Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Черкаський інститут пожежної безпеки
Імені Героїв Чорнобиля
Національного університету цивільного захисту України

Касярум С. О.
Григоренко К. В.,
Частоколенко І. П.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Черкаси – 2017

УДК 514.12; 517; 519.2
ББК 22.11 я 73

Касярум С. О. Вища математика / Касярум С. О., Григоренко К. В., Частоколенко І. П. – Черкаси: ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля НУЦЗ України, 2017. – 91 с.

Посібник містить основи математичного апарату і приклади його застосування. Наведено матеріал з лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної, числових та функціональних рядів, теорії ймовірностей та математичної статистики. Посібник виконує функції довідника з вищої математики, але одночасно його можна розглядати і як дещо спрощений та добре ілюстрований підручник. Слугує для підготовки слухачів заочної та дистанційної форм навчання, а також для самоосвіти.

Рекомендовано до друку на засіданні методичної ради
Черкаського інституту пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля
Національного університету цивільного захисту України
(протокол № 2 від 24.10.2017)

ВСТУП

Математика – одна з найдавніших наук. Свої перші математичні уявлення і поняття людина формувала у глибокій давнині, розв’язуючи найпростіші задачі практичного характеру. Ускладнювалися форми суспільної трудової діяльності, і перед людиною поставали все складніші задачі, для розв’язання яких вона формувала нові математичні поняття, створювала математичні теорії. При цьому математика розвивалася під впливом двох головних стимулів: потреб практичної діяльності людини і логіки розвитку самої математики, яка випливала з бажання людини зрозуміти навколишній світ і своє місце у ньому.

Математика представляє собою значну складову у загальній сукупності людських знань і пристосована до обслуговування різноманітних галузей науки і практичної діяльності. Усі основні математичні поняття виникли і розвивались відповідно з потребами природознавства (фізики, механіки, астрономії тощо) і техніки. Поступово числові розрахунки проникають майже у всі напрями практичної діяльності людини. У зв’язку з розвитком науки і техніки ускладнюється сам процес теоретичного дослідження. Для розв’язування все складніших задач необхідним ставав і більш розвинений математичний апарат (теоретичні конструкції, правила, форми тощо). Спочатку це були алгоритми найпростіших обчислювальних процедур, а з часом логічні доведення стали головними у математиці.

Суттю сучасної математики є логічні доведення і процеси мислення, з допомогою яких одержують аналітичні формули. Ось чому навчання математиці має відповідати принципу: різному профілю – різну математику, але обов’язково з домінуючим компонентом – доведенням. Це дає і чітке уявлення про математику як струнку логічну систему, і слугуватиме формуванню правильного світогляду та методології.

Математика пройшла ***чотири основні періоди розвитку.***

1. Зародження математики – від глибокої давнини до VI–V ст. до н. е., тобто до того часу, коли математика стає самостійною галуззю теоретичного знання зі своїм власним предметом і методом. У первісної людини виникає здатність до абстрактного мислення, з’являються суб’єктивні, а потім цілком об’єктивні уявлення про простір і час. Розуміння часу прийшло через спостереження послідовних подій та руху у просторі як зміни взаємного розташування тіл з плином часу. Спостереження за Сонцем і Місяцем, зірками, лінією горизонту дають основоположні геометричні поняття точки, прямої, кола, площини тощо. Розвивається лічба, вимірювання, прийоми арифметичних дій над натуральними числами, створюється усна і письмова нумерація, системи числення. Відбувається процес абстрагування від конкретної природи об’єктів, які обраховують або вимірюють. З цього і починається розвиток математики як науки. Засновником математики була людина, яка вперше сказала: «1+1=2».

2. Елементарна математика – від VI–V ст. до н.е. до кінця XVI ст. Досягнуті успіхи у вивченні сталих величин. Період починається з приведення накопичених знань у систему, з'являється теоретична математика, виділяються математичні методи доведення, математика усвідомлюється як самостійна і самодостатня наука. Чітко визначений предмет математики – реальний світ; об'єкт – числа і фігури; метод – логічний, дедуктивний, аксіоматичний. Винайдено позиційну систему числення, введено від'ємні та ірраціональні числа, створено тригонометрію, таблицю логарифмів для спрощення і уніфікації обчислень. У зв'язку зі створенням алгебри (буквена символіка) математика перейшла на вищий ступінь абстракції. Перший ступінь абстракції – абстрагування від якісної природи об'єктів і утворення поняття числа, а наступним кроком було абстрагування від конкретного кількісного змісту числа, введення символів a, b, c, …, кожен з яких може означати будь-яке число. У цей час сформувалися основні теорії, що стосуються математики сталих величин, створилися передумови відкриття аналітичної геометрії і аналізу нескінченно малих – двох основних дисциплін класичної математики. Вони вивчають уже не стани, а закономірності змінних величин.

3. Створення математики змінних величин – кінець XVI – середина XIX ст. На початку цього періоду французький вчений Р. Декарт створює аналітичну геометрію; англійський учений І. Ньютон і німецький учений Г. Лейбніц створили аналіз нескінченно малих. Їх видатні послідовники Л. Ейлер, К. Гаусс, Ж. Лагранж, О. Л. Коші, Б. Больцано, М. Лобачевський, М. Остроградський, К. Вейєрштрасс, Й. Бернуллі та багато інших дали людству блискучий розвиток ідей своїх попередників. У математику твердо входить ще висловлена греками ідея неперервності, виникає поняття функціональної залежності, що дозволяє конструювати продуктивні математичні методи вивчення руху, при цьому плідно працює у математиці і концепція дискретності. За невеликий проміжок часу до середини XIX ст. у математиці склалися майже усі математичні теорії, які нині називають класичними основами сучасної вищої математики. Математика, починаючи з епохи Просвітництва XVIII ст., стає провідною наукою.

4. Сучасна математика характеризується швидким зростанням об'єму просторових форм і кількісних відношень. У зв'язку з цим у неї вводяться нові, надзвичайно абстрактні, об'єкти. Сучасна алгебра, теорія множин, теорія багатовимірних просторів піднесли математику на новий ступінь абстракцій, що дозволило проникнути на нові горизонти математичних досліджень дійсності.

1. Елементи лінійної алгебри

Під час розв'язування різних задач математики, техніки, економіки, особливо систем лінійних рівнянь, лінійних диференціальних рівнянь та їхніх систем, застосовують матриці, визначники та n-вимірні вектори.

<u>Матрицею</u> називають прямокутну таблицю елементів, яка має m рядків та n стовпців. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, D, \ldots$ Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – елементи матриць, у яких індекс i показує номер рядка, а індекс j – стовпця.

Якщо число рядків і стовпців матриці співпадає ($n = m$), то така матриця називається квадратною матрицею *n-го* порядку. Так, матриця B, у якої $n = m = 2$, є квадратною 2-го порядку.

<u>Добутком двох матриць</u> A (з m рядків та n стовпчиків) та B (з n рядків та k стовпчиків) називають матрицю з m рядків та k стовпчиків, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів *i-го* рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B, тобто така, у якої в i-му рядку на j-му місці стоїть сума $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Наприклад, для матриць 2 –го порядку:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

<u>Визначником</u> називають число, яке ставиться у відповідність квадратній матриці. Визначник (детермінант) позначають символами $\Delta, \Delta B, \det B$. Так, наприклад, для матриці B визначник будемо позначати:

$$\Delta = \Delta B = \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Порядком визначника називають його розмірність $m = n$.

<u>Визначником 2-го порядку</u> є число, яке дорівнює різниці добутків елементів головної $\left(a_{11},\ a_{22}\right)$ та побічної $\left(a_{12},\ a_{21}\right)$ діагоналей. Так,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Визначники вищих порядків $\left(n=m>2\right)$ обчислюються іншим способом. Для його пояснення введемо поняття мінора та алгебраїчного доповнення визначника.

<u>Мінором</u> M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають визначник $n-1$-го порядку, який одержують з визначника n-го порядку при викреслюванні i-го рядка та j-го стовпчика.

<u>Алгебраїчним доповненням</u> A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають мінор M_{ij}, який береться зі знаком плюс, якщо сума індексів $i+j$ є парним числом і зі знаком мінус, якщо ця сума є непарним числом. Тобто, $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$. Визначником n-го порядку називають число, яке, наприклад, записують у вигляді:

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}. \tag{1}$$

Вираз (1) називають розкладом визначника n-го порядку по елементах i-го рядка.

Для визначника 3-го порядку формула (1) має вигляд $\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$. Так, наприклад, розклад визначника 3-го порядку по елементах першого $(i=1)$ рядка має вигляд:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити визначник 3-го порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Розв'язання</u>. Згідно з формулами (1), (2) визначник 3-го порядку обчислимо так:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&5\\3&1&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1&5\\3&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot(2\cdot2-1\cdot5)-(1\cdot2-3\cdot5)-(1\cdot1-3\cdot2)=2(4-5)-(2-15)-(1-6)=$$
$$=2\cdot(-1)-(-13)-(-5)=-2+13+5=16.$$

Невиродженою називають квадратну матрицю, визначник якої відмінний від нуля.

Одиничною називають квадратну матрицю, у якої по головній діагоналі знаходяться одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

Оберненою до квадратної матриці A називають матрицю A^{-1}, для якої виконується умова $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, де E – одинична матриця. Для того, щоб для квадратної матриці існувала обернена матриця, необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою, тобто $\Delta A\neq 0$.

Так, для невиродженої матриці A обернену до неї матрицю A^{-1} можемо записати у вигляді:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},\qquad(3)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Рангом матриці називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r=r(A)$.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\quad\quad\ldots..\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\qquad(4)$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$ – коефіцієнти при невідомих $x_1,x_2,\ldots,x_n$, b_k $(k=\overline{1,m})$ – вільні члени.

Для того, щоб система лінійних рівнянь (4) була сумісною (тобто, мала розв’язок), необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи $r(A)$ дорівнював рангу її розширеної матриці $r(B)$, де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо система лінійних рівнянь (4) сумісна, то вона має один або безліч розв'язків. Розглянемо методи розв'язування лінійних рівнянь за допомогою визначників та матриць.

<u>Правило Крамера.</u>

Це правило можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають. Для простоти викладу розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими ($n=m=3$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{5}$$

Позначимо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ називають визначником системи і його складають з коефіцієнтів при невідомих, а у визначниках $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ коефіцієнти при відповідних невідомих замінені вільними членами.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (5) має єдиний розв'язок. Невідомі визначають за формулами:

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}, \tag{6}$$

і такий спосіб визначення невідомих називають правилом Крамера.

Якщо $\Delta=\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=0$, то система (5) має безліч розв'язків, а правило Крамера застосувати не можна. Якщо $\Delta=0$, а хоча б один із визначників Δx_i, $i=1,2,3$, відмінний від нуля, то система (5) несумісна.

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=1, \\ x_1-2x_2-2x_3=1, \\ 4x_1+x_2+4x_3=1. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо і обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8+2) - (4+8) + 3(1+8) = 3\cdot(-6) - 12 + 27 = -18 - 12 + 27 = -3;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8+2) - (4+2) + 3(1+2) = -6 - 6 + 9 = -3;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4+2) - (4+8) + 3(1-4) = 18 - 12 - 9 = -3;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-1) - (1-4) + (1+8) = -9 + 3 + 9 = 3.$$

Підставимо одержані результати у формули (6). Маємо:

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_3 = \frac{3}{-3} = -1.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

Матричний спосіб.

Матричний спосіб можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають, а крім того, матриця системи має обернену матрицю. Запишемо систему (5) у матричному вигляді. Для цього введемо матриці, що мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись правилом множення матриць, систему (5) запишемо у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B. \tag{7}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{8}$$

де A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A.

Приклад 3. Розв’язати систему лінійних рівнянь попереднього прикладу матричним способом.

Розв’язання. Перепишемо задану систему у вигляді (7). Для цього складемо матриці вигляду:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Розв’язок системи будемо шукати у вигляді (8). Необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Обернена матриця існує, бо $\Delta A=-3\neq 0$ (див. приклад 2). Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-8+2=-6,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-(4+8)=-12,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1+8=9,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-(4-3)=-1,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 4\end{vmatrix}=12-12=0,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-(3-4)=1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-2+6=4,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-(-6-3)=9,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6-1=-7.$$

Складемо обернену матрицю згідно з формулою (3). Одержимо:

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-6 & -1 & 4\\ -12 & 0 & 9\\ 9 & 1 & -7\end{pmatrix}.$$

Помножимо обернену матрицю на матрицю B і одержимо шукану матрицю X. Маємо:

$$X=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-6 & -1 & 4\\ -12 & 0 & 9\\ 9 & 1 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6-1+4\\ -12+0+9\\ 9+1-7\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\ -3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-1.$

Метод Гаусса.

Для розв’язування систем лінійних рівнянь застосовують метод, який називають методом Гаусса або методом виключення невідомих. Суть методу Гаусса розв’язування систем лінійних рівнянь розглянемо за допомогою матриць. Його ідея полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень матриці до трикутної матриці.

<u>Трикутною</u> називають матрицю, у якої під головною діагоналлю всі елементи дорівнюють нулю.

Елементарними перетвореннями матриці є такі перетворення:

1) перестановка двох рядків матриці;
2) множення всіх елементів рядка на одне і те ж число, відмінне від нуля;
3) додавання елементів якого-небудь рядка матриці, помножених на одне і те ж число, до відповідних елементів іншого рядка;
4) відкидання рядків матриці, елементами яких є нулі.

Проводячи елементарні перетворення над матрицею системи, отримують нову систему рівнянь, яка еквівалентна заданій, але з новими коефіцієнтами та вільними членами. Одержують трикутну систему рівнянь, із якої визначають невідомі.

<u>Приклад 4</u>. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>. Складемо розширену матрицю системи і будемо робити над нею необхідні елементарні перетворення, щоб одержати трикутну матрицю. На початку переставимо перше і третє рівняння місцями, а потім помножимо елементи першого рядка відповідно на мінус три, мінус два та мінус два і одержані результати додамо відповідно до елементів другого, третього та четвертого рядків. Аналогічно вчинимо з елементами другого, а потім третього рядків. Одержимо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

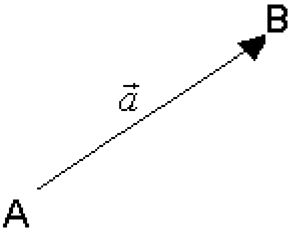
Система лінійних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad x_2 + 10x_3 = 10, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_2 = 10 - 10x_3 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

З третього рівняння $x_3 = 1$. З другого рівняння одержали x_2, а з першого одержуємо x_1.
Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Вектором називають напрямлений відрізок простору. Вектор позначають $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$, де A – початкова точка вектора, а B – кінцева.



Якщо точки A та B задані своїми координатами $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$, то проекції вектора на відповідні осі координат будуть дорівнювати різниці відповідних координат: $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Ортами (одиничними векторами) називають три взаємно-перпендикулярних вектори, довжини яких дорівнюють одиниці, їх позначають через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $\left(|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,\ \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}\right)$. Тоді вектори $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ можна записати через проекції (координати) у вигляді:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}, \tag{9}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{10}$$

Довжину (модуль) вектора можна знайти за формулами:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{11}$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Тобто:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \tag{12}$$

або

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \tag{13}$$

якщо вектори задані координатами $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

З формули (12), враховуючи формули (11) і (13), випливає, що косинус кута між двома векторами можна обчислити так:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (14)$$

<u>Векторним добутком</u> двох векторів називають третій вектор, який відповідає умовам:

1) довжина вектора чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на заданих векторах;

2) вектор перпендикулярний до площини векторів-множників;

3) вектор направлений в той бік, що якщо дивитися з його кінця, то рух від першого вектора-множника до другого буде здійснюватися проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначають у вигляді $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$, або

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані координатами.

Рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ простору, можна записати за формулою:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (16)$$

<u>Задача 1</u>. Дано координати вершин піраміди $A(0;0;2)$, $B(2;2;1)$, $C(-2;1;0)$ та $D(-1;2;0)$. Знайти:

1) довжину ребра AB;

2) написати рівняння ребра AB;

3) обчислити кут між ребрами AB і AC;

4) обчислити площу основи ABC;

5) зробити схематичний малюнок піраміди.

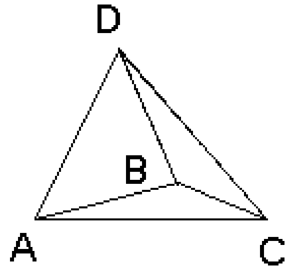


Рис. 1

<u>Розв'язання</u>. Зробимо схематичний малюнок піраміди.

1. Знайдемо довжину ребра AB за формулою (11). Одержимо:

$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$.

2. За формулою (16) напишемо рівняння ребра AB:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-2}{1-2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

3. Для обчислення косинуса кута між ребрами AB і AC знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{2-0;2-0;1-2\}=\{2;2;-1\}$ і $\overrightarrow{AC}=\{-2-0;1-0;0-2\}=\{-2;1;-2\}$. Тоді в силу формули (14) одержимо:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-2)+2\cdot1-1\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-4+2+2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{0}{9}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

4. Площа основи ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, який побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Тобто $S_\Delta=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ обчислимо за формулою (15). Тоді:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&2&-1\\-2&1&-2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-4+1)+\vec{j}\,(-4-2)+\vec{k}\,(2+4)=-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}\right|=\sqrt{(-3)^2+6^2+6^2}=\sqrt{81}=9;$$

$$S_\Delta=\tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot9=\tfrac{9}{2}=4{,}5\ (\text{кв.одиниць}).$$

3. Криві другого порядку

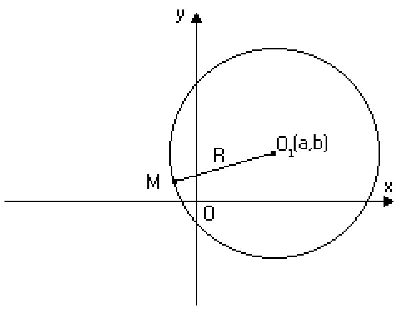


Рис. 2

<u>Колом</u> називається множина точок площини, рівновіддалених від однієї точки $O_1(a;b)$, яка називається центром. Канонічне рівняння кола має вигляд:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \text{ або } x^2+y^2=R^2, \quad (17)$$

коли центр кола співпадає з початком координат. R – радіус кола (рис. 2).

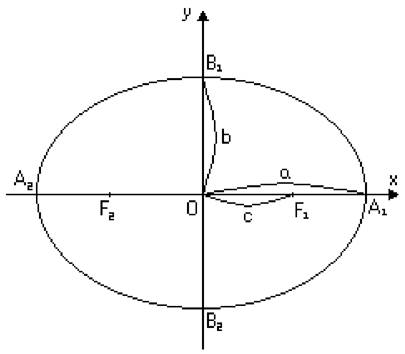


Рис. 3

<u>Еліпсом</u> називається множина всіх точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є величина стала (Рис. 3). Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ де } b^2=a^2-c^2. \quad (18)$$

Величини a і b – піввісі еліпса, а фокуси мають такі координати: $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ характеризує форму еліпса і називається його **ексцентриситетом**.

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (рис. 4). Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де } b^2 = c^2 - a^2. \qquad (19)$$

Прямі лінії $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються асимптотами гіперболи. Гілки гіперболи наближаються до даних асимптот.

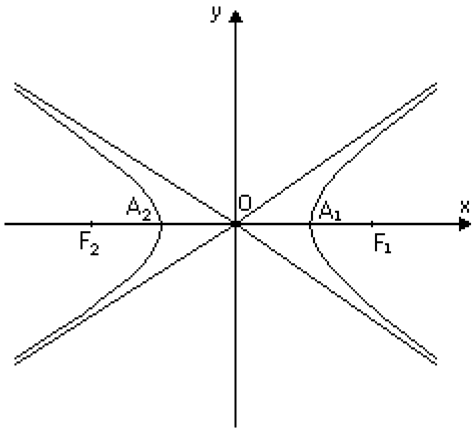


Рис. 4

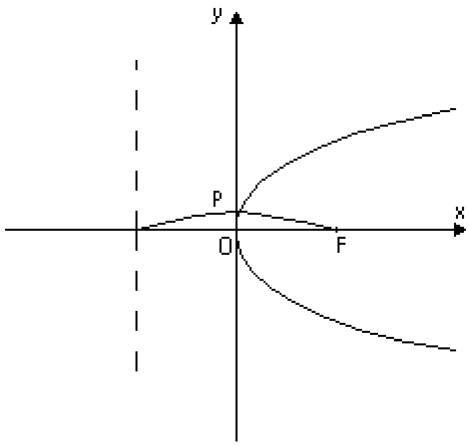


Рис. 5

Параболою називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки F, яка називається фокусом, і даної прямої, яка називається директрисою (рис. 5). Канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px, \qquad (20)$$

де величина p називається параметром параболи.

Зауваження. Якщо фокальна вісь параболи буде співпадати з віссю Oy, то рівняння параболи має вигляд:

$$x^2 = 2py. \qquad (21)$$

Приклад 5. 1. Знайти координати центра і величину радіуса кола $x^2+y^2+2x-10y+1=0$.

2. Для гіперболи $16x^2-9y^2=144$ знайти величини піввісей, координати фокусів, ексцентриситет та написати рівняння її асимптот.

Розв'язання. 1. Запишемо рівняння кола у канонічному вигляді (17), виділяючи повні квадрати відносно кожної змінної величини. Одержимо:

$$\left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-10y+25\right)-25+1=0 \;\Rightarrow\; \left(x+1\right)^2+\left(y-5\right)^2=25.$$

Центр кола лежить в точці $O_1\left(-1;5\right)$, а радіус $R=5$.

2. Якщо поділимо почленно рівняння гіперболи на 144, то одержимо канонічне рівняння вигляду (19):

$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144} \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, де $a=3,\ b=4$.

Значення c знайдемо з рівняння $b^2=c^2-a^2$. Тут $c^2=a^2+b^2=9+16=25,\quad c=5$.

Фокуси мають координати: $F_1\left(5;0\right)$ і $F_2\left(-5;0\right)$, а ексцентриситет – $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3},\ \varepsilon=\frac{5}{3}$.

Рівнянням асимптот відповідно є $y=\pm\frac{b}{a}x,\ \ y=\pm\frac{4}{3}x$.

4. Вступ до математичного аналізу

Розглянемо деякі основні поняття функції однієї змінної, яку будемо позначати аналітично $y=f\left(x\right)$.

Одним із найважливіших понять математичного аналізу є поняття границі функції.

<u>Границею</u> функції $y=f\left(x\right)$ при $x\to+\infty$ називають число b, якщо яке б не було додатне число ε, можна знайти такий номер N, що для всіх x, більших N, виконується нерівність $\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon$.

Границю функції записують у вигляді:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=b.$$

<u>Границею</u> функції $y=f\left(x\right)$ при $x\to x_0$ називають число b, якщо для довільного додатного ε знайдеться таке $\delta>0$, що якщо виконується нерівність $\left|x-x_0\right|<\delta$, то існуватиме також нерівність:

$$\left| f(x) - b \right| < \varepsilon .$$

У цьому випадку границю функції записують у такому вигляді:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b .$$

Нескінченно малою називають функцію, границя якої дорівнює нулю.

Нескінченно великою називають функцію $y = f(x)$, якщо, починаючи з деякого номера N, значення функції для всіх $x > N$ стає більшим за будь-яке велике значення C, тобто $f(x) > C$ при $x > N$.

Оберненою функцією до нескінченно малої є нескінченно велика функція і навпаки. Символічно це твердження (не строго математично) можемо записати так: $\frac{1}{0} = \infty, \ \frac{1}{\infty} = 0$.

Основними властивостями границі функції є такі властивості:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}, \quad \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$.

В процесі обчислення границі функції під знак границі підставляють значення x_0 $(x \to x_0)$ замість x.

Приклад 6. Обчислити границю функції:

$$\lim_{x \to 3} \left(5 - \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \right).$$

Розв'язання. Замість x підставимо число 3 під знаком границі. Одержимо:

$$\lim_{x \to 3} \left(5 - \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \right) = 5 - \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{3 + 1} = 5 - \frac{8}{4} = 5 - 2 = 3.$$

Приклад 7. Обчислити границю функції:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2}.$$

Розв'язання. Підставимо число 2 замість x і одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2}=\frac{4-8+4}{4+2}=\frac{0}{6}=0.$$

Приклад 8. Обчислити границю функції:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}.$$

Розв'язання. Підставимо число 1 замість x і одержимо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}=\frac{1+3-1}{1-1}=\frac{3}{0}.$$

Завдяки четвертій властивості границю функції не обчислюють. Але будемо виходити із визначення нескінченно малої та великої функцій і зв'язку між ними. Тоді вираз $\frac{1}{0}$ позначили "∞". Це знак границі нескінченно великої функції. Тобто:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}=\frac{3}{0}=3\cdot\frac{1}{0}=3\cdot\infty=\infty.$$

Часто під час обчислення границь виникають невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$; $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$; $\{\infty-\infty\}$; $\{0\cdot\infty\}$; $\{1^{\infty}\}$; $\{0^0\}$; $\{\infty^0\}$. Для того, щоб розкрити ці невизначеності, необхідно зробити деякі алгебраїчні перетворення виразів, які є під знаком границі, або ж застосувати так звані "визначні" границі. Основними з них є такі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – перша "визначна" границя;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ – другі "визначні" границі, а число $e\approx 2,72$ і називається сталою Ейлера.

Приклад 9. Обчислити границю функції:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\frac{2+6-2\cdot 4}{4-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ розкладемо на множники чисельник і знаменник виразу, а потім скоротимо на вираз $(x-2)$. Одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}=\frac{-2\left(2+\frac{1}{2}\right)}{2}=-\frac{5}{2}.$$

<u>Приклад 10</u>. Знайти границю функції:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}.$$

<u>Розв'язання</u>. Після підстановки $x=-2$ одержимо невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{11-2}}{4-4}=\frac{3-3}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для того, щоб вираз, який знаходиться під знаком границі, скоротити на $(x+2)$, помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжене чисельника. Одержимо:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(x^2+2x\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{7-x-11-x}{x(x+2)\left(\sqrt{7+2}+\sqrt{11-2}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x(x+2)\cdot(3+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-2(x+2)}{6x(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{-2}{6x}=\frac{-2}{6\cdot(-2)}=\frac{1}{6}.$$

<u>Еквівалентними</u> називаються дві нескінченно малі функції, границя відношення яких при $x\to x_0$ дорівнює одиниці. Еквівалентність функцій позначають знаком "~", тобто $f(x)\sim\varphi(x)$. В силу першої "визначної" границі можна записати $\sin\alpha\sim\alpha$. Еквівалентними при $\alpha\to 0$ будуть також функції: $\mathrm{tg}\,\alpha\sim\alpha$, $\arcsin\alpha\sim\alpha$, $\mathrm{arctg}\,\alpha\sim\alpha$ та інші.

<u>Приклад 11</u>. Знайти границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{1-\cos 8x}.$$

<u>Розв'язання</u>.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{1-\cos 8x}=\frac{0\cdot\mathrm{tg}\,0}{1-\cos 0}=\frac{0}{1-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

У цьому випадку для розкриття невизначеності слід використати першу "визначну" границю, або еквівалентність функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{1-\cos 8x}=\left|\begin{array}{l}1-\cos 8x=\\=2\sin^2 4x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{2\sin^2 4x}=\left|\ \mathrm{tg}\,6x\sim 6x,\ \sin 4x\sim 4x\ \right|=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 6x}{2 \cdot (4x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{2 \cdot 16x^2} = \frac{6}{2 \cdot 16} = \frac{3}{16}.$$

Приклад 12. Обчислити границю:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 5}{4 + x - 3x^4}.$$

Розв'язання. У цьому випадку одержуємо невизначеність виду $\left\{ \frac{\infty}{-\infty} \right\}$. Звертаємо увагу тільки на найвищий степінь x (x^4). Розділимо вираз почленно на найвищий степінь x і перейдемо до обчислення нескінченно малих функцій. Маємо:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 5}{4 + x - 3x^4} = \left\{ \frac{\infty}{-\infty} \right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4} - \frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^3} - 3} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0; & \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^4} = 0; \\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{x^4} = 0; & \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0 \end{matrix} \right| = \frac{1 + 0 - 0}{0 + 0 - 3} = -\frac{1}{3}.$$

5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Другим важливим поняттям математичного аналізу є поняття похідної функції.

Похідною функції $y = f(x)$, неперервної в точці x_1, називають границю відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли $\Delta x \to 0$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad \text{де } \Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Геометричним змістом похідної є: значення похідної в точці дорівнює значенню кутового коефіцієнта, який утворюється між дотичною і віссю OX, коли дотична проведена до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці. Якщо функція має похідну, то вона називається диференційовною.

Основні правила диференціювання:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 2) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

3) $(cu)' = cu'$; 4) $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Якщо функція $y=f(x)$, а $x=\varphi(y)$ є оберненою функцією до неї, то

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}, \qquad x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Якщо функція $u=u(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y=f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y=f(u(x))$ в даній точці x має похідну y'_x, яка обчислюється за формулою $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Таблиця похідних:

1. $(c)'=0$;
2. $(x)'=1$;
3. $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$;
4. $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$;
5. $\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$;
6. $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$;
7. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$;
8. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;
9. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;
10. $(\mathrm{tg}\,u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
11. $(\mathrm{ctg}\,u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;
12. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
13. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
14. $(\mathrm{arctg}\,u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
15. $(\mathrm{arcctg}\,u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
16. $\left(u^{v}\right)'=vu^{v-1}\cdot u'+u^{v}\ln u\cdot v'$.

<u>Приклад 13</u>. Знайти похідну функції:
$y=\sqrt[7]{x^6+5x^2-1}+\sqrt[3]{\left(3x^2+2\right)^4}$.

<u>Розв'язання</u>. Перепишемо функцію у такому вигляді:
$y=\left(x^6+5x^2-1\right)^{\frac{1}{7}}+\left(3x^2+2\right)^{\frac{4}{3}}$.

На основі формули 3 з таблиці похідних та правила диференціювання суми можемо записати:

$$y'=\tfrac{1}{7}\left(x^6+5x^2-1\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(x^6+5x^2-1\right)'+\tfrac{4}{3}\left(3x^2+2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(3x^2+2\right)'=$$

$$=\tfrac{1}{7}\left(x^6+5x^2-1\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(6x^5+10x\right)+\tfrac{4}{3}\left(3x^2+2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 6x=\frac{6x^5+10x}{7\cdot\sqrt[7]{\left(x^6+5x^2-1\right)^6}}+\frac{8x}{\sqrt[3]{3x^2+2}}.$$

Приклад 14. Знайти похідну функції:
$y=\operatorname{arctg}\left(x^3-2x\right)\cdot\ln(5x+1)$.

Розв'язання. Для диференціювання функції застосуємо правило диференціювання добутку двох функцій та формули 7 і 14 із таблиці похідних. Одержимо:

$$y'=\frac{1}{1+\left(x^3-2x\right)^2}\cdot\left(x^3-2x\right)'\cdot\ln(5x+1)+\frac{1}{5x+1}\cdot(5x+1)'\cdot\operatorname{arctg}\left(x^3-2x\right)=$$

$$=\frac{3x^2-2}{1+\left(x^3-2x\right)^2}\cdot\ln(5x+1)+\frac{5}{5x+1}\cdot\operatorname{arctg}\left(x^3-2x\right).$$

Приклад 15. Знайти похідну функції:
$y=\dfrac{2+\operatorname{tg}3x}{2-\operatorname{ctg}4x}$.

Розв'язання. Застосуємо правило диференціювання дробу та формули 10 і 11 з таблиці похідних. Одержимо:

$$y'=\frac{(2+\operatorname{tg}3x)'(2-\operatorname{ctg}4x)-(2-\operatorname{ctg}4x)'(2+\operatorname{tg}3x)}{(2-\operatorname{ctg}4x)^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3\cdot(2-\operatorname{ctg}4x)-\frac{1}{\sin^2 4x}\cdot 4\cdot(2+\operatorname{tg}3x)}{(2-\operatorname{ctg}4x)^2}=$$

$$=\frac{3\sin^2 4x\cdot(2-\operatorname{ctg}4x)-4\cos^2 3x\cdot(2+\operatorname{tg}3x)}{(2-\operatorname{ctg}4x)^2\cdot\cos^2 3x\cdot\sin^2 4x}.$$

Приклад 16. Знайти похідну функції:

$$y=e^{\cos 3x-2}+10^{x^4-3}+\sin^4\frac{x}{4}-\cos^5 2x+7.$$

Розв'язання. Застосуємо правило диференціювання суми та необхідні формули з таблиці похідних. Одержимо:

$$y'=e^{\cos 3x-2}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3+10^{x^4-3}\ln 10\cdot 4x^3+4\sin^3\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cdot\tfrac{1}{4}-5\cos^4 2x(-\sin 2x)\cdot 2$$

$$=-3e^{\cos 3x-2}\sin 3x+4x^3\cdot 10^{x^4-3}\ln 10+\sin^3\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+10\cos^4 2x\sin 2x.$$

Похідною 2-го порядку називають похідну від похідної $y'=f'(x)$, якщо вона існує і позначають:

$$(y')'=y'',\ \left(f'(x)\right)'=f''(x).$$

Похідною *n*-го порядку називають першу похідну від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають:

$$\left(y^{(n-1)}\right)'=y^{(n)},\ \left(f^{(n-1)}(x)\right)'=f^{(n)}(x). \qquad (22)$$

Приклад 17. Знайти похідну $y^{(IV)}$ від функції $y=\cos^2 3x$.

Розв'язання. З формули (22) випливає, що для знаходження похідної четвертого порядку необхідно знайти похідну третього порядку, похідна 3-го порядку знаходиться як похідна від похідної 2-го порядку, а похідна 2-го порядку знаходиться як похідна від похідної першого порядку. Будемо знаходити послідовно похідні 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків. Маємо:

$y'=2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3=-3\sin 6x$; $\quad y''=-3\cos 6x\cdot 6=-18\cos 6x$;

$y'''=-18(-\sin 6x)\cdot 6=108\sin 6x$; $\quad y^{(IV)}=108\cos 6x\cdot 6=648\cos 6x$.

6. Дослідження функцій за допомогою похідних

Похідна функції має широке застосування для розв'язування різних задач математики, фізики, техніки та економіки. Так, наприклад, за допомогою похідної можна обчислити границю функції, знайти екстремум функції, інтервали монотонності, точки перегину функції та інше.

Інтервалами монотонності функції називаються ті інтервали, на яких функція або тільки зростає, або тільки спадає або залишається сталою.

Якщо неперервна на сегменті $[a,b]$ функція $y=f(x)$ має в кожній точці цього сегмента додатну похідну, то вона зростає на цьому сегменті, а якщо від'ємну похідну, то вона спадає на цьому сегменті.

Функція $y=f(x)$ має **максимум** в точці $x=x_0$, якщо для довільних точок із її околу виконується умова $f(x_0)>f(x)$ і має **мінімум** в точці, якщо виконується така умова $f(x_0)<f(x)$.

Максимум і мінімум функції називають **екстремуми** функції.

Необхідною умовою існування екстремуму в точці $x=x_0$ диференційовної функції $y=f(x)$ є рівність нулю її похідної: $f'(x_0)=0$.

Критичними або стаціонарними точками неперервної функції $y = f(x)$ є ті точки, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує.

Достатньою умовою існування екстремуму в точці $x = x_0$ для диференційовної функції $y = f(x)$ є зміна знака похідної у разі переходу через цю точку. Так, у разі зміни знака з “+” на “–” в точці $x = x_0$ функція має максимум, а з “–” на “+” – мінімум (рис. 6).

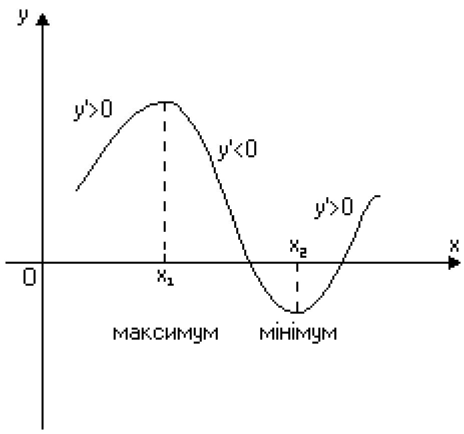


Рис. 6

Вгнутим називається графік диференційовної функції $y = f(x)$ в інтервалі (a,b), якщо він знаходиться вище довільної його дотичної на цьому інтервалі.

Опуклим називається графік диференційовної функції $y = f(x)$ в інтервалі (a,b), якщо він знаходиться нижче довільної його дотичної на цьому інтервалі.

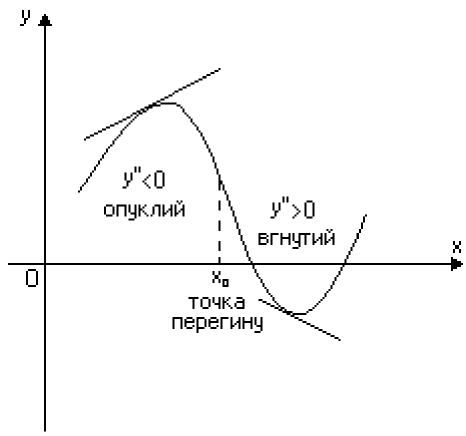


Рис. 7

Точкою перегину неперервної функції називається та точка, яка відділяє вгнутість від опуклості її графіка (рис. 7).

Якщо друга похідна функції $y = f(x)$ для всіх $x \in (a,b)$ від’ємна ($f''(x) < 0$), то тут графік функції опуклий, а якщо $f''(x) > 0$ – вгнутий.

Необхідною умовою існування точки перегину графіка функції є рівність нулю її другої похідної: $f''(x_0) = 0$ в даній точці $x = x_0$.

Точка $x = x_0$, в якій $f''(x_0) = 0$, називається **критичною точкою другого порядку** для функції $y = f(x)$.

Достатньою умовою існування точки перегину графіка неперервної функції є зміна знаку другої похідної у разі переходу через точку x_0.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма лінія, до якої графік функції наближається на нескінченності.

Вертикальною асимптотою є пряма $x = a$, якщо виконується умова $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Для функції $y = f(x)$ вертикальні асимптоти існують в її точках розриву другого роду.

Похилу асимптоту шукають у вигляді $y = kx + b$, а параметри k і b шукають за формулами:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right). \tag{23}$$

Якщо хоча б одна границя не існує, то похила асимптота відсутня.

Для знаходження границь (23) інколи зручно використовувати **правило Лопіталя**: якщо границя відношення двох функцій $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ або $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, то її можна знаходити за формулою: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, якщо остання границя існує.

Приклад 18. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 + 3x^2 + 2$ на відрізку $[-3;1]$.

Розв'язання. Функція може досягати свого найбільшого та найменшого значення або на кінцях відрізка, або у критичних

точках, якщо вони знаходяться у середині відрізка. Знайдемо критичні точки функції і розглянемо тільки ті, які потрапляють в інтервал $(-3;1)$:

$y' = 3x^2 + 6x, \; y' = 0, \; 3x^2 + 6x = 0, \; 3x(x+2) = 0, \quad x_1 = 0, \; x_2 = -2$.

Обчислимо значення функції у критичних точках та на кінцях відрізка. Одержимо:

$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 2 = -27 + 27 + 2 = 2, \; f(-3) = 2$;

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 2 = -8 + 12 + 2 = 6, \; f(-2) = 6$;

$f(0) = 2; \quad f(1) = 1 + 3 + 2 = 6$.

Відповідь: $f(1) = f(-2) = 6$ – найбільше значення функції; $f(-3) = f(0) = 2$ – найменше значення функції на відрізку.

Приклад 19. Провести повне дослідження функції $y = x^4 - 4x^3 + 3$ та побудувати її графік.

Розв'язання. 1. Знайдемо область визначення функції: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. У графіка цієї функції відсутні асимптоти. Якщо функція неперервна, то відсутні вертикальні асимптоти. У разі знаходження похилих асимптот $y = kx + b$ параметр k не дорівнює скінченному числу:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4 - 4x^3 + 3}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x^3 - 4x^2 + \frac{3}{x}\right) = \infty.$$

3. Знайдемо інтервали монотонності та критичні точки функції за допомогою першої похідної:

$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3),\ y' = 0,\ 4x^2(x-3) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 3.$

Одержані точки розбивають область визначення функції на такі інтервали: $(-\infty;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$. Знайдемо знак похідної в кожному з інтервалів.

$(-\infty;0),\ y'(-1) = 4(-1-3) = -16 < 0,$ зростає;

$(0;3),\ y'(1) = 4(1-3) = -8 < 0,$ зростає;

$(3;+\infty),\ y'(4) = 64(4-3) = 64 > 0,$ зростає.

$y_{\min} = f(3) = 3^4 - 4\cdot 3^3 + 3 = 3^3(3-4) + 3 = -27 + 3 = -24,$

$y_{\min}(3) = -24.$

4. Знайдемо інтервали вгнутості та точки перегину графіка функції за допомогою похідної другого порядку:

$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2),\ y'' = 0,\ 12x(x-2) = 0,\ x_1 = 0, x_2 = 2.$

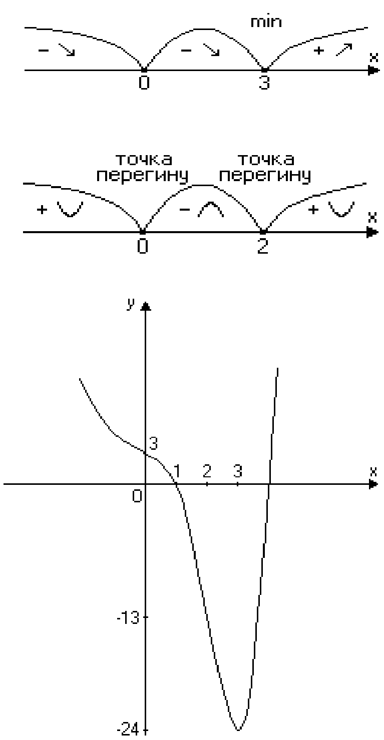


Рис. 8

Критичні точки другого порядку $x = 0$, $x = 2$ розбивають область визначення функції на інтервали вгнутості. Знайдемо знак другої похідної у кожному з них:

$(-\infty;0),\ y''(-1) = -12(-1-2) = 36 > 0,$ вгнута;

$(0;2),\ y''(1) = 12(1-2) = -12 < 0,$ опукла ;

$(2;+\infty),\ y''(3) = 36(3-2) = 36 > 0,$ вгнута.

$y_{т.п.}(0) = 3,\quad y_{т.п.}(2) = 16 - 32 + 3 = -13.$

Точки перегину функції мають координати: $(0;3)$ і $(2;-13)$.

5. Знайдемо точки перетину функції з осями координат: якщо $x=0$: $y=3$; якщо $y=0$: $x^4 - 4x^3 + 3 = 0$. Для рівняння $x^4 - 4x^3 + 3 = 0$ можна методом підбору знайти один корінь $x=1$.

6. Побудуємо схематично графік функції (рис. 8).

<u>Приклад 20</u>. Провести повне дослідження функції $y=\frac{x}{x^2-25}$ та побудувати її графік.

<u>Розв'язання</u>. 1. Знайдемо область визначення функції. Необхідно знайти ті точки, в яких знаменник дробу дорівнює нулю, і вилучити їх. Одержимо $x^2-25\neq 0,\ x^2\neq 25,\ x_{1,2}\neq \pm 5$. Функція визначена в інтервалах $(-\infty;-5)\cup(-5;5)\cup(5;+\infty)$.

2. Знайдемо асимптоти графіка функції:

а) вертикальні асимптоти будемо шукати в точках розриву функції. Одержимо:

$$y=\lim_{x\to -5}\frac{x}{x^2-25}=\frac{-5}{25-25}=\frac{-5}{0}=\infty;$$

$$y=\lim_{x\to 5}\frac{x}{x^2-25}=\frac{5}{25-25}=\frac{5}{0}=\infty.$$

Прямі $x=-5$ та $x=5$ є вертикальними асимптотами функції.

б) похилі асимптоти будемо шукати у вигляді $y=kx+b$, а невідомі параметри k і b визначимо за формулами (23). Одержимо:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(x^2-25\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-25}=\frac{1}{\infty}=0;$$

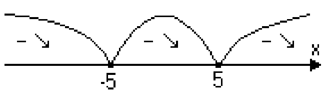
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-25}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-25}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left(x^2-25\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\infty}=0;$$

$k=0,\ b=0$, тоді $y=0$ – вісь OX – похила асимптота.

3. Знайдемо інтервали монотонності та критичні точки функції. Для цього знайдемо першу похідну функції. Маємо:

$$y'=\frac{x^2-25-2x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{-25-x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=-\frac{x^2+25}{\left(x^2-25\right)^2};$$

$$y'=0\ \Rightarrow\ x^2+25=0\ \Rightarrow\ x^2\neq -25,\ x^2+25>0.$$



Тоді $y'=-\frac{x^2+25}{\left(x^2-25\right)^2}<0$ для всіх x із області неперервності.

Тобто функція спадна на кожному інтервалі області визначення.

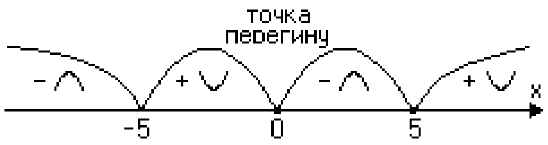
4. Знайдемо інтервали вгнутості та точки перегину графіка функції. Для цього знайдемо другу похідну:

$$y''=\frac{-2x\left(x^2-25\right)^2-2\left(x^2-25\right)\cdot 2x\left(x^2+25\right)}{\left(x^2-25\right)^4}=\frac{-2x\left(x^2-25\right)\left(x^2-25-2\left(x^2+25\right)\right)}{\left(x^2-25\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2-25-2x^2-50\right)}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+75\right)}{\left(x^2-25\right)^3}.$$

Прирівняємо $y''=0$. Одержимо: $2x\left(x^2+75\right)=0 \Rightarrow x=0,\ x^2\neq -75$; $x=0$ – критична точка. Знайдемо знак другої похідної в кожному з інтервалів: $(-\infty;-5)$; $(-5;0)$; $(0;5)$; $(5;+\infty)$.

Маємо: $y''(-6)<0;\ y''(-4)>0;\ y''(4)<0;\ y''(6)>0$.



На інтервалах $(-\infty;-5)$ та $(0;5)$ графік опуклий, а на інтервалах $(-5;0)$ та $(5;+\infty)$ – вгнутий. Точка $y(0)=0$ є точкою перегину графіка функції.

5. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: якщо $x=0,\ y=0$, якщо $y=0,\ x=0$. Інших точок не існує.

6. Використовуючи результати досліджень, побудуємо графік функції (рис. 9).

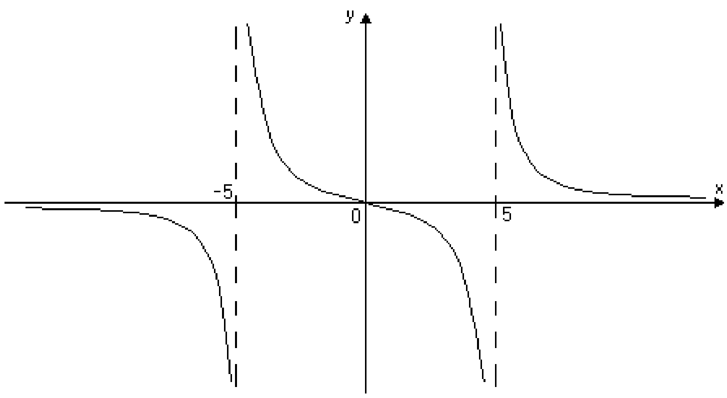


Рис. 9

<u>Зауваження</u>. Часто в процесі побудови графіка функції знаходять парність функції. Тобто перевіряють умови: $y(-x)=y(x)$ – функція парна та $y(-x)=-y(x)$ – функція непарна. Якщо жодна умова не виконується, то функція ні парна, ні непарна, а її графік загального положення.

Для функції $y=\dfrac{x}{x^2-25}$ виконується умова:

$$y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-25}=\frac{-x}{x^2-25}=-\frac{x}{x^2-25}=-y(x).$$

Функція непарна, а її графік симетричний відносно початку координат.

7. Диференціальні рівняння

<u>**Звичайним диференціальним рівнянням**</u> називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, функцію та її похідні. Порядок диференціального рівняння визначає найвища похідна, яка входить у рівняння. Розв'язком диференціального рівняння є будь-яка функція $y = f(x)$, яка у разі підстановки її у рівняння перетворює його у тотожність.

<u>**Диференціальне рівняння першого порядку**</u> має вигляд: $F(x, y, y') = 0$ або $y' = f(x, y)$. Загальним розв'язком цього рівняння є функція виду $y = \varphi(x, C)$, яка за довільних значень сталої величини C є розв'язком цього рівняння. Геометрично функція $y = \varphi(x, C)$ описує множину інтегральних кривих. Для знаходження частинного (єдиного) розв'язку необхідно знати початкові умови, які для рівняння першого порядку записують у вигляді $y(x_0) = y_0$ або $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Не існує єдиного універсального методу, за допомогою якого можна розв'язати диференціальні рівняння першого порядку. Існує певний клас рівнянь, які можна розв'язати (проінтегрувати). Розглянемо такі рівняння.

Диференціальні рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називаються <u>**рівняннями з відокремлюваними змінними**</u>, якщо їх можна звести до вигляду:

$$y' = f_1(x)\, f_2(y). \tag{24}$$

Якщо записати $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то одержимо $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y)$, або $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Тут змінні відокремились. Можемо проінтегрувати отриманий вираз. Одержимо:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,\ C = C_2 - C_1. \tag{25}$$

Вираз (25) називають загальним інтегралом диференціального рівняння (21).

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' + y = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно похідної y'. Одержимо:

$$y' = -\frac{y}{x};\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\Big|\cdot dx;\ dy = -\frac{y}{x}dx;\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Змінні відокремились і можемо проінтегрувати вираз. Одержимо:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| + C_1 = -\ln|x| + C_2 \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = C_3,\ C_3 = C_2 - C_1.$$

Сталу величину C_3 запишемо у вигляді $C_3 = \ln C$, тоді

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln C \Rightarrow xy = \pm C,\ \pm C = C_4,\ xy = C_4 \Rightarrow y = \frac{C_4}{x}.$$

Однорідними рівняннями першого порядку називають рівняння, що має виглд:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (26)$$

Для того, щоб рівняння (26) звести до рівняння з відокремлюваними змінними, вводять заміну змінної $y = xt$. Тоді $y' = t + xt'$ і рівняння (26) можна переписати через змінну t. Одержуємо:

$$t + xt' = \varphi(t),\ xt' = \varphi(t) - t,\ t' = \frac{\varphi(t) - t}{x}.$$

Змінні відокремлюються і його вже можна розв'язати.

Приклад 22. Знайти загальний розв'язок рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Розв'яжемо це рівняння відносно похідної y'; одержимо однорідне рівняння:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Введемо заміну змінної $y = xt,\ y' = t + xt'$. Одержимо:

$$t + xt' = \frac{x^2 + x^2t^2}{2x\cdot xt} = \frac{x^2\left(1 + t^2\right)}{2x^2t} = \frac{1 + t^2}{2t}.$$

Або

$$xt' = \frac{1+t^2}{2t} - t = \frac{1+t^2-2t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}; \quad t' = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x};$$

якщо позначимо $t' = \dfrac{dt}{dx}$, то одержимо вираз, який можна інтегрувати. Маємо:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x} \Big| \cdot dx \Rightarrow dt = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x} dx \Bigg| : \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow \frac{2t\,dt}{1-t^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2t\,dt}{1-t^2} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \Rightarrow -\ln\left|1-t^2\right| = \ln|x| + C_1; \ C_1 = \ln C, \ \ln|x| + \ln\left|1-t^2\right| = \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(1-t^2\right) = C.$$

Повернемося до старої змінної, тобто підставимо замість t його значення $t = \dfrac{y}{x}$. Одержуємо загальний розв’язок у вигляді:

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C \Rightarrow x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2} = C \Rightarrow x^2 - y^2 = Cx.$$

Лінійними рівняннями першого порядку називають рівняння, що має вигляд:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{27}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані функції.

Одним із способів розв’язування лінійних рівнянь є метод знаходження розв’язку рівняння (27) у вигляді добутку двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто $y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$; $y' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння (27) можна переписати у вигляді:

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x), \ u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x). \tag{28}$$

На функцію $v = v(x)$ накладають таку умову, щоб вираз

$$v' + P(x)v = 0. \tag{29}$$

Замість рівняння (28) одержуємо рівняння:

$$u'v = Q(x). \tag{30}$$

Рівняння (29) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, одержуємо функцію $v = v(x)$. Підставимо цю функцію у рівняння (30) і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними, для якого зможемо знайти загальний розв'язок у вигляді $u = u(x, C)$.

Тоді загальний розв'язок лінійного рівняння (27) запишемо у вигляді: $y = v(x) \cdot u(x, C)$.

<u>Зауваження</u>. Таким самим методом можна розв'язувати рівняння, що має вигляд:

$$y' + yP(x) = Q(x)y^{\alpha},$$

де α – довільне число, і яке називають рівнянням Бернуллі.

<u>*Приклад 23*</u>. Розв'язати рівняння $y' - \frac{y}{x} = x^2$.

<u>*Розв'язання*</u>. Це лінійне рівняння першого порядку. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді $y = u \cdot v$, $y' = u'v + v'u$. Після підстановки цієї заміни у рівняння одержимо таке рівняння:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2,\ u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2.$$

Прирівняємо до нуля вираз у круглих дужках: $v' - \frac{v}{x} = 0$. Залишилося рівняння виду $u'v = x^2$. Знайдемо розв'язок рівняння $v' = \frac{v}{x}$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x};\ \ln|v| = \ln|x|,\ v = x.$$

Підставимо одержане значення v у рівняння $u'v = x^2$. Одержимо:

$$u'x = x^2,\ u' = x,\ \frac{du}{dx} = x,\ du = x\,dx,\ \int du = \int x\,dx + C,\ u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Загальний розв'язок шуканого рівняння має вигляд: $y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x$, $y = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд: $F(x,y,y',y'')=0$ або $y''=f(x,y,y')$, а початкові умови записують у вигляді $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$.

Лінійне рівняння другого порядку має вигляд:

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x), \quad (31)$$

де $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$ – деякі неперервні функції, а $a_0(x)\neq 0$. Якщо $b(x)=0$, то лінійне рівняння:

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0, \quad (32)$$

називають **лінійним однорідним**.

Структура загального розв'язку для рівняння (32) має вигляд:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \quad (33)$$

де C_1, C_2 – сталі величини, а $y_1=y_1(x)$ та $y_2=y_2(x)$ – функції, які складають фундаментальну систему розв'язків для цього рівняння.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (31) дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку $\tilde{y}(x)$ неоднорідного рівняння, і записується у вигляді:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\tilde{y}(x). \quad (34)$$

Лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$y''+py'+qy=0, \quad (35)$$

де p,q – сталі величини.

Якщо розв'язок рівняння (35) шукати у вигляді функції $y=e^{kx}$, то характеристичне рівняння для цього рівняння має вигляд:

$$k^2+pk+q=0. \quad (36)$$

Якщо корені характеристичного рівняння (36):

1) дійсні різні $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок рівняння (35) записують у вигляді:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}; \tag{37}$$

2) дійсно тотожні $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв'язок рівняння (35) записують у вигляді:

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right); \tag{38}$$

3) комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (i – уявна одиниця), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right). \tag{39}$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, що мають вигляд:

$$y'' + py' + qy = f\left(x\right), \tag{40}$$

де $f\left(x\right)$ – неперервна функція, можна знайти методом варіації сталої, або іншими частинними методами.

Приклад 24. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + y' - 2y = 0$, який відповідає умовам: $y\left(0\right) = 1,\; y'\left(0\right) = 3.$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння за формулою (36). Одержимо:

$k^2 + k - 2 = 0,\; k_1 = 1,\; k_2 = -2.$

Корені дійсно різні. Тепер за формулою (37) запишемо загальний розв'язок:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Для знаходження констант C_1 та C_2 підставимо початкові умови в загальний розв'язок та його похідну y': $y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$.

Одержимо:

$1 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \quad 3 = C_1 e^0 - 2C_2 e^0,$

або таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 2C_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow 3C_2 = -2,\ C_2 = -\frac{2}{3},\ C_1 = 1 - C_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Відповідь. Частинний розв'язок рівняння має вигляд: $y = -\frac{2}{3}e^x + \frac{5}{3}e^{-2x}$.

Приклад 25. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння для даного рівняння має вигляд:

$k^2 + 2k + 10 = 0$.

Корені цього квадратного рівняння будуть уявними (комплексно спряженими):

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm \sqrt{9 \cdot (-1)} = -1 \pm 3i,\ k_{1,2} = -1 \pm 3i,$$

де $\sqrt{-1} = i$. Згідно з формулою (39) загальний розв'язок рівняння, враховуючи, що $\alpha = -1,\ \beta = 3$, має вигляд:

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Приклад 26. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$, який відповідає умовам: $y(0) = -2,\ y'(0) = 1$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для такого диференціального рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 6k + 9 = 0,\ (k-3)^2 = 0,\ k_{1,2} = 3.$$

Корені дійсно тотожні $k_1 = k_2 = 3$. Тому згідно з формулою (38) загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

Враховуючи початкові умови, обчислимо сталі величини C_1 та C_2. Так,

$$y' = 3e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right) + e^{3x} \cdot C_2.$$

Тоді

$$\begin{cases} -2 = e^0\left(C_1 + 0\right), \\ 1 = 3e^0\left(C_1 + 0\right) + C_2 e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \quad C_2 = 7, \\ 3C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 = -2. \end{cases}$$

Відповідь. Частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = e^{3x}\left(7x - 2\right)$.

Наведемо тепер метод невизначених коефіцієнтів для знаходження розв’язку лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду.

Розглянемо рівняння:
$y'' + py' + qy = f(x)$.

1. Якщо $f(x) = P_n(x)$, тобто многочлен n-го степеня, то тоді частинний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо таким чином:

$$\tilde{y}(x) = Q_n(x) \cdot x^r, \qquad (41)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен n-го степеня; $r = 0$, якщо серед коренів характеристичного рівняння немає числа 0, $r = 1$, якщо $k = 0$ є одним з коренів характеристичного рівняння.

2. Якщо $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, тоді частинний розв’язок шукатимемо наступним чином:

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^r, \qquad (42)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен n-го степеня; $r = 0$, якщо жоден корінь характеристичного рівняння не співпадає з α, $r = 1$, якщо один корінь характеристичного рівняння співпадає з α, $r = 2$, якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють α.

3. Якщо $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$, тоді частинний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot x^r, \qquad (43)$$

де $r = 0$, якщо числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння, $r = 1$, якщо $\alpha \pm i\beta$ – це корені характеристичного рівняння.

Застосування методу покажемо на прикладі.

Приклад 27. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$, який відповідає початковим умовам: $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y''-2y'+y=0$, його характеристичне рівняння – $k^2-2k+1=0$, корінь $k=1$ – кратний, отже загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^x\cdot x=e^x\left(C_1+C_2x\right).$$

Оскільки $f\left(x\right)=x^2+1$, тобто многочлен другого степеня, то згідно з (41) шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$$\tilde{y}=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot x^0=Ax^2+Bx+C.$$

Тут $r=0$ тому, що 0 не є коренем характеристичного рівняння.

Продиференціюємо $\tilde{y}$ двічі та підставимо отримані вирази в диференціальне рівняння:

$$\tilde{y}'=2Ax+B,\quad \tilde{y}''=2A.$$

Отримаємо тотожність:

$$2A-2\left(2Ax+B\right)+Ax^2+Bx+C=x^2+1.$$

Зведемо подібні члени:

$$Ax^2+\left(B-4A\right)x+\left(C+2A-2B\right)=x^2+1.$$

Прирівняємо коефіцієнти з однаковими степенями x; тоді маємо:

$$\begin{cases} A=1, \\ B-4A=0, \\ C+2A-2B=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1, \\ B=4, \\ C=7. \end{array}$$

Таким чином, $\tilde{y}=x^2+4x+7$.

Згідно з (34), загальний розв'язок має вигляд:

$$y=\bar{y}+\tilde{y}=e^x\left(C_1+C_2x\right)+x^2+4x+7.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок диференціального рівняння, що відповідає початковим умовам. Для цього підставимо в загальний розв'язок $x=0,\ y=1$; отримаємо:

$$1=e^0\left(C_1+C_2\cdot 0\right)+7=C_1+7,$$

отже $C_1=-6$. Продиференціюємо тепер y:

$$y'=e^x\left(C_1+C_2x\right)+e^x\cdot C_2+2x+4$$

і підставимо початкові умови $x=0;\ y'=0$:

$$0=e^0\left(C_1+0\right)+e^0\cdot C_2+4,$$

отже $0=-6+C_2+4$, звідки $C_2=2$. Остаточно маємо відповідь: частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$y = e^x\left(-6+2x\right)+x^2+4x+7$.

Приклад 28. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-3y'+2y=4\sin 2x$, який відповідає початковим умовам: $y(0)=-1,\ y'(0)=1$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння:

$y''-3y'+2y=0$,

його характеристичне рівняння – $k^2-3k+2=0$, корені якого $k_1=2,\ k_2=1$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^x$.

Тепер, оскільки $f(x)=4\sin 2x$, то згідно з (43) маємо $\alpha=0,\ \beta=2$; частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$\tilde{y}=\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)\cdot x^0 = A\cos 2x+B\sin 2x$.

Тут $r=0$, оскільки $\pm 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тепер диференціюємо $\tilde{y}$ двічі:

$\tilde{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x;$

$\tilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$

Підставимо отримані вирази в рівняння:

$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-3\left(-2A\sin 2x+2B\cos 2x\right)+2A\cos 2x+2B\sin 2x=4\sin 2x$.

Зведемо подібні члени і прирівняємо коефіцієнти при відповідних членах:

$\cos 2x\left(-4A-6B+2A\right)+\sin 2x\left(-4B+6A+2B\right)=4\sin 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}-6B-2A=0,\\ -2B+6A=4,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-3B,\\ -2B-18B=4,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{3}{5}=0,6\\ B=-\frac{1}{5}=-0,2\end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$\tilde{y}=0,6\cos 2x-0,2\sin 2x$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді:

$y=\bar{y}+\tilde{y}=C_1e^{2x}+C_2e^x+0,6\cos 2x-0,2\sin 2x$.

Знайдемо тепер частинний розв'язок, що відповідає початковим умовам. Підставимо $x=0,\ y=-1$ в розв'язок:

$-1=C_1+C_2+0,6$.

Продиференціюємо y та підставимо в отриманий вираз $x=0,\ y'=1$:

$y' = 2C_1e^{2x} + C_2e^x - 1,2\sin 2x - 0,4\cos 2x,$

$1 = 2C_1 + C_2 - 0,4.$

Отже, для знаходження C_1 і C_2 маємо систему:

$$\begin{cases} -1,6 = C_1 + C_2, \\ 1,4 = 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння системи перше:

$1,4 + 1,6 = 2C_1 - C_1 + C_2 - C_2 \Rightarrow 3 = C_1,$

отже, з першого рівняння тоді

$C_2 = -1,6 - C_1 = -4,6.$

Запишемо остаточну відповідь: частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$y = 3e^{2x} - 4,6 \cdot e^x + 0,6\cos 2x - 0,2\sin 2x.$

8. Ряди
8.1. Числові ряди

Числовим рядом називають послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, з'єднаних між собою знаками плюс (або мінус), тобто:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (44)$$

Числа $u_i \ (i = 1, 2, \ldots)$ називаються членами ряду, а u_n – загальним членом ряду.

Частинною сумою ряду називають суму S_n перших n членів ряду.

Збіжним називають числовий ряд, для якого виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (45)$$

а границю S називають сумою ряду. Якщо умова (45) для ряду (44) не виконується, то такий ряд називають **розбіжним**.

Необхідною умовою збіжності ряду (44) є умова:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (46)$$

Якщо умова (46) не виконується, то такий ряд є розбіжним. Часто необхідна умова (46) виконується, але не виконується при цьому умова (45) і тоді ряд є розбіжним.

Під час перевірки виконання умови (45) виникають значні труднощі при обчисленні послідовності частинних сум S_n. Існують достатні ознаки збіжності ряду (44), за допомогою яких значно простіше дослідити збіжність ряду.

Для **знакододатних числових рядів** зупинимось на таких ознаках збіжності:

1. **Ознака Даламбера**. Якщо для знакододатного ряду (44) існує границя відношення наступного члена до попереднього у разі необмеженого зростання номера n, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho, \tag{47}$$

то, якщо $\rho<1$, ряд збіжний, а якщо $\rho>1$, ряд розбіжний. Коли $\rho=1$ необхідно застосувати іншу ознаку.

2. **Радикальна ознака Коші**. Якщо для знакододатного ряду (44) існує границя, що має вигляд:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho, \tag{48}$$

то, якщо $\rho<1$, ряд збіжний, а якщо $\rho>1$, ряд розбіжний. Коли $\rho=1$, необхідно застосувати іншу ознаку.

3. **Ознака порівняння рядів**. Якщо один з двох знакододатних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ збіжний (розбіжний) і виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k,\ \left(k\neq 0,\ k\neq\infty\right),$$

то збіжним (розбіжним) є і другий ряд.

Приклад 29. Дослідити збіжність рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+5)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{15n-1}{6n+3}\right)^n$.

Розв'язання. а) застосуємо ознаку Даламбера. Для цього запишемо:

$$u_n=\frac{3^n}{(n+5)!},\quad u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\left((n+1)+5\right)!}=\frac{3^{n+1}}{(n+6)!},$$

і знайдемо границю за формулою (47). Одержимо:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+6)!}:\frac{3^n}{(n+5)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3(n+5)!}{(n+6)!\cdot 3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3(n+5)!}{(n+5)!\cdot(n+6)\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+6}=0,\quad \rho=0<1.$$

Ряд збіжний.

б) застосуємо радикальну ознаку Коші. Обчислимо границю виду (48). Одержимо:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{15n-1}{6n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{15n-1}{6n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{15-\frac{1}{n}}{6+\frac{3}{n}}=\frac{15}{6},\ \ \rho=\frac{15}{6}>1.$$

Ряд розбіжний.

Для **знакозмінних рядів** достатньою є така ознака збіжності. Якщо для знакозмінного ряду $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ є збіжним ряд, який складений з абсолютних величин членів цього ряду $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, то знакозмінний ряд збіжний, і таку його збіжність називають абсолютною.

Серед знакозмінних рядів окремо вирізняють знакочергові ряди, які мають вигляд:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\,. \qquad (49)$$

Ознака Лейбніца. Якщо для ряду (49) абсолютні величини членів ряду спадні: $u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots$, і виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд збіжний, а його сума не більша першого члена ряду.

Зауваження. Якщо ряд із абсолютних величин членів ряду (49) є розбіжним, а умова Лейбніца виконується, то такий ряд називають умовно збіжним.

Приклад 30. Дослідити збіжність ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$.

Розв'язання. Перевіримо умови ознаки Лейбніца:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{1\cdot 2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3\cdot 4}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt[3]{n\cdot(n+1)}}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n\cdot(n+1)}}=0$.

Умови виконуються. Ряд збіжний.

8.2. Функціональні ряди

<u>Функціональними рядами</u> називаються ряди, членами яких є деякі функції:
$u_n\left(x\right)$ $\left(n=1,2,\ldots\right)$, визначені в області зміни аргументу x:

$$u_1\left(x\right)+u_2\left(x\right)+\ldots+u_n\left(x\right)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(x\right). \qquad (50)$$

<u>Функціональний ряд називається збіжним</u> в точці x_0, якщо у разі підстановки $x=x_0$ в функціональний ряд (50) одержимо числовий збіжний ряд, а точку x_0 називають точкою збіжності функціонального ряду. Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називають областю його збіжності.

Частинним випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

<u>Степеневим рядом</u> називають ряд, який має вигляд:

$$a_0+a_1\left(x-a\right)+a_2\left(x-a\right)^2+\ldots+a_n\left(x-a\right)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n, \qquad (51)$$

де a і коефіцієнти $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ є сталі величини. Радіус збіжності степеневого ряду (51) обчислюється за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (52)$$

Областю збіжності степеневого ряду (51) є інтервал $\left(a-R,a+R\right)$, до якого можуть бути додані кінцеві точки $a-R$ і $a+R$.

<u>Приклад 31</u>. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{n+5}x^n$.

<u>Розв'язання</u>. За формулою (52) знайдемо радіус збіжності ряду:

$a_n = \dfrac{n+3}{n+5},\ a_{n+1} = \dfrac{n+4}{n+6},$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5} : \frac{n+4}{n+6}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+6)}{(n+5)(n+4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{6}{n}\right)}{\left(1+\frac{5}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 1,\ R = 1.$$

Одержали інтервал $(-1;1)$. Дослідимо ще збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

1. Якщо $x = 1$, одержимо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+5}(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+5},$$

де $u_n = \dfrac{n+3}{n+5}$. Перевіримо необхідну умову (46) збіжності числового ряду:

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = 1 \neq 0 \cdot$$

Необхідна умова не виконується. Ряд розбіжний.

2. Якщо $x = -1$, одержимо знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+3}{n+5}$, який також розбіжний, бо для нього не виконується необхідна умова збіжності ($\lim_{n\to\infty}u_n = 1 \neq 0$) ознаки Лейбніца.

Тобто до інтервалу збіжності ряду не можна додати жодної кінцевої точки.

<u>Відповідь</u>. Областю збіжності степеневого ряду є інтервал $(-1;1)$.

Якщо функція $y = f(x)$ є сумою степеневого ряду:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots, \quad (53)$$

то такий ряд називають рядом Тейлора, а вираз (53) називають розвиненням функції у степеневий ряд. Якщо у виразі (53) $a = 0$, то такий ряд має вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \quad (54)$$

і називається рядом Маклорена для функції $f(x)$.

Розлянемо приклади розвинення у степеневі ряди деяких елементарних функцій.

Розвинути у степеневий ряд функцію $f(x)=e^x$. Знайдемо похідні цієї функції:

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ f'''(x)=e^x,\ldots,f^{(n)}(x)=e^x,\ldots$$

Якщо $a=0$, одержимо:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=e^0=1.$$

Одержані значення підставимо у ряд Маклорена (54). Одержимо розвинення функції у степеневий ряд:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ . \tag{55}$$

Аналогічно можна знайти розвинення інших функцій у степеневі ряди. Так,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots,$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \tag{56}$$

Ряд (56) називають біноміальним рядом. Цей ряд збігається, якщло $x\in(-1;1)$.

Степеневі ряди мають широке застосування в точних та наближених обчисленнях функцій, інтегралів, наближеному розв’язуванні диференціальних рівнянь та інших випадках.

<u>Приклад 32</u>. Розкласти в степеневий ряд функцію $f\left(x\right)=e^{-x^2}$ і знайти його радіус збіжності.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо $-x^2=t$ і для функції e^t, на основі формули (55) запишемо ряд:

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots\ . \tag{57}$$

Підставивши замість t його значення ($t=-x^2$), ряд (57) матиме вигляд:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{n!}+\ldots\ .$$

За формулою (52) знайдемо радіус збіжності одержаного ряду. Враховуючи, що коефіцієнти $\left|a_n\right|=\dfrac{1}{n!}$, $\left|a_{n+1}\right|=\dfrac{1}{\left(n+1\right)!}$, тоді:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}:\frac{1}{\left(n+1\right)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\cdot n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(n+1\right)=\infty,$$

$R=\infty$.

Ряд збіжний на всій числовій вісі $\left(-\infty,+\infty\right)$.

<u>Приклад 33</u>. Розкладаючи підінтегральну функцію в ряд, обчислити з точністю до $0{,}001$ визначений інтеграл:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

<u>Розв'язання</u>. Підінтегральну функцію $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}$ розвинемо у біноміальний ряд, використовуючи формулу (56), яку перепишемо у вигляді

$$\left(1+t\right)^m=1+\frac{m}{1!}t+\frac{m\left(m-1\right)}{2!}t^2+\frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)}{3!}t^3+\ldots\ .$$

Позначимо $t=x^4$, $m=-\dfrac{1}{4}$ і одержимо таке розвинення для функції:

$$\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}=1+\frac{-\frac{1}{4}}{1!}x^4+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)}{2!}x^8+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)}{3!}x^{12}+\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{4\cdot 1!}x^4+\frac{1\cdot 5}{4^2\cdot 2!}x^8-\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4^3\cdot 3!}x^{12}+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4^4\cdot 4!}x^{16}-\ldots\ .$$

Підставимо розвинення функції під знак інтеграла і після інтегрування обчислимо його наближено, взявши стільки членів, щоб решта ряду була меншою від $0,001$. Щоб не одержати похибки від округлення, будемо брати чотири знаки після коми.

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int_0^1 \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{4\cdot 1!}x^4+\frac{1\cdot 5}{4^2\cdot 2!}x^8-\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4^3\cdot 3!}x^{12}+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4^4\cdot 4!}x^{16}-\ldots\right)dx=$$

$$=1-\frac{1}{20}+\frac{5}{288}-\frac{45}{4992}+\frac{585}{104448}-\ldots\approx 1-0,0500+0,0174-0,0090+0,0052-0,0004=$$

$$=\left(x-\frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 1!}+\frac{5x^9}{9\cdot 4^2\cdot 2!}-\frac{5\cdot 9x^{13}}{13\cdot 4^3\cdot 3!}+\frac{5\cdot 9\cdot 13x^{17}}{17\cdot 4^4\cdot 4!}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(1+0,0174+0,0052\right)-\left(0,05+0,0090\right)=1,0326-0,0590=0,9736\approx 0,974.$$

Відповідь. $I\approx 0,974$.

9. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

9.1. Основні поняття

Означення. *Подією* називається факт, який може відбутися або не відбутися в результаті досліду.

При цьому той чи інший результат досліду може бути отриманий з різним ступенем можливості. Тобто в деяких випадках можна сказати, що одна подія відбудеться практично завжди, інша – практично ніколи.

Події також мають особливості одна відносно іншої, тобто в одному випадку подія *A* може відбутись сумісно з подією *B*, в іншому – ні.

Означення. Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших.

Класичним прикладом несумісних подій є результат підкидання монети – випадання лицьової сторони монети унеможливлює випадання зворотної сторони (в одному і тому ж досліді).

Означення. *Повною групою подій* називається сукупність усіх можливих результатів досліду.

Означення. *Достовірною* подією називається подія, яка відбудеться в результаті досліду. Подія називається *неможливою*, якщо воно ніколи не відбудеться у результаті досліду.

Наприклад, якщо з коробки, що містить лише червоні і зелені кульки, навмання виймають одну кульку, то поява серед вийнятих кульок білої – неможлива. Поява червоної і поява зеленої кульок утворюють повну групу подій.

Означення. Події називають *рівноможливими*, якщо немає підстав вважати, що одна з них з'явиться в результаті досліду з більшою ймовірністю.

У наведеному прикладі поява червоної і зеленої кульок – рівноможливі події, якщо у коробці знаходиться однакова кількість червоних і зелених кульок.

Якщо ж у коробці червоних кульок більше, ніж зелених, то поява зеленої кульки – подія менш імовірнісна, ніж поява червоної.

На основі цих загальних понять можна дати означення ймовірності.

Означення. *Ймовірністю* події A називається математична оцінка можливості появи цієї події у результаті досліду. Ймовірність події A рівна відношенню кількості сприятливих подій результатів досліду до загальної кількості попарно несумісних результатів досліду, що утворюють повну групу подій:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{58}$$

Результат випробування є сприятливим події A, якщо поява в досліді цього результату тягне за собою появу появу події A.

Очевидно, що ймовірність достовірної події рівна одиниці, а ймовірність неможливої – рівна нулю. Таким чином, значення ймовірності будь-якої події – є додатнє число, що міститься між нулем і одиницею:

$$0\le P(A)\le 1.$$

<u>*Приклад 34.*</u> У коробці знаходяться 10 кульок. З них *3* червоні, *2* – зелені, інші – білі. Знайти імовірність того, що вийнята навмання кулька буде червоною, зеленою або білою.

Поява червоної, зеленої і білої кульок становлять повну групу подій. Позначимо появу червоної кульки – подія A, поява зеленої – подія B, поява білої – подія C.

Відповідно до вищевказаних формул, отримаємо:

$$P(A)=\frac{3}{10};\quad P(B)=\frac{2}{10};\quad P(C)=\frac{5}{10}.$$

Зазначимо, що імовірність настання однієї з двох попарно несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій.

Означення. *Відносною частотою* події A називається відношення кількості дослідів, у результаті яких відбулась подія A, до загальної кількості дослідів.

Відмінність відносної частоти від ймовірності полягає в тому, що ймовірність обчислюється без безпосереднього добутку дослідів, а відносна частота – після досліду.

Так, в розглянутому вище прикладі, якщо з коробки навмання вилучено 5 кульок, і 2 з них виявилися червоними, то відносна частота появи червоної кульки дорівнює:

$$W(A) = \frac{2}{5}.$$

Як видно, ця величина не збігається зі знайденою ймовірністю.

При досить великій кількості проведених дослідів відносна частота змінюється мало, коливаючись близько одного числа. Це число може бути прийнято за ймовірність події.

Взагалі кажучи, класичне визначення ймовірності – досить відносне. Це обумовлено тим, що на практиці складно уявити результат досліду у вигляді сукупності елементарних подій, довести, що події рівноімовірні.

Наприклад, у випадку проведення досліду з підкиданням монети на результат досліду можуть впливати такі фактори, як несиметричність монети, вплив її форми на аеродинамічні характеристики польоту, атмосферні умови тощо.

Класичне визначення ймовірності не застосовується до випробувань з нескінченним числом результатів. Щоб подолати цей недолік, вводиться поняття *геометричної ймовірності*, тобто ймовірності попадання точки в будь-який відрізок або частину площини (простору).

Так, якщо на відрізку довжиною L виділений відрізок довжини l, то ймовірність попадання навмання взятої точки у відрізок l дорівнює відношенню l/L.

9.2. Операції над подіями

Означення. Події A і B називаються *рівними*, якщо здійснення події A тягне за собою здійснення події B, і навпаки.

Означення. *Об'єднанням* або *сумою* подій A_k називається подія A, яка означає появу *хоча б однієї* з подій A_k.

$$A = \bigcup_k A_k .$$

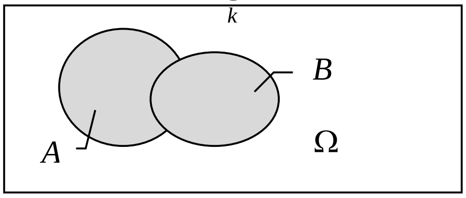


Рис. 10

Означення. *Перетином або добутком* подій A_k називається подія A, яка полягає у здійсненні *усіх* подій A_k:

$$A = \bigcap_k A_k .$$

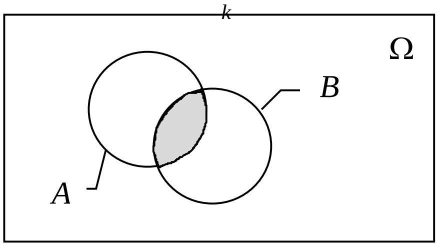


Рис. 11

Означення. *Різницею* подій A і B називається подія C, яка означає, що відбудеться подія A, але не відбувається подія B:

$$C = A \setminus B.$$

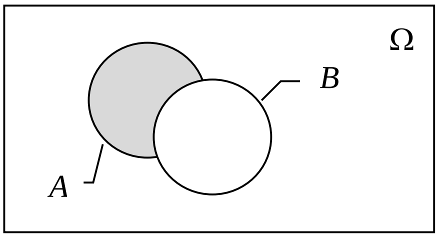


Рис. 12

Означення. *Додатковою* до події A називається подія $\overline{A}$, яка означає, що подія A *не відбувається.*

Означення. *Елементарними результатами* випробування називаються такі результати випробування, які взаємно унеможливлюють одне одного, і в результаті випробування відбувається одна з цих подій.

Сукупність усіх елементарних результатів випробування називається *простором елементарних подій.*

Теорема (*додавання імовірностей*). *Імовірність суми двох несумісних подій рівна сумі імовірностей цих подій:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (59)$$

Наслідок. *Якщо події* $A_1, A_2, ..., A_n$ *утворюють повну групу несумісних подій, то сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці:*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1.$$

Означення. *Протилежними* називаються дві несумісні події, які утворюють повну групу.

Теорема. *Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій без імовірності їхньої сумісної появи:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (60)$$

Наслідок. *Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:*

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Означення. Подія *A* називається *незалежною* від події *B*, якщо імовірність події *A* не залежить від того, відбулась подія *B* чи ні. Подія *A* називається залежною від події *B*, якщо імовірність події *A* змінюється залежно від того, відбулась подія *B* чи ні.

Означення. Імовірність події *B*, обчислена за умови, якщо відбулася подія *A*, називається *умовною імовірністю* події *B:*

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A).$$

Теорема (*множення імовірностей*). *Імовірність добутку двох подій (сумісної їхньої появи) дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої, обчислену за умови, що перша подія уже настала:*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B).$$

Також можна записати:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A).$$

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з означення умовної імовірності.

Якщо події незалежні, то $P(B/A)=P(B)$, і теорема множення імовірностей матиме вигляд:

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{61}$$

У разі добутку кількох залежних подій ймовірність дорівнює добутку одного з них на умовні ймовірності всіх інших за умови, що ймовірність кожного наступного обчислюється в припущенні, що всі інші події вже відбулися:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

З теореми добутку ймовірностей можна зробити висновок про ймовірність появи хоча б однієї події.

Якщо в результаті випробування може з'явитися n подій, незалежних в сукупності, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює:

$$P(A)=1-q_1q_2...q_n.$$

Тут подія A означає настання хоча б однієї з подій A_i, а q_i – імовірність протилежних подій $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$.

<u>*Приклад 34.*</u> З повної колоди карт (52 шт.) одночасно дістають чотири карти. Знайти імовірність того, що серед цих чотирьох карт буде хоча б одна бубнова або чирвова карта.

<u>*Розв'язання.*</u> Позначимо появу хоча б однієї бубнової карти – подія A, поява хоча б однієї чирвової карти – подія B. Таким чином, потрібно визначити імовірність події $C = A + B$.

Крім того, події A і B – сумісні, тобто поява однієї з них не унеможливлює появи іншої.

Всього в колоді 13 чирвових і 13 бубнових карт.

Під час витягування першої карти імовірність того, що не з'явиться ні чирвова, ні бубнова карта дорівнює $\frac{26}{52}$, під час витягування другої карти – $\frac{25}{51}$, третьої – $\frac{24}{50}$, четвертої – $\frac{23}{49}$.

Тоді імовірність того, що серед вийнятих карт не буде ні бубнових, ні чирвових дорівнює $P(\overline{C})=\frac{26}{52}\cdot\frac{25}{51}\cdot\frac{24}{50}\cdot\frac{23}{49}$.

Відповідь: $P(C)=1-P(\overline{C})\approx 0{,}945.$

Приклад 35. Чому дорівнює імовірність того, що під час підкидання трьох гральних кісток 6 очок з'явиться хоча б на одній з кісток?

Розв'язання. Імовірність випадання 6 очок за однин кидок дорівнює $\frac{1}{6}$. Імовірність того, що не випаде 6 очок – $\frac{5}{6}$. Ймовірність того, що на кинутих трьох кістках не випаде жодного разу 6 очок дорівнює: $p=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.

Відповідь: імовірність того, що хоча б один раз випаде 6 очок дорівнює: $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

Приклад 36. У барабані револьвера знаходяться 4 патрони з шести у довільному порядку. Барабан розкручують, після чого натискають на спусковий гачок двічі. Знайти ймовірності хоча б одного пострілу; двох пострілів; двох осічок.

Розв'язання. Імовірність пострілу у разі першого натискання на спусковий гачок (подія A) дорівнює $P(A)=\frac{4}{6}$, імовірність осічки – $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$. Ймовірність пострілу під час другого натискання на спусковий гачок залежить від результату першого натискання.

Так, якщо у першому випадку відбувся постріл, то у барабані залишилось лише 3 патрони, причому вони розподілені по 5 гніздам, оскільки під час другого натискання на спусковий гачок навпроти ствола не може опинитися гніздо, у якому був патрон під час першого натискання на гачок.

Умовна ймовірність пострілу під час другої спроби – $P(B/A)=\frac{3}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна ймовірність осічки другого разу – $P(\overline{B}/A)=\frac{2}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Розглянемо імовірності того, що у другому випадку буде постріл (подія B) або відбудеться осічка (подія $\overline{B}$) за умови, що першого разу був постріл (подія A) або осічка (подія $\overline{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ – два постріли поспіль;

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ – перша осічка, другий постріл;

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ – перший постріл, друга осічка;

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ – дві осічки поспіль.

Ці чотири випадки утворюють повну групу подій (сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці).

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що імовірність хоча б одного пострілу дорівнює сумі $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0{,}933.$

Тепер розглянемо інший випадок. Уявімо, що після першого натискання на спусковий гачок барабан розкрутили і знову натиснули на курок.

Ймовірності першого пострілу і першої осічки не змінились – $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{6}$. Умовні імовірності другого пострілу і осічки обчислюються з умови, що навпроти ствола може опинитись те ж гніздо, що й першого разу.

Умовна імовірність пострілу під час другої спроби – $P(B/A) = \frac{3}{6}$, якщо першого разу був постріл, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{6}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна імовірність осічки другого разу – $P(\overline{B}/A) = \frac{3}{6}$, якщо першого разу був постріл, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}$ – якщо була осічка. Тоді:

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ – два постріли поспіль;

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$ – перша осічка, другий постріл;

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ – перший постріл, друга осічка;

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ – дві осічки поспіль.

В цьому випадку імовірність того, що відбудеться хоча б один постріл, дорівнює:

$$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889.$$

Приклад 37. Два стрілці стріляють по мішені. Імовірність влучення в мішень у разі одного пострілу для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти імовірність того, що за умови одного залпу в мішень влучить тільки один із стрільців.
Розв'язання. Позначимо попадання в ціль першим стрільцем – подія *A*, другим – подія *B*, промах першого стрільця – подія $\overline{A}$, промах другого – подія $\overline{B}$.

$P(A)=0{,}7; \quad P(\overline{A})=0{,}3; \quad P(B)=0{,}8; \quad P(\overline{B})=0{,}2.$

Імовірність того, що перший стрілець влучить у мішень, а другий – ні, дорівнює:

$P(A)P(\overline{B})=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14.$

Імовірність того, що другий стрілець влучить у мішень, а перший – ні, дорівнює:

$P(\overline{A})P(B)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24.$

Тоді імовірність влучення в ціль лише одним стрільцем дорівнює:

$P=0{,}14+0{,}24=0{,}38.$

Такий же результат можна отримати іншим способом: знаходимо імовірності того, що обидва стрільці влучили в ціль, і обидва промахнулись. Ці імовірності відповідно дорівнюють:

$P(A)P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56; \quad P(\overline{A})P(\overline{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06.$

Відповідь: імовірності того, що в ціль влучить лише один стрілець, дорівнює: $P=1-0{,}56-0{,}06=0{,}38.$

Приклад 38. Імовірність того, що навмання узята деталь з деякої партії деталей буде бракованою, дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що з трьох узятих деталей 2 виявляться не бракованими.
Розв'язання. Позначимо браковану деталь – подія *A*, не браковану – подія $\overline{A}$.

$P(A)=0{,}2; \quad P(\overline{A})=0{,}8.$

Якщо серед трьох деталей буде тільки одна бракована, то це можливо в одному з трьох випадків: бракована деталь буде першою, другою або третьою.

$P=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})+P(\overline{A})P(A)P(\overline{A})+P(\overline{A})P(\overline{A})P(A);$

Відповідь: $P=3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}384.$

Приклад 39. Імовірності того, що потрібна деталь знаходиться у першому, другому, третьому або четвертому ящиках. Знайти імовірності того, що ця деталь знаходиться:

а) не більш, ніж у трьох ящиках;

б) не менш, ніж у двох ящиках.

Розв'язання. 1. Імовірність того, що ця деталь знаходиться у всіх чотирьох ящиках, дорівнює:

$$P = P_1P_2P_3P_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024.$$

2. Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не більш, ніж у трьох ящиках, дорівнює імовірності того, що вона не знаходиться в усіх чотирьох ящиках:

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$$

3. Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не менш, ніж у двох ящиках, складається з імовірностей того, що деталь знаходиться тільки у двох ящиках, тільки у трьох ящиках, тільки у чотирьох ящиках.

Звичайно, ці ймовірності можна порахувати, а потім додати, однак, простіше зробити інакше. Така ж імовірність дорівнює імовірності того, що деталь не знаходиться лише в одному ящику і мається взагалі.

4. Імовірність того, що деталь знаходиться тільки в одному ящику, дорівнює:

$$P = P_1q_2q_3q_4 + q_1P_2q_3q_4 + q_1q_2P_3q_4 + q_1q_2q_3P_4;$$

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$$

$$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404.$$

$$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596.$$

5. Імовірність того, що потрібної деталі немає в жодному ящику, дорівнює:

$$P_0 = q_1q_2q_3q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024;$$

$$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976.$$

Відповідь: шукана імовірність дорівнює:

$$P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$$

9.3. Формула повної імовірності

Нехай деяка подія *A* може відбутися з однією з несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які складають повну групу подій. Нехай відомі імовірності цих подій $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ та умовні імовірності настаня події *A* у разі настання події H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Імовірність події A, яка може відбутися разом з однією з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, дорівнює сумі парних добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідні їм умовні імовірності настання події A:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) \quad (62)$$

Доведення. Оскільки події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу подій, то подію *A* можна представити у вигляді суми:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i.$$

Оскільки події $H_1, H_2, ..., H_n$ несумісні, то і події AH_i теж несумісні. Тоді можна використати теорему про додавання несумісних подій:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i).$$

При цьому

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i).$$

У результаті <u>*отримаємо*</u>: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$

Теорему доведено.

<u>*Приклад 40.*</u> Один з трьох стрільців робить два постріли. Імовірність влучення в ціль у разі одного пострілу для першого стрільця дорівнює 0,4, для другого – 0,6, для третього – 0,8. Знайти імовірність того, що в ціль влучать двічі.
<u>*Розв'язання.*</u> Імовірність того, що постріли робить перший, другий або третій стрілець дорівнює $\frac{1}{3}$.

Імовірності того, що один із стрільців двічі влучить в ціль, дорівнює:

– для першого стрільця: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16;$

– для другого стрільця: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36;$

– для третього стрільця: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64.$

<u>*Відповідь:*</u> шукана імовірність дорівнює:
$$p = \frac{1}{3} p_1^2 + \frac{1}{3} p_2^2 + \frac{1}{3} p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}.$$

9.4. Формула Байєса (формула гіпотез)

Нехай існує повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$ з відомими ймовірностями їхнього настання $P(H_1), P(H_2),..., P(H_n)$. Нехай у результаті досліду настала подія *A*, умовні імовірності якої по кожній з гіпотез відомі, тобто відомі імовірності:

$$P(A/H_1), P(A/H_2),..., P(A/H_n).$$

Потрібно визначити, які імовірності мають гіпотези $H_1, H_2,..., H_n$ відносно події *A*, тобто умовні імовірності $P(H_i/A)$.

Теорема. *Імовірність гіпотези після випробування дорівнює добутку імовірності гіпотези до випробування на відповідну їй умовну імовірність події, яка відбулася у разі випробування, поділену на повну імовірність цієї події:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \qquad (63)$$

Ця формула називається *формулою Байєса.*

Доведення. З ***теореми множення імовірностей*** випливає:

$$P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i).$$

Тоді, якщо $P(A) \neq 0,$ $\quad P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$

Для знаходження імовірності $P(A)$ використаємо формулу повної імовірності:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Якщо до випробування усі гіпотези рівноімовірні з імовірністю $P(H_i) = p$, то формула Байєса матиме вигляд:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}.$$

9.5. Повторення випробувань. Формула Бернуллі

Якщо проводиться кілька випробувань, в результаті яких може відбутися або не відбутися подія A, і ймовірність появи цієї події в кожному з випробувань не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються *незалежними* відносно події A.

Припустимо, що подія A настає в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A)=p$. Визначимо ймовірність $P_{m,n}$ того, що в результаті n випробувань подія A настала рівно m разів.

Цю ймовірність можна порахувати, використовуючи теореми додавання і множення ймовірностей, як це робилося у розглянутих вище прикладах. Однак, у разі досить великої кількості випробувань це призводить до дуже великих обчислень. Таким чином, виникає необхідність розробити спільний підхід до вирішення поставленого завдання. Цей підхід реалізований у *формулі Бернуллі* (Якоб Бернуллі (1654–1705) – швейцарський математик).

Нехай у результаті n незалежних випробувань, проведених в однакових умовах, подія A настає з імовірністю $P(A)=p$, а протилежна йому подія $\overline{A}$ – з ймовірністю $P(\overline{A})=1-p$.

Позначимо A_i – настання події A у випробуванні з номером i. Оскільки умови проведення випробувань однакові, то ці ймовірності тотожні.

Якщо в результаті n дослідів подія A настає рівно m разів, то інші $n-m$ раз ця подія не настає. Подія A може з'явитися m раз в n випробуваннях в різних комбінаціях, число яких дорівнює кількості сполучень з n елементів по m. Ця *кількість сполучень* знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (64)$$

Імовірність кожної комбінації дорівнює добутку ймовірностей: $p^m(1-p)^{n-m}$.

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, отримуємо *формулу Бернуллі*:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \qquad (65)$$

Формула Бернуллі важлива тому, що справедлива для будь-якої кількості незалежних випробувань, тобто того самого випадку, в якому найбільш чітко проявляються закони теорії ймовірностей.

Приклад 41. У ціль здійснюється 5 пострілів. Імовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили не менше трьох разів.
Розв'язання. Імовірність не менше трьох влучень складається із ймовірності п'яти влучень, чотирьох влучень і трьох влучень. Оскільки постріли незалежні, то можна застосувати формулу Бернуллі ймовірності того, що в m випробуваннях подія з ймовірністю p настає рівно n разів.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

У разі п'яти влучень з п'яти можливих:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024.$$

Чотири влучення з п'яти пострілів:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768.$$

Три влучення з п'яти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304.$$

Остаточно, отримуємо ймовірність не менше трьох влучень з п'яти пострілів:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744.$$

9.6. Випадкові величини

Вище розглядалися випадкові події, які є якісною характеристикою випадкового результату досліду. Для отримання кількісної характеристики вводиться поняття випадкової величини.

Означення. *Випадковою величиною* називається величина, яка в результаті досліду може набувати того чи іншого значення, причому заздалегідь відомо, яке саме.

Випадкові величини можна розділити на дві категорії.

Означення. *Дискретною випадковою величиною* називається така величина, яка в результаті досліду може приймати певні значення з певною ймовірністю, що утворюють нумеровану множину.

Ця множина може бути як скінченною, так і нескінченною.

Наприклад, кількість пострілів до першого влучання в ціль є дискретною випадковою величиною, тому що ця величина може приймати і нескінченне, хоча і обраховану кількість значень.

Означення. *Неперервною випадковою величиною* називається така величина, яка може набувати будь-яких значень з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Очевидно, що число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

Для задання випадкової величини недостатньо просто вказати її значення, необхідно також вказати ймовірність цього значення.

9.7. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Означення. Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та їхніми ймовірностями називається *законом розподілу дискретної випадкової величини*.

Закон розподілу може бути заданий аналітично, у вигляді таблиці або графічно.

Таблиця відповідностей значень випадкової величини та їх імовірностей називається *рядом розподілу.*

Графічне представлення цієї таблиці називається *многокутником розподілу.*

При цьому сума усіх ординат многокутника розподілу представляє собою імовірність усіх можливих значень випадкової величини, а, отже, дорівнює одиниці.

<u>Приклад 42</u> У ціль здійснюється 5 пострілів. Імовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,4. Знайти імовірність числа влучень і побудувати многокутник розподілу.

<u>Розв'язання.</u> Імовірності п'яти влучень з п'яти можливих, чотирьох з п'яти і трьох з п'яти були знайдені вище за формулою Бернуллі та дорівнюють відповідно:

$$P_{5,5}=0{,}01024,\quad P_{4,5}=0{,}0768,\quad P_{3,5}=0{,}2304.$$

Аналогічно знайдемо:

$$P_{2,5}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}0{,}4^2\cdot 0{,}6^3=0{,}3456;$$

$$P_{1,5}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}0{,}4^1\cdot 0{,}6^4=0{,}2592;$$

$$P_{0,5}=\frac{5!}{0!\cdot 5!}0{,}4^0\cdot 0{,}6^5=0{,}6^5=0{,}0778.$$

Представимо графічно залежність числа влучень від їх імовірностей.

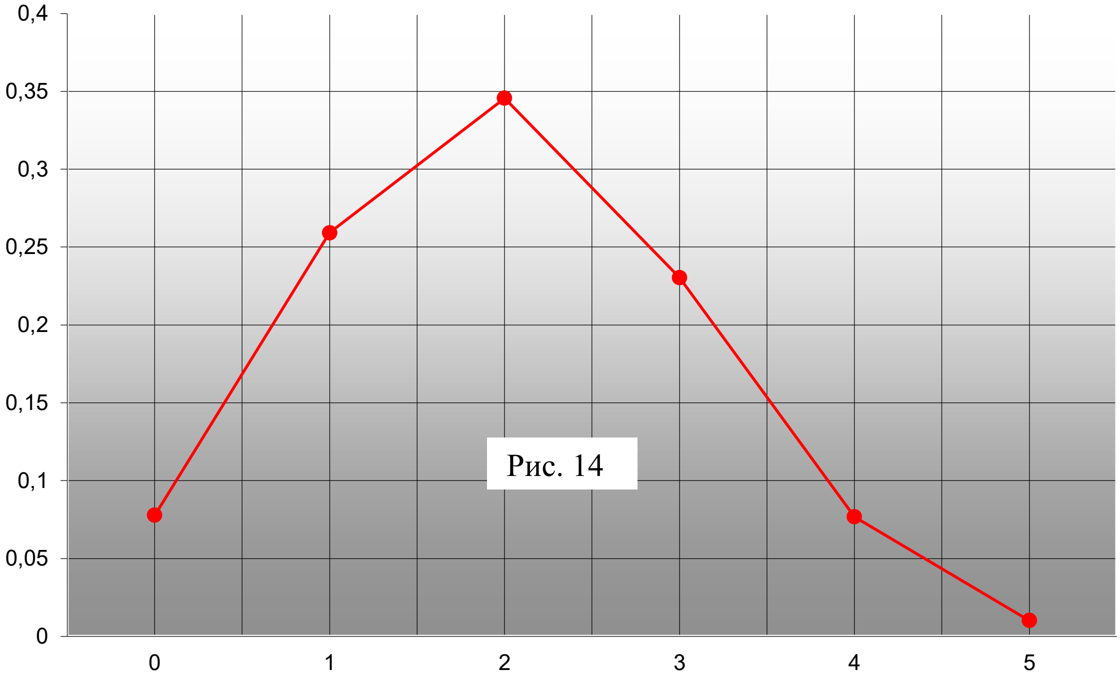


Рис. 14

Під час побудови многокутника розподілу потрібно пам'ятати, що з'єднання отриманих точок має умовний характер. У проміжках між значеннями випадкової величини імовірність не набуває ніякого значення. Точки з'єднані лише для наочності.

Приклад 43. Імовірність хоча б одного влучення у мішень стрільцем із трьох пострілів дорівнює 0,875. Знайти імовірність влучення в мішень із одного пострілу.
Розв'язання. Якщо позначити p – імовірність влучання стрільцем у мішень із одного пострілу, то імовірність промаху із одного пострілу дорівнює $(1-p)$.

Імовірність трьох промахів з трьох пострілів дорівнює $(1-p)^3$. Ця імовірність дорівнює 1 – 0,875 = 0,125, тобто в ціль не влучать жодного разу.

Отримаємо: $(1-p)^3 = 0{,}125; \qquad 1-p = 0{,}5; \qquad p = 0{,}5.$

Приклад 44. У першій коробці 10 кульок, з них 8 білих; у другій коробці 20 кульок, з них 4 білі. З кожної коробки навмання дістали по одній кульці, а потім з цих двох кульок вибирають одну. Знайти імовірність того, що ця кулька біла.
Розв'язання. Імовірність того, що взята з першої коробки кулька біла – $P_1(Б) = 0{,}8,$ що не біла – $P_1(НБ) = 0{,}2.$

Імовірність того, що взята з другої коробки кулька біла – $P_2(Б) = 0{,}2,$ що не біла – $P_2(НБ) = 0{,}8.$

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з першої коробки і імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з другої коробки, дорівнює 0,5.

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з першої коробки і вона біла – $p_1 = 0{,}5 \cdot P_1(Б) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4.$

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з другої коробки і вона біла – $p_2 = 0{,}5 \cdot P_2(Б) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1.$

Імовірність того, що повторно буде вибрана біла кулька, дорівнює: $P = p_1 + p_2 = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$

Приклад 45. Є п'ять гвинтівок, три з яких – з оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець влучить у ціль, вистрілившив з гвинтівки з «оптикою», дорівнює 0,95, для гвинтівки без «оптики» ця імовірність рівна 0,7. Знайти імовірність того, що у ціль буде влучено, якщо стрілець зробить один постріл з будь-якої рушниці.
Розв'язання. Імовірність того, що вибрана гвинтівка з оптичним прицілом, позначимо $P_0 = \dfrac{3}{5}$, а імовірність того, що вибрана гвинтівка без оптичного приілу, позначимо $P_{БО} = \dfrac{2}{5}.$

Імовірність, що вибрали гвинтівку з «оптикою», і при цьому у ціль було влучено $P_1 = P_0 \cdot P(ПЦ/O)$, де *P(ПЦ/О)* – імовірність влучення у ціль з гвинтівки з «оптикою».

Аналогічно, імовірність, що вибрали гвинтівку без «оптики», і при цьому у ціль було влучено $P_1 = P_{БО} \cdot P(ПЦ/БО)$, де *P(ПЦ/БО* – імовірність влучення у ціль з гвинтівки без «оптики».

Імовірність влучення у ціль дорівнює сумі імовірностей P_1 і P_2, оскільки для влучення достатньо, щоб відбулася одна з цих несумісних подій: $P = P_1 + P_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}57 + 0{,}28 = 0{,}85$.

<u>*Приклад 46.*</u> Три мисливці одночасно вистрілили у ведмедя, який був убитий однією кулею. Визначити імовірність того, що ведмідь був убитий першим стрільцем, якщо імовірності влучень для цих стрільців дорівнює відповідно 0,3; 0,4; 0,5.

У цій задачі потрібно визначити імовірність гіпотези уже після того, як подія відбулася. Для визначення шуканої імовірності скористаємось формулою Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)}.$$

У цій формулі H_1, H_2, H_3 – гіпотези, що ведмедя уб’є перший, другий і третій стрілець відповідно. До пострілів ці гіпотези рівноймовірні, і їхня ймовірність дорівнює $\frac{1}{3}$.

$P(H_1/A)$ – імовірність того, що ведмедя убив перший стрілець за умови, що постріли відбулися (подія *А*).

Імовірності того, що ведмедя уб’є перший, другий або третій стрілець, обчислені до пострілів, дорівнюють відповідно:

$$P(A/H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}09;$$

$$P(A/H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}14;$$

$$P(A/H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}21.$$

Тут q_1=0,7; q_2=0,6; q_3=0,5 – імовірності промаху для кожного із стрільців, розрахована як q=1–p, де p – імовірності влучень для кожного стрільця.

Підставимо ці значення у формулу Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}09}{0{,}44} = \frac{9}{44}.$$

<u>*Приклад 47.*</u> Послідовно послано чотири радіосигнали. Імовірності прийому кожного з них не залежать від того, прийняті інші сигнали чи ні.

Імовірності прийому сигналів дорівнює відповідно 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Визначити імовірність прийому трьох радіосигналів.

Розв'язання. Подія прийому трьох сигналів з чотирьох можлива у чотирьох випадках:

$$P_A = p_1 p_2 p_3 q_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}012;$$

$$P_B = p_1 p_2 q_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}018;$$

$$P_C = p_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}028;$$

$$P_D = q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}048.$$

Для прийому трьох сигналів необхідно здійснення однієї з подій *A*, *B*, *C* або *D*.

Відповідь. Таким чином, знаходимо шукану імовірність:

$$P = 0{,}012 + 0{,}018 + 0{,}028 + 0{,}048 = 0{,}106.$$

Приклад 48. Двадцять екзаменаційних білетів містять по 2 питання, які не повторюються. Курсант знає відповіді лише на 35 питань. Визначити імовірність того, що екзамен буде складений, якщо для цього достатньо відповісти на два питання одного білета або на одне питання з одного білета і на вказане додаткове питання з іншого білета.

Розв'язання. Загалом є 40 питань. Імовірність того, що випаде питання, на яке відповідь відома, дорівнює $\frac{35}{40}$.

Для того, щоб здати іспит, потрібно, щоб відбулась одна з трьох подій:

1. Подія *A* – відповіли на перше питання (імовірність $\frac{35}{40}$) і відповіли на друге питання (імовірність $\frac{34}{39}$), оскільки після успішної відповіді на перше питання залишиться ще 39 питань, на 34 з яких відомі відповіді:

$$P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0{,}7628.$$

2. Подія *B* – на перше питання відповіли (імовірність $\frac{35}{40}$), на друге – ні (імовірність $\frac{5}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$):

$$P(B) = \frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004.$$

3. Подія C – на перше питання не відповіли (імовірність $\frac{5}{40}$), на друге – відповіли (імовірність $\frac{35}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$):

$$P(C) = \frac{5}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004.$$

<u>Відповідь:</u> імовірність того, що при заданих умовах екзамен буде складений, дорівнює: $P = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}9636.$

<u>Приклад 49.</u> Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, з яких 3 – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З кожної партії дістають по 2 деталі. Яка імовірність, що серед них немає бракованих деталей.

<u>Розв'язання.</u> Імовірність опинитись не бракованою для першої деталі з першої партії дорівнює $p_1 = \frac{9}{12}$, для другої деталі з першої партії за умови, що перша деталь була не бракована, – $p_2 = \frac{8}{11}$.

Імовірність опинитись не бракованою для першої деталі з другої партії рівна $p_3 = \frac{11}{15}$, для другої деталі з другої партії за умови, що перша деталь була не бракована, – $p_4 = \frac{10}{14}$.

<u>Відповідь:</u> імовірність того, що серед чотирьох вийнятих деталей немає бракованих, дорівнює:

$$P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0{,}2857.$$

Розглянемо подібний приклад, але з іншою умовою.

<u>Приклад 50.</u> Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, з яких 3 – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З першої партії дістають 5 деталей, з другої – 7 деталей. Ці деталі утворюють нову партію. Яка імовірність дістати з них браковану деталь?

<u>Розв'язання.</u> Для того, щоб вибрана деталь була б бракованою, необхідне виконання однієї з двох несумісних умов:

1. Вибрана деталь була з першої партії (імовірність – $\frac{5}{12}$), і при цьому вона бракована (імовірність – $\frac{3}{12}$). Отже:

$$p_1 = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0{,}1041;$$

2. Вибрана деталь була з другої партії (імовірність – $\frac{7}{12}$), і при цьому вона – бракована (імовірність – $\frac{4}{15}$). Отже:

$$p_2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{15} = 0{,}1556.$$

<u>*Відповідь:*</u> отже, маємо: $p = p_1 + p_2 = 0{,}2597.$

<u>*Приклад 51.*</u> В ящику 3 білих і 5 чорних кульок. З ящика виймають дві кульки. Знайти імовірність того, що ці кульки різного кольору.
<u>*Розв'язання.*</u> Подія, що полягає в тому, що вибрані кульки різного кольору, відбудеться у одному з двох випадків:

1) перша кулька біла (імовірність – $\frac{3}{8}$), а друга – чорна (імовірність – $\frac{5}{7}$);

2) перша кулька чорна (імовірність – $\frac{5}{8}$), а друга – біла (імовірність – $\frac{3}{7}$).

<u>*Відповідь:*</u> отже, отримаємо: $p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}.$

9.8. Біноміальний розподіл

Якщо проводиться *n* незалежних випробувань, в кожному з яких подія *A* може з'явитись з однаковою імовірністю *p* у кожному з випробувань, то імовірність того, що подія не з'явиться, дорівнює $q=1-p$.

Візьмемо число появ подій у кожному випробуванні за деяку випадкову величину *X*. Щоб знайти закон розподілу цієї випадкової величини, необхідно визначити значення цієї величини та її імовірності.

Значення знайти досить просто. У результаті n випробувань подія може не з'явитись зовсім, з'явитись один раз, двічі і так до n разів.

Імовірність кожного значення цієї випадкової величини можна знайти за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,... \tag{66}$$

Ця формула аналітично виражає шуканий закон розподілу. Цей закон розподілу називається *біноміальним*.

Приклад 52. У партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрані 4 деталі. Записати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних і побудувати многокутник цього розподілу.

Імовірність появи нестандартної деталі у кожному випадку дорівнює 0,1. Знайдемо імовірності того, що серед відібраних деталей:

1) взагалі немає нестандартних: $P_4(0) = \dfrac{4!}{0!\cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561.$

2) одна нестандартна: $P_4(1) = \dfrac{4!}{1!\cdot 3!} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916.$

3) дві нестандартні деталі: $P_4(2) = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486.$

4) три нестандартні деталі: $P_4(3) = \dfrac{4!}{3!\cdot 1!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036.$

5) чотири нестандартні: $P_4(4) = \dfrac{4!}{4!\cdot 0!} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001.$

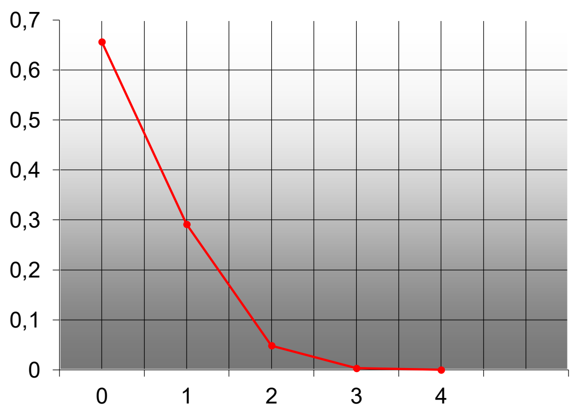


Рис. 15

<u>Приклад 53.</u> Дві гральні кістки одночасно кидають двічі. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини *X* – числа випадань парної кількості очок на двох гральних кістках.
<u>Розв'язання.</u> Кожна гральна кістка має три варіанти парних очок – 2, 4 і 6 з шести можливих. Таким, чином, імовірність випадання такого числа очок на одній кістці дорівнює 0,5.

Імовірність одночасного випадання парних очок на двох кістках дорівнює 0,25. Імовірність того, що у двох випробуваннях обидва рази випали парні очки на обох кістках, дорівнює:

$$P_2(2) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^0 = 0{,}0625.$$

Імовірність того, що у двох випробуваннях один раз випали парні очки на обох кістках:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}375.$$

<u>Відповідь.</u> Імовірність того, що у двох випробуваннях жодного разу не випаде парного числа очок на обох кістках:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}5625.$$

9.9. Розподіл Пуасона

Нехай проводиться *n* незалежних випробувань, у яких поява події *A* має імовірність *p*. Якщо випробувань *n* достатньо багато, а імовірність появи події *A* у кожному досліді низька ($p \le 0{,}1$), то знаходження імовірності появи події *A* *k* разів проводиться таким чином.

Зробимо важливе припущення: добуток *np* зберігає стале значення: $np = \lambda$.

Практично це припущення означає, що середнє число появи події в різних серіях випробувань (при різному *n*) є незмінним.

За формулою Бернуллі отримаємо:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k};$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Знайдемо границю цієї імовірності, якщо $n \to \infty$.

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Отримаємо формулу ***розподілу Пуасона***:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \qquad (67)$$

Якщо відомі числа λ і k, то значення імовірності можна знайти за відповідними таблицям розподілу Пуасона.

9.10. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Однак, коли неможливо знайти закон розподілу, або цього не потрібно, можна обмежитись знаходженням значень, які називаються числовими характеристиками випадкової величини. Ці величини визначають деяке середнє значення, навколо якого групуються значення випадкової величини, і ступінь їхньої розкиданості навколо цього середнього значення.

Означення. *Математичним очікуваням* дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на їх імовірності:

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (68)$$

Математичне очікування існує, якщо ряд, що стоїть у правій частині рівності, збіжний абсолютно.

З точки зору імовірності можна сказати, що математичне очікування наближено дорівнює середньому арифметичному значень випадкової величини, що розглядається.

9.11. Властивості математичного очікування

1. Математичне очікування сталої величини дорівнює самій сталій: $M(C) = C$.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного очікування: $M(Cx) = CM(x)$.

3. Математичне очікування добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних очікувань:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Ця властивість справедлива для довільної кількості випадкових величин.

4. Математичне очікування суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних очікувань доданків:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Ця властивість також справедлива для довільної кількості випадкових величин.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, імовірність появи події A у яких дорівнює p.

Теорема. *Математичне очікування M(X) числа появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на імовірність появи події у кожному випробуванні:*

$$M(X) = np.$$

Однак, математичне очікування не може повністю характеризувати випадковий процес. Крім математичного очікування потрібно ввести величину, яка характеризує відхилення значень випадкової величини від математичного очікування.

Це відхилення дорівнює різниці між випадковою величиною та її математичним очікуванням. При цьому математичне очікування відхилення дорівнює нулю. Це пояснюється тим, що одні можливі відхилення додатні, інші – від'ємні, і у результаті їхнього взаємного погашення отримуємо нуль.

Означення. *Дисперсією* (*розсіюванням*) дискретної випадкової величини називається математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування:

$$D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2. \qquad (69)$$

<u>*Приклад 54.*</u> Для розглянутого вище прикладу закон розподілу випадкової величини має вигляд:

<u>*X*</u>	0	1	2
P	0,0625	0,375	0,5625

Знайти математичне очікування та дисперсію випадкової величини.
<u>*Розв'язання.*</u> Маємо: $M(X)=0\cdot 0{,}0625+1\cdot 0{,}375+2\cdot 0{,}5625=1{,}5.$

Можливі значення квадрата відхилення:

$\left[x_1-M(X)\right]^2=(0-1{,}5)^2=2{,}25;$

$\left[x_2-M(X)\right]^2=(1-1{,}5)^2=0{,}25;$

$\left[x_3-M(X)\right]^2=(2-1{,}5)^2=0{,}25.$

Тоді

<u>[*X*–*M*(*X*)]²</u>	2,25	0,25	0,25
P	0,0625	0,375	0,5625

<u>*Відповідь.*</u> Дисперсія дорівнює:
$D(X)=2{,}25\cdot 0{,}0625+0{,}25\cdot 0{,}375+0{,}25\cdot 0{,}5625=0{,}375.$

Однак, на практиці подібний спосіб обчислення дисперсії незручний, оскільки велика кількість значень випадкової величини спричиняє громіздкі обчислення. Тому використовують інший спосіб.

9.12. Обчислення дисперсії

Теорема. *Дисперсія дорівнює різниці між математичним очікуваням квадрата випадкової величини X і квадратом її математичного очікування:*

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2. \qquad (70)$$

Доведення. З урахуванням того, що математичне очікування $M(X)$ і квадрат математичного очікування $M^2(X)$ – величини сталі, то можна записати:

$$D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2=M\left[X^2-2XM(X)+M^2(X)\right]=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Застосуємо цю формулу для прикладу, який розглянутий вище:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
P	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625.$$

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375.$$

9.13. Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(C) = 0.$

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Справедливість цієї рівності випливає з властивості 2.

Теорема. *Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність p появи події стала, дорівнює добутку числа випробувань на імовірності появи і не появи події в будь-якому випробуванні:*

$$D(X) = npq. \tag{71}$$

9.14. Середнє квадратичне відхилення

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини X називається квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (72)$$

Теорема. *Середнє квадратичне відхилення суми скінченної кількості взаємно незалежних випадкових величин дорівнює квадратному кореню з суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин:*

$$\sigma(X_1+X_2+...+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+...+\sigma^2(X_n)}.$$

Приклад 55. Завод випускає 96 % виробів першого сорту та 4 % виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Нехай X – число виробів першого сорту у цій вибірці. Знайти закон розподілу, математичне очікування та дисперсію випадкової величини *X*.

Розв'язання. Вибір кожного з 1000 виробів можна вважати незалежним випробуванням, у якому імовірність появи виробів першого сорту однакова і дорівнює *p*=0,96.

Відповідь. Таким чином, закон розподілу може вважатися біноміальним:

$m_x = pn = 1000\cdot 0{,}96 = 960;$

$D_x = npq = 1000\cdot 0{,}96\cdot 0{,}04 = 38{,}4.$

Приклад 53. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини *X* – число появи події *A* у двох незалежних випробуваннях, якщо імовірності появи цієї події у кожному випробуванні однакові і відомо, що *M*(*X*)=0,9.

Розв'язання. Оскільки випадкова величина *X* розподілена за біноміальним законом, то:

$M(X)=np=2p=0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p=0{,}45;$

$D(X)=npq=2p(1-p)=2\cdot 0{,}45\cdot 0{,}55=0{,}495.$

Приклад 54. Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події *A* у кожному випробуванні. Знайти імовірність появи події *A*, якщо дисперсія числа появи події у трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,63.

Розв'язання. За формулою дисперсії біноміального закону отримаємо:

$$D(X) = npq = 3p(1-p) = 0{,}63;$$

$$3p^2 - 3p + 0{,}63 = 0;$$

$$p^2 - p + 0{,}21 = 0;$$

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3.$$

Приклад 55. Досліджується пристрій, що складається з чотирьох приладів, які працюють незалежно один від одного. Імовірності відмови кожного з приладів дорівнює відповідно $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}4$; $p_3=0{,}5$; $p_4=0{,}6$. Знайти математичне очікування і дисперсію кількості приладів, що відмовили.

Розв'язання. Приймаючи за випадкову величину кількість приладів, що відмовили, бачимо, що ця випадкова величина може набувати значень 0, 1, 2, 3 або 4.

Для складання закону розподілу цієї випадкової величини необхідно визначити відповідні імовірності. Припустимо, що $q_i = 1 - p_i$.

1. Не відмовив жодний прилад:

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}084.$$

2. Відмовив один з приладів:

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0{,}302.$$

3. Відмовили два прилади:

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}38.$$

4. Відмовили три прилади:

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}198.$$

5. Відмовили усі прилади:

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}036.$$

Отримаємо закон розподілу:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Відповідь.

Математичне очікування:

$$M(X) = 0{,}302 + 2 \cdot 0{,}38 + 3 \cdot 0{,}198 + 4 \cdot 0{,}036 = 1{,}8.$$

$$M(X^2) = 0{,}302 + 4 \cdot 0{,}38 + 9 \cdot 0{,}198 + 16 \cdot 0{,}036 = 4{,}18.$$

Дисперсія: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4{,}18 - 3{,}24 = 0{,}94.$

9.15. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії

Математична формалізація реальних процесів у вигляді функціональної залежності однієї змінної (функції y) від іншої змінної (аргументу x) $y=f(x)$ дозволяє кожному значенню аргументу однозначно поставити у відповідність одне заздалегідь відоме значення функції. Така залежність, як правило, є оборотною, тобто за відомим значенням функції завжди можна знайти відповідне значення її аргументу: $x=f^{-1}(y)$.

Проте на практиці реальні процеси демонструють іншу відповідність змінних. Так, за однаковий робочий час тим самим підприємством може бути зроблена різна кількість продукції, та сама продукція може мати різну собівартість, та сама кількість продукції може бути продана за різну ціну, люди того самого зросту можуть мати різну вагу.

У підсумку, *тому* самому *значенню* аргументу x можуть відповідати *різні* значення функції y. Часто значення функції мають характер випадкових величин, які у разі зміни значень аргументу можуть мати різні центри групування, дисперсію і закон розподілу. У цьому випадку зворотне перетворення з метою знаходження значення аргументу x за відомим значенням функції y не є однозначним.

Для встановлення залежності між такими неоднозначними змінними використовують теорію кореляційно-регресійного аналізу, у якій досліджуються зміни середніх значень функції у разі зміни одного або багатьох аргументів. Проте формальні методи кореляційного аналізу не дають відповіді на питання “що є причиною, а що є наслідком, або яка змінна є аргументом, а яка – функцією?”. Відповідь на це питання має дати дослідник.

Метою побудови регресійних моделей може бути встановлення залежності між *середніми* значеннями двох змінних (параметрів), одну з яких дослідник *призначає* функцією, а другу – її аргументом.

У основі регресійного аналізу лежать дві гіпотези.

1. Передбачається, що досліджувана сукупність параметрів *має* внутрішній статистичний зв’язок, який може бути виявлений і формалізований у вигляді кореляційної (отже лінійної) залежності одного параметра від іншого або від інших. Тобто

вважається, що існує внутрішній лінійний зв’язок *середніх* значень цих параметрів.

2. Передбачається, що випадковий розкид (дисперсія) значень (кожного) параметру має регулярну компоненту, яка залежить від деякого аргументу (“сигналу”), і випадкову компоненту (“шум”). Випадкова компонента (“шум”) розподілена за нормальним законом.

Початковою інформацією для побудови лінійної однофакторної регресійної моделі є сукупність із n двовимірних точок (x_i, y_i), де кожна координата точки, як правило, має свій фізичний сенс, наприклад x_i – зріст людини в сантиметрах, y_i – її вага в кілограмах.

Під час формалізації постановки задачі розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y), над якою проведено n незалежних випробувань і в результаті випробувань отримана вибірка – n пар чисел (координат точки):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

де x_i – значення випадкової величини X у i-му випробуванні;

y_i – значення випадкової величини Y у i-му випробуванні.

Необхідно знайти *наближене* зображення значень однієї з випадкових величин як функції значень другої випадкової величини.

Означення. *Вибірковим рівнянням регресії* Y на X $(y \to x)$ називається рівняння, яке встановлює залежність змінної y від змінної x, тобто коли змінна y вважається *функцією*, а змінна x – *аргументом*: $y = f(x)$, при цьому початковою інформацією є вибірка з n пар чисел.

Означення. *Вибірковим* рівнянням регресії X *на* Y $(x \to y)$ називається рівняння $x = \varphi(y)$, у якому при тій же початковій інформації вже змінна x вважається *функцією*, а змінна y – її *аргументом*.

Означення. *Лінійною* називається регресія у випадку, коли залежності $f(x)$ і $\varphi(y)$ є *лінійними функціями*. Тоді рівняння регресії мають вигляд:

$$y = a \cdot x + b; \qquad x = c \cdot y + d.$$

Порядок розрахунку параметрів рівняння регресії розглянемо без виведення і для двох варіантів умов: за відсутності і за наявності збіжних точок у вибірці.

1. Нехай серед точок (x_i, y_i) вибірки збіжних точок немає. Для того щоб скласти вибіркове рівняння прямої лінії регресії, виконуються наступні розрахунки:

а) обчислюють середні значення величин: $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ і знаходять середні квадратичні відхилення $S_x = \sigma_x$, $S_y = \sigma_y$ із використанням формул, перерахованих з обліком доцільної послідовності їхнього застосування:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ ; \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\ ; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\ ;$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\ ; \quad S_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2\ ; \quad S_x = \sqrt{S_x^2}\ ; \quad S_y^2 = \overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2\ ; \quad S_y = \sqrt{S_y^2}\ ;$$

б) обчислюєть значення вибіркового коефіцієнту кореляції r:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_x \cdot S_y}\ .$$

Нагадаємо, що вибірковий коефіцієнт кореляції характеризує рівень лінійного кореляційного зв'язку двох випадкових величин. Чим ближче $|r|$ до одиниці, тим більш сильним є зв'язок двох величин, чим ближче $|r|$ до нуля, тим зв'язок слабше;

в) для одержання рівняння регресії Y на X: $y = a \cdot x + b$ обчислюємо коефіцієнти a і b вказаного рівняння за формулами:

$$a = r\,\frac{S_y}{S_x}\ ; \quad b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}\ .$$

Для одержання рівняння регресії X на Y: $x = c \cdot y + d$ обчислюємо коефіцієнти c і d вказаного рівняння за формулами:

$$c = r\,\frac{S_x}{S_y}\ ; \quad d = \overline{x} - c \cdot \overline{y}\ .$$

Обидві прямі лінії $y = a \cdot x + b$ і $x = c \cdot y + d$ проходять через точку $(\bar{x}, \bar{y})$. Для зображення обох прямих ліній на одному графіку друге рівняння варто подати у вигляді: $y = x/c - d/c$.

2. За умови великої кількості точок n у вибірці значення x_i може зустрітися m_i разів, значення y_j може зустрітися n_j разів. Та сама пара чисел (x_i, y_j) може зустрітися n_{ij} разів. У цьому випадку вибірку зручно подати у вигляді кореляційної таблиці (див. табл. 1) так, що кількість повторень m_i значень координат x_i, кількість повторень n_j значень координат y_j і обсяг вибірки n дорівнюватимуть:

$$m_i = \sum_{j=1}^{\ell} n_{ij}\ , \qquad n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}\ ; \qquad n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} n_{ij} = \sum_{j=1}^{\ell} n_j = \sum_{i=1}^{k} m_i = n\ .$$

Таблиця 1 –
Кореляційна таблиця

x_i	Y_j				
	y_1	y_2	…	y_ℓ	m_i
x_1	n_{11}	n_{12}	…	$n_{1\ell}$	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…	$n_{2\ell}$	m_2
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	$n_{k\ell}$	m_k
n_j	n_1	n_2	…	n_ℓ	n

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії знаходимо аналогічно першому випадку, розрахунки величин $\bar{x},\ \bar{y},\ \overline{x \cdot y},\ \overline{x^2},\ \overline{y^2}$ виконуємо з урахуванням наявності повто-рюваних значень змінних за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i\ ; \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell} y_i \cdot n_j\ ;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot m_i\ ; \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell} y_i^2 \cdot n_j\ ; \qquad \overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} x_i \cdot y_i \cdot n_{ij}\ .$$

Якщо розглядається вибірка з генеральної сукупності безперервних випадкових величин X і Y, то кореляційна таблиця буде містити інтервали $[a_{i-1}, a_i)$ і $[b_{j-1}, b_j)$.

У цьому випадку для обчислення величин $\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{x\cdot y},\ \overline{x^2},\ \overline{y^2}$ спочатку потрібно перейти до дискретних рядів, а потім виконати обчислення за розглянутими вище формулами.

Зауваження. Якщо значення координат точок (x_i, y_j) є дуже великими або дуже маленькими числами, то під час обчислення значень величин $\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{x\cdot y},\ \overline{x^2},\ \overline{y^2}$ можна спочатку перейти до розглянутих раніше (див. п. 9.4) *умовних варіантів* u_i і v_j:

$$u_i = \frac{x_i - \alpha}{p}, \quad v_j = \frac{y_j - \beta}{q}$$

і знайти їхні середні значення $\overline{u},\ \overline{v}$ і S_u, S_v, а потім знайти *середні* значення початкових координат $\overline{x},\ \overline{y}$ та їхніх середніх квадратичних відхилень S_x, S_y:

$$\overline{x} = p\cdot\overline{u} + \alpha, \quad \overline{y} = q\cdot\overline{v} + \beta; \quad S_x = p\cdot S_u, \quad S_y = q\cdot S_v.$$

Перехід до умовних варіантів не змінює величину вибіркового коефіцієнта кореляції, тому $r_{xy} = r_{uv} = r$.

<u>Приклад 56</u>. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y за даними таблиці спостережень (див. табл. 2).

Таблиця 2 –

Таблиця спостережень

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

<u>Розв'язання.</u> Складемо розрахункову таблицю (див. табл. 3).

Таблиця 3 –

Розрахункова таблиця

i	x_i	y_j	x_i^2	y_j^2	$x_i\ y_j$
1	1,00	1,25	1,00	1,56	1,25
2	1,50	1,40	2,25	1,96	2,10
3	3,00	1,50	9,00	2,25	4,50
4	4,50	1,75	20,25	3,06	7,88
5	5,00	2,25	25,00	5,06	11,25
$\sum$	15,00	8,15	57,50	13,90	26,98
$\sum/n$	3	1,63	11,5	2,779	5,395

За допомогою таблиці знаходимо оцінки середніх значень:

$$\overline{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{15}{5}=3;\quad \overline{y}=\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}y_j=\frac{8{,}15}{5}=1{,}63;\quad \overline{xy}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot y_i=\frac{26{,}975}{5}=5{,}395;$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2=\frac{57{,}5}{5}=11{,}5;\quad \overline{y^2}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i^2=\frac{13{,}897}{5}=2{,}779.$$

Потім визначаємо значення середніх квадратичних відхилень:

$$S_x=\sqrt{\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2}=\sqrt{11{,}5-9}=\sqrt{2{,}5}=1{,}58;$$

$$S_y=\sqrt{\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2}=\sqrt{2{,}779-2{,}657}=\sqrt{0{,}122}=0{,}35.$$

Знайдемо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r=\frac{\overline{x\cdot y}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{5{,}395-3\cdot 1{,}63}{1{,}58\cdot 0{,}35}=\frac{0{,}505}{0{,}553}=0{,}913.$$

Для вибіркового рівняння прямої лінії регресії *Y* на *X*, що має вигляд $y=a\cdot x+b$, обчислимо значення коефіцієнтів a і b за відомими формулами, одержимо:

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=0{,}913\cdot\frac{0{,}35}{1{,}58}=0{,}202;$$

$$b=\overline{y}-a\cdot\overline{x}=1{,}63-0{,}202\cdot 3=1{,}63-0{,}606=1{,}024.$$

Остаточно вибіркове рівняння прямої лінії регресії *Y* на *X* матиме вигляд:

$y=0{,}202\cdot x+1{,}024.$

Для одержання рівняння регресії *X* на *Y*: $x=c\cdot y+d$ обчислюємо коефіцієнти c і d за формулами:

$$c=r\frac{S_x}{S_y}=0{,}913\cdot\frac{1{,}58}{0{,}35}=4{,}122;\quad d=\overline{x}-c\cdot\overline{y}=3-4{,}122\cdot 1{,}63=-3{,}719.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії *X* на *Y* матиме вигляд:

$x=4{,}122\cdot y-3{,}719.$

Для побудови цього рівняння в цій же системі координат, що і рівняння регресії *Y* на *X*, скористаємося варіантом перерахунку $y=x/c-d/c$ і виразимо змінну y через змінну x.

<u>*Відповідь:*</u> $y=0{,}242\cdot x+0{,}902.$

Завдання для виконання контрольної роботи

1. За координатами вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ знайти:

1) довжину ребер A_1A_2 і A_1A_3;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3;
3) площу грані $A_1A_2A_3$;
4) об'єм піраміди;
5) рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3;
6) рівняння площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;
7) кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$.

Номер задачі	Координати точки A_1	Координати точки A_2	Координати точки A_3	Координати точки A_4
1.1	(0, 2, 3)	(6, 5, 5)	(2, −4, 6)	(−3, 4, 9)
1.2	(2, −1, 2)	(8, 2, 4)	(4, −7, 5)	(−1, 1, 8)
1.3	(2, 0, −1)	(8, 3, 1)	(4, −6, 2)	(−1, 2, 5)
1.4	(1, 1, 1)	(7, 4, 3)	(3, −5, 4)	(−2, 3, 7)
1.5	(−2, 2, 1)	(4, 5, 3)	(0, −4, 4)	(−5, 4, 7)
1.6	(4, 0, 3)	(8, 3, 5)	(4, −6, 6)	(−1, 2, 9)
1.7	(−1, 1, 0)	(5, 4, 2)	(1, −5, 3)	(−4, 3, 6)
1.8	(3, 2, 1)	(9, 5, 3)	(5, −4, 4)	(0, 4, 7)
1.9	(0, 7, 1)	(4, 1, 5)	(4, 6, 3)	(3, 9, 8)
1.10	(5, 5, 4)	(3, 8, 4)	(3, 5, 10)	(5, 8, 2)

2. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь методом Крамера, методом Гауса та за допомогою матричного рівняння.

2.1. $\begin{cases} 4x+2y+3z=3 \\ 5x+y+z=4 \\ x+3y-2z=-7 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 5x-9y-14z=6 \\ x+7y+5z=11 \\ 5x-21y-27z=-5 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 5x+2y-z=2 \\ 13x+5y+2z=18 \\ x-3y=0 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 6x+3y-5z=0 \\ 9x+4y-7z=3 \\ 14x+6y-11z=6 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 5x-9y-14z=6 \\ x+7y+5z=11 \\ 5x-21y-27z=-5 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 4x+y-3z=-1 \\ 8x+3y-6z=-1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15 \\ x + y + 5z = 16 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$ 2.8. $\begin{cases} 5x + 2y - z = 2 \\ 13x + 5y + 2z = 18 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 7y - 2z = -8 \\ 5x - 6y + 4z = 20 \\ 6x + 4y + 3z = 7 \end{cases}$ 2.10. $\begin{cases} 7y - 2z = -8 \\ 5x - 6y + 4z = 20 \\ 6x + 4y + 3z = 7 \end{cases}$

3. Обчислити границі функцій, не користуючись методами диференціального числення.

3.1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3 + 11}{7x^3 - 5x^2 + x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$.

3.2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 5x^3 + 7}{2x^5 + 3x^4 + 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3} (7 + 2x)^{\frac{-4}{x+3}}$.

3.3. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^3 + 5x} - 10$; 2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$; 3) $\lim\limits_{x\to \pi} (1 - \sin 3x)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$.

3.4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 5x - 6}{x^3 + 3x^2 + 7x - 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{x^2 + x - 2}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1} (4 + 3x)^{\frac{3}{x+1}}$.

3.5. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 3x + 2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} (9 - x^3)^{\frac{4}{x-2}}$.

3.6. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 8}{3x^2 - 5x - 2}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{3x^2 + 11x - 4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \sin^2 2x)^{\frac{1}{-\cos 4x}}$

3.7. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 8}{3x^2 + 6x - 15}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 + 7x + 2}{3x^2 - 2x - 1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} (3 - 2x^2)^{\frac{1}{2(1-x)}}$.

3.8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x - 4}{4x^2 + 3x + 2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3} (10 - 3x)^{\frac{1}{3(3-x)}}$.

3.9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + 9x^2 + 2x}{3x^3 - 8x + 4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{2x^2 + x - 1}{6x^2 - x - 1}$; 3) $\lim\limits_{x\to -2} (5 + 2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

3.10. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - x - 6}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 - 5x - 2}$; 3) $\lim\limits_{x\to -4} (9 + 2x)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$.

4. Знайти похідні першого порядку, використовуючи правила обчислення похідних:

4.1. 1) $y = \dfrac{7}{x^3} + \sin 3x$; 2) $y = x \cdot \arccos\dfrac{x}{2}$;

3) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

4) $\begin{cases} x=arctg(1+t)^2 \\ y=\sqrt{t^2+2t+2} \end{cases}$.

4.2. 1) $y=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-2\cos 4x$;

2) $y=x^2\sin x++2x\cos x$;

3) $y=arctg\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

4) $\begin{cases} x=tg(t^2) \\ y=t^2-5 \end{cases}$.

4.3. 1) $y=7\sqrt[4]{x}-2\ln 2x$;

2) $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}$;

3) $y=\frac{\arccos x}{x}$;

4) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1)^2 \end{cases}$.

4.4. 1) $y=2x^3-5\sqrt{x}+tg2x$;

2) $y=x^2e^{2x}$;

3) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$;

4) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=(2+e^{-t})^3 \end{cases}$.

4.5. 1) $y=3\sqrt{x}+2\ln 4x-4e^{2x}$;

2) $y=x\cdot\arcsin 3x$;

3) $y=\frac{2\cos x-\sin x}{\sin 2x+4x}$;

4) $\begin{cases} x=\frac{3}{1+t^2} \\ y=arctgt \end{cases}$.

4.6. 1) $y=3e^{2x}+\sqrt{2x}$;

2) $y=arctg\,2x\cdot\ln 2x$;

3) $y=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$;

4) $\begin{cases} x=7+t^2 \\ y=ctg(3t^2) \end{cases}$.

4.7. 1) $y=\sin 3x+\cos^2 x-4$;

2) $y=\cos 2x\cdot\sin 3x$;

3) $y=\frac{\ln 2x}{tg3x}$;

4) $\begin{cases} x=\arcsin 2t \\ y=\frac{1}{1-4t^2} \end{cases}$

4.8. 1) $y=e^{3x}+\sqrt[3]{2x}+x^2$;

2) $y=\ln 3x\cdot 2^x$;

3) $y=\frac{\arcsin 2x}{\arccos 3x}$;

4) $\begin{cases} x=(t-1)^2 \\ y=\sin(t-1)^2 \end{cases}$.

4.9. 1) $y=\ln^2 x+2\sqrt{\cos x}$;

2) $y=3\ln 4x\cdot e^{\sqrt{x}}$;

3) $y=\frac{\sin 4x}{\cos 8x}$;

4) $\begin{cases} x=\ln(1-t^4) \\ y=\arccos(t^2) \end{cases}$.

4.10. 1) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}+7arctgx$;

2) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\sin 4x$;

3) $y=\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^4}}$;

4) $\begin{cases} x=\sin^2(1-4t) \\ y=\cos^2(1-4t) \end{cases}$.

5. Дослідити функцію і побудувати її графік.

1. $y = x + \frac{1}{x}$;   2. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$;   3. $y = x + \frac{x}{3x-1}$;   4. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$;

5. $y = \frac{x}{x^2-1}$;   6. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;   7. $y = \frac{x^2-1}{x^4}$;   8. $y = \frac{x}{1+x^2}$;

9. $y = \frac{1-x^2}{4-x^2}$;   10. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;   11. $y = \frac{x^2}{(x-1)^3}$;   12. $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$;

13. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;   14. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;   15. $y = \frac{x^2-1}{4(x^2+1)}$.

6. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1. а) $\left(x^2-1\right)y' + 2xy^2 = 0$;   б) $\left(xy + x^2\right)y' = y^2$.
2. а) $x^2y^2y' = y+3$;   б) $xy' + y = x+1$.
3. а) $\left(x^2+2\right)y' + 2xy^2 = 0$;   б) $\left(2xy + y^2\right)y' = y^2$.
4. а) $\left(3x + xy^2\right)y' = 4$;   б) $2xyy' = x^2 - y^2$.
5. а) $\left(x^2+2\right)y' = 2x - xy^2$;   б) $xy' + 4y = x^4$.
6. а) $y^2 + 4 = \left(x^2y - 4y\right)y'$;   б) $xy' + 2y = x^2$.
7. а) $\left(4+x^2\right)y' = 3x + 3y^2$;   б) $x^2y' = xy - y^2$.
8. а) $\left(2+x^2\right)y' = x + 3xy$;   б) $y' - y = e^x$.
9. а) $\left(1+x^2\right)y' = x + 2xy$;   б) $xy^2y' = x^3 + y^3$.
10. а) $\left(x^2+2\right)y' = -2xy^2$;   б) $xy' + y = x+1$.

7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам.

1. $y'' + 3y' + 2y = 8x^2 + 4;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
2. $y'' - 3y' + 2y = 18xe^{-x};\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.
3. $y'' - 4y' + 4y = 8\cos x;\quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.
4. $y'' + 4y' + 4y = x^2 + x + 2;\quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1$.
5. $y'' - 2y' + 5y = 3xe^{2x};\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

6. $y'' - 2y' + 15y = -45x^2 + 7{,}2; \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -2$.

7. $y'' + y' - 6y = 39\sin 3x; \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1$.

8. $y'' - y' - 6y = 27\cos 2x; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$.

9. $y'' + 10y' + 25y = -25x^2 + 25; \quad y(0) = 4, \; y'(0) = 3$.

10. $y'' + 4y' + 8y = 8x^2 + 16x + 6; \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 0$.

8. Дослідити збіжність числових рядів.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+2)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n-1)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n}}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n-2)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n-3)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3}}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n-4)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{4n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^2}}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(n+3)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^3}}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(n+4)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^4}}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n(n-5)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{4n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^n(n+5)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{5n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n^5}}$.

9. Розвинути функцію $y = f(x)$ в ряд Маклорена і знайти радіус збіжності одержаного ряду.

1. $f(x) = e^{-2x}$. 2. $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$.

3. $f(x)=e^{\frac{x}{5}}$.

4. $f(x)=\sin 2x$.

5. $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$.

6. $f(x)=\cos 3x$.

7. $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}$.

8. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

9. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^3}$.

10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

10. Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}x^n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n+1}x^n$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+3}x^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n+3}x^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{n+4}x^n$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n+4}x^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{n+5}x^n$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+4}{n+5}x^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{n+6}x^n$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+4}{n+6}x^n$.

11. Розв'язати задачі.

1. Є 5 видів конвертів без марок і 4 види марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт із маркою для надсилання листа?

2. Гральна кістка кинута 3 рази. Яка ймовірність того, що при цьому всі грані, що випали, різні?

3. У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити в поїзді 4 осіб за умови, що всі вони повинні їхати в різних вагонах?

4. Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з п'яти цифр, якщо перша цифра не дорівнює нулю.

5. Три дороги з'єднують міста Черкаси і Київ, чотири дороги з'єднують міста Київ і Харків. Скількома способами можна зробити поїздку з Черкас в Харків через Київ та повернутися в Черкаси також через Київ?

6. Скількома способами можна в рядок написати шість плюсів і чотири мінуси?

7. Імовірність виграшу по одному білету лотереї дорівнює $\frac{1}{7}$. Яка імовірність того, що, придбавши 5 білетів, можна виграти по усім п'яти білетам?

8. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирається одна, а з тих, що залишились – друга. Знайти імовірність того, що буде вибрана непарна цифра першого разу.

9. Курсант забув останню цифру номера телефону батьків і тому набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому прийдеться зробити рівно 2 невдалі спроби.

10. Курсант написав шпаргалки на 20 білетів з 25. Яка ймовірність того, що з трьох білетів, які залишились на столі, у нього є шпаргалки принаймні на 2?

11. На розподілі в обласному ГУ ДСНС України 5 випускників ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля і 5 випускників НУЦЗ України. В кабінет до начальника запрошуються по двоє. Яка ймовірність того, що всі пари будуть складатися з випускників одного вузу?

12. П'ять курсантів навмання сідають за круглий стіл. Яка імовірність того, що певна пара опиниться поряд?

13. 60 % у ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля – курсанти. 80 % курсантів і 75 % студентів ходять на заняття з папками. У чергову комендатуру принесли загублену папку. Яка імовірність того, що ця папка належить курсанту?

14. У взводі з 30 курсантів є 4 відмінних, 10 добрих і 16 посередніх стрільців. Імовірність попадання в ціль із одного пострілу для відмінного стрільця дорівнює 0,9, для доброго – 0,7, для посереднього – 0,5. Знайти імовірність того, що випадково вибраний стрілець попаде в ціль.

15. Відомо, що 96 % випускників ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля – фахівці. Спрощене тестування визнає фахівця з імовірністю 0,98 і нефахівця з імовірністю 0,05. Визначити імовірність того, що випускник, що пройшов тестування, фахівець.

16. Для складання іспиту курсантам необхідно було опрацювати 30 запитань. З 25 курсантів 10 опрацювали усі запитання, 8 – 25 запитань, 5 – 20 запитань, 2 – 15 запитань. Викликаний курсант відповів на поставлене запитання. Знайти імовірність того, що цей курсант підготував усі запитання.

17. Є 107 монет, причому у однієї з них герб з обох сторін, а інші монети – звичайні. Навмання вибрану монету, не розглядаючи її, підкидають 10 разів, причому під час усіх

підкидань вона падала гербом угору. Знайти імовірність того, що була вибрана монета з двома гербами.

18. Один повелитель, якому набрид його астроном (багато казав неправди), вирішив його стратити. Однак, будучи добрим повелителем, він вирішив дати астроному останній шанс. Йому потрібно було розподілити по 2 ящикам 4 кульки: 2 чорні і 2 білі. Кат вибере навмання один з ящиків і з неї візьме одну кульку. Якщо кулька буде чорна, то астронома стратять, якщо ж біла – залишиться жити. Яким чином астроному потрібно розмістити кульки в ящиках, щоб забезпечити собі максимальну імовірність залишитися живим?

19. Імовірність випустити «фахівця» – 0,95. Скільки має бути випускників, щоб найімовірніша кількість «нефахівців» була 15?

20. Визначити імовірність того, що номер першої ліпшої машини містить рівно дві п’ятірки (номер машини 5-значний).

21. 2 баскетболісти роблять по 3 кидки у кошик. Імовірності влучення м’яча у кошик при кожному кидку однакові, відповідно, 0,5; 0,6; 0,7. Знайти імовірність того, що у обох буде однакова кількість влучень.

22. В сім’ї 5 дітей. Знайти імовірність того, що серед дітей 4 хлопчики, якщо імовірності народження хлопчика і дівчинки по 0,5.

23. Знайти найбільш імовірну кількість випадінь «шістки» при 46 киданнях грального кубика.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Касярум С. О.,
Григоренко К. В.,
Частоколенко І. П.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Підписано до друку 24.10.2017.
Обл.-вид. арк. 2,34. Ум. друк. арк. 5,75.
Замовлення № 95.
ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля НУЦЗ України
вул. Оноприєнка, 8, м. Черкаси, 18034