УДК 621.316.1

ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

к.т.н. С.В. Рудаков, Н.Н. Науменко
(представил д.т.н., проф. А.М. Крюков)

Предлагается методика оценки параметров метрологических характеристик способов измерительной техники с использованием робастных методов.

Постановка проблемы. Рассмотрим экспериментальные оценки следующих характеристик погрешности: значение систематической составляющей погрешности Δ_S, среднее квадратическое отклонение случайной составляющей погрешности $\sigma[\Delta]$ и граница Δ_p интервала, в котором находится погрешность (P = 0,95). Обычно для оценки этих характеристик погрешности используются методы, основанные на предположении о нормальном законе распределения погрешности. Между тем истинный закон распределения (ЗР) в большинстве случаев отличен от нормального. Причиной этому является большое разнообразие составляющих погрешностей, которые могут иметь самые различные ЗР: погрешность квантования распределена равномерно, а погрешность, вызванная сетевой наводкой – по арксинусоидальному закону. Применение приведенных оценок к таким ситуациям может привести (при отличии ЗР от нормального) к значительному отклонению оценок характеристик погрешности от истинных значений этих характеристик.

Кроме указанных оценок характеристик, желательно знать возможные пределы их значений, т.е. верхние и нижние границы этих характеристик. Таким образом нужны их интервальные оценки. Для нормального ЗР интервальные оценки описаны в [1]. При отличии реальных ЗР от нормального применение формул для нахождения границ доверительных интервалов может привести к отличию оценок от истинных значений соответствующих характеристик. В связи с этим актуальной является задача построения методов интервального оценки метрологических характеристик, применимых при любом ЗР погрешности.

Анализ литературы. Существует несколько непараметрических методов интервального оценивания величины Δ_p [1, 2]. Недостатком этих методов является необходимость существенного увеличения числа измерений вне зависимости от вида ЗР. Анализ возможных ЗР погрешностей средств измерительной техники (СИТ) был проведен в серии работ, результаты которых обобщены в [3]. Как показали исследования [1], наиболее распространенным ЗР, охватывающим около половины всех СИТ, является экспоненциальный ЗР.

Класс экспоненциальных распределений описывается плотностью вида

$$f_e(x) = A(\lambda, \rho)\exp\left(-|x-\alpha|^p \big/ \left(p\lambda^p\right)\right), \tag{1}$$

где α, λ, ρ – параметры; $A(\lambda, \rho) = \left[\rho / 2\rho^{1/\rho}\lambda\Gamma(1/\rho)\right]$ – нормирующий множитель. Этот класс законов включает в себя равномерный (при $\rho \to \infty$); нормальный (соответствующий в (1) значению $\rho = 2$); закон распределения Лапласа (при $\rho = 1$) и другие промежуточные распределения.

Цель статьи. Разработать методику оценки параметров ЗР с использованием статистических методов, основанных на предположении экспоненциального закона распределения погрешностей СИТ.

Методика получения интервальных оценок метрологических характеристик СИТ. В общем случае невозможно заранее ограничиться классом вероятностных распределений. В этой ситуации для оценки среднего значения $\alpha = E(\xi)$ произвольной случайной величины по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в математической статистике предлагаются робастные методы [2, 4]. Наиболее эффективными среди них являются так называемые М-методы, при которых значение α определяется из условия

$$\sum_i \psi(\xi_i - \alpha) \to \min_\alpha, \tag{2}$$

где $\psi(\cdot)$ – некоторая четная функция, выбор которой определяет М-метод. При $\psi(x) = x^2$ получается известный метод наименьших квадратов, который приводит к оценке $\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. При $\xi(x) = |x|$ – метод наименьших модулей, приводящий к медианной оценке, максимально нечувствительной к грубым промахам.

Не ограничиваясь целыми степенями $|x|$, рассмотрим метод с произвольным показателем ρ, который состоит в минимизации ρ-х степеней отклонений: $\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \alpha|^\rho \to \min_\alpha$ (в математике сумма ρ-х степеней компонент вектора называется l^p-нормой, поэтому этот метод называется еще

l^p-методом). Численные эксперименты показали, что методы с произвольным показателем лучше других М-методов. Это согласуется со следующим строгим математическим результатом: какой бы критерий выбора М-метода (удовлетворяющий некоторым разумным условиям) мы ни выбирали, наилучшим в смысле этого критерия будет М-метод, соответствующий $\xi(x) = |x|^\rho$ [5]. Поэтому для оценки Δ_s предлагаем использовать метод с произвольным показателем $\sum_{i=1}^{n} \left| \hat{\Delta}_s - \Delta x_i \right|^\rho \to \min_{\hat{\Delta}_s}$.

Для получения точечных и интервальных оценок интересующих нас метрологических характеристик будем исходить из предположения, что погрешность распределена по экспоненциальному закону. Для определения ρ, Δ_s и s используем ММП-метод. (Он асимптотически оптимален; использовать более точные оценки нет смысла, так как исходим как раз из ММП-метода для определения $\hat{\Delta}_s$). Для определения ρ можно использовать и «метод по эксцессу» [1]. После определения ρ характеристики Δ_s и s оцениваем следующим образом:

$$\hat{\Delta}_s = \arg\min_{\Delta_s} \sum_{i=1}^{n} \left| \Delta x_i - \Delta_s \right|^\rho ; \quad s = \left(\frac{\rho}{n} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(3/\rho)}{\Gamma(1/\rho)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \Delta x_i - \hat{\Delta}_s \right|^\rho \right)^{1/\rho} \tag{3}$$

При $\rho = 2$ эти оценки переходят в приведенные выше традиционные статистические оценки. Заметим, что если истинная плотность распределения нормальна, то получится, что $\rho = 2$, и оценки Δ_s и s вычисляются по приведенным выше традиционным формулам. При загрязнении выборки грубыми промахами и росте значений этих выбросов оценка параметра ρ получится близкой к 1, поэтому в силу формулы (3) в качестве оценки $\hat{\Delta}_s$ будем иметь выборочную медиану, которая, как известно, устойчива к грубым промахам. Поэтому предварительное исключение грубых промахов при использовании l^p-метода не требуется.

Как показали проведенные нами численные эксперименты, при $n = 200$ относительная погрешность этой формулы 10 – 15% (так как речь идет о погрешности оценки погрешности, то эта точность вполне удовлетворительна). При $n = 100$ погрешность 10 – 20%, а при $n = 40$ (обычно проводимое число испытаний) погрешность 25 – 40%. Таким образом, уже при $n = 40$ использование (3) может в полтора раза исказить истинную оценку метрологической характеристики, что недопустимо.

С целью проверки работоспособности предлагаемого метода робастного оценивания характеристик погрешности были смоделированы погрешности измерений, распределенные в соответствии с каждым из пяти классов распределений, описанных в [1]. Эти распределения моделировались путем функционального преобразования выборочных значений, генерируемых машинным датчиком нормально распределенных случайных чисел. Массивы выборочных значений генерировались размером n = 100 каждый со следующими параметрами: математическое ожидание $\Delta_s = 0$; для распределения типа «шапо» значение параметра c_p составляет 2,24, значение параметра ρ экспоненциальной составляющей выбиралось $\rho_{эксп.} = 0{,}5; 1; 2$; для двумодальных распределений параметр c_g равен единице, значение параметра ρ выбиралось $\rho_{эксп.} = 0{,}5; 1; 2$; трапецендальные распределения генерировались с параметрами b/c = 1/4; ½; 1 (b и c – значения ширины двух равномерных распределений, композиция которых дает трапецендальное); арксинусоидальное распределение генерировалось с размахом, равным единице.

По каждому из смоделированных таким образом выборочных массивов вычислялись оценки $\hat{\rho}$ и $\hat{\Delta}_s$ параметров ρ и Δ_s описанным выше методом. Полученные значения оценок сравнивались с истинным значением Δ_s. С другой стороны, поскольку истинные распределения перечисленных типов известны, методом максимального правдоподобия вычислялись также оценки систематической составляющей погрешности, которые мы обозначили через $\Delta_{sм}$. В табл. 1 кроме введенных выше обозначений, используются также: $\overline{\rho}$ – среднее значение выборочных оценок $\hat{\rho}$; $\hat{S}_p$ – среднее квадратическое отклонение выборочных оценок $\hat{\rho}$ от их среднего значения на множестве всех смоделированных выборочных массивов.

Таблица 1

Значения параметров и оценок

Распределение	$\rho_{эксп}$ или b/s	$\overline{\Delta}_s$	$\overline{\Delta}_{sм}$	$\overline{s}$	$\overline{s}_м$	$\overline{\rho}$	$\overline{s}_\rho$
Шапо	2	–0,0456	–0,012	0,24	0,22	3	0,3
	1	–0,091	–0,082	0,248	0,228	2,8	0,227
	0,5	–0,033	–0,022	0,288	0,276	1,6	0,362
Двумодальные	2	–0,018	– 0,008	0,141	0,133	2,65	0,332
	1	–0,062	– 0,048	0,15	0,141	2,17	0,274
	0,5	–0,066	– 0,06	0,146	0,136	1,97	0,447
Трапецеидальные	¼	–0,013	–0,003	0,081	0,075	3	0,095
	½	–0,008	–0,007	0,053	0,048	2,8	0,082

	1	–0,005	–0,006	0,04	0,038	2,65	0,16
Арксинусо-идальные	–	0,0015	0,0033	0,075	0,069	3	0,49

Из табл. 1 следует, что оценки $\overline{\Delta}_S$, полученные с помощью аппроксимации выборочных значений распределениями из класса (1), практически не отличаются от истинного значения $\Delta_S = 0$, а разброс этих оценок лишь незначительно превышает разброс оценок максимального правдоподобия, полученных при полной информации о плотности распределения.

При практическом определении доверительных интервалов не требуется выполнять статистического моделирования вновь. По выборочным данным определим параметр ρ, после чего вычисляем точечные оценки (2), (3), а затем с помощью графиков определяем доверительные интервалы для искомых характеристик по известным значениям n.

Выводы. 1. Предлагаемый метод применим при произвольном ЗР и является устойчивым к наличию грубых погрешностей, поэтому их предварительное исключение не требуется.

2. Метод приводит к оценкам, которые при одном и том же объеме выборки ненамного хуже по точности, чем оценки, полученные в предположении о точном знании вида ЗР. Вместе с тем для законов типа арксинусоидального вычислительная сложность предлагаемого метода намного больше, чем у традиционных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценки погрешности результатов измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 212 с.*
2. *Хьюбер П. Робастные методы в статистике. – М.: Мир, 1985. – 164 с.*
3. *Рудаков С.В. Методы обработки результатов измерительного эксперимента // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Х.: ХГПУ. – 1999. – Вып. 42. – С. 54 – 57.*
4. *Рудаков С.В., Дубийчук О.Ю. Методика идентификации закона распределения случайной величины графоаналитическим методом // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2003. – Вип. 6. – С. 79 – 85.*
5. *Крейнович В.Я. Выбор М-метода для решения технических задач // Тезисы 4-й Всесоюзной конференции по приложениям математич. логики. – Таллинн. – 1986. – С. 126.*

Поступила 31.08.2004

***РУДАКОВ Сергей Валерьевич**, канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры метрологии и стандартизации ХУ ВС. В 1996 году окончил ХВУ. Область научных интересов – методы обработки результатов измерений.*

НАУМЕНКО Нина Николаевна, *научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории кафедры метрологии и стандартизации ХУ ВС. В 1981 году окончила МИФИ. Область научных интересов – методы обработки результатов измерений.*