{\pi_{j_0}} \quad (3.106)$$

для всіх  $j_0=1, 2, \dots, K$ .

Одним з основним методів розпізнавання образів з навчанням є *дискримінантний аналіз*.

Він належить до класу лінійних методів, оскільки його модель є лінійною стосовно дискримінантних функцій.

Користувач повинен задати певну кількість об'єктів і вказати їх належність до так званих груп, що навчають (класів, кластерів, популяцій).

Тому застосуванню дискримінантного аналізу має передувати дослідження методами розпізнавання без навчання – кластерного аналізу, багатовимірною шкалування або емпіричної класифікації.

Кластери можуть перетинатися, особливо у випадках, коли навчання здійснюють за допомогою емпіричної класифікації.

Якщо встановлено, що окремі об'єкти не належать до стандартно описаних груп, рекомендується утворювати з них нові кластери.

Для навчання необхідно використовувати об'єкти (вибірки, що навчають), заздалегідь класифіковані тим чи іншим способом.

Якість дискримінації визначається ймовірністю правильної класифікації.

Зазвичай найкращі результати дають метод  $k$ -середніх, який гарантовано будує кластери, що не перетинаються, а також метод ближнього зв'язку.

Під *інформативністю параметрів*, як правило, розуміють їх спроможність описувати об'єкт класифікації з достатньою для її здійснення точністю.

Як правило, розпізнаванню образів з навчанням має передувати застосування дисперсійного, кореляційного або факторного аналізу чи деякого іншого методу з метою виділення інформативних параметрів, а також класифікація без навчання для виокремлення груп, що навчають.

Можливі ситуації, коли кількість параметрів є недостатньою для правильної з погляду дослідника класифікації, або, навпаки, є зайві параметри, що не є обов'язковими для класифікації та призводять до отримання громіздких результатів, які важко інтерпретувати.

В окремих випадках об'єкти з вибірок, що навчають, після класифікації можуть бути зараховані не до тих кластерів, куди вони були вміщені на попередньому етапі.

Особливо часто таке відбувається при застосуванні емпіричних класифікацій. У таких ситуаціях необхідно виконати додаткове дослідження стосовно необхідності й достатності тих параметрів, за якими здійснюють класифікацію.

Для практичної реалізації оптимальних розв'язувальних правил необхідно знати апіорні ймовірності  $\pi_j$  і функції щільності ймовірності  $f_j(X)$ .

Вони можуть бути відомими з теоретичних міркувань або попередніх досліджень.

Якщо ж вони невідомі, то їх замінюють статистичними оцінками, одержуваними на основі наявних вибірок, що навчають.

Як оцінки апіорних імовірностей часто беруть величини:

$$\pi_j = n_j / n_{sum}, \quad (3.107)$$

де  $n_j$  – обсяг  $j$ -ї вибірки;  $n_{sum} = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  – сумарний обсяг вибірок, що навчають.

При оцінюванні функцій щільності ймовірності застосовують два підходи.

У першому (параметричний дискримінаційний аналіз) припускають, що всі класи характеризуються функціями щільності ймовірності, які належать до однієї параметричної сім'ї  $\{f(X, \Theta)\}$  і розрізняються лише значеннями векторного параметра  $\Theta$ . У цьому випадку відповідні значення параметра  $\Theta_j$  оцінюють за спостереженнями, що належать до  $j$ -ї вибірки.

У другому підході (непараметричний дискримінаційний аналіз) загальний вигляд функцій  $f_j(x)$  є невідомим. Тому необхідно використовувати спеціальні прийоми їх оцінювання, наприклад, будувати непараметричні оцінки гістограмного або ядерного типу.

Розглянемо більш докладно параметричний дискримінаційний аналіз у випадку нормальних класів.

Припустимо, що кожний  $j$ -й клас є  $p$ -вимірною нормальною сукупністю з вектором середніх значень  $a_j$  і коваріаційною матрицею  $\Sigma$ , яка є загальною для всіх класів. Тоді функції  $f_j(x)$  доцільно задати у вигляді щільності  $p$ -вимірного нормального розподілу ймовірності:

$$\varphi(X, M, \Sigma) = \frac{1}{2\pi^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(X-A)^T \Sigma^{-1} (X-A)}, \quad (3.108)$$

де  $A$  – матриця, утворена векторами середніх значень;  $X$  – матриця значень ознак. Обидві матриці мають розмір  $p \times k$ .

Оцінки для векторів середніх значень  $a_j = (a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(p)})^T$  та елементів коваріаційної матриці, отримані методом найбільшої правдоподібності за вибірками, що навчають, мають вигляд:

$$a_j^{(\ell)} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}^{(\ell)}; \quad (3.109)$$

$$\sigma_{\ell q} = \frac{1}{n_{sum} - k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji}^{(\ell)} - a_j^{(\ell)})(x_{ji}^{(q)} - a_j^{(q)}); \quad (3.110)$$

$(\ell=1, \dots, p; j=1, \dots, k).$

Розв'язувальне правило набуває вигляду:

$$\left[ X_v - \frac{1}{2}(a_{j_0} + a_j) \right]^T \Sigma^{-1} (a_{j_0} + a_j) \geq \ln \frac{\pi_j}{\pi_{j_0}} \quad (3.111)$$

для всіх  $j=1, 2, \dots, k$ .

Для  $\kappa=2$  апіорні ймовірності  $\pi_1=\pi_2=0,5$ . У цьому випадку спостереження  $X_v$  зараховують до першого класу, якщо виконується умова:

$$\left[ X_v - \frac{1}{2}(a_1+a_2) \right]^T \Sigma^{-1}(a_1+a_2) \geq 0 \quad (3.112)$$

і до другого – якщо вона не виконується.

Одним з поширених методів розпізнавання образів є *метод Байєса*.

Він дає можливість враховувати ознаки різної розмірності (фізичної природи), завдяки використанню рівнозначних безрозмірних характеристик ознак – частот зустрічальності (імовірностей) ознак при різних станах.

Основою методу є *діагностична матриця*, у стовпчиках якої подають значення ймовірностей певної ознаки для різних класів, а у рядках – ймовірності всіх ознак для окремих класів.

У таблиці 3.6 наведено приклад такої матриці для випадку двох класів і трьох ознак. При цьому перша і третя ознаки мають по три розряди, а друга – два розряди.

Таблиця 3.6 – Приклад діагностичної матриці для багаторозрядних ознак

D	K <sub>1</sub>			K <sub>2</sub>		K <sub>3</sub>			P(D)
	P(K <sub>11</sub> )	P(K <sub>12</sub> )	P(K <sub>13</sub> )	P(K <sub>21</sub> )	P(K <sub>22</sub> )	P(K <sub>31</sub> )	P(K <sub>32</sub> )	P(K <sub>33</sub> )	
D <sub>1</sub>									
D <sub>2</sub>									

Розрахунок ймовірності зарахування об'єкта до класу  $D_i$  здійснюють за формулою:

$$P(D_i | K^*) = \frac{P(D_i)P(K^* | D_i)}{\sum_{s=1}^n P(D_s)P(K^* | D_s)}, \quad (3.113)$$

де  $K(K_1, K_2, \dots, K_v)$  – ряд  $v$  багаторозрядних ознак;  $K^*$  – його реалізація;  $P(D_i | K^*)$  – ймовірність зарахування об'єкта до класу  $D_i$  за умови, що комплекс ознак  $K$  набув реалізації  $K^*$ ;  $P(K^* | D_i)$  – ймовірність появи комплексу ознак  $K^*$  в об'єкта, що належить до класу  $D_i$ ;  $P(D_i)$  – апіорна ймовірність потрапляння до класу  $D_i$ , яка визначається за емпіричними даними;  $i$  – номер кластера.

Якщо комплекс ознак містить  $v$  ознак, то:

$$P(K^* | D_i) = P(K_1^* | D_i)P(K_2^* | K_1^* D_i) \dots P(K_v^* | K_1^* K_2^* \dots K_{v-1}^* D_i). \quad (3.114)$$

У багатьох випадках, навіть за наявності істотних кореляційних зв'язків, можна використовувати формулу Байєса для незалежних ознак.



У цьому випадку:

$$P(K^* | D_i) = \prod_{r=1}^v P(K_r^* | D_i). \quad (3.115)$$

В основі методу лінійного дискримінантного аналізу Фішера, запропонованого Р. Фішером у 1936 р., лежить припущення, що класифікацію можна здійснити за допомогою лінійної комбінації дискримінантних (розрізнявальних) змінних.

Підґрунтям для зарахування об'єкта до певного кластера є максимальне значення класифікуючої функції, яка є лінійною комбінацією дискримінантних змінних  $X$  і може бути записана для  $k$ -го кластера у вигляді:

$$h_k = b_{k0} + \sum_{i=1}^p b_{ki} X_i, \quad (3.116)$$

де  $p$  – кількість дискримінантних змінних;  $b_{ki}$  – коефіцієнт для  $i$ -ї змінної  $k$ -го класу:

$$b_{ki} = (n - g) \sum_{j=1}^p a_{ij} X_{jk}, \quad (3.117)$$

де  $n$  – загальна кількість спостережень за усіма класами;  $a_{ij}$  – елементи матриці, яка є оберненою до матриці розкидів усередині класів і розраховується за формулою:

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^j \sum_{n=1}^{n_k} (X_{ikn} - X_{ik})(X_{jkn} - X_{jk}), \quad (3.118)$$

де  $g$  – кількість класів;  $n_k$  – кількість спостережень у  $k$ -му класі;  $X_{jkn}$  – значення  $n$ -го спостереження  $i$ -ї змінної у  $k$ -му класі;  $X_{ik}$  – середнє значення  $i$ -ї змінної у  $k$ -му класі.

*Для використання методу необхідно виконання таких умов:*

- обсяг вибірки має бути більшим, ніж кількість змінних;
- кластери, серед яких здійснюють дискримінацію, підпорядковані багатовимірному нормальному розподілу;
- класи можуть перетинатися, але їх центри мають бути достатньо віддаленими один від одного;
- різниця між коваріаційними матрицями цих кластерів є статистично незначущою.

Останнє припущення спрощує обчислювальну процедуру. Але його необґрунтоване застосування може призвести до втрати найсуттєвіших індивідуальних характеристик кластерів, які мають істотне значення для дискримінації.

Це припущення також дає змогу отримати розв'язок у випадку, коли кількість вибірок, що навчають, у кластері є меншою, ніж кількість дискримінантних функцій, тобто коли лінійний дискримінантний аналіз не може бути використаний.

*За якістю дискримінації (відсотком правильно класифікованих об'єктів) результати лінійного дискримінантного збігаються з результатами більш складного методу канонічного дискримінантного аналізу.*

Канонічний дискримінантний аналіз ґрунтується на знаходженні канонічних дискримінантних функцій:

$$f_{km} = u_0 + \sum_{i=1}^p u_i X_{ikm}, \quad (3.119)$$

де  $u_i$  – коефіцієнти, що визначають за формулою:

$$u_i = v_i \sqrt{n-g}, \quad u_0 = -\sum_{i=1}^p u_i \bar{X}_i, \quad (3.120)$$

де  $\bar{X}_i$  – середнє значення  $i$ -ї змінної за всіма класами;  $v_i$  – коефіцієнти, що розраховують як компоненти власних векторів розв'язку узагальненої проблеми власних значень:

$$Bv = \lambda Wv, \quad (3.121)$$

де  $B$  – міжгрупова сума квадратів відхилень;  $v$  – власний вектор.

Інші позначення збігаються з тими, що були використані для лінійного дискримінантного аналізу.

Кількість дискримінантних функцій може бути меншою або рівною кількості параметрів об'єкта.

Матрицю  $B$  визначають як:

$$B = T - W, \quad (3.122)$$

де  $T$  – матриця сум квадратів і попарних добутків:

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^g \sum_{m=1}^{n_k} (X_{imk} - \bar{X}_i)(X_{jmk} - \bar{X}_j). \quad (3.123)$$

Зарахування нових некласифікованих об'єктів до заданих кластерів здійснюють після обчислення дискримінантних функцій на основі евклідової метрики.

*Недоліком методу лінійного дискримінантного аналізу Фішера є припущення про рівність коваріаційних матриць досліджуваних вибірок.*

У методі лінійного дискримінантного аналізу (не Фішера), навпаки, передбачають, що коваріаційні матриці різних вибірок є різними.

Це істотно ускладнює процедуру розрахунків. Відмова від припущення про статистичну нерозрізненість коваріаційних матриць для кластерів, що навчають, зумовлює необхідність того, щоб кількість вибірок, що навчають, у кластері була не меншою, ніж кількість дискримінантних функцій.

Якщо ця умова не виконується, необхідно застосовувати лінійний дискримінантний аналіз Фішера або канонічний дискримінантний аналіз.

Підґрунтям для зарахування об'єкта до того чи іншого класу є найбільше за всіма класами значення функції щільності ймовірності для даного об'єкта.

Якість розпізнавання для цього методу є приблизно на 5 % вищою, ніж для двох попередніх.

*Розпізнавання образів є необхідним попереднім етапом статистичної обробки багатовимірних даних.*

Це пов'язано з тим, що вплив одних і тих самих факторів на поведінку різних кластерів зазвичай є різним, а іноді й протилежним.

Тому застосування методів кореляційно-регресійного аналізу до сукупності в цілому може призводити до істотних похибок і, як правило, не дає можливості дати змістову інтерпретацію одержуваних параметрів.

### **3.6.2 Основи застосування нейронних мереж для обробки даних**

*Нейронні мережі – схеми з'єднання однорідних елементів – нейронів.*

Ця назва стосується не тільки біологічних об'єктів, але й їх математичних моделей.

Ці моделі можуть розв'язувати задачі: логічні, стохастичні, керування, моделювання та прогнозування.

В наш час цей термін застосовується для позначення структури математичної моделі, яка, в свою чергу називається *нейронною мережею*.

При моделюванні процесів однією з найбільш складних задач є *вибір виду функції апроксимації*.

Це пояснюється тим, що часто характер залежності одного параметра від іншого є невідомим.

Фактично, нам необхідно, знаючи певний набір значень вхідних параметрів, віднести значення вихідного параметра до певного класу чи значення.

Для вирішення поставленої задачі найбільш прийнятним є використання такого *математичного методу як нейронні мережі*, які стали однією з математичних основ *створення інформаційних систем, які володіють штучним інтелектом (ІСШ)*.

ІСШ являє собою досить нову і перспективну технологію, що сприяє новим підходам до вирішення цілого ряду завдань у науці, техніці, економіці та бізнесі. Вони увійшли у практику там, де потрібно вирішувати неформалізовані завдання, для яких немає відомих алгоритмів розв'язання. Для таких задач

нейромережеві технології за ефективністю можуть істотно перевищувати традиційні методи.

ІСШ найкращим чином проявляють себе за великої кількості даних, для яких є характерними неявні взаємозалежності та закономірності. Тут вони автоматично витягають і використовують різні залежності, приховані в даних.

До завдань, що ефективно розв'язуються за допомогою ІСШ, в наш час відносяться наступні:

- апроксимація функцій (побудова моделей для залежностей, що погано формалізуються);
- класифікація образів (визначення приналежності вхідного образу до попередньо визначених класів);
- кластеризація (класифікація образів «без вчителя»);
- прогнозування;
- асоціативна пам'ять (пам'ять, що адресується за змістом) для створення сховищ даних, мультимедійних баз даних;
- оптимізація (знаходження рішення, що задовольняє системі обмежень і максимізує або мінімізує цільову функцію);
- управління.

Нейронні мережі – це сітки, що складаються з пов'язаних між собою простих елементів – формальних нейронів.

Ядром використання уявлень є ідея про те, що нейрони можна моделювати досить простими формулами, а вся складність процесу моделювання визначається зв'язками між нейронами.

Кожен зв'язок подається як зовсім простий елемент, що служить для передачі сигналу.

Для опису кожного нейрона використовується проста і одна й та сама функція, що називається *передавальною* або *функцією активації нейрона*.

На рис. 3.8 представлено типову схему нейрону, з яких потім формується нейронна мережа.

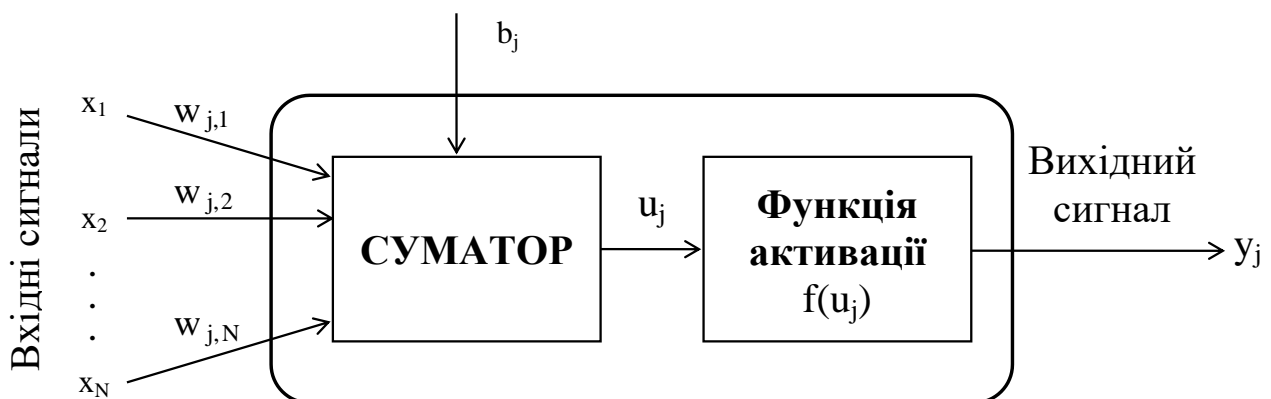


Рисунок 3.8 – Схема нейрона

На рисунку видно, що зі входів  $O_1, O_2, \dots, O_n$  подається сигнал, який змінюється за допомогою вагових коефіцієнтів  $W_1, W_2, \dots, W_n$  шляхом їх перемноження із вхідними сигналами.

Перетворені сигнали надходять до суматора  $\Sigma$ , де складаються за алгебраїчними правилами.

Вихід суматора, позначений як  $NET$ , є входом до функції активації  $F$ , де він перетворюється за формулою, яка міститься у цьому блоці.

Вихід нейрона позначено як  $OUT$ .

Очевидно, що кількість вхідних сигналів до нейрона залежить тільки від бажання та обізнаності дослідника.

Наведемо систему формул, що пояснюють принцип перетворення вхідних сигналів в одному нейроні.

$$NET = \sum_{i=1}^N O_i W_i; \quad OUT = F(NET). \quad (3.124)$$

Звідкіля випливає, що

$$OUT = F\left(\sum_{i=1}^N O_i W_i\right) \quad (3.125)$$

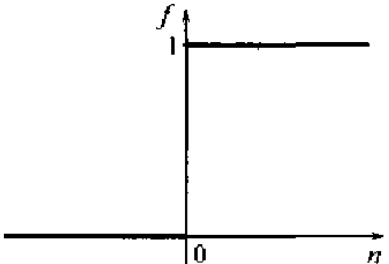
В деяких випадках модель (3.125) змінюється за рахунок додавання так званого порогу збуджуваності  $\theta$ . Це означає, що вхідний сигнал є меншим за величину  $\theta$  що дорівнює нулю. Тоді (3.125) можна переписати у вигляді:

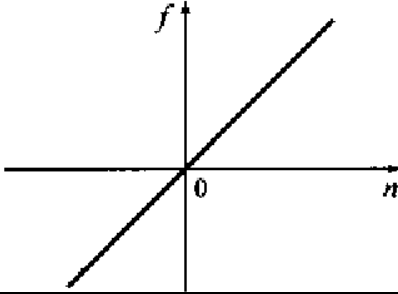
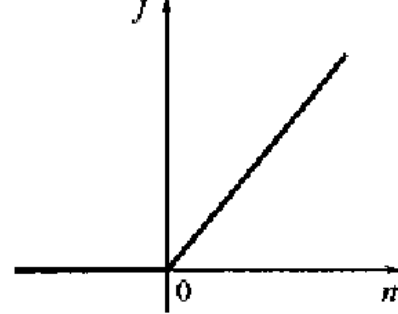
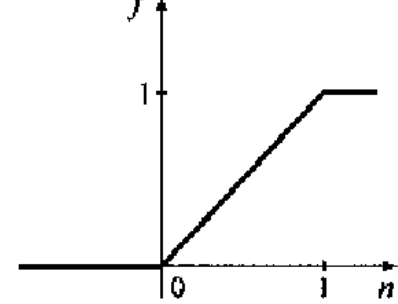
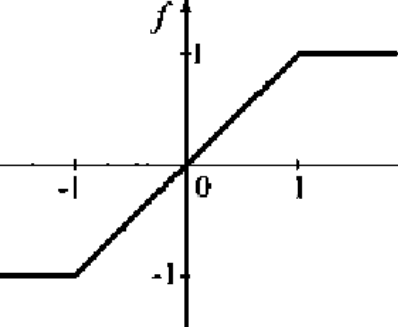
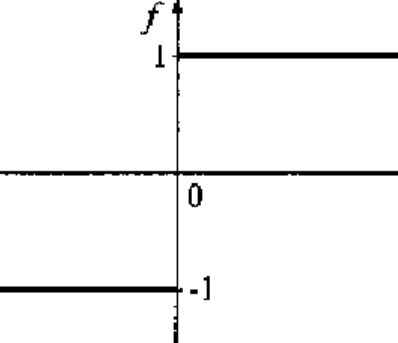
$$OUT = F\left(\sum_{i=1}^N (O_i - \theta_i) W_i\right). \quad (3.126)$$

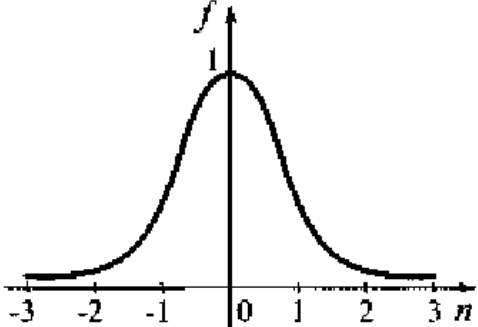
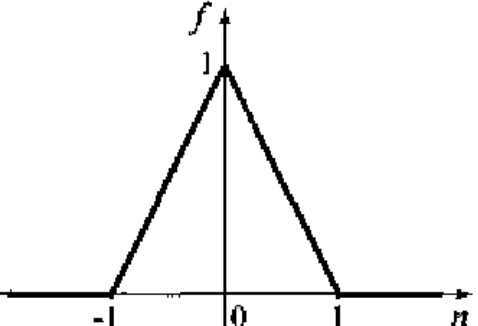
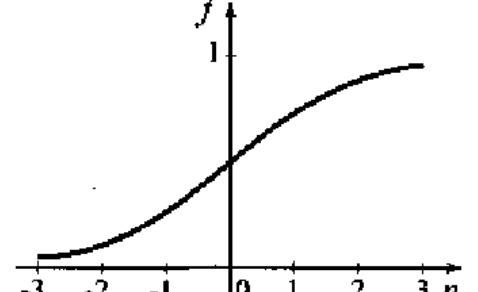
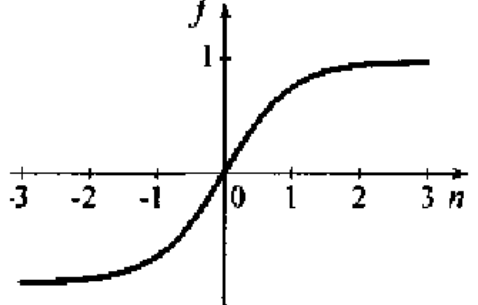
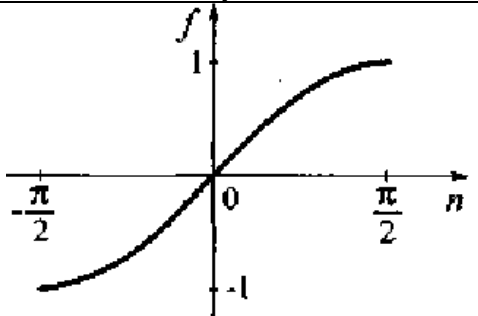
Функції перетворення, що їх застосовують у нейронних сітках наведені у табл. 3.7.

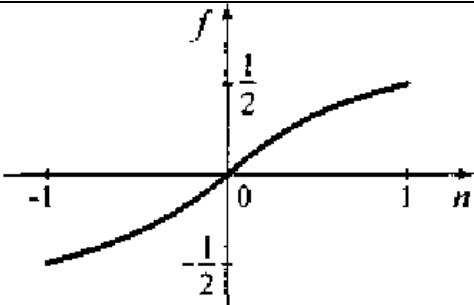
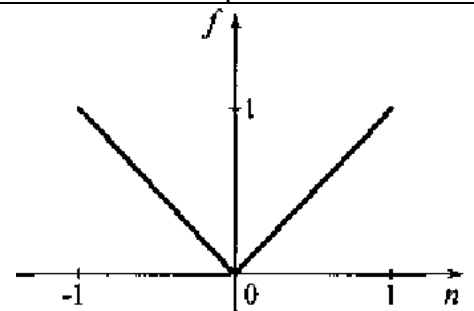
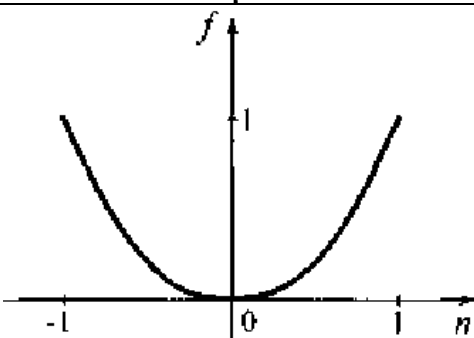
В таблиці 3.7 прийнято такі умовні позначення:  $f$  – вихід функції активації,  $n$  – вхід функції активації.

Таблиця 3.7 – Типи передавальних (активації) функцій, що застосовуються в моделях нейронів

Назва функції	Аналітичний вигляд	Геометричне зображення
<i>Хевісайда (ступінчаста функція)</i>	$f(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$	

Лінійна	$f(n) = n$	
Позитивна лінійна (напівлінійна)	$f(n) \begin{cases} 0, n < 0 \\ n, n \geq 0 \end{cases}$	
Лінійна з обмеженнями	$f(n) \begin{cases} 0, n < 0 \\ n, 0 \leq n \leq 1 \\ 1, n > 1 \end{cases}$	
Симетрична лінійна з обмеженнями	$f(n) \begin{cases} -1, n < -1 \\ n, -1 \leq n \leq 1 \\ 1, n > 1 \end{cases}$	
Симетрична з жорсткими обмеженнями	$f(n) \begin{cases} -1, n < 0 \\ 1, n \geq 0 \end{cases}$	

<p>Експоненційна (радіальна)</p>	$f(n) = e^{-n^2}$	
<p>Трикутна</p>	$f(n) = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1 -  n , & -1 \leq n \leq 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$	
<p>Логістична</p>	$f(n) = \frac{1}{1 + e^{-n}}$	
<p>Гіперболічна (тангенціальна)</p>	$f(n) = \frac{2}{1 + e^{-2n}} - 1$	
<p>Синусоїдальна</p>	$f(n) = \sin(n)$	

<p><i>Раціональна (гіперболічна)</i></p>	$f(n) = \frac{n}{1+ n }$	
<p><i>Модульна</i></p>	$f(n) =  n $	
<p><i>Квадратична</i></p>	$f(n) = n^2$	

Розглянувши наведені в табл. 3.7 функції, бачимо, що всі функції на виході дають одиницю.

В разі необхідності отримати на виході сигнал, відмінний від діапазону  $[0;1]$ , його множать на відповідний перехідний коефіцієнт.

Коли функцію активації вибрано, починається *формування структури нейронної сітки*.

Створення структури нейронної сітки починається з визначення кількості шарів нейронів.

*Шаром* називається група нейронів, що отримують однакові вхідні сигнали (рис. 3.9).

Таким прийомом моделюється нервова система живої істоти, де кожен сигнал завжди сприймається групою нейронів, але вихідні сигнали з них різняться між собою.

Різниця обумовлена різними значеннями *вагових коефіцієнтів*.

Тобто нейронний шар можна тлумачити як паралельне з'єднання нейронів.

Матриця  $W$ , розміром  $S \times R$ , елементами якої є вагові коефіцієнти  $W_{ij}$  називається *ваговою матрицею*.

В разі, якщо якісь зв'язки вхідних сигналів із нейронами відсутні, відповідний ваговий коефіцієнт у матриці прирівнюється до нуля.



$$W = (w_{ij})_{S \times R} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1R} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{S1} & w_{S2} & \dots & w_{SR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \dots \\ \bar{w}_S \end{bmatrix}. \quad (3.127)$$

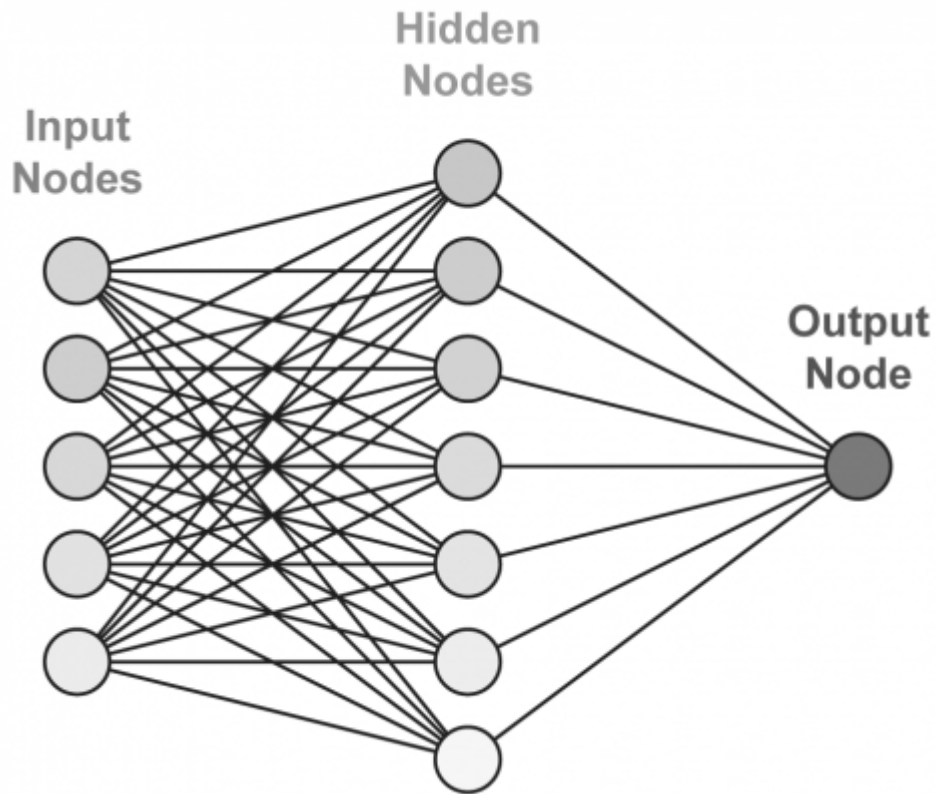


Рисунок 3.9 – Схема одного шару нейронної мережі з прямими зв'язками:

Наступним етапом створення нейронної мережі є визначення кількості шарів та кількості нейронів у кожному шарі.

Частіше дослідники обирають поступове зменшення кількості нейронів від першого шару до останнього.

Іноколи останній шар являє собою один нейрон.

Далі визначається система зв'язків поміж нейронами різних шарів.

В деяких випадках виходи нейронів одного шару повертаються на вхід нейронів попереднього шару (зворотний зв'язок) або ці виходи спрямовуються на входи нейронів, що розташовані у наступних шарах, але із пропуском найближчого шару.

На рис. 3.10 показано приклад однієї з реальних нейронних мереж.

В ній вхідні сигнали потрапляють у нейрони першого шару попарно: перший ( $a_1$ ) – в  $L_1$  та  $H_1$ , другий ( $a_2$ ) – в  $L_2$  та  $H_2$ , третій ( $a_3$ ) – в  $L_3$  та  $H_3$ .

Вихід із них також надходить на усі нейрони другого шару, але кількість останніх уже менше, замість шести у першому шарі, у другому – тільки три.

Вихід із другого шару також надходить до трьох нейронів третього шару, але водночас і до трьох нейронів четвертого шару.

Останній шар нейронної сітки представлений тільки одним нейроном.

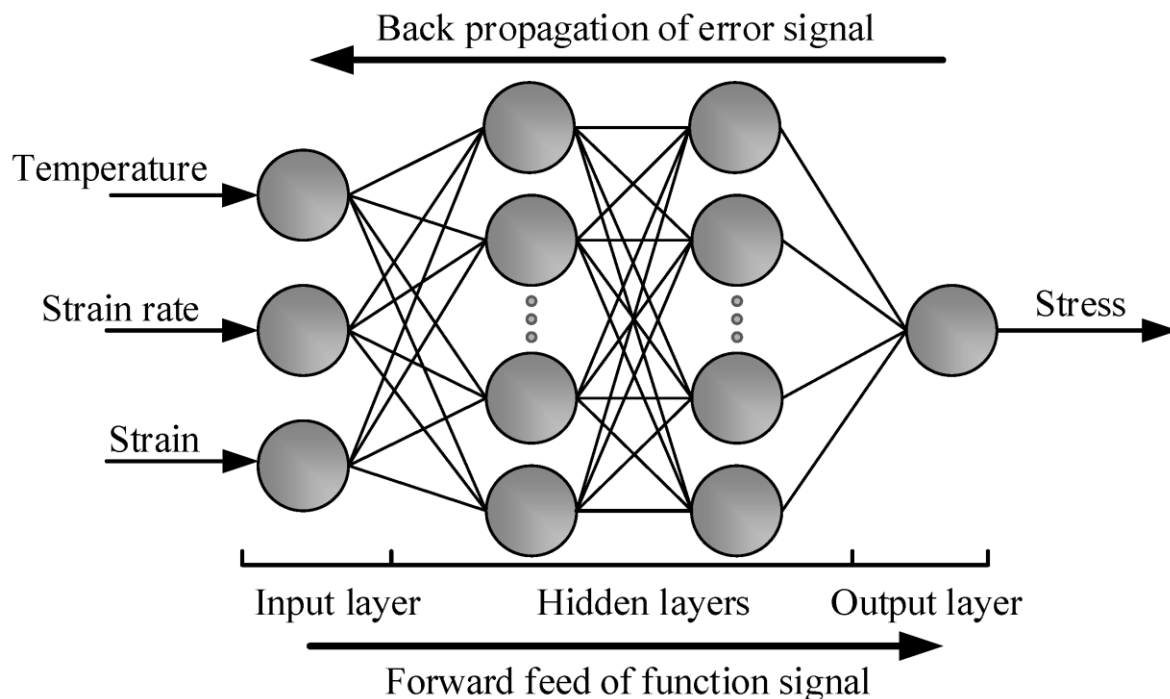


Рисунок 3.10 – Приклад складної структури нейронної мережі

На рис. 3.11 наведено фотографію структури нервових клітин живого організму.

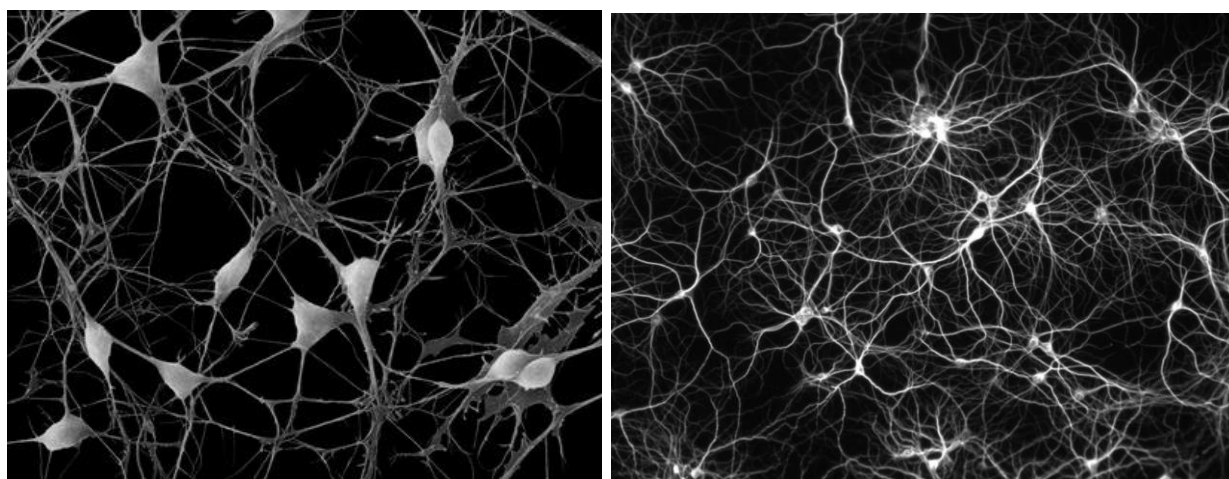


Рисунок 3.11 – Фотографії нервових клітин живого організму (нейрони) та зв'язків поміж ними (синапси)

З неї видно, що у живих істот так само, як і в наведеному прикладі, існує багато паралельних і послідовних структур, пов'язаних поміж собою не тільки послідовно, але й зі зворотним зв'язком.

При створенні нейронної мережі складно з першого разу визначити, який її тип буде найбільш ефективно вирішувати поставлені задачі.

Тому дослідники користуються рекомендаціями та знахідками своїх попередників, які вже вирішували подібні задачі і знайшли для них найбільш ефективні структури поєднання нейронів та види функцій активації.

Деяку складність викликає створення формули, яку реалізує отримана нейронна мережа.

Пояснімо це на прикладі рис. 3.10.

Починати цю процедуру потрібно з останнього шару, рухаючись у зворотному напрямку.

Потім усі отримані формули можна поєднати в одну підстановкою.

За визначенням, усі функції активації мають вигляд  $F$ .

А вагові коефіцієнти суматорів позначимо як  $W_{ijk}$  для  $i$ -го нейрона для  $j$ -го вхідного сигналу та  $k$ -го шару.

Тоді маємо

П'ятий шар: 
$$Z_0 = F(\beta_{1z1} W_{115} + \beta_{2z2} W_{225} + \beta_{3z3} W_{335});$$

Четвертий шар: 
$$\begin{aligned} \beta_{1z1} &= F(\beta_1 W_{114} + a_1 W_{124}); \\ \beta_{2z2} &= F(\beta_2 W_{214} + a_2 W_{224}); \\ \beta_{3z3} &= F(\beta_3 W_{314} + a_3 W_{324}); \end{aligned}$$

Третій шар: 
$$\begin{aligned} \beta_1 &= F(a_1 W_{113} + a_2 W_{123} + a_3 W_{133}); \\ \beta_2 &= F(a_1 W_{213} + a_2 W_{223} + a_3 W_{233}); \\ \beta_3 &= F(a_1 W_{313} + a_2 W_{323} + a_3 W_{333}); \end{aligned}$$

Другий шар: 
$$\begin{aligned} a_1 &= F(L_1(a_1) W_{112} + L_2(a_2) W_{122} + L_3(a_3) W_{132}); \\ a_2 &= F(H_1(a_1) W_{212} + H_2(a_2) W_{222} + L_3(a_3) W_{232}); \\ a_3 &= F(H_1(a_1) W_{312} + H_2(a_2) W_{322} + H_3(a_3) W_{332}); \end{aligned}$$

Перший шар: 
$$\begin{aligned} L_1(a_1) &= F(W_{111} a_1); \\ H_1(a_1) &= F(W_{112} a_1); \\ L_2(a_2) &= F(W_{113} a_2); \\ H_2(a_2) &= F(W_{114} a_2); \\ L_3(a_3) &= F(W_{115} a_3); \\ H_3(a_3) &= F(W_{116} a_3). \end{aligned}$$

Підставляючи послідовно формули для першого шару у формули для другого, потім для третього і так далі, отримаємо єдину формулу, що описує створену нами нейронну мережу.

### Навчання

Визначення вагових коефіцієнтів, що представлені у формулах, називається *навчанням*, тому існує задачник – набір прикладів із заданими відповідями. Ці приклади пред'являються системі по одному.

З точки зору таблиці експериментальних даних це означає, що на вхід нейронної мережі подається значення вхідних факторів по одному рядочку з таблиці.

Нейрони одержують по вхідних зв'язках сигнали – «умови прикладу», перетворюють їх, кілька разів обмінюються перетвореними сигналами і, нарешті, видають відповідь – також набір сигналів.

Відхилення від правильної відповіді, тобто відміна від вихідного фактора з таблиці експериментів, штрафується.

Навчання складається в мінімізації штрафу як (неявної) функції зв'язків.

Неявне навчання приводить до того, що структура зв'язків стає «незрозумілою» – не існує іншого способу її прочитати, крім як запустити функціонування мережі.

Стає складно побудувати зрозумілу людині логічну конструкцію, що відтворює дії мережі.

Штучну нейронну мережу інколи називають *перцептроном*.

Цей термін визначив Розенблат, який у своєму алгоритмі навчання перцептрону довів, що перцептрон може бути навчений всьому, що він може реалізовувати.

Для навчання мережі образ  $X$  подається на вхід і обчислюється вихід  $Y$ .

Якщо  $Y$  є правильним, то нічого не міняється.

Однак якщо вихід є неправильним, то ваги, приєднані до входів, що підсилюють помилковий результат, модифікуються, щоб зменшити похибку.

Розенблат експериментував із розпізнаванням цифр електронною схемою, яка мала видавати сигнал 0 або 1 в залежності від невірної або правильного розпізнавання.

Узагальнення алгоритму навчання перцептрону, зване дельтою-правилом, переносить цей метод на безперервні входи і виходи.

Для цього вводиться величини  $d$ , яка дорівнює різниці між необхідним або цільовим виходом  $T$  і реальним виходом  $Y$

$$d = (T - Y). \quad (3.128)$$

Випадок, коли  $d = 0$ , відповідає ситуації, коли вихід є правильним і в мережі нічого не змінюється.

У будь-якому з цих випадків перцептронний алгоритм навчання зберігається, якщо  $d$  множиться на величину кожного входу  $x_i$  і цей добуток додається до відповідної ваги.

З метою узагальнення вводиться коефіцієнт «швидкості навчання»  $h$ , який множиться на  $dx_i$ , що дозволяє управляти середньою величиною зміни ваги.

В алгебраїчній формі запису

$$D_i = hdx_i; \quad (3.129)$$

$$w(n+1) = w(n) + D_i; \quad (3.130)$$

де  $D_i$  – корекція, пов'язана з  $i$ -м входом  $x_i$ ;  $w_i(n+1)$  – значення ваги  $i$  після корекції;  $w_i(n)$  – значення ваги  $i$  до корекції.

Дельта-правило модифікує ваги відповідно до необхідного і дійсного значень виходу кожної полярності як для безперервних, так і для бінарних входів і виходів. Ці властивості відкрили множину нових застосувань.

#### *Автоматична класифікація*

Нехай існує деякий об'єкт, який характеризується кількома параметрами  $p_1, \dots, p_N$ . Нехай також є  $M$  класів об'єктів,  $C_1 \dots C_M$ . Ми спостерігаємо об'єкт і можемо розрахувати чи виміряти його параметри.

Вектор  $p$  характеризує об'єкт, що спостерігається:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

На підставі вектора  $p$  ми повинні вирішити, до якого класу віднести об'єкт, тобто вибрати  $C_i$ , до якого належить об'єкт, що характеризується набором параметрів  $p$ .

Роз'язок завдання можна представити у вигляді вектора:

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_M \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

і виконуються умови:

$$0 \leq c_m \leq 1 \quad \sum_{m=1}^M c_m = 1 \quad (3.133)$$

Тут  $\tilde{n}_m$  – ймовірність, з якою об'єкт належить до класу  $\tilde{n}_m$ .

Якщо розглядати  $\tilde{n}_m$  як ймовірність, то повинні виконуватися умови (3.133).

Наприклад,  $c_m=0,9$  і  $c_m=0,1$  означає, що об'єкт із даним набором параметрів  $p$  з імовірністю 0,9 відноситься до класу  $C_1$  і з імовірністю 0,1 – до класу  $C_2$ .

Якщо створити СП з  $N$  входами і  $M$  виходами та навчити його давати на виході вектор  $C$ , коли на вхід подається  $p$ , то ми вирішимо поставлену задачу.

Мережа будує відображення  $P \rightarrow C$  у процесі навчання.

Цілком витягти це відображення мережа не дозволяє, але можна отримати довільну кількість пар  $(p \rightarrow c)$ , пов'язаних відображенням.

Для довільного вектора  $p$  на вході ми можемо отримати ймовірності приналежності до класів на виході.

Чому на виході буде отримано саме ймовірності  $c_m$  і чи будуть виконуватися умови (3.133)?

Якщо навчання пройшло успішно, то ми напевно одержимо на виході щось схоже на ймовірності.

Це визначається алгоритмом навчання.

Але найчастіше виявляється, що компоненти вихідного вектора можуть бути менше 0 або більше 1, а друга умова (3.133) виконується лише приблизно. Неточність – наслідок аналогових нейронних мереж.

Більшість результатів, що даються нейромережами, є неточними. Крім того, при навчанні мережі зазначені умови, що накладаються на ймовірності, не вводяться в мережу безпосередньо, а неявно містяться у множині даних, на яких навчається мережа. Це – друга причина некоректності результату.

Такий спосіб формалізації – не єдиний, але один із вдалих.

Можна навчити мережу і поіншому.

Нехай у мережі тільки один вихід, і нехай його вихідний сигнал – номер класу  $m$  для вектора  $p$ , пред'явленого на вході.

Отже, мережа навчається залежності  $m(p)$ .

Якщо навчання пройшло успішно, то коли на вхід мережі поданий вектор  $p$ , що характеризує об'єкт, на виході буде отримано число  $m$ , і нами приймається рішення про приналежність  $p$  до класу  $C_m$ .

На перший погляд такий спосіб формалізації більш економічний: використовується всього один вихід.

Але існує важливий недолік.

Розглянемо приклад класифікації (рис. 3.12).

Нехай потрібно розділити об'єкти за двома ознаками  $p_1$  і  $p_2$ , на три класи:  $m=1$ ,  $m=2$ ,  $m=3$ .

Якщо вхідний вектор  $p$  набуде значення, позначеного жирною крапкою, то вихід мережі, при правильному навчанні, набуде значення  $m=2$ , тобто об'єкт буде віднесений до класу 2, абсолютно невідповідного фактичному положенню вектора у просторі  $(p_1; p_2)$ .

Дане явище виникає, тому мережа схильна інтерполювати вхідні та вихідні дані.

Якщо функції активації є плавними, вагові коефіцієнти є не надто великими, і кількість шарів є не надто великою, то вихід мережі так само буде гладким і безперервним.

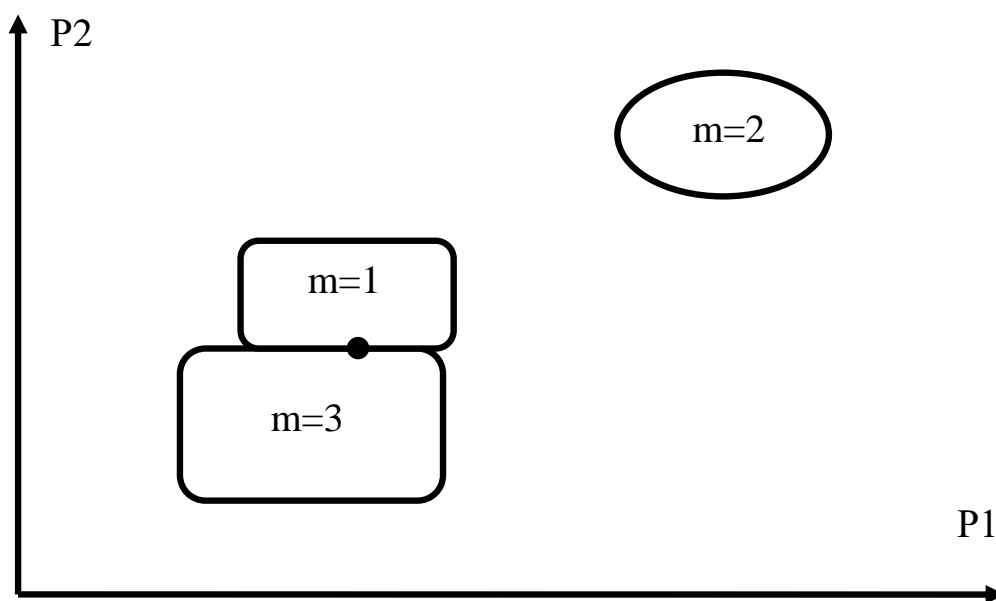


Рисунок 3.12 – Приклад некоректної класифікації

Для близьких  $p$  будуть отримані близькі  $m$  на виході.

Але при вирішенні задачі класифікації таке допущення буває невірним. Звідси неправильне розв'язання.

Щоб уникнути помилок, можна застосувати інші способи формалізації або впорядкувати номери класів  $m$  так, щоб близьким  $m$  відповідали близькі у просторі  $P$  класи.

#### Прогнозування одновимірної функції

Нехай задано функцію  $W, \theta$ , визначену на інтервалі часу  $[0; t_0]$ , де  $t_0$  – поточне значення часу.

Потрібно передбачити значення функції при  $t > t_0$ .

Щоб застосувати багатозаровий перцептрон для прогнозування, час потрібно дискретизувати.

Будемо вважати, що нам відомі значення функції в моменти часу

$$\begin{pmatrix} x_0 = f(t_0) \\ x_1 = f(t_0 - \delta_1) \\ x_2 = f(t_0 - \delta_1 - \delta_2) \\ \dots \\ x_n = f(t_0 - \delta_1 - \dots - \delta_n) \end{pmatrix} = x, \quad \delta_i > 0$$

Будемо передбачати значення функції в момент часу  $(t_0 + \delta_0)$  для  $\forall \delta_0 > 0$ .

$\delta_0$  – називається інтервалом прогнозування.

Рішенням задачі будемо вважати значення  $f(t_0 + \delta_0) = y$ .

Побудуємо мережу, що має  $n$  входів і 1 вихід.

В якості вхідного вектора візьмемо вектор  $x$ , а вихідного – один сигнал  $y$ .

Така мережа передбачає значення функції в одній точці  $y$  по  $(n+1)$  відомим значенням функції, заданим вектором  $x$ .

Вибравши під час навчання мережі набір інтервалів  $\delta$ , його не можна змінити після навчання.

Мережа з даними параметрами  $W$ ,  $\theta$ , отриманими під час навчання, може прогнозувати тільки з одним набором  $\delta_i$ .

Чи можна прогнозувати функцію у вигляді дискретного процесу в часі?

Як передбачити кілька значень функції у різних точках?

Для цього знайдений цікавий спосіб.

Виберемо всі інтервали однаковими:  $\delta_i = \delta = const$ .

Побудуємо і навчимо мережу.

подамо на вхід вектор  $x$  зі значеннями функції у відомих точках.

Розрахувавши вихід мережі, отримаємо прогнозоване значення функції в точці  $f(t_0 + \delta_0) = y$ .

Тепер «зсунемо» компоненти вхідних і вихідних векторів наступним чином (знак рівності означає «привласнити значення»):

$$x_n = x_{n+1}$$

...

$$x_1 = x_0$$

$$x_0 = y.$$

Тепер вихідний вектор став однією з компонент вхідного.

Знову розраховуємо вихід, і отримуємо значення функції в точці  $(t_0 + 2\delta_0)$ .

Повторивши ці операції, можна прогнозувати функцію в будь-якій кількості точок із дискретним кроком за часом, рівним  $\delta$ .

### 3.7 Основи повнофакторного експерименту

#### 3.7.1 Основні положення повнофакторного експерименту

Основною метою проведення сучасного експерименту з позицій виробника продукції є розробка математичної моделі, яка адекватно описує процес і дозволяє, в кінцевому результаті, здійснювати його управління.

При плануванні експерименту дослідник повинен:

1) забезпечити надійність і чіткість інтерпретації результатів досліджень;  
2) скласти чітку та послідовну логічну схему побудови всього процесу дослідження: що, коли і як потрібно робити;

3) максимально формалізувати процес розробки моделі та зіставлення експериментальних даних різних дослідів одного і того ж об'єкта досліджень з метою широкого застосування електронно-обчислювальних машин.



Всім перерахованим вимогам відповідають *статистичні методи планування експерименту*.

При застосуванні статистичних методів планування експерименту математичний опис представляється у вигляді полінома, де  $Y$  – функція відгуку, а  $x_1, x_2, x_3 \dots$  – фактори (аргументи) досліджуваного процесу.

*План експерименту* в цьому випадку визначає розташування експериментальних точок в  $k$ -вимірному факторному просторі.

Зазвичай план задається у вигляді *матриці планування*, кожен рядок якої визначає умови досліду, а кожен стовпець – значення контрольованих і керованих параметрів у досліджуваному процесі, тобто значення факторів, відповідних умові досліду.

Більшість сучасних процесів характеризується наявністю значної кількості різноманітних факторів, що впливають на процес. Представивши процес у вигляді «чорної скриньки», все різноманіття діючих на її вході параметрів (факторів) можна розбити на групи (рис. 3.13).

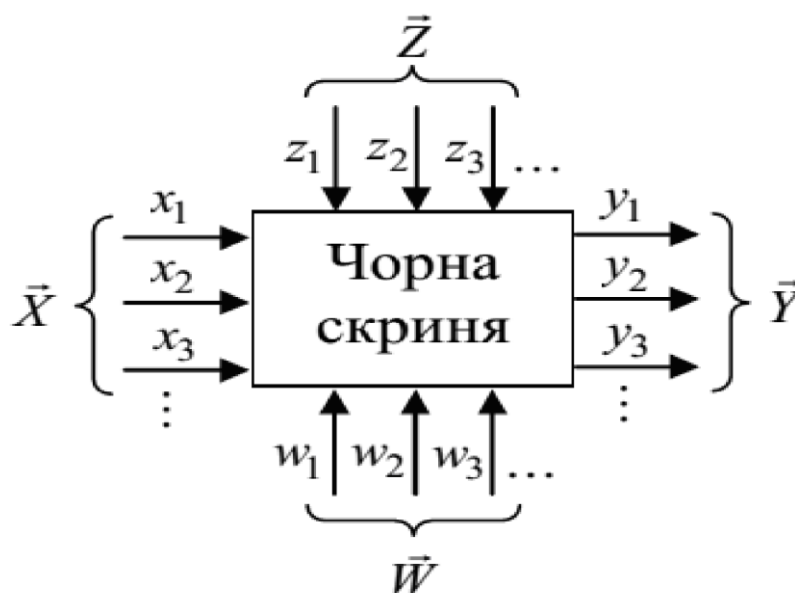


Рисунок 3.13 – Схема складного процесу

Вектор відгуку  $Y$  є функцією вхідних параметрів.

Перша група становить  $k$ -мірний вектор  $\bar{X}$  керованих параметрів, тобто таких, які можна вимірювати та цілеспрямовано змінювати. Область можливих значень  $x_1, x_2, x_3 \dots, x_k$  – факторний простір.

Друга група утворює вектор  $\bar{W}$  контрольованих, але некерованих параметрів, що характеризуються станом функцій відгуку на операціях, які мають місце перед досліджуваним процесом.

Третя група вхідних параметрів становить вектор  $\bar{Z}$  неконтрольованих, а отже, і некерованих вхідних параметрів. Сюди відносяться параметри, які справляють випадкові впливи на процес.

Зрозуміло, що під час дослідження процесу найчастіше працюють саме з першою групою вхідних параметрів. Однак при інтерпретації результатів не потрібно забувати і про інші вхідні параметри.

Планування експерименту починають з *вибору центру плану*, тобто точки, яка відповідає початковим значенням всіх використовуваних в експерименті факторів  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})$ , в околицях якої в подальшому ставиться серія планованих дослідів. Очевидно, початковим значенням факторів буде відповідати початкове значення функції відгуку  $Y_0$ .

*Центр плану* зазвичай вибирається на основі апіорних відомостей про процес. Якщо ж їх немає, то зазвичай в якості центру плану приймається центр досліджуваної області.

Значення факторів у кожному досвіді відрізняється від початкового їх значення на величину інтервалу  $\Delta X$ . Одним з найважливіших передумов успішного експерименту, з метою розробки математичної моделі, є вибір оптимальної величини  $\Delta X$ .

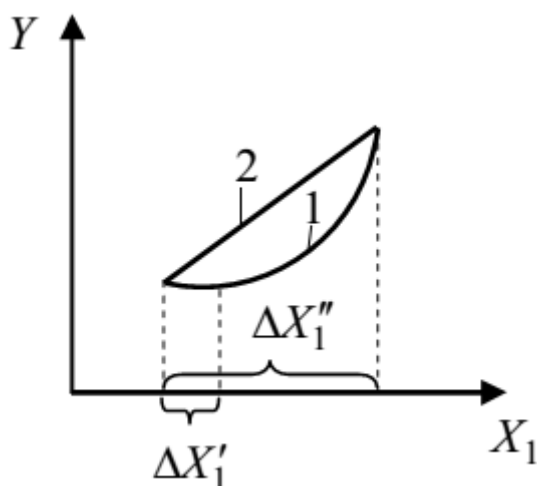


Рисунок 3.14 – Вид досліджуваної функції (1) та два варіанти кроку експерименту:  $\Delta X_1'$  – занижена величина;  $\Delta X_1''$  – завищена величина

Припустимо, що досліджувана функція  $Y=f(X_1)$  має вигляд, наведений на рис. 3.14 (крива лінія 1). Якщо вибрати  $\Delta X_1'$  невеликим, то при аналізі можна дійти до висновку, що  $Y$  не залежить від  $X_1$ . Якщо  $\Delta X_1''$  великий, то можна прийти до неадекватної моделі процесу (лінія 2). Заздалегідь передбачити оптимальну величину інтервалу варіювання досить важко. Це залежить від рівня знань експериментатором досліджуваного процесу. Зазвичай інтервал варіювання вибирають в інтервалі 0,05...0,3 від діапазону варіювання досліджуваного фактора.

Для зручності обробки результатів дослідів проводиться перетворення значень керованих змінних (що враховуються в експерименті факторів  $X_i$ ) до безрозмірних величин ( $X_{i\delta}$ )

$$X_{i\delta} = \frac{X_i - X_{0i}}{\Delta X_i}$$

де  $X_{0i}$  – базове або початкове значення  $i$ -го фактора в центрі плану;  $\Delta X_i$  – значення інтервалу варіювання  $i$ -го фактора;  $X_i$  – поточне значення  $i$ -го фактора.

Припустимо, що базове значення температури підкладки – одного з факторів досліджуваного процесу отримання резистивних плівок ( $X_2$ ) дорівнює  $X_{02} = 400$  °С. При цьому крок варіювання  $\Delta X_2 = 50$  °С. Переходячи від абсолютних значень до безрозмірних, отримаємо для верхнього рівня  $X_{2\delta} = (X_2 - X_{02}) / \Delta X_2 = \frac{450 - 400}{50} = +1$ , а для нижнього  $X_{2\delta} = \frac{350 - 400}{50} = -1$ .

У безрозмірній системі координат верхній рівень фактора дорівнює  $+1$ , а нижній дорівнює  $-1$ . Координати центру плану дорівнюють нулю і збігаються з початком координат.

Розробку моделі процесу слід проводити за принципом «від простого до складного». Відповідно до цього принципу планування експерименту починають із пропозиції, що модель досліджуваного процесу є лінійною і має вигляд полінома 1-го порядку

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} X_i X_j$$

Якщо після обробки результатів експерименту з'ясується, що зроблене припущення про лінійну залежність є помилковою, переходять до планування експерименту із пропозиції, що модель може бути представлена поліномом 2-го порядку і т.д., поки не буде розроблена адекватна процесу математична модель.

### 3.7.2 Побудова матриці планування

У повному факторному експерименті (ПФЕ) враховується вплив на функцію відгуку не тільки кожного розглянутого в експерименті фактора окремо, але й їх взаємодій.

Приклад впливу взаємодій факторів наведено на рис. 3.15.

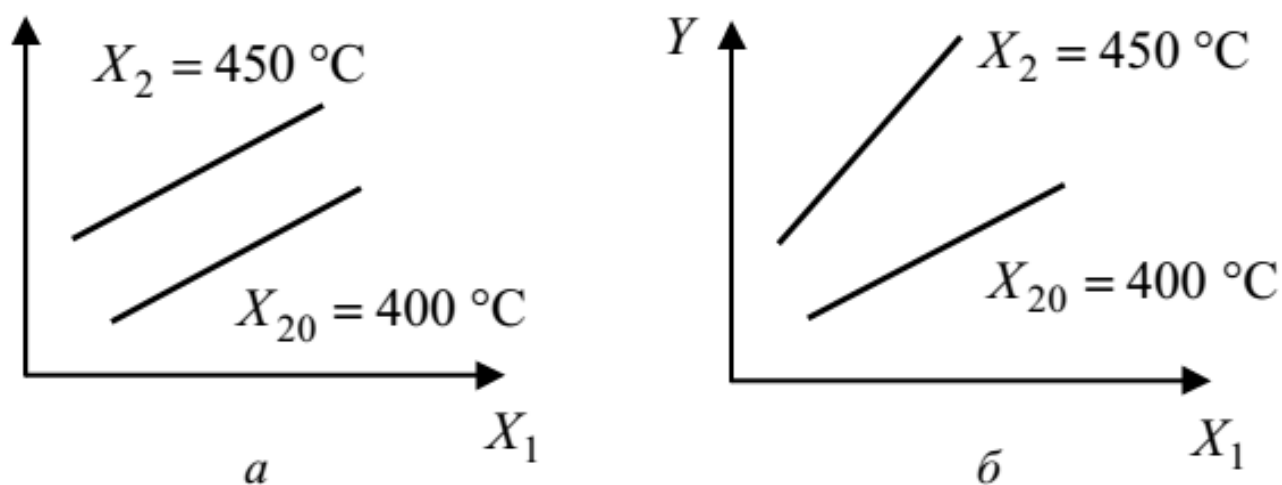


Рисунок 3.15 – Приклад відсутності взаємодії факторів  $X_1$  і  $X_2$  (а) та наявності взаємодії факторів  $X_1$  і  $X_2$  (б)

При побудові матриці повного факторного експерименту припустимо, що в досліджуваному процесі враховуються тільки два фактори –  $X_1$  і  $X_2$ . Відповідно до принципу «від простого до складного» припустимо, що модель досліджуваного процесу є лінійною функцією і має вигляд

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$$

де  $b_0$  – значення  $Y$  в центрі плану;  $b_1$  і  $b_2$  – коефіцієнти, що характеризують ступінь впливу факторів  $X_1$  і  $X_2$  на функцію  $Y$ ;  $b_{12}X_1X_2$  – враховує ефект впливу взаємодії 1-го і 2-го факторів на  $Y$ , а коефіцієнт  $b_{12}$  – характеризує вагомість (ступінь) цього впливу.

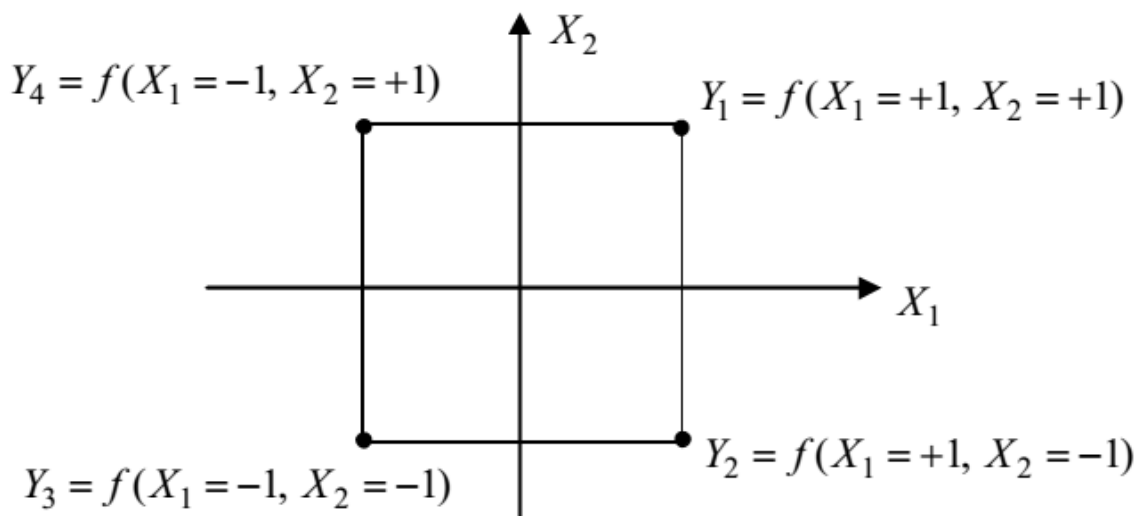


Рисунок 3.16 – Розташування експериментальних точок для двох незалежних факторів, що варіюються на двох рівнях

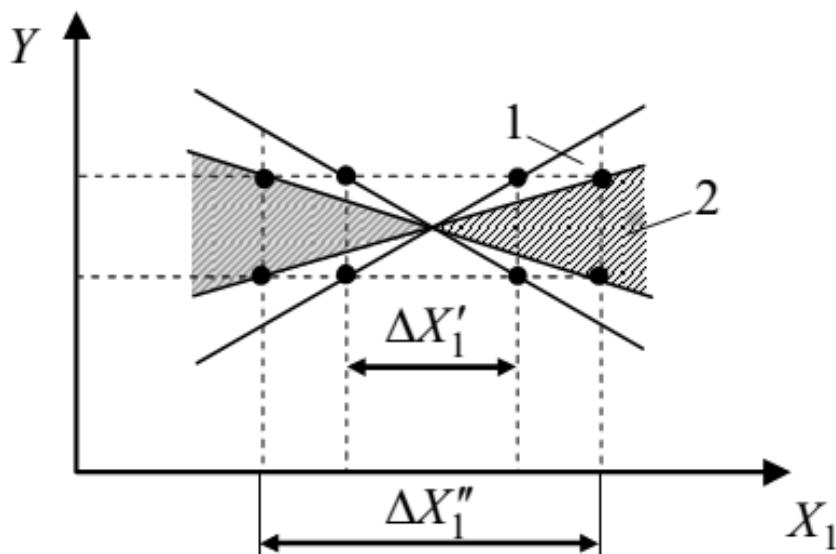


Рисунок 3.17 – Вплив розміру інтервалу варіювання на функцію  $Y = f(X_1)$

Очевидно, варіювання значень фактора відповідно його базового (початкового) значення в разі лінійної моделі достатньо проводити тільки на двох рівнях.

Всі можливі комбінації для двох факторів ( $k = 2$ ) варійованих на двох рівнях, будуть вичерпані, якщо поставити чотири досліди ( $N = 2^k$ ):  $2^2=4$ .

Досліджені точки розташуються у вершинах квадрата, центр якого збігається з центром плану (рис. 3.16)

Вплив розміру інтервалу варіювання ( $\Delta X$ ) на точність визначення залежності  $Y = f(X)$  наочно видно з рис. 3.17.

З рис. 3.17 видно: чим менше інтервал, тим «крутіше», тобто сильніше залежність  $Y = f(X_1)$ . Як зазначалося раніше, вибір «ширини» інтервалу – дуже важливий. Може знадобитися третій рівень варіювання (хоча б для двох точок).

Побудуємо матрицю планування ПФЕ для розглянутого випадку.

*При побудові матриці планування ПФЕ існує наступне правило:*

➤ перший рядок матриці у стовпцях, відповідних факторів, що розглядаються в експерименті ( $x_1, x_2$ ), заповнюється безрозмірним символом, що відповідає нижньому рівню значень фактора, тобто символом (-);

➤ продовження заповнення стовпця, відповідного першому фактору, проводиться послідовним чергуванням протилежних знаків;

➤ всі наступні стовпці, відповідні іншим пронумерованим факторам, заповнюються з частотою зміни знаків, удвічі меншою, ніж для попереднього стовпця;

➤ нумерація факторів є довільною та в кожному випадку здійснюється самим дослідником;

➤ заповнення стовпців, що враховують взаємодію факторів, проводиться як результат перемноження знаків відповідних факторів у кожному рядку;

➤ перший стовець матриці – нумерація дослідів;

➤ у другому стовпці наводяться значення фіктивної змінної  $x_0 = +1$ , відповідної коефіцієнту  $b_0$ ;

➤ в останній стовпець заносяться експериментальні значення  $Y$ , отримані в результаті проведення кожного дослідів.

Матриця планування, побудована відповідно до цього правила, приведена в табл. 3.8.

Таблиця 3.8 – Матриця планування ПФЕ типу  $2^2$

№ опыта	$x_{0i}$	$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{1i} x_{2i}$	$Y_i$
1	+	-	-	+	$Y_1$
2	+	+	-	-	$Y_2$
3	+	-	+	-	$Y_3$
4	+	+	+	+	$Y_4$

При обробці та аналізі результатів експерименту необхідно оцінювати коефіцієнти передбачуваної математичної моделі. Для забезпечення незалежності оцінки коефіцієнтів полінома необхідне дотримання незалежності стовпців матриці, або, інакше кажучи, побудована матриця планування повинна бути ортогональною.

Матриця планування буде ортогональною, якщо сума перемноження значень, наведених у кожному рядку двох будь-яких стовпців матриці, дорівнює нулю.

Перевіримо матрицю, наведену в табл. 3.8, на умови ортогональності.

	$x_{0b}$	$x_{1b}$	$x_{0b} x_{1b}$		$x_{0b}$	$x_{2b}$	$x_{0b} x_{2b}$		$x_{0b}$	$x_{1b} x_{2b}$	$x_{0b} x_{1b} x_{2b}$
+	-	-		+	-	-		+	+	+	
+	+	+		+	-	-		+	-	-	
+	-	-		+	+	+		+	-	-	
+	+	+	$\Sigma = 0$	+	+	+	$\Sigma = 0$	+	+	+	$\Sigma = 0$
	$x_{1b}$	$x_{2b}$	$x_{1b} x_{2b}$		$x_{0b}$	$x_{2b}$	$x_{0b} x_{2b}$		$x_{2b}$	$x_{1b} x_{2b}$	$x_{2b} x_{1b} x_{2b}$
-	-	+		-	+	-		-	+	-	
+	-	-		+	-	-		-	-	+	
-	+	-		-	-	+		+	-	-	
+	+	+	$\Sigma = 0$	+	+	+	$\Sigma = 0$	+	+	+	$\Sigma = 0$

Перевірка показала, що матриця в табл. 3.8 є ортогональною і, отже, з її допомогою можна проводити незалежну оцінку коефіцієнтів полінома.

Якщо в експерименті використовуються три фактори ( $k = 3$ ), а передбачувана модель є лінійною, то вона відповідає поліному, який має вигляд:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 \cdot X_2 + b_{13} X_1 \cdot X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3.$$

При варіюванні кожного з трьох факторів ( $k = 3$ ) на двох рівнях число дослідів буде  $N = 2^3 = 8$ , а матриця планування матиме вигляд (табл. 3.9).

В цьому випадку точки, що досліджуються, розташовуються у вершинах куба, центр якого знаходиться на початку координат.

Керуючись наведеним раніше правилом, можна побудувати матрицю для більшого числа розглянутих в експерименті факторів, число дослідів в якій

$$N = 2^{\kappa},$$

де  $\kappa$  – число факторів, що враховується.

Таблиця 3.9 – Матриця планування ПФЕ типу  $2^3$

№	$x_{0b}$	$x_{1b}$	$x_{2b}$	$x_{3b}$	$x_{1b} x_{2b}$	$x_{1b} x_{3b}$	$x_{2b} x_{3b}$	$x_{1b} x_{2b} x_{3b}$	$Y_i$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	$Y_1$
2	+	+	-	-	-	-	+	+	$Y_2$
3	+	-	+	-	-	+	-	+	$Y_2$
4	+	+	+	-	+	-	-	-	$Y_3$
5	+	-	-	+	+	-	-	+	$Y_4$
6	+	+	-	+	-	+	-	-	$Y_5$
7	+	-	+	+	-	-	+	-	$Y_7$
8	+	+	+	+	+	+	+	+	$Y_8$

Слід підкреслити, що цей вираз справедливо використовувати тільки для лінійної моделі, відповідної поліному 1-го порядку, коли варіювання за кожним фактором достатньо проводити на двох рівнях.

При статистичному методі планування експерименту існує правило – число рівнів варіювання має бути, у крайньому випадку, на одиницю більше порядку полінома.

Ми розглянули планування експерименту виходячи із припущення, що математична модель досліджуваного процесу відповідає поліному 1-го порядку (лінійна). Тому достатньо було проводити варіювання кожного з факторів тільки на двох рівнях.

Якщо аналіз результатів показує, що лінійна модель, відповідна поліному 1-го порядку, не є адекватною процесу, що досліджується, то переходять до планування та проведення наступного експерименту виходячи із пропозиції, що математична модель відповідає поліному наступного порядку і т.д.

При плануванні експерименту, оснований на моделі 2-го порядку:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} b_i X_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{\kappa} b_{ii} X_i^2 + \sum_{i \neq j} b_{ijj} X_i^2 X_j^2$$

Необхідно забезпечити варіювання по кожному з  $\kappa$ -факторів вже на трьох рівнях, тому необхідне число дослідів має бути не менше  $N = 3^{\kappa}$ ; для полінома третього близько  $N = 4^{\kappa}$  і т.д.

*Основні позитивні особливості ПФЕ*

1. Точки, що досліджуються, знаходяться в оптимальному положенні, тобто математичний опис досліджуваного процесу виявляється більш точним,

ніж під час проведення дослідів у точках, розташованих яким-небудь іншим чином.

Пояснімо це твердження. Якщо ми проводимо експеримент з невеликим інтервалом варіювання ( $\Delta X_1$ ), то через наявність помилки експерименту, яка наявна завжди, положення шуканої залежності  $Y = f(X_1)$  буде визначено з розкидом 1 (див. рис. 3.17) значно більшим, ніж у разі збільшення ( $\Delta X_1$ ) інтервалу варіювання (2). При багатофакторному експерименті (ПФЕ) відстань між експериментальними точками без збільшення інтервалу варіювання по кожній змінній збільшується в  $\kappa$  раз ( $\kappa$  – число факторів), у порівнянні з однофакторним експериментом. Для двохфакторного експеримента відстань між експериментальними точками – діагональ квадрата ( $\sqrt{2}$ ), для трифакторного – діагональ куба ( $\sqrt{3}$ ) і т.д.

2. Планування та проведення ПФЕ є порівняно простим, що пояснює його широке застосування на практиці.

### 3.7.3 Проведення експерименту

Сам експеримент повинен звести до мінімуму вплив випадкових параметрів досліджуваного процесу (група вхідних параметрів  $Z$ , див. рис. 3.13) на функцію відгуку.

Справа в тому, що у процесі дослідження процесу функція відгуку в кожному досліді носить випадковий характер саме через наявність неконтрольованих параметрів.

З метою зменшення їх впливу на кінцевий результат експерименту, необхідно дотримуватися наступних вимог:

по-перше, передбачити проведення кількох дослідів за одних і тих самих умов, передбачених відповідним рядком матриці планування (номером досвіду);

по-друге, необхідно рандомізувати неконтрольовані параметри процесу, тобто забезпечити їх взаємну компенсацію.

Для виконання першої вимоги повинні бути передбачені не менше двох ( $n=2$ ) паралельних дослідів, а для більш високої вірогідності і результатів – їх число збільшують.

У цьому випадку результати паралельних дослідів, наприклад, для першого рядка матриці (табл. 3.9)  $Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, \dots, Y_{1n}$  усереднюються та при аналізі результатів експерименту використовуються власне усереднені значення функції відгуку, відповідні даним умовам досвіду:

$$\langle Y \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{\xi i}}{n},$$

де  $\xi=1 \dots N$  – номер досвіду за порядком, встановленим першим стовпцем матриці;  $i$  – номер паралельного досвіду в порядку;  $Y_i$  – значення  $Y$ ,



відповідне  $i$ -му паралельного дослідів в  $\xi$ -му номері дослідів;  $n$  – число паралельних дослідів.

Для виконання другої вимоги – рандомізації – порядок реалізації умов дослідів, тобто послідовність дослідів, передбачених першим стовпцем матриці, визначається за допомогою таблиці (генератора) випадкових чисел.

*Розглянемо приклад*

Потрібно дослідити процес отримання плівок з метою отримання мінімального значення температурного коефіцієнта опору (ТКО).

З аналізу технологічного процесу та результатів попередніх дослідів встановлено, що на ТКО плівок впливають наступні фактори:

- температура випаровування ренію ( $X_1$ );
- температура підкладки ( $X_2$ );
- температура відпалу резистивних плівок ренію ( $X_3$ ).

З урахуванням попередніх дослідів вибираємо:

- центр плану  $X_{10}=2500$  °С,  $X_{20}=400$  °С,  $X_{30}=400$  °С;
- крок варіювання за всіма трьома факторами  $\Delta X_1=\Delta X_2=\Delta X_3=50$  °С.

Абсолютне значення верхнього та нижнього рівнів факторів буде наступним:

Характеристика фактора	$X_1$	$X_2$	$X_3$
верхній рівень (+1)	2550	450	450
нижній рівень (-1)	2450	350	350

Припустимо, що шукана модель досліджуваного процесу є лінійною та може бути представлена поліномом першого порядку. У цьому випадку достатньо варіювання кожного з факторів ( $k = 3$ ) на двох рівнях і мінімальне число опитів ( $N = 2^3 = 8$ ).

З метою прискорення проведеного експерименту приймаємо рішення про проведення тільки двох паралельних дослідів ( $N = 2$ ). З урахуванням паралельних дослідів їх число збільшується до 16:  $N \cdot n = 8 \cdot 2 = 16$ .

План експерименту подамо у вигляді матриці ПФЕ типу  $2^3$  (табл. 3.10), яка дещо відрізняється від матриці, представленої в табл. 3.9.

У другому стовпці табл. 3.10 зазначено порядок проведення дослідів, номери яких вказані в першому стовпці та яким відповідають умови досвіду, наведені в IV, V, VI стовпцях матриці.

Порядок проведення дослідів визначено за допомогою таблиці випадкових чисел.

Все експериментально отримані значення функції відгуку першого і повторного дослідів заносяться до XI і XII стовпців матриці, а їх середні значення занесені в XIII стовпець.

Для подальшого аналізу в матрицю вводяться XIV і XV стовпці. До XIV стовпця вносяться значення вибіркової дисперсії експериментальних значень  $Y_{\xi}$  близько їх середнього значення  $\langle Y_{\xi} \rangle$ , розрахованих за формулою

$$\sigma_{\xi}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_{\xi i} - \langle Y_{\xi} \rangle)^2}{n-1}$$

де  $n$  – кількість значень  $Y_{\xi i}$ , отриманих в результаті проведення  $n$  паралельних дослідів;  $\xi = 1 \div N$ .

Таблиця 3.10 – Матриця планування та результати експериментів при дослідженні плівок ренію

Номер	Порядок проведення опыта	$x_{06}$	$x_{16}$	$x_{26}$	$x_{36}$	$x_{16} \cdot x_{26}$	$x_{16} \cdot x_{36}$	$x_{26} \cdot x_{36}$	$x_{16} \cdot x_{26} \cdot x_{36}$	$Y_{\xi 1}$	$Y_{\xi 2}$	$\langle Y_{\xi} \rangle$	$\sigma_{\xi}^2$	$Y_{\xi t}$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	3 6	+	-	-	-	+	+	+	-	2,4	2,8	2,6	0,08	2,55
2	4 8	+	+	-	-	-	-	+	+	2,4	2,2	2,3	0,02	2,35
3	1 7	+	-	+	-	-	+	-	+	2,0	2,4	2,2	0,08	2,35
4	8 2	+	+	+	-	+	-	-	-	2,2	2,4	2,3	0,02	2,15
5	7 4	+	-	-	+	+	-	-	+	2,2	2,2	2,2	0	2,15
6	6 5	+	+	-	+	-	+	-	-	2,1	1,7	1,9	0,08	1,95
7	2 8	+	-	+	+	-	-	+	-	2,1	1,9	2,0	0,02	1,95
8	5 1	+	+	+	+	+	+	+	+	1,7	1,7	1,7	0	1,75

*Примітка:* для отримання істинного значення ТКО, необхідно цифри в XI, XII, XIII стовпцях помножити на  $10^{-4}$ , одиниця виміру ТКО  $\frac{1}{^\circ\text{C}}$ .

Останній XV стовпець включає теоретичні значення функції відгуку, підраховані з передбачуваної моделі досліджуваного процесу для умов  $x$ -го дослідів.

### 3.8 Дробовий факторний експеримент та основи дробастного планування експерименту

#### 3.8.1 Характеристика дробового факторного експерименту

Кількість дослідів у повному факторному експерименті значно перевищує число досліджуваних коефіцієнтів лінійної моделі.

Іншими словами, повний факторний експеримент володіє великою надмірністю дослідів.

Було б оптимально скоротити їх число за рахунок тієї інформації, яка є не дуже істотною при побудові лінійних моделей, при цьому, щоб матриця планування не втратила своїх оптимальних властивостей.

Зробити це не так просто, але все-таки можливо. Одним зі шляхів мінімізації числа дослідів є *дробовий факторний експеримент*.

*Дробовий факторний експеримент (ДФЕ)* – це частина ПФЕ, який мінімізує число дослідів, за рахунок тієї інформації, яка є не дуже істотною для побудови лінійної моделі.

Для повного факторного експерименту типу  $2^2$  рівняння регресії, з урахуванням ефектів взаємодії, можна представити залежністю

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_12x_1x_2$$

Для цього експерименту матрицю планування наведено в таблиці 3.11.

Таблиця 3.11 – Матриця планування для ПФЕ

№ експерименту	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$y$
<b>1</b>	+	-	-	+	$y_1$
<b>2</b>	+	+	-	-	$y_2$
<b>3</b>	+	-	+	-	$y_3$
<b>4</b>	+	+	+	+	$y_4$

При  $k = 2$  побудова матриць повного факторного експерименту не викликає труднощів, тому що всі можливі сполучення рівнів факторів легко знайти простим перебором.

В разі збільшення числа факторів ( $k > 3$ ) кількість можливих сполучень рівнів швидко зростає.

Якщо під час одержання моделі можна обмежитися лінійним наближенням

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k,$$

то число експериментів можна різко скоротити в результаті використання дробового факторного експерименту.

Так, у повному факторному експерименті типу  $2^2$  при лінійному наближенні можна прийняти, що коефіцієнт лінійної моделі  $b_12$ , дорівнює нулю, а стовпець  $x_1x_2$  матриці (табл. 3.12) використовувати для третього фактору  $x_3$ .

При цьому для визначення коефіцієнтів лінійної моделі

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

достатньо провести чотири експерименти замість восьми в повному факторному експерименті типу  $2^3$ .

Таблиця 3.12 – Матриця планування для ДФЕ

№ Експерименту	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3(x_1x_2)$	$y$
1	+	-	-	+	$y_1$
2	+	+	-	-	$y_2$
3	+	-	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	$y_4$

### Дробові репліки

Дробовою реплікою називають план експерименту, що є частиною плану повного факторного експерименту.

Дробові репліки позначають,

$$2^{k-p},$$

де  $k$  – кількість експериментів;  $p$  – число лінійних ефектів, які прирівнюють до ефектів взаємодії.

При  $p=1$  одержують піврепліку; при  $p=2$  одержують  $1/4$  репліку; при  $p=3$  одержують  $1/8$  репліки і т.д. за ступенями двійки.

Дробові репліки широко застосовують при одержанні лінійних моделей.

Ефективність застосування дробових реплік залежить від вдалого вибору системи змішування лінійних ефектів з ефектами взаємодії.

У зв'язку з тим, що у дробових репліках частину взаємодій замінено новими факторами, знайдені коефіцієнти рівняння регресії будуть спільними оцінками лінійних ефектів і ефектів взаємодії.

Лінійні ефекти рекомендують змішувати, насамперед, з тими взаємодіями, які, відповідно до апріорної інформації, є незначущими.

У випадку, коли ефекти взаємодії, хоча й малі, в порівнянні з лінійними, але не дорівнюють нулю, необхідно заздалегідь визначити, які коефіцієнти є змішаними оцінками. Тоді, залежно від умов поставленої задачі, підбирають таку дробову репліку, за допомогою якої можна отримати максимальну інформацію з експерименту. Доцільність їх застосування зростає зі зростанням кількості факторів.

У таблиці 3.13 показано, що при дослідженні впливу 15 факторів можна в 2048 разів скоротити число експериментів, застосовуючи репліку великої дробності (16 дослідів замість 32768).

Частіше всього дробові репліки задають за допомогою генеруючих співвідношень.

Таблиця 3.13 – Умовні позначення реплік та кількість дослідів

Кількість факторів	Дробова репліка	Умовне позначення	Кількість експериментів для дробової репліки	Кількість експериментів для повного факторного експерименту
3	1/2 репліки від $2^3$	$2^{3-1}$	4	8
4	1/4 репліки від $2^4$	$2^{4-1}$	8	16
5	1/4 репліки від $2^5$	$2^{5-2}$	8	32
6	1/8 репліки від $2^6$	$2^{6-3}$	8	64
7	1/16 репліки від $2^7$	$2^{7-4}$	8	128
5	1/2 репліки від $2^5$	$2^{5-1}$	16	32
6	1/4 репліки від $2^6$	$2^{6-2}$	16	64
7	1/8 репліки від $2^7$	$2^{7-3}$	16	128
8	1/16 репліки від $2^8$	$2^{8-4}$	16	256
9	1/32 репліки від $2^9$	$2^{9-5}$	16	512
10	1/64 репліки від $2^{10}$	$2^{10-6}$	16	1024
11	1/128 репліки від $2^{11}$	$2^{11-7}$	16	2048
12	1/256 репліки від $2^{12}$	$2^{12-8}$	16	4096
13	1/512 репліки від $2^{13}$	$2^{13-9}$	16	8192
14	1/1024 репліки від $2^{14}$	$2^{14-10}$	16	16384
15	1/2048 репліки від $2^{15}$	$2^{15-11}$	16	32768

*Генеруючі співвідношення. Насичені плани*

Генеруючим називають співвідношення, що показує, яку із взаємодій прийнято незначущою і замінено новим фактором.

План типу  $2^{3-1}$  може бути представленим двома піврепліками (табл. 3.14), які задають одним із наступних генеруючих співвідношень:

$$x_3 = x_1x_2, \quad x_3 = -x_1x_2$$

Генеруючі співвідношення помножимо на нову незалежну змінну  $x_3$ :

$$x_3^2 = x_1x_2x_3, \quad x_3^2 = -x_1x_2x_3.$$

Оскільки  $x_i^2 = 1$ , одержимо наступні співвідношення:

$$1 = x_1x_2x_3, \quad 1 = -x_1x_2x_3.$$

У результаті множення генеруючого співвідношення на нову змінну одержують визначальний контраст.

За визначальним контрастом можна знайти співвідношення, що задають спільні оцінки. Для цього необхідно помножити незалежні змінні  $x_1, x_2, x_3$  на визначальний контраст.

Таблиця 3.14 – Матриця планування  $2^{3-1}$ , представлена двома репліками

№ експерименту	$x_1$	$x_2$	$x_3$	№ експерименту	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-	+	-	1	-	+	+
2	+	+	+	2	-	+	+
3	-	-	+	3	-	-	-
4	+	-	-	4	+	-	+

При множенні визначальних контрастів на  $x_1$  одержимо співвідношення

$$x_1 1 = x_1^2 x_2 x_3, x_1 1 = -x_1^2 x_2 x_3$$

Оскільки  $x_1^2 = 1$ , то  $x_1 = x_2 x_3, x_1 = -x_2 x_3$ .

При множенні визначальних контрастів на  $x_2 x_3$ , одержимо співвідношення:

$$x_2 = x_1 x_3, x_2 = -x_1 x_3, x_3 = x_1 x_2, x_3 = -x_1 x_2.$$

Це означає, що коефіцієнти лінійної моделі будуть оцінками параметрів:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 + b_{23}, b_1 = b_1 - b_{23}, \\ b_2 &= b_2 + b_{13}, b_2 = b_2 - b_{13}, \\ b_3 &= b_3 + b_{12}, b_3 = b_3 - b_{12}. \end{aligned}$$

У практичних задачах потрібні й більш високого порядку взаємодії значно частіше, ніж подвійні, дорівнюють нулю і тому їх можна відкинути.

Для одержання лінійної моделі рекомендують вибирати дробові репліки з якомога більшою розв'язувальною здатністю, тобто репліки, у яких лінійні ефекти змішані з ефектами взаємодії, близькими до нуля.

При виборі дробової репліки важливо також урахувати насиченість плану Піврепліки, в яких основні ефекти, змішані з двофакторним добутком називаються *насиченими планами з роздільною здатністю III*.

За відсутності інформації про ефекти взаємодій двофакторного добутку експериментатор прагне вибрати репліку з найбільшою роздільною здатністю.

Якщо існує якась інформація про ефекти взаємодій, то вона повинна використовуватись при виборі репліки. Також існують насичені плани з роздільною здатністю 4, репліки в яких – всі парні взаємодії – змішані між собою.

#### *Ефективність реплік*

➤ Ефективність репліки залежить від системи змішування. Репліки, у яких лінійні ефекти змішані із взаємодіями найвищого порядку, є найбільш ефективними, оскільки володіють найбільшою роздільною здатністю.

➤ Для звільнення лінійних ефектів від взаємодій першого порядку можна використовувати метод «перевалу». Сенс методу – в додаванні нової репліки, всі знаки якої є протилежними початковій репліці.

➤ Зі зростанням числа факторів швидко збільшується число реплік різного дробу. Ці репліки характеризуються узагальнюючими визначальними контрастами, які виходять перемноженням двох, трьох і так далі початкових визначальних контрастів.

### **3.8.2 Симплекс планування**

*Симплекс-планування* застосовується для вирішення завдань оптимізації, тобто знаходження оптимальних умов протікання будь-яких процесів.

При плануванні експериментів, наприклад, в умовах виробництва, дослідник не всі фактори може контролювати у процесі виконання дослідів ( $z_i$ ), спонтанна зміна цих параметрів  $z_i$  зміщує оптимум контрольованих факторів ( $x_i$ ). Стоїть завдання організувати виробничий процес так, щоб можна було не тільки отримати готову продукцію, а й інформацію про усунення оптимальних поєднань чинників  $x_i$ , обумовлених зміною неконтрольованих змінних  $z_i$ .

Для вирішення цього завдання розроблено методи експериментального пошуку оптимуму у промислових умовах. Одним із таких методів є *симплекс-планування*. Він відноситься до неградієнтних методів пошуку оптимуму.

Перевагою симплекс-планування є те, що є чіткі правила прийняття рішення про те, як змінювати умови експерименту для знаходження оптимуму. Це управління експериментом з емпіричним зворотним зв'язком.

При симплекс-плануванні рух в область оптимуму у факторному просторі здійснюється переміщенням симплекса. Це переміщення полягає:

по-перше, в послідовному відкиданні вершин із мінімальними значенням параметра оптимізації (проводяться вимірювання відгуку у всіх вершинах симплекса, зіставляються отримані значення  $y_1, \dots, y_{k+1}$ , виділяється найменше значення  $y_i^* = \min$ );

по-друге, в побудові нового симплекса на решті межі з новою вершиною, яка є дзеркальним відображенням відкинutoї (виділяється вершина симплекса, де відгук є мінімальним і визначається нова вершина, що являє собою дзеркальне відображення відкинутої вершини відносно межі, загальної для обох симплексів).

При такому плануванні рух до оптимуму ведеться після кожного досвіду, починаючи з  $(k + 1)$ . В результаті всіх дослідів утворюється ланцюжок симплексів, що переміщуються в область оптимуму за деякою ламаною лінією (рис. 3.18).

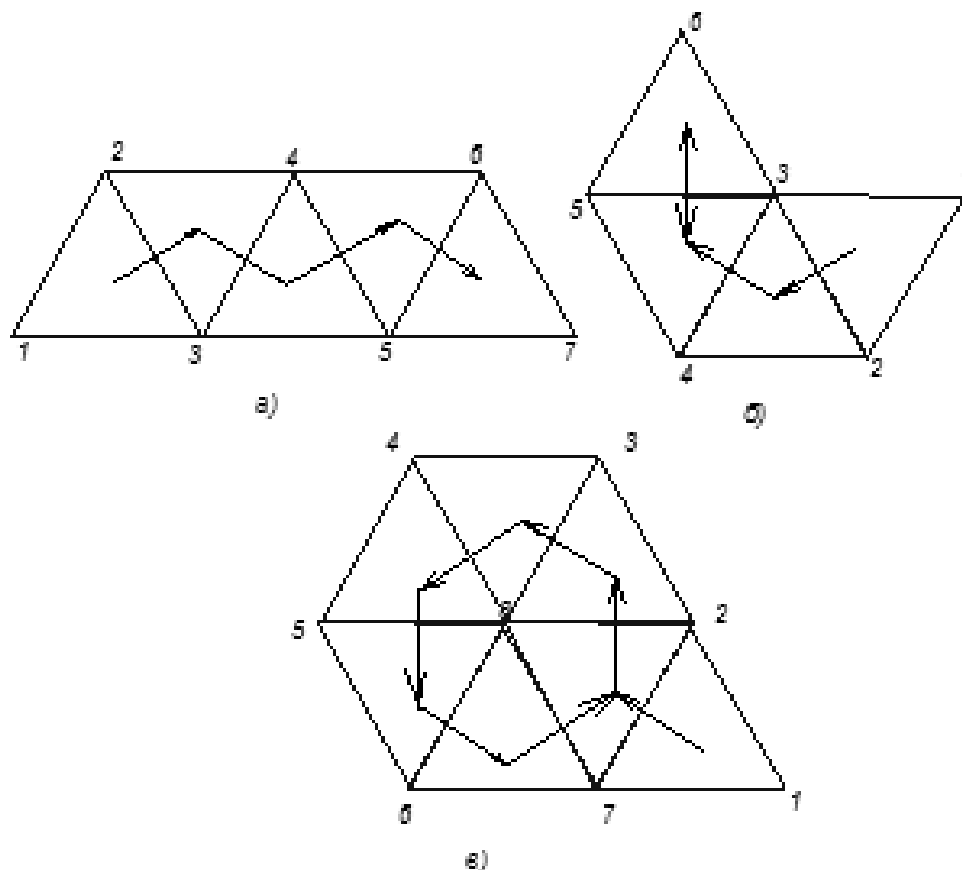


Рисунок 3.18 – Рух по поверхні відгуку при симплекс-плануванні

Координати нової вершини (або дзеркальне відображення найгіршою точки) визначаються за формулою:

$$x_{ij}^{k+2} = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k x_{ij} - x_{ij}^* .$$

Тут  $x_{ij}^{k+2}$  – координата нової точки;  $x_{ij}^*$  – координата точки з найгіршим значенням параметра оптимізації;  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{ij}$  – середнє з координат всіх точок симплекса, крім найгіршою.



Головне правило, яке визначає рух симплекса, – це правило відображення. В його основі лежить твердження про те, що напрямок градієнта функції відгуку в середньому є близьким до напрямку найгіршої вершини через центр ваги, розташованої протилежно до межі.

Напрямок, при якому рух симплекса у факторному просторі здійснюється по прямій лінії, називається *послідовним рухом в область оптимуму* (рис. 3.18, а). Це найекономічніший за витратами спосіб досягнення оптимуму. Він є можливим, якщо експериментатор передбачає, де знаходиться область оптимуму, і помилки дослідів мінімальні.

В ході експериментального пошуку оптимуму чинників можлива така ситуація, коли симплекс коливається відносно однієї грані (рис. 3.18, б). Для усунення коливань повертаються в початковий симплекс і відкидають вершину із другим найгіршим значенням відгуку. Це правило може застосовуватися багаторазово, шляхом поступового перебору вершин даного симплекса, поки коливання не припиняться і не почнеться переміщення у факторному просторі.

Інша складна ситуація, яка може виникнути, полягає в тому, що найгірше значення відгуку буде спостерігатися відразу в декількох вершинах. Тоді рішення приймається випадковим чином.

*Алгоритм симплексного методу пошуку:*

Побудувати вихідний симплекс в околицях початкової точки пошуку  $X_0$ . Можливе застосування будь-якого симплекс-плану, розглянутого раніше. Вони складаються для нормованих змінних:  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $Dx_i$  – крок варіювання;  $x_{i0}$  – координата початкової точки пошуку.

При пошуку віддають перевагу такому різновиду симплексів, відстань між двома вершинами якого в нормованому факторному просторі дорівнює 1. Це – правильний симплекс з одиничними ребрами. При цьому початкову точку  $X_0$  поєднують з однією з вершин симплекса, а сам симплекс орієнтують у просторі таким чином, що всі ребра виходять із початкової точки  $X_0$  становили однакові кути з координатними осями  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Такий симплекс-план має наступний вигляд.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \mu & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \mu & \dots & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \mu - \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots & \mu \end{pmatrix},$$

де  $\mu = \frac{1}{k\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{k+1} - k - 1)$ .

Значення коефіцієнтів для різних значень факторів

k	2	3	4	5	6	7
$\mu$	1,183	1,333	1,463	1,581	1,685	1,783

Наприклад, при  $k = 2$  матриця планування матиме вигляд

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1,183 & 0,486 \\ 0,486 & 1,183 \end{vmatrix}.$$

2. Реалізація дослідів в вершинах вихідного симплекса і отримання відповідних значень відгуку  $v_1, v_2, \dots, y_{k+1}$ .

3. Порівняння результатів між собою і виділення вершини з найгіршим для оптимуму значенням відгуку  $y^*_{i+1}$ .

4. Визначаються координати нової точки.

5. Проведення експерименту в точці  $x_{ij}^*$ .

Критерієм досягнення екстремальної області служить факт припинення поступального руху і перехід до обертання навколо певної вершини (рис. 18, в). Для більш точного визначення того, що область оптимуму досягнута, рекомендується продовжити рух до тих пір, поки число симплексів з однією і тією ж вершиною не перевищить деякого максимального значення

$$N_{\max} = 1,65k + 0,05k^2.$$

Наприклад, при  $k = 2$  рекомендоване число дорівнює 4. Отже, можна говорити про обертальний рух навколо однієї вершини. Якщо в точці обертання значення відгуку є максимальним, то це є свідченням досягнення екстремуму.

Симплексний метод є простим у реалізації та не вимагає складних розрахунків. Він є досить стійким до перешкод і ефективним.

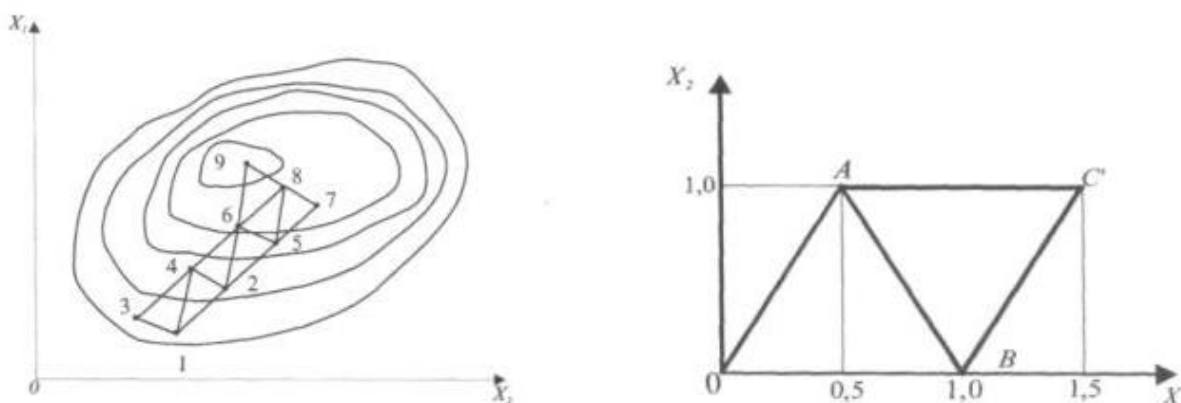


Рисунок 3.19 – Пошук максимуму симплексним методом

Приклад пошуку екстремуму для двох змінних за допомогою описаного методу подано на рис. 3.19.

### 3.8.3 Основи дробастного планування експерименту

Якість продукції не може бути покращена до тих пір, поки не будуть визначені й виміряні показники якості.

В основі введеного Г. Тагучі тристадійного підходу до встановлення номінальних значень параметрів продукції та процесу, а також допусків на них, лежить поняття про ідеальність цільової функції об'єкта, з якої порівнюються функціональні можливості реального об'єкта.

*Методи Тагучі* дозволяють оцінювати показники якості продукції та визначати втрати якості, які в міру відхилення поточних значень параметра від номінального, збільшуються, в тому числі і в межах допуску.

На основі методів Тагучі обчислюють різницю між ідеальним і реальним об'єктами і прагнуть скоротити її до мінімуму, забезпечуючи тим самим поліпшення якості.

Згідно із традиційною точкою зору все значення в межах допусків є однаково добрими.

Г. Тагучі вважає, що кожного разу при відхиленні характеристики від цільового значення відбуваються деякі втрати. Чим більше відхилення, тим більшими є втрати.

Г. Тагучі запропонував розділяти змінні, що впливають на робочі характеристики продукції і процесу, на дві групи так, щоб в одній з них опинилися фактори, відповідальні за основний відгук (номінал), а в другій – відповідальні за розкид.

Для виявлення цих груп Г. Тагучі вводить новий узагальнений відгук – «відношення сигнал/шум».

Методи Г. Тагучі перебувають певною мірою осторонь від традиційних процедур контролю якості та промислового експерименту.

*Особливо важливими є такі поняття:*

- функція втрати якості;
- відношення сигнал/шум (С/Ш);
- ортогональні масиви.

*Функції якості і втрат якості*

*Що таке якість.* Тагучі починає з питання, що таке якість? Нелегко дати просте визначення якості; однак якщо ваш новий автомобіль втрачає швидкість в центрі напруженого перехрестя, піддаючи вас та інших учасників руху ризику, то ви говорите про те, що ваш автомобіль не має високої якості.

Поняття, протилежне якості, є більш простим: це загальні втрати для вас і для суспільства, зумовлені функціональною змінністю (мінливістю) і несприятливими побічними ефектами, пов'язаними з відповідним продуктом. Таким чином, в якості робочого визначення ви можете вимірювати якість у термінах цих втрат, і чим більше втрати якості, тим нижчою є сама якість.

*Розривна функція втрат.* Ви можете сформулювати гіпотезу про загальний клас і форму функції втрат. Припустимо, що є особлива ідеальна точка вищої якості; наприклад, чудовий автомобіль без будь-яких проблем з якістю.

Зазвичай у статистичному контролі процесів прийнято визначати рівень допуску навколо номінальної ідеальної точки виробничого процесу. Згідно із традиційною точкою зору, якщо ви перебуваєте всередині допуску, у вас не виникає проблем з якістю. Іншими словами, всередині зони допуску втрати якості дорівнюють нулю. Якщо ви вийшли за її межі, втрати якості оголошуються неприйнятними.

Так, відповідно до традиційної точки зору, функція втрат якості є розривною порогоподібною функцією: якщо ви перебуваєте всередині зони допуску, втратами якості нехтують, а коли ви виходите за її межі, втрати стають неприйнятними.

*Квадратична функція втрат.* Задамося питанням: чи є кусково-постійна функція доброю моделлю для втрати якості? Повернемося до прикладу «чудового автомобіля». Чи є різниця між автомобілем, з яким нічого не сталося протягом року після покупки, і автомобілем, у якого мають місце якісь неполадки, наприклад, відвалилися деякі кріплення і розбився годинник на панелі (все це входить у гарантійний ремонт, чи не так ...)? Якщо ви коли-небудь купували новий автомобіль, ви дуже добре знаєте, як можуть драгувати такі невеликі за загальним визнанням проблеми з якістю.

Точка зору тут така: чи не є реалістичним припущення про те, що якщо ви віддаляєтеся від номінального визначення вашого виробничого процесу, втрати якості дорівнюють нулю, якщо ви перебуваєте в зоні допуску.

І навпаки, якщо ви не потрапили точно «в ціль», то втрати все ж існують, наприклад, в термінах задоволення покупця.

Більше того, ці втрати, ймовірно, не є лінійною функцією відхилення від номінальної специфікації процесу, а є квадратичною функцією абочного типу (на кшталт перевернутої букви U).

Шум в одному місці вашого автомобіля драгує, але ви, ймовірно, не будете надто засмучені цим; але додайте ще пару шумів і, можливо, ви оголосите ваш автомобіль «мотлохом». Якщо поступові відхилення від номіналу дають непропорційне збільшення втрат, то, швидше за все, це квадратичні збільшення.

*Висновок: контроль мінливості.* Якщо фактично втрати якості є квадратичною функцією відхилення від номінального значення, то мета ваших зусиль полягає в тому, щоб мінімізувати квадрат відхилення або дисперсію продукту відносно його номінальної (ідеальної) специфікації, а не число одиниць всередині кордону допуску (як це робиться у традиційних процедурах аналізу процесів).

*Відношення (С/Ш) сигнал/шум*

*Вимірювання втрати якості.* Навіть якщо ви зробили висновок, що функція втрат є квадратичною, ви до сих пір точно не знаєте, як вимірювати

самі втрати. Однак, на якій би мірі ви не зупинилися, вона повинна відображати квадратичну природу функції.

*Сигнал, шум і керуючі фактори.* Продукт ідеальної якості завжди повинен відгукуватися однаковим чином на керуючі сигнали. Коли ви повертаєте ключ запалювання автомобіля, то очікуєте, що стартер повернеться у двигуні, і він заведеться. В автомобілі ідеальної якості процес запалювання завжди відбувається одним і тим самим чином; наприклад, після трьох поворотів ключа запалювання двигун заводиться. Якщо у відповідь на один і той же сигнал – поворот ключа запалювання – спостерігається випадкова мінливість процесу, ви маєте справу з якістю, гіршою, ніж ідеальна. Наприклад, через таких неконтрольовані фактори, як низька температура, вологість, зношеність двигуна тощо останній може іноді завестися тільки після 20 спроб і навіть не завестися зовсім. Цей приклад ілюструє ключовий принцип вимірювання якості по Тагучі: вам хотілося б мінімізувати мінливість реакції продукту у відповідь на фактори шуму, максимізуючи при цьому мінливість у відповідь на *керуючі фактори*.

*Фактори Шуму* – це ті чинники, які перебувають поза контролем оператора. У прикладі з автомобілем ці чинники включають коливання температури, відмінності в якості бензину, зношеність двигуна і так далі. Керуючі чинники – це ті чинники, які встановлюються або управляються оператором машини для її використання за призначенням (поворот ключа запалювання запускає двигун і автомобіль може почати рух).

Отже, метою ваших зусиль стосовно поліпшення якості є установка найкращих значень *керуючих факторів*, які включені у виробничий процес для того, щоб максимізувати відношення С / Ш (сигнал – шум); так що тут чинники в експерименті виступають як *керівники*.

Висновок із попереднього полягає в тому, що якість може бути розглянуто з точки зору відгуку продукту на шуми і керуючі фактори. Ідеальний продукт буде реагувати тільки на сигнали оператора і не буде реагувати на випадковий шум (погоду, температуру, вологість тощо). Отже, мета ваших зусиль стосовно вдосконалення якості може розглядатися як спроба *максимізувати відношення сигнал/шум (С/Ш)* відповідного продукту. Відношення С / Ш, описані в наступних параграфах, були запропоновані Тагучі (1987 р.).

*Менше – краще.* Якщо ви хочете мінімізувати число появ деяких дефектів продукту, обчисліть наступне відношення С/Ш:

$$Eta = -10 * \log_{10} [(1/n) * \sum(y_i^2)] \quad \text{for } i = 1 \text{ to no. vars} \quad \text{see outer arrays}$$

Тут Eta є результируючим відношенням С/Ш, n – число спостережень, а у – відповідна характеристика.

Наприклад, число пошкоджень фарбування автомобіля могло б виступати як змінна у і аналізуватися за допомогою відношення С/Ш. Ефект керуючих факторів дорівнює нулю, оскільки нуль пошкоджень забарвлення є бажаним станом. Зауважимо, що відношення С/Ш є виразом передбачуваної *квадратичної* функції

втрат. Множник  $-10$  вказує на те, що це відношення вимірює величину, протилежну «поганій якості»: чим більше пошкоджень факрбування, тим більше сума квадратів чисел пошкоджень і тим менше (тобто більш негативним) стає відношення С/Ш. Максимізація цього відношення призводить до зростання якості.

*Номінальне – оптимальне значення.* Тут ви маєте фіксовану величину сигналу (номінальне значення), і дисперсія навколо цього значення розглядається як результат дії шумів:

$$Eta = 10 * \log_{10} (Mean^2/Variance)$$

Таке відношення сигнал / шум може використовуватися, коли можливості для покращення якості збігаються з конкретним номінальним значенням. Наприклад, діаметр поршневих кілець у двигуні автомобіля повинен бути якомога ближче до стандартного, щоб забезпечити високу якість двигуна.

*Більше – краще.* Прикладами такого типу інженерних задач є економія палива автомобіля (літрів бензину на кілометр), міцність цементного розчину, опір захисних матеріалів тощо. Тут використовується наступне відношення С/Ш:

$$Eta = -10 * \log_{10} [(1/n) * \sum (1/y_i^2)] \quad \text{for } i = 1 \text{ to no. vars} \quad \text{see outer arrays}$$

*Мета зі знаком.* Цей тип відношення С/Ш застосовується, коли характеристика якості має ідеальне значення 0 (нуль) і можуть зустрічатися як позитивні, так і негативні значення якості (відхилення від 0). Наприклад, що завдає шкоди, напруга в диференціальних підсилювачах постійного струму може бути як позитивною, так і негативною (дивіться Phadke, 1989). Можна скористатися таким відношенням С/Ш для проблем такого типу:

$$Eta = -10 * \log_{10}(s^2) \quad \text{for } i = 1 \text{ to no. vars} \quad \text{see outer arrays}$$

де  $s^2$  позначає дисперсію характеристики якості за вимірюваннями (змінними).

*Частка дефектів.* Це відношення С/Ш використовується для мінімізації відходів, мінімізації частки пацієнтів, у яких розвиваються побічні реакції на препарат, тощо.

$$Eta = -10 * \log_{10}[p/(1-p)]$$

де  $p$  – частка дефектних виробів

*Впорядковані категорії (акумуляційний аналіз).* У деяких випадках вимірювання характеристики якості можуть бути отримані тільки в термінах категорій. Наприклад, покупці можуть категоризувати товар як чудовий, добрий, середній або нижче середнього. В цьому випадку ви намагаєтесь максимізувати кількість продуктів, які оцінюються як чудові й гарні. Зазвичай результат акумуляційного аналізу подається у вигляді гістограми.

### *Ортогональні масиви*

Третій аспект робастних планів Тагучі дуже схожий із традиційними методами. Тагучі розробив систему табульованих планів, які дозволяють оцінити незміщене (ортогональним) чином максимальне число головних ефектів за допомогою мінімального числа дослідів в експерименті.

Багато стандартних ортогональних масивів, табульованих Тагучі, ідентичні дробовим факторним дворівневим планам, планам Плакетта – Бермана, планам Боксу–Бенк, латинським квадратам, греко-латинським квадратам тощо.

### *Аналіз планів*

Велика частина робастних планів є еквівалентною звичайному дисперсійному аналізу (ДА) для відповідних відношень С/Ш, в яких ігноруються взаємодії другого порядку і вище.

*Аналіз відношень С/Ш у стандартних планах.* Слід зауважити, що всі обговорювані раніше плани можуть бути використані для аналізу відношень С/Ш, які ви вираховували. Насправді багато додаткових діаграм або інших опцій є наявними для зазначених планів (наприклад, оцінювання квадратичних компонент тощо), можуть виявитися дуже корисними при аналізі варіабельності (С/Ш відношень) у виробничому процесі.

*Діаграма середніх.* Візуалізація підсумків експерименту полягає в нанесенні на графік середніх  $\bar{Y}$  (С/Ш відношень) за рівнями факторів. З цієї діаграми легко можуть бути встановлені оптимальні значення (тобто найбільші відношень С/Ш) кожного фактора.

*Перевірочні або тестові експерименти.* Для цілей передбачення ви можете вирахувати очікуване відношення С/Ш, при фіксуванні користувачем певних комбінацій установок факторів (ігноруючи фактори, віднесені до частки помилок). Ці передбачені відношення С/Ш можуть бути потім використані для проведення перевірконого експерименту, в якому інженер дійсно налаштовує машину відповідно і порівнює результати спостережуваного відношення С/Ш з передбаченим з попереднього експерименту відношенням С/Ш. Якщо трапляються великі відхилення, потрібно зробити висновок, що модель простих головних ефектів не підходить.

У таких випадках Тагучі рекомендує перетворення залежної змінної для забезпечення адитивності факторів, тобто спробувати «змусити» модель головних ефектів відповідати (Taguchi, 1987). Phadke (1989, глава 6) також детально обговорює методи забезпечення адитивності факторів.

### *Акумуляційний аналіз*

Для аналізу впорядкованих категоріальних даних дисперсійний аналіз є непридатним. Замість нього модуль *Планування експерименту* представить кумулятивний графік числа спостережень у кожній категорії. Для кожного рівня фактора програма виведе накопичену (кумулятивну) частку числа дефектних виробів. Таким чином, ця діаграма дає цінну інформацію стосовно розподілу категоріальних відліків за різних значень факторів.

Таким чином, спочатку ви повинні визначити фактори *плану* або *керуючі* фактори, які можуть бути встановлені конструктором або інженером. Це чинники експерименту, які ви будете встановлювати на різні рівні.

Потім ви приймете рішення про використання відповідного ортогонального масиву для експерименту.

Далі ви повинні вирішити, як вимірювати цікаву для вас характеристику якості. Пам'ятайте, що більшість відношень С/Ш вимагає, щоб у кожному досвіді експерименту проводилися багаторазові вимірювання; в іншому випадку, наприклад, змінність (розкид) навколо номінального значення не може бути оцінена.

Нарешті, ви проводите експеримент і визначаєте чинники, що найсильніше впливають на вибір відношення С/Ш, і відповідно регулюєте вашу машину або виробничий процес.

### **Контрольні питання та завдання**

1. Дайте визначення поняття «гіпотеза» та розкрийте її сутність. Розкрийте особливості її перевірки.

2. Дайте визначення поняття «критична область». Охарактеризуйте основні принципи методики побудови критичних областей.

3. Поясніть, яким чином відбувається перевірка правдивості статистичних гіпотез про рівність двох генеральних середніх.

4. Поясніть, яким чином відбувається перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу генеральної сукупності.

5. Розкрийте сутність дисперсійного аналізу.

6. Розкрийте, у чому полягає сутність однофакторного та двофакторного аналізу.

7. Розкрийте сутність методу головних компонент.

8. Розкрийте сутність методу головних факторів.

9. Назвіть основні поняття класифікації даних.

10. Розкрийте, у чому полягає сутність параметричних методів класифікації даних без навчання.

11. Поясніть сутність кластерного аналізу.

12. Розкрийте сутність методів класифікації з навчанням.

13. Поясніть, яким чином відбувається застосування нейронних мереж для обробки даних.

14. Розкрийте сутність теорії повнофакторного експерименту.

15. Дайте визначення поняття «факторна модель».

16. Поясніть сутність повнофакторного експерименту.

17. Поясніть, яким чином відбувається зв'язок між кількістю дослідів та числом факторів.

18. Розкрийте сутність числа ступенів свободи.

19. Назвіть основні характеристики дробового факторного експерименту.

20. Розкрийте, у чому полягає сутність симплекс планування.

21. Поясніть основи дробастного планування експерименту.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Закон України «Про національну безпеку України»: прийнятий 21 червня 2018 року № 2469-VIII. URL: <http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2469-19>
2. Указ Президента України Про рішення Ради національної безпеки і оборони України «Про Стратегію національної безпеки України» від 14 вересня 2020 року. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/392/2020#Text>
3. Кодекс цивільного захисту України: прийнятий 02 жовтня 2012 року № 5403-VI. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/5403-17#Text>
4. Закон України «Про правовий режим надзвичайного стану»: прийнятий 16 березня 2000 року № 1550-III. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1550-14#Text>
5. Постанова Кабінет Міністрів України від 24 березня 2004 р. № 368 «Порядку класифікації надзвичайних ситуацій за їх рівнями» URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/368-2004-%D0%BF#Text>
6. Державний класифікатор надзвичайних ситуацій ДК 019:2010. Прийнято та надано чинності Наказом Держспоживстандарту України від 11 жовтня 2010 року № 457 URL: <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/va457609-10#Text>
7. «Класифікаційні ознаки надзвичайних ситуацій» затверджено наказом МВС України від 06 серпня 2018 року № 658 URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0969-18#Text>
8. Закон України «Про захист населення і територій від надзвичайних ситуацій техногенного та природного характеру» від 8 червня 2000 року № 1809-III URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1809-14>
9. Закон України «Про гідрометеорологічну діяльність» від 18 лютого 1999 року № 443-XIV URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/443-14>
10. Закон України «Про використання ядерної енергії та радіаційну безпеку» від 8 лютого 1995 року № 39/95-ВР URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/39/95-%D0%B2%D1%80#Text>
11. Закон України «Про правовий режим воєнного стану»: прийнятий 12 травня 2015 року № 389-VIII. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/389-19#Text>
12. Рішення Ради національної безпеки і оборони України «Щодо удосконалення мережі ситуаційних центрів та цифрової трансформації сфери національної безпеки і оборони»: прийняте 04 червня 2021 року. Введено в дію Указом Президента України від 18 червня 2021 року № 260/2021. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/n0039525-21#Text>
13. ДСТУ 2156:93. Безпечність промислових підприємств. Терміни та визначення. [Чинний від 1995-01-01]. Вид. офіц. Київ : Держстандарт України, 1994. 32 с. URL: [https://dnaop.com/html/41018/doc\\_2156-93](https://dnaop.com/html/41018/doc_2156-93)
14. ДСТУ 3891:99 Безпека у надзвичайних ситуаціях. Терміни та визначення основних понять. [Чинний від 2000-01-01]. Вид. офіц. Київ :

Держстандарт України, 1999. 32 с. URL: [https://dnaop.com/html/2278/doc\\_3891-99](https://dnaop.com/html/2278/doc_3891-99)

15. Про зону надзвичайної екологічної ситуації: Закон України від 13.07.2000 N08-III. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1908-14#Text>

16. Про основні засади (стратегію) державної екологічної політики України на період до 2030 року: Закон України від 28.02.2019 р. № 22697-VIII. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2697-19#Text>

17. Постанова Кабінету Міністрів України від 4 квітня 2018р. № 247 «Про затвердження порядку розроблення плану управління ризиками затоплення». URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/247-2018-%D0%BF#Text>;

18. Розпорядження Кабінету Міністрів України від 8 жовтня 2022р. № 895-р «Про затвердження планів управління ризиками затоплення на окремих територіях у межах районів басейнів річок». URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-planiv-upravlinnia-ryzykamy-zatoplennia-na-okremykh-terytoriiakh-u-mezhakh-raioniv-baseiniv-richok-895-081022>;

19. Наказ Міністерства внутрішніх справ України від 17.01.2018 № 30 «Про затвердження Методики попередньої оцінки ризиків затоплення», зареєстрованого в Міністерстві юстиції України 07 лютого 2018р. за № 153/31605. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0153-18#Text>;

20. Наказ Міністерства внутрішніх справ України від 28.02.2018 № 153 «Про затвердження Методики розроблення карт загроз і ризиків затоплення», зареєстрованого в Міністерстві юстиції України 22 березня 2018р. за № 350/31802. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0350-18#Text>;

21. Наказ Міністерства внутрішніх справ України від 06.08.2018 № 658 «Про затвердження Класифікаційних ознак надзвичайних ситуацій», зареєстрований у Міністерстві юстиції України 28 серпня 2018 р. за № 969/32421. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0969-18#Text>;

22. Наказ Міністерства внутрішніх справ України від 31.07.2023 № 627 «Порядок управління ризиками виникнення надзвичайних ситуацій техногенного характеру та пожеж», зареєстрований у Міністерстві юстиції України 14 серпня 2023р. за № 1397/40453, URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1397-23#Text>;

23. Наказ Міністерства внутрішніх справ України від 13.10.2023 № 836, «Про затвердження Методики оцінювання ризиків виникнення надзвичайних ситуацій техногенного характеру та пожеж», зареєстрований в Міністерстві юстиції України 02 листопада 2023р. за № 1905/40961, URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1905-23#Text>»;

24. Абрамов Ю.О., Грінченко Є.М., Кірочкін О.Ю., Коротинський П.А., Миронець С.М., Росоха В.О., Тютюник В.В., Чуковський В.М., Шевченко Р.І. Моніторинг надзвичайних ситуацій: Підручник. Харків: Академія цивільного захисту України, 2005. 620 с.

25. Андронов В.А., Рогозін А.С., Соболев О.М., Тютюник В.В., Шевченко Р.І. Природні та техногенні загрози, оцінювання небезпек: навч.

посіб. Харків: Національний університет цивільного захисту України, 2011. 264 с.

26. Андронов В.А., Дівізінюк М.М., Калугін В.Д., Тютюник В.В. Науково-конструкторські основи створення комплексної системи моніторингу надзвичайних ситуацій в Україні: монографія. Харків: Національний університет цивільного захисту України, 2016. 319 с.

27. Тютюник В.В., Соболев О.М., Тютюник О.О., Яценко О.А. Природні та техногенні загрози: підручник. Харків: Національний університет цивільного захисту України, 2023. 480 с.

28. Поліщук Є.С. Метрологія та вимірювальна техніка: Підручник. Львів: Новий світ, 2003. 460 с.

29. Крушельницька О.В. Методологія та організація наукових досліджень: Навч. Посібник. К.: Кондор, 2003. 192 с.

30. Філіпенко А.С. Основи наукових досліджень. Конспект лекцій: Посібник. К.: Академвидав, 2004. 208 с.

31. Кустовська О.В. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Курс лекцій. Тернопіль: Економічна думка, 2005. 124 с.

32. Метрологія, стандартизація і сертифікація. Підручник. За заг. ред. В.В. Тарасової. К.: Центр навчальної літератури, 2006. 264 с.

33. Скіб'як А.Ю., Куценко М.А., Кришталь В.М., Наконечний В.В. Техніко-економічне обґрунтування та теорія інженерного експерименту: Підручник. Черкаси: Видавець Ю.А. Чабаненко, 2008. 104 с.

34. Климчук В.О. Математичні методи у психології. Навчальний посібник для студентів психологічних спеціальностей. К.: Освіта України, 2009. 288 с.

35. Юринець В.Є. Методологія наукових досліджень: навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 178 с.

36. Курська Т.М., Угрюмов М.Л. Методика та організація наукових досліджень: Курс лекцій. Харків: Національний університет цивільного захисту України, 2011. 98 с.

37. Бахрушин В.Є. Методи аналізу даних: навчальний посібник для студентів. Запоріжжя: КПУ, 2011. 268 с.

38. Руденко В.М. Математична статистика. Навч. посіб. К.: Центр учбової літератури, 2012. 304 с.

39. Кухарчук В.В., Кучерук В.Ю., Володарський Є.Т., Грабко В.В. Основи метрології та електричних вимірювань: Підручник. Вінниця: Вінницький національний технічний університет, 2012. 522 с.

40. Важинський С.Е., Чуб І.А., Курська Т.М. Методика та організація наукових досліджень: Курс лекцій. Харків: Національний університет цивільного захисту України, 2016. 201 с.

41. Боснюк В.Ф. Математичні методи в психології: курс лекцій. Харків: Національний університет цивільного захисту України, 2019. 124 с.

42. Тютюник В.В., Тютюник О.О., Удянський М.М., Яценко О.А. Кластеризація регіонів України за рівнем небезпеки та шляхи підвищення

ефективності функціонування єдиної державної системи цивільного захисту в умовах невизначеності вхідної інформації про виникнення надзвичайних ситуацій. Науковий вісник: Цивільний захист та пожежна безпека. 2021. № 1(11). С. 75–84.

43. Калугін В.Д., Тютюник В.В., Черногор Л.Ф., Шевченко Р.І. Розробка науково-технічних основ для створення системи моніторингу, попередження та ліквідації надзвичайних ситуацій природного та техногенного характеру та забезпечення екологічної безпеки. Системи обробки інформації. Харків: Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. 2013. Вип. 9(116). С. 204–216.

44. Тютюник В.В., Калугін В.Д., Писклакова О.О. Оцінка умов створення у єдиній державній системі цивільного захисту інформаційно-аналітичної підсистеми управління процесами попередження й локалізації наслідків надзвичайних ситуацій на основі аналізу динаміки прояву небезпек на території України. Комунальне господарство міст. Серія «Технічні науки та архітектура». Харків. Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова. 2019. №1(147). С. 66–82.

45. Тютюник В.В., Яценко О.А., Рубан І.В., Тютюник О.О. Особливості функціонування системи ситуаційних центрів на різних стадіях розвитку надзвичайних ситуацій. Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. Київ. Національний університет оборони України імені Івана Черняхівського. 2022. Вип. 1(43). С. 41–52.

46. Тютюник В.В. Оцінка надійності функціонування України в умовах турбулентності небезпек за результатами кластерного аналізу її регіонів за ступенем пожежної небезпеки / В.В. Тютюник, О.О. Тютюник, О.А. Яценко // International On-line Scientific Conference "Topical Issues of Society Development in the Turbulence Conditions". – Bratislava: School of Economics and Management in Public Administration in Bratislava, 2020. С. 307–313.

47. Рубан І.В., Тютюник В.В., Тютюник О.О. Розвиток науково-технічних основ оперативного геоінформаційного акустичного моніторингу джерел терористичних небезпек. Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. Київ. Національний університет оборони України імені Івана Черняхівського. 2020. Вип. 3(39). С. 67–80.

48. Vadym Tiutiunyk, Vladimir Kalugin, Olha Pysklakova, Olexandr Yaschenko, Tural Agazade. Hierarchical clustering of seismic activity local territories Globe. EUREKA: Physics and Engineering, 2019, Number 4, P. 41–53.

49. Тютюник В.В., Калугін В.Д., Писклакова О.О. Основоположні принципи створення у єдиній державній системі цивільного захисту інформаційно-аналітичної підсистеми управління процесами попередження й локалізації наслідків надзвичайних ситуацій. Системи управління, навігації та зв'язку. Полтава: Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, 2018. Вип. 4(50). С. 168–177.

Навчальне видання

**Тютюник** Вадим Володимирович  
**Кустов** Максим Володимирович  
**Тютюник** Ольга Олександрівна

**ПЛАНУВАННЯ ТА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ У  
СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ**

**Підручник**

Підписано до друку 30.10.2023. Формат 60x84/16.  
Папір офсетний 80 г/м<sup>2</sup>. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 28,1.  
Тираж 50 прим. Вид. № 42/23. Обл.вид арк. 18,6.  
Сектор редакційно-видавничої діяльності  
Національного університету цивільного захисту України  
61023, м. Харків, вул. Чернишевська, 94

[www.nuczu.edu.ua](http://www.nuczu.edu.ua)