МІНІСТЕРСТВО НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ УКРАЇНИ

Академія пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля

Кафедра вищої математики та інформаційних технологій

К.В. Григоренко

ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ

Навчальний посібник

Черкаси 2012

УДК 517.0

Рецензенти: к. ф.-м. н, доц., завідувач кафедри алгебри та математичного аналізу Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького В.В.Атамась,

к. т. н., доц., завідувач кафедри комп'ютерних технологій та автоматизованих процесів управління Академії пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля З.М. Гадецька

Григоренко К.В. Похідна та диференціал. – Черкаси:
АПБ ім. Героїв Чорнобиля МНС України, 2008. – __ с.

Навчальний посібник призначений для курсантів та студентів всіх форм навчання, які вивчають похідну та диференціал функції в рамках курсу вищої математики. Матеріал представлено у вигляді сукупності означень, теорем та правил, переважна частина яких проілюстрована відповідними прикладами.

Рекомендовано до друку Вченою радою
Академії пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля
(Протокол №7 від 30 серпня 2012 р.)

Зміст

Вступ

Навчальний посібник «Похідна та диференціал» створено для курсантів технічних спеціальностей з огляду на сучасні вимоги щодо істотного володіння апаратом математичного аналізу, який повинен бути достатнім для опрацювання та для вивчення математичних моделей. Це визначило структуру посібника. Він складається з чотирьох розділів. Перший розділ «Похідна функції» розбито на підрозділи, в якому розглядаються похідні елементарних функцій, правила їх обчислення. Решта розділів охоплюють, відповідно, основні теореми диференціального числення, застосування диференціального числення в теорії границь та при дослідженні функцій.

Усі включені до посібника розділи викладаються за єдиним методичним принципом. Насамперед подаються означення основних понять, зміст яких розкриваються на простих прикладах. Далі формулюються головні теореми, правила, означення, причому заради максимальної повноти й цілеспрямованості викладу, логічної його чіткості доведення часто подаються у вигляді схем, з накресленням ходу потрібних міркувань. До кожного підрозділу пропонуються приклади, що розкривають зміст відповідного підрозділу з іншими частинами розглядуваної теорії.

Наприкінці кожного розділу наводяться системи завдань для перевірки знань, причому з відповідями, з підказками. Це дуже зручно для курсантів, так як надає більш широкі можливості для активної самостійної роботи — як аудиторної, так і домашньої.

Посібником легко користуватись, завдяки системі різноманітних виділень (як шрифтових, так і графічних: важливі правила, теореми взяті в рамки, а формулювання теорем набрано напівжирним шрифтом).

Автор сподівається, що даний посібник допоможе курсантам, студентам та слухачам освоїти методику практичних задач з математичного аналізу, активізувати їх самостійну роботу та сприяти фундаментальній підготовці з вищої математики.

Розділ 1.
Похідна функції.

1.1. Означення похідної.

Нехай $y = f(x)$ є неперервна функція аргументу x, визначена на інтервалі (a, b). Візьмемо деяке значення незалежної змінної x і надамо її деякого *приросту* Δx. Тоді функція $y = f(x)$ набуде приросту

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (рис. 1).

Означення. Відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ приросту Δy функції $y = f(x)$ до приросту Δx незалежної змінної x називається ***диференціальним відношенням***:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Одночасно відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ є тангенсом кута нахилу січної до осі Ox. При $\Delta x \to 0$ січна прямує до дотичної в точці P. Тангенсом кута α нахилу дотичної до осі Ox при цьому буде границя відношення $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$. В даному випадку k називають кутовим коефіцієнтом дотичної. Курсанти повинні самостійно з'ясовувати геометричний, механічний зміст похідної, вміти інтерпретувати різні означення похідної.

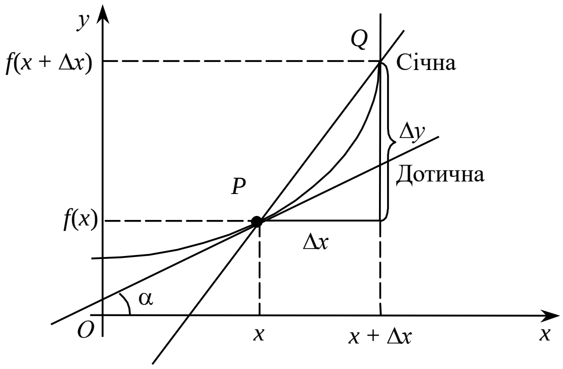


Рис. 1.

Означення.

Функція $y = f(x)$ називається ***диференційованою в точці*** $\boldsymbol{x = x_0}$, якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

Значення границі при цьому називається *похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначається:*

$$\boxed{y' = f'(x_0)} = \boxed{\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy(x_0)}{dx} = Df(x_0).}$$

Означення. Функція називається ***диференційовною*** на інтервалі I, якщо вона диференційовна в кожній точці x цього інтервалу.

Кожному значенню x із області диференційовності функції $f(x)$ ставиться у відповідність її похідна в точці x. Отже, дістаємо *похідну функцію,* яку позначаємо $f'(x)$. Операція відшукання похідної функції $f(x)$ називається *диференціюванням*.

Визначимо основні кроки диференціювання:

1) задати приріст аргументу Δx;
2) знайти приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$
3) скласти відношення приросту функції до приросту аргументу;
4) обчислити границю складеного відношення.

По наведеній схемі можна встановити також похідні суми, добутку, частки елементарних функцій, а також й похідні самих елементарних функцій.

Приклад. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ буде дорівнювати $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде рівною $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад. Задано функцію $y = C$, де $c = \text{const}$.Знайти y'.

Надавши аргументу x приросту Δx, дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$, тобто $C' = 0$.

Приклад. Задано функцію $y = \sin x$. Знайти y'.

Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

$(\sin x)' = \cos x$.

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад. Задано функцію $y = e^x$. Знайти y'.

Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

тобто $(e^x)' = e^x$.

Приклад. Задано функцію $y = \cos 3x.$ Знайти y'.

Для даної функції виконаємо послідовно всі чотири кроки диференціювання:

1) $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$

2) $\Delta y = \cos 3(x + \Delta x) - \cos 3x = -2\sin(3x + \frac{3}{2}\Delta x)\sin\frac{3}{2}\Delta x;$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{2\sin(3x + \frac{3}{2}\Delta x)\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x};$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -2\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(3x + \dfrac{3}{2}\Delta x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x} =$

$= -2\sin 3x \cdot \dfrac{3}{2} = -3\sin 3x.$

1.2. Основні правила диференціювання.

Правило 1. Похідна сталої дорівнює нулеві: (const)′ = 0.

Приклад. (7)′ = 0; (– 100)′ = 0.

Правило 2. Якщо *u* — будь-яка диференційовна функція від *x* і *c* — довільна стала, то (*cu*) ′ = *cu*′.

На практиці це правило формулюється більш стисло: сталий множник можна виносити за знак похідної.

Приклади.

1) $(7x^5)' = 7(x^5)' = \underbrace{7 \cdot 5}x^4 = 35x^4$.

2) $\left(-\dfrac{\cos x}{4}\right)' = -\dfrac{1}{4}(\cos x)' = -\dfrac{1}{4}(-\sin x) = \dfrac{\sin x}{4}.$

Правило 3. Якщо u та v — диференційовні функції від x, то їх сума $u + v$ є диференційовною функцією: $(u+v)' = u' + v'$

Аналогічно, похідна суми будь-якого скінченного числа диференційовних функцій дорівнює похідним цієї функції:

$$(u_1 + u_2 + ... + u_n)' = u_1' + u_2' + ... + u_n'.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$.

$$y' = (x^3 + 7x^2 - 5x + 4)' = (x^3)' + (7x^2)' - (5x)' + (4)' = 3x^2 + 14x - 5 + 0 = 3x^2 + 14x - 5.$$

Правило 4. Добуток двох диференційовних функцій u та v є диференційовною функцією $(uv)' = u'v + uv'$

Приклад. Знайти y', якщо $y = (x^2 + 1)\ln x$.

$$y' = \left[\underbrace{(x^2+1)}_{u}\ \underbrace{\ln x}_{v}\right]' = (x^2+1)'\ln x + (x^2+1)(\ln x)' = 2x\ln x + (x^2+1)\frac{1}{x}.$$

Правило 5. У точках, в яких $v \neq 0$, відношення $\frac{u}{v}$ двох диференційовних функцій є функція диференційовна, причому $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Приклад. Знайти y', якщо $y = \frac{x^2+1}{x^2-5}$.

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-5}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-5) - (x^2+1)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-5) - 2x(x^2+1)}{(x^2-5)^2} = \frac{-10x - 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{-12x}{(x^2-5)^2}.$$

Приклади. Обчислити похідну для функцій: 1) $y = \text{tg}x$; 2) $y = \frac{3}{(3x^2-5)^3}$.

1) $y' = (\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2) $y' = -\frac{2}{(3x^2-5)^6}\left((3x^2-5)^3\right)' = -\frac{2}{(3x^2-5)^6}3(3x^2-5)^2 6x = \frac{-36x}{(3x^2-5)^4}$.

1.3. Похідна від складної (складеної) функції.

Означення. Функція $y = f(u)$, де $u=\phi(x)$ є, у свою чергу деякою функцією, називається ***складною (складеною) функцією***, або ***суперпозицією*** (композицією) двох функцій, $y = f\circ\varphi = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається ***зовнішньою***, а функція $\phi(x)$ – ***внутрішньою***, або ***проміжним аргументом***.

Приклади.

1) $y=\sin^3 x$ – це композиція двох функцій:

$$f(u)=u^3 \text{ і } u=\sin x.$$

2) $y=\sin x^3$ – складається з зовнішньої функції $f(u)=\sin u$ та зовнішньої функції $u=x^3$.

Коли шукаємо похідну від складеної функції, то проміжний аргумент є також функція від якої треба також шукати похідну, звісно якщо обидві функції є диференційовані: зовнішня функція $f(u)$ диференційована по u, а внутрішня $\varphi(x)$ диференційована по x.

Правило 6.	Похідна складної функції $y = f(u) = f(\varphi(x))$:
	$y' = [f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$— правило ланцюга.

Приклад. Задана функція $y=\sqrt{x^5-10^x}$. Знайти y'.

За правилом (6) маємо:

$$\varphi(x)=u=x^5-10^x;\quad f(u)=\sqrt{u};\quad y' = f'(u)\cdot\varphi'(x) - \textit{правило ланцюга}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}(5x^4-10^x\ln 10)=\frac{5x^4-10^x\ln 10}{2\sqrt{x^5-10^x}}.$$

Приклад. Задана функція $y=\sin(2x+3)$.Знайти y'.

Запишемо для функції зовнішню функцію $f(u)=\sin u$, відповідно – внутрішній аргумент $u=2x+3$. За (правилом 6), використовуючи правило ланцюга обчислимо похідну:

$$y'=\cos(2x+3)\cdot(2x+3)'=2\cos(2x+3).$$

Приклад. Задана функція $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Знайти y'.

Це складена функція з проміжним аргументом $x+\sqrt{x^2+1}$.
Використовуючи правила (6, 3), отримаємо:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.4. Похідна від функції, оберненої до даної.

Означення. Функцією, оберненою до функції $y = f(x)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, називається відповідність між множинами Y та X, при якій кожному елементу з Y відповідає єдине значення з X.

Позначення. $\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:\ Y \to X; \\ x = f^{-1}(y). \end{array}}$

Якщо в рівності $x = f^{-1}(y)$ y замінити на x, а x виразити через y, дістанемо функцію $y = f^{-1}(x)$. Цю функцію можна також називати оберненою до утвореної. Функції $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$ називаються ***взаємно оберненими***. Для існування оберненої функції $y = f^{-1}(x)$ до функції $y = f(x)$ необхідно і досить, щоб різним значенням аргументу функції $f(x)$ відповідали різні значення функції.

Геометрична інтерпретація.

Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (бісектриси першого і третього координатних кутів) (рис. 2.). Приклади обернених функцій: $y = x^2$ та $y = \pm\sqrt{x}$.

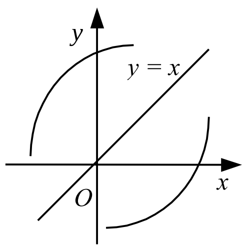


Рис. 2.

Приклад. Знайдемо функцію, обернену до $y = -2x + 4$ (рис. 3).

На малюнку ця функція симетрична оберненій відносно бісектриси кута. Доведемо це алгебраїчно. Замінимо у рівності $y = -2x + 4$ y на x, а x на y:

$x = -2y + 4$. Звідси маємо: $-2y = x - 4$, або $y = -0{,}5x + 2$.

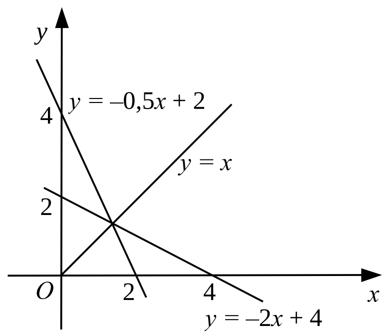


Рис. 3.

До обернених відносяться й тригонометричні функції.

Означення. Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$ називаються ***оберненими*** тригонометричними функціями. Вони є оберненими до функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$. Запишемо основне правило за яким дамо означення похідної від функції, оберненої до даної.

Правило 7. *Якщо функція y = f(x) монотонна й має в точці x відмінну від нуля похідну, то функція,* ***обернена до даної,*** *подається у вигляді x = g(y) і має похідну x = g(y), обернену до похідної даної функції:* $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Щоб вивести похідні обернених функцій використаємо (правило 7). Так, $y = \arcsin x$, можна записати як $x = \sin y$, де $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$x' = (\sin x)' = \cos y \cdot y'$$

$$y' \cdot \cos x = 1.$$

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Зауваження. Аналогічно виводяться похідні решти обернених тригонометричних функцій.

1.5. Логарифмічне диференціювання.

Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від логарифма цієї функції, тобто $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$.

Послідовне застосування логарифмування функції та диференціювання її називається логарифмічним диференціюванням. У деяких випадках логарифмування функції спрощує знаходження її похідної.

Правило 8. Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад. Знайти y', якщо $y = \sqrt[5]{\sin x}\,\mathrm{tg}^2 x\sqrt[4]{\cos x}$.

Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$\ln y = \ln(\sqrt[5]{\sin x}\,\mathrm{tg}^2 x\sqrt[4]{\cos x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{5}\ln\sin x + 2\ln\mathrm{tg}x + \frac{1}{4}\ln\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{5}\ln\sin x + 2\ln\sin x - 2\ln\cos x + \frac{1}{4}\ln\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{11}{5}\ln\sin x - \frac{7}{4}\ln\cos x.$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$(\ln y)' = \left(\frac{11}{5}\ln\sin x - \frac{7}{4}\ln\cos x\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{11}{5}\frac{1}{\sin x}(\cos x) - \frac{7}{4}\frac{1}{\cos x}(-\sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = y\left(\frac{11}{5}\mathrm{ctg}x + \frac{7}{4}\mathrm{tg}x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt[5]{\sin x}\cdot\mathrm{tg}^2 x\cdot\sqrt[4]{\cos x}\cdot\left(\frac{11}{5}\mathrm{ctg}x + \frac{7}{4}\mathrm{tg}x\right).$$

1.6. Похідна показниково-степеневої функції.

Означення. Функція $y = u(x)^{v(x)}$ називається ***показниково-степеневою*** *функцією*, де $u(x)$ *і* $v(x)$ – деякі функції. $y = x^x$; $y = x^{\log_x(x+1)}$ – приклади показниково-степеневих функцій.

Правило 9. Щоб знайти похідну показниково-степеневої функції, потрібно спочатку продиференціювати її як показникову, а потім як степеневу функцію. Результати додати

Окремі випадки:

1. Нехай функція y = f(x) є показниковою: $y = a^{v(x)}$, тобто $u(x) = \alpha$.
Тоді

$$\boxed{y' = a^{v(x)} \ln a \cdot v'(x)}$$

2. Нехай функція y = f(x) є степеневою: $y = (u(x))^{a}$, тобто *v(x)* = α.

Тоді

$$\boxed{y' = a(u(x))^{a-1} u'(x)\,.}$$

Приклад. Знайти y', якщо $y = \left(x^2 + 1\right)^{\sin x}$.

1)Попередньо застосуємо логарифмування, використавши формулу: $\log_a x^p = p \log_a x$; $\ln y = \ln(x^2 + 1)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln(x^2 + 1)$.

2)Продиференціюємо обидві частини:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(x^2 + 1) + \sin x \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$y' = y\left[\cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1}\right] = (x^2 + 1)^{\sin x}\left[\cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1}\right] =$$

$$= (x^2 + 1)^{\sin x - 1}\left[(x^2 + 1)\cos x \ln(x^2 + 1) + 2x \sin x\right].$$

Приклад. Знайти y', якщо $y = 3^{2x^2}$.

Використовуючи (правило 9, 1 випадок) можна знайти похідну для даної показникової функції:

$$y' = 3^{2x^2} \ln 3 \cdot \left(2x^2\right)' = 3^{2x^2} \ln 3 \cdot 4x = 4x \cdot 3^{2x^2} \ln 3.$$

1.7. Похідні від основних елементарних функцій.

Із основних елементарних функцій решту елементарних функцій дістають:

1) за допомогою алгебраїчних дій;

2) побудовою складної (складеної) функції.

Означення. Функції, які дістають з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа операцій, що полягають у побудові складної функції, називаються ***елементарними***.

Скажімо, $y = x, y = -x$, $y = \frac{1}{2^x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{(x \cos x)^4}{x + 6^{8x}} + \sqrt[17]{6^x} + 5$ – елементарні функції.

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій в так звану *таблицю похідних* (дуже зручно в застосуванні):

Таблиця похідних

1. $(x)' = 1$;	2. $\left(x^m\right)' = m x^{m-1}$;
3. $\left(e^x\right)' = e^x$;	4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;	6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;	8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
11 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	14. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклади розв'язування задач.

Приклад . Знайти похідну функції $y = 3x^{\frac{5}{3}} - 2arctgx + xe^x - 2\log_5 x$.

У цьому випадку використаємо правила диференціювання алгебраїчної суми функції:

$$y' = \left(3x^{\frac{5}{3}}\right)' - (2arctgx)' + \left(xe^x\right)' - (2\log_5 x)'.$$

Тепер до третього доданку застосуємо правило диференціювання добутку функцій, а похідні інших доданків знайдемо згідно таблиці похідних елементарних функцій:

$$y' = 3 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} - 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + x'e^x + x\left(e^x\right)' - 2 \cdot \frac{1}{x\ln 5}$$

$$y' = 5x^{\frac{5}{3}-1} - 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + e^x + xe^x - 2 \cdot \frac{1}{x\ln 5}$$

Приклад . Знайти похідну функції $y = x^3 arctgx$.

Застосовуючи правило диференціювання добутку функцій, одержимо:

$$y' = \left(x^3 arctgx\right)' = 3x^2 arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 arctgx + \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Приклад . Знайти похідну вказаної функції: $y = \left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{12}$

Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої функції та суми, одержимо:

$$y' = \left(\left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{12}\right)' = \left(\left(17 + 3x^{-4}\right)^{12}\right)' = 12\left(17 + 3x^{-4}\right)^{11} \cdot 3 \cdot (-4)x^{-5} = -\frac{144}{x^5} \cdot \left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{11}$$

Приклад . Знайти похідну вказаної функції $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Застосовуючи правило диференціювання складної функції, логарифмічної функції та суми, отримаємо:

$$y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right)' = \left(\ln\left(x + \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{x + \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cdot \left(1 + \frac{x}{\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{x + \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} + x}{\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Продиференціювати подані далі функції.

Приклад. $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо третє правило :

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(\ln x\right)'.$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію $\Rightarrow$ – застосуємо до нього правило 2 і формулу (2) таблиці похідних; другий – ірраціональна функція з показником $m = \frac{1}{3}$ – застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій – логарифмічна функція з основою $e \Rightarrow$ – використаємо формулу (5) таблиці похідних:

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад. $y = 6^{\arcsin\left(x^5 - 4\right)}$.

Задана функція складна: зовнішня – показникова функція з основою 6, внутрішня для неї — обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція — алгебраїчна сума $x^5 - 4$. Для суми аргументом (скінченним) є x.

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

При диференціюванні послідовно застосовуємо три разі правило 7: (щоб знайти похідну від зовнішньої, проміжної та внутрішньої похідної):

$$y=\left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^3-4\right)}\left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'_x=$$

$$=\left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^5-4\right)}\left[\arcsin\left(x^5-4\right)\right]'_{x^5-4}\left[x^5-4\right]'_x .$$

У цьому виразі знизу біля кожної квадратної дужки вказано аргумент, за яким слід диференціювати функцію, взяту в дужки.

Тепер послідовно скористаємося формулами (4), (11), (2) таблиці похідних та правилами 1, 2. Дістанемо:

$$y'=6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\ln 6\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^5-4\right)^2}}\cdot 5x^4 .$$

Взагалі використані правила та формули не фіксують, а записують кінцевий результат їх застосування.

Приклад. $y=\left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x}$.

Задана функція є степенево-показниковим виразом виду

$y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$, де $u(x)=\mathrm{tg}3x, v(x)=\sin 4x$.

Прологарифмуємо функцію за основою *e*:

$$\ln y=v\ln u .$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ — складні функції, після диференціювання обох частин рівності дістанемо:

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+\frac{1}{u}u'v .$$

Звідси $y'=y\left(v'\ln u+\dfrac{u'}{u}v\right)=u^v\left(v'\ln u+\dfrac{u'}{u}v\right)$.

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції виду

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right).$$

У даному випадку ця формула виглядає як

$$y'=\left(\mathrm{tg}3x\right)^{\sin 4x}\cdot\left(4\cos 4x\cdot\ln\mathrm{tg}3x+\frac{3\sin 4x}{\mathrm{tg}3x\cdot\cos^2 3x}\right).$$

Приклад . Знайти похідну функції $y=\dfrac{\sqrt{x}\sin x}{3x^2+1}$

$$y' = \frac{(\sqrt{x}\sin x)'(3x^2+1)-(3x^2+1)'\sqrt{x}\sin x}{(3x^2+1)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)(3x^2+1) - 6x\sqrt{x}\sin x}{(3x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(\sin x + 2x\cos x)(3x^2+1) - 12x^2\sin x}{2\sqrt{x}(3x^2+1)^2} = \frac{3x^2\sin x + \sin x + 6x^3\cos x + 2x\cos x - 12x^2\sin x}{2\sqrt{x}(3x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\sin x + 6x^3\cos x + 2x\cos x - 9x^2\sin x}{2\sqrt{x}(3x^2+1)^2}$$

В даному прикладі застосували правило диференціювання частки складної функції.

Приклад. Знайти похідну функції, застосувавши правило диференціювання частки та правило диференціювання суми функцій:

$$y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

$$y' = \frac{x'(\sin x + \cos x) - x(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x + \cos x - x\cos x + x\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Приклад. Застосовуючи правило диференціювання суми та диференціювання добутку складної функції, знайдіть похідну вказаної функції:

$$y = x + (1-x)\ln(1-x)$$

$$y' = 1 + (1-x)'\ln(1-x) + (1-x)(\ln(1-x))' = 1 - \ln(1-x) + \frac{1-x}{1-x}\cdot(-1) = -\ln(1-x)$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^{\cos 3x}$.

Маємо в цьому випадку теж складну показникові функцію, отже треба її логарифмувати.

$$y = x^{\cos 3x}$$

$$\ln y = \cos 3x \cdot \ln x$$

Далі диференціюємо обидві частини останньої рівності по *x:*

$$(\ln y)' = (\cos 3x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin 3x \cdot 3\ln x + \cos 3x \cdot \frac{1}{x}$$

Далі знаходимо похідну по *y:*

$$y' = y\left(-3\sin 3x \cdot \ln x + \frac{\cos 3x}{x}\right)$$

$$y' = x^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x \cdot \ln x + \frac{\cos 3x}{x}\right)$$

Приклад. Знайти похідну функції: $y = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}$

Запишемо задану функцію у вигляді

$$y=\frac{(2x-1)^3(3x+2)^{\frac{1}{2}}}{(5x+4)^2(1-x)^{\frac{1}{3}}}$$

Прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y = 3\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\frac{1}{3}\ln(1-x)$$

$$(\ln y)'=\left(3\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\frac{1}{3}\ln(1-x)\right)'$$

$$\frac{y'}{y}=3\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3-2\cdot\frac{1}{5x+4}\cdot 5-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot(-1)$$

$$y'=y\left(\frac{6}{2x-1}+\frac{3}{2\cdot(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

$$y'=\frac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}\cdot\left(\frac{6}{2x-1}+\frac{3}{2\cdot(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

1.8. Похідні вищих порядків.

Похідна $y'=f'(x)$ від функції $y=f(x)$ називається ***похідною першого порядку*** і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною ***другого порядку*** *від функції* $y=f(x)$ і позначається $y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається ***похідною третього порядку*** і позначається y''', $f'''(x),\ \frac{d^3x}{dx^3}$.

Похідна від похідної (n–1)-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається ***похідною n-го порядку*** і позначається $y^{(n)}, f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)',\ n=1,\ 2,\ \ldots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y=\sin(5x+4)$.

$y'=5\cos(5x+4);\ \ y''=-25\sin(5x+4);\ \ y'''=-125\cos(5x+4)$.

Приклад. Для функції $f(x)=x^4+2x^3+x+5$ знайти похідну n-го порядку.

$f'(x)=4x^3+6x^2+1$, $f''(x)=12x^2+12x$, $f^{(3)}(x)=24x+12$, $f^{(4)}(x)=24$, $f^{(n)}(x)=0$ для $n\geq 5$.

Приклад. Знайти похідну другого порядку від функції $y=\ln(1-x)$.

Знаходимо першу похідну: $y'=(\ln(1-x))'=-\frac{1}{1-x}$

Тоді друга похідна дорівнюватиме:

$$y'' = \left(-\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}.$$

1.9. Похідна неявної функції.

Розглянемо диференціювання неявної функції, заданої рівнянням $F(x;\,y)=0$.

Для знаходження похідної функції *y*, заданої неявно, достатньо продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи *y* як функцію від *x*, а потім зі здобутого рівняння знайти похідну *y′*.

Приклад. Знайти похідну функції *y*, задану рівнянням $x^3 - x^2y^2 + \ln y = 4$.

Диференціюючи обидві частини рівності і враховуючи, що *y* є функцією від *x*, дістаємо:

$$(x^3 - x^2y^2 + \ln y)' = (4)' \Rightarrow$$

$$3x^2 - 2xy^2 - x^2\cdot 2y\cdot y' + \frac{1}{y}y' = 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 2xy^2 - y'\left(2x^2y - \frac{1}{y}\right) = 0.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy^2}{2x^2y - \frac{1}{y}}.$$

Приклад. Знайти похідну y' функції x.

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$(x^3)' + (y^3)' - (3axy)' = (0)'$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(x'y + xy') = 0$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy') = 0$$

$$y^2y' - axy' = ay - x^2$$

$$y'(y^2 - ax) = ay - x^2$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Приклад. Знайти y' від функції, заданої неявно рівнянням $x^2 + y^2 = 1$.

Диференціюємо ліву та праву частини рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Згідно з правилом диференціювання складної функції, маємо:

$$2x + 2y\cdot y' = 0$$

$$x + y\cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

1.10. Похідна функції, заданої параметрично.

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Похідні від такої функції обчислюються за формулами:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \qquad (2)$$

і т.д.

Приклад. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = a(1-t), \\ y = at; \end{cases}$$

За формулою (2) дістаємо:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d(at)}{d(a-at)} = \frac{a}{-a} = -1$$

Приклад. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \mathrm{tg}t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{+2\cos t\sin t}{\cos^4 t} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}\cos^2 t = \frac{2\sin t}{\cos t} = 2\mathrm{tg}t$$

Приклад. Знайти похідну функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 1 - \sqrt{t} \end{cases}$

Розв'язок. Знайдемо y'_t *та* x'_t:

$$y'_t = -\frac{1}{2\sqrt{t}}; \; x'_t = -2t.$$

За формулою для похідної від параметричної функції одержимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{t}}}{-2t} = \frac{1}{4t\sqrt{t}}$$

Приклад. Знайти значення похідної в точці, що відповідає значенню параметра $t = \frac{3\pi}{4}$.

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

Знаходимо похідну функції за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\cos t}{-2\sin t} = -2ctgt$$

Обчислюємо значення знайденої похідної в точці, що відповідає значенню параметра

$$\frac{dy}{dx}_{t=\frac{3\pi}{4}} = -2ctg\frac{3\pi}{4} = 2$$

Завдання для перевірки знань.

Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1. $y = \frac{1}{x^2}$. *Відповідь.* $y' = -\frac{2}{x^3}$.

2. $y = \sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь.* $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3. $y = 5\sin x + 3\cos x$. *Відповідь.* $y' = 5\cos x - 3\sin x$.

4. $y = 5(\mathrm{tg}x - x)$. *Відповідь.* $y' = 5\mathrm{tg}^2 x$.

5. $y = \frac{1}{e^x + 1}$. *Відповідь.* $y' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

6. $y = 2^{x^2}$. *Відповідь.* $y' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2$.

7. $y = \frac{1}{x}$. *Відповідь.* $y' = -\frac{1}{x^2}$.

8. $y = \sqrt{x}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

9. $y = x$. *Відповідь.* $y' = 1$.

10. $y = x^3$. *Відповідь.* $y' = 3x^2$

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

11. $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}.$ *Відповідь.* $y' = x^2\sqrt{x}(1 - x^2)^2$.

12. $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$. *Відповідь.* $y' = 9x^2 \cdot \ln x$.

13. $y = 2^{3x} / 3^{2x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\frac{8}{9}\right)^x \cdot \ln\frac{8}{9}$.

14. $y = x\arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$. *Відповідь.* $y' = \arccos\frac{x}{2}$.

15. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

16. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

17. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{3x-x^2}{1-3x^2}$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{3}{1+x^2}$.

18. $y=\log_{x^2}2$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

19. $y=x^{\arcsin x}$. *Відповідь.* $y'=x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)$.

20. $y=\log_{\cos x}\sin x$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{\mathrm{ctg}x\cdot\ln\cos x+\mathrm{tg}x\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$.

21. $y=\ln\left(e^x\cos x+e^{-x}\sin x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{(\cos x-\sin x)\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$.

22. $y=e^x\sin x\cos^3 x$. *Відповідь.* $e^x\sin x\cos^3 x(1+\mathrm{ctg}x-3\mathrm{tg}x)$.

23. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}$. *Відповідь.* $\left(2x-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\dfrac{e^{x^2-\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$.

24. $y=\dfrac{\sin x}{4\cos^4 x}+\dfrac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{\cos^5 x}$.

25. $y=\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+2x-1\right)$. *Відповідь.* $4x^3-3x^2-8x+9$.

26. $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$. *Відповідь.* $\dfrac{1-4x^2-x^4}{\left(x^3-x\right)^2}$.

27. $y=\left(1+4x^2\right)^3$. *Відповідь.* $24x\left(1+4x^2\right)^2$.

28. $y=(1-x)^{20}$. *Відповідь.* $-20(1-x)^{19}$.

29. $y=x^{x^2}$. *Відповідь.* $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$.

30. $y=(\sin x)^{\cos x}$. *Відповідь.* $(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\sin x\right)$.

Знайти похідні другого порядку від функцій:

31. $y=-\dfrac{22}{x+5}$. *Відповідь.* $y''=-\dfrac{44}{(x+5)^3}$.

32. $y=\dfrac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$. *Відповідь.* $y''=\ln x$.

33. $y=-\dfrac{1}{9}x\sin 3x-\dfrac{2}{27}\cos 3x$. *Відповідь.* $y''=x\cdot\sin 3x$.

34. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}$. *Відповідь.* $y''=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

35. $y=xe^{x^2}$. *Відповідь.* $2e^{x^2}\left(3x+2x^3\right)$.

36. $y=\dfrac{1}{1+x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{6x\left(2x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^3}$.

37. $y=\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}x$. *Відповідь.* $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\mathrm{arctg}x$.

38. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

39. $y=\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\left(a+\sqrt{x}\right)^3}$.

40. $y=e^{\sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}$.

Знайти похідні третього порядку від функцій:

41. $y=ax^2+bx+c$. *Відповідь.* $y'''=0$.

42. $y=\mathrm{tg}x$. *Відповідь.* $y'''=6\sec^4 x-4\sin^2 x$.

43. $y=\ln\sin x$. *Відповідь.* $y'''=2\mathrm{ctg}x\,\mathrm{cosec}^2 x$.

44. $y=\dfrac{x}{6(x+1)}$. *Відповідь.* $y'''=\dfrac{1}{(x+1)^4}$.

45. $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$. *Відповідь.* $y'''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$.

46. $y=(2x+3)^3\sqrt{2x+3}$. *Відповідь.* $y'''=105\sqrt{2x+3}$.

47. $y=\left(x^2+a^2\right)\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$. *Відповідь.* $y'''=\dfrac{4a^3}{\left(a^2+x^2\right)^2}$.

Знайти похідну y'_x від неявно заданих функцій:

48. $x\sin y+y\sin x=0$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$.

49. $x^{y^2}+y^2\cdot\ln x-4=0$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{y}{2x\ln x}$.

50. $y^2-2xy+b=0$. *Відповідь.* $\dfrac{y}{y-x}$.

51. $y=\cos(x+y)$. *Відповідь.* $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

52. $y=1+xe^y$. *Відповідь.* $\dfrac{e^y}{2-y}$.

53. $y\sin x-\cos(x-y)=0$. *Відповідь.* $\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

54. $y=x+\mathrm{arctg}y$. *Відповідь.* $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

55. $\cos(xy)=x$. *Відповідь.* $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

Знайти похідну y'_x від параметрично заданих функцій:

56. $x=1-t^2,\ y=t-t^3$. *Відповідь.* $\left(3t^2-1\right)/(2t)$.

57. $x=\dfrac{t+1}{t},\ y=\dfrac{t-1}{t}$. *Відповідь.* -1.

58. $x=\ln\left(1+t^2\right),\ y=t-\mathrm{arctg}t$. *Відповідь.* $\dfrac{t}{2}$.

59. $x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1},\ y=\dfrac{t}{t^2-1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1+t^2}{t\left(2+3t-t^3\right)}$.

60. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$. *Відповідь.* $\dfrac{1-\mathrm{tg}t}{1+\mathrm{tg}t}$.

61. $x=\dfrac{3at}{1+t^2}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$.

Розділ 2.
Диференціал.

2.1. Означення диференціала функції.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу, тобто має скінченну похідну $f'(x)$, то її приріст представлений у вигляді:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{3}$$

З виразу (3) випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — так звана *головна частина приросту*, лінійна відносно Δx (при $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок – добуток $\alpha\Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx.

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається ***диференціалом функції*** $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто

$dy = f'(x)\Delta x$

або

$$dy = f'(x)dx. \tag{4}$$

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y = x^2$:

a) при довільних значеннях x та Δx;

b) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

a) $dy = \left(x^2\right)' \Delta x = 2x\Delta x$;

b) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y = x^2 \operatorname{tg}(3x+1)$.

Оскільки $y' = 2x\operatorname{tg}(3x+1) + \dfrac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$, то за формулою (4) дістанемо

$$dy = \left(2x\operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}\right)dx.$$

2.2. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

Підставимо формулу 4 в формулу 3, отримаємо:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{5}$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з dy.

При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ у виразі (5) нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (6)$$

Остання наближена рівність застосовується для наближених обчислень.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right)$,

звідки

$$\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1+\frac{2}{25}}. \qquad (7)$$

При обчисленні $\sqrt{1+\frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Числовий вираз (7) у нашому випадку запишеться через формулу таким чином:

$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$, де $x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}$.

Інакше

$$\sqrt{1+\frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04. \qquad (8)$$

Підставивши (8) у рівність (7), дістанемо наближене значення:

$\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2$.

Приклад. Обчислити наближено значення $\arcsin 0{,}51$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо x = 0,5, Δx = 0,51-0,5=0,01 та, застосовуючи формулу $\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'\Delta x$, одержимо:

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

2.3. Правила обчислення диференціала

Правило 1. Нехай $f(x) = u(x)v(x)$, тоді

$\underline{df(x)} = f'(x)dx = (u'v + uv')dx = u'dxv + uv'dx = \underline{vdu + udv},$

або $\boxed{d(uv) = vdu + udv.}$

Правило 2. Дано $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, тоді

$\underline{df(x)} = f(x)dx = \left(\frac{u'v + uv'}{v^2}\right)dx = \frac{u'dxv - uv'dx}{v^2} = \underline{\frac{vdu - udv}{v^2}}.$

$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.}$$

Правило 3. Маємо: $y=F(x)=f(\varphi(x));\ \varphi(x)=u,\ y=f(u),\ \varphi'(x)dx=du$.
Тоді
$\underline{dy}=f'(u)\cdot\varphi'(x)dx=\underline{f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx}$
$\boxed{df(u)=f'(u)du.}$

Приклад. $y=F(x)=\ln(x^2-1)$. Знайти диференціал dy.
$u=g(x)=x^2-1$ за правилом 3 маємо: $f(u)=\ln u\Rightarrow dy=\frac{1}{u}\cdot du=\frac{2x}{x^2-1}dx.$

Правило 4. Якщо $y=f(u),\ u=\varphi(x)$, то $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.}$

Правило 5. Якщо функція $y=f(x)$ має обернену $x=f^{-1}(y)$, то $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

Правило 6. Якщо функції задані у параметричному вигляді

$$y=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \text{то}\ \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}}$$

Зауваження. Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то формули для знаходження диференціалів будуть такі самі, як і для знаходження похідних, якщо кожну з них помножити на *dx*. Тобто таблиця для обчислення основних елементарних функцій одержується із таблиці похідних цих функцій шляхом помноження відповідної похідної на диференціал незалежної змінної *dx*.

2.4. Таблиця диференціалів.

1. $d(c)=0$.
2. $d(x)=dx$.
3. $d(x^n)=nx^{n-1}dx$.
4. $d(\log_a x)=\log_a e\frac{dx}{x}$.
5. $d(a^x)=a^x\ln a dx$.
6. $d(e^x)=e^x dx$.
7. $d(\sin x)=\cos x dx$.
8. $d(\cos x)=-\sin x dx$.
9. $d(\mathrm{tg}x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx$.
10. $d(\mathrm{ctg}x)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$.

11. $d(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

12. $d(\mathrm{cosec} x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.

13. $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $d(\mathrm{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.

16. $d(\mathrm{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

17. $dy(v) = \frac{dy}{dv} \cdot dv$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \frac{x+3}{x^2+3}$.

$$dy = d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right) = \frac{(x^2+3)d(x+3) - (x+3)d(x^2+3)}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+3)dx - (x+3)2xdx}{(x^2+3)^2} = \frac{(3-6x-x^2)dx}{(x^2+3)^2}.$$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \mathrm{arctg} x$.

Маємо: $dy = (\mathrm{arctg} x)' dx = \frac{dx}{1+x^2}$.

Приклад. Знайти диференціал функції $s = e^{t^2}$.

Маємо: $ds = e^{t^2} \cdot 2t \cdot dt$.

Приклад. Знайти dy з виразу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

До обох частин рівності застосуємо операцію знаходження диференціала:

$$d(b^2x^2 - a^2y^2) = d(a^2b^2),$$

$$2b^2xdx - 2a^2ydy = 0.$$

Звідси

$$dy = \frac{b^2x}{a^2y} dx.$$

Завдання для перевірки знань.

Знайти диференціали функцій:

62. $y = \frac{x}{2}\sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$. *Відповідь.* $dy = \sqrt{49-x^2}\,dx$.

63. $y = \frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$. *Відповідь.* $dy = \frac{dx}{x^2-36}$.

64. $y = \mathrm{arctg} e^{2x}$. *Відповідь.* $dy = \frac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$.

65. $y = e^{\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x} \cdot \cos x$. *Відповідь.* $dy = e^{\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x} \cdot \sin x \,\mathrm{tg}^2 x dx$.

66. Обчислити Δy та dy для функції $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ та $\Delta x = 0{,}01$.

Відповідь. $\Delta y = 0{,}0401$; $dy = 0{,}04$.

67. Знайти наближене значення $\mathrm{arctg} 1{,}05$.

Відповідь. 0,811.

68. Знайти наближене значення об'єму кулі радіусом 2,01 м.

Відповідь. 34,04 м^3.

69. Знайти наближене значення $\mathrm{tg}46^\circ$.

Відповідь. 1,035.

70. Знайти наближене значення $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Відповідь. 1, 9938.

Розділ 3.
Основні теореми про диференційовані функції.

Теорема 1 (Ферма). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на $[a,b]$;
2) диференційована на (a,b);
3) приймає в точці $c \in (a,b)$ найменше або найбільше значення, то $f'(c) = 0$.

Теорема 2 (Ролля). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на $[a,b]$;
2) диференційована на (a,b);
3) $f(a) = f(b)$, то існує така точка $c \in (a,b)$, що $f'(c) = 0$.

Теорема 3 (Коші). Якщо функції $f(x) i\, g(x)$:

1) неперервні на $[a,b]$;
2) диференційовані на (a,b);
3) $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то існує така точка $c \in (a,b)$, що $\dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Теорема 4 (Лагранжа). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на $[a,b]$;
2) диференційована на (a,b);
3) то існує така точка $c \in (a,b)$, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Приклад. Показати, що задана функція $f(x) = x^2 - 6x + 100$ задовольняє умовам теореми Ролля на $[1,5]$. Знайти відповідне значення $c \in (a,b)$, така, що $f'(c) = 0$.

Знайдемо похідну: $f'(x) = 2x - 6$, отже функція диференційована на відрізку $(1,5)$; $f(1) = f(5) = 95$. Умови теореми Ролля виконані.

Для знаходження $c \in (1,5)$, такого, що $f'(c) = 0.$— розв'язуємо рівняння:

$$f'(x) = 2x - 6 = 0;$$
$$x = c = 3$$

Приклад. Чи задовольняє функція $f(x) = 3x^2 - 1$ умови теореми Ферма на відрізку [1; 2]?

Функція $f(x)$ не задовольняє умову теореми Ферма, оскільки вона монотонно зростає на відрізку [1; 2], набуваючи найбільшого значення при x = 2 і найменшого при x = 1. Отже, не можна стверджувати, що $f'(1) = f'(2) = 0$. Справді, $f'(1) = 6$ і $f'(2) = 12$.

Приклад. Перевірити, що функції $f(x)=x^2-2x+3$ і $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ задовольняють умови теореми Коші на відрізку [1; 4] і знайти відповідне значення *c*.

Задані функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні всюди, а отже, і на відрізку [1; 4]; їх похідні $f'(x)=2x-2$ і $g'(x)=3x^2-14x+20$ є скінченними. Окрім того, $g'(x)$ не перетворюється на нуль при жодному дійсному *x*.

Таким чином, можемо застосувати формулу Коші:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\text{ тобто }\frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}\ (1<c<4).$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо: $c_1=2$ і c_2-4. Проте лише $c=2$ є внутрішньою точкою відрізка [1; 4].

Приклад. Знайти координати точки *M* на дузі *AB* кривої $y=2x-x^2$, в якій дотична паралельна хорді *AB*, якщо *A* (1; 1) та *B* (3; –3).

Функція $y=2x-x^2$ неперервна та диференційовна при всіх значеннях *x*. За теоремою Лагранжа між двома значеннями $a=1$ та $b=3$ існує значення $x=c$, яке задовольняє рівності $y(b)-y(a)=(b-a)y'(c)$, де $y'=2-2x$. Підставимо дані умови задачі: $y(3)-y(1)=(3-1)y'(c)$,

тобто $\left(2\cdot 3-3^2\right)-\left(2\cdot 1-1^2\right)=(3-1)\cdot(2-2c)$. Звідки $c=2, y(2)=0$. Таким чином, точка *M* має координати (2; 0).

Завдання для перевірки знань.

71. Чи буде виконуватися теорема Ролля для функції $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ на інтервалі
(0; 8)? При якому значенні c?

Відповідь. Теорема Ролля буде виконуватись на заданому інтервалі; $f'(x)=0$ при $x=c=4$.

72. Показати, що похідна $f'(x)$ многочлена $f(x)=x^3-x^2-x+1$ має дійсний корінь на інтервалі (–1; 1).

Відповідь. $x=-\frac{1}{3}$.

73. В якій точці дуги *AB* кривої $y=x^3-3x$ дотична паралельна хорді *AB*, якщо *A* (0; 0), *B* (3; 18)?

Відповідь. M ($\sqrt{3}$; 0).

74. Показати, що задана функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля на $[a,b]$. Знайти відповідне значення $c\in(a,b)$, така, що $f'(c)=0$, якщо $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2};\ a=0;\ b=8$.

Відповідь. x=4

75. Записавши формулу Лагранжа на відрізку $[0,1]$ для функції $f(x)=\sqrt{3}x^3+3x$, знайти на інтервалі $(0,1)$ відповідне значення *c*.

Відповідь. $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

76.Записавши формулу Коші на відрізку $[0,2]$ для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ *та* $g(x) = x^2 + 4$, знайти відповідне значення *c*.

Відповідь. $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{5}{3}$.

Розділ 4.
Застосування диференціального числення до обчислення границь та до дослідження функцій.

4.1. Правило Лопіталя. Випадки $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Є елементарні способи знаходження границь функції, коли аргумент необмежено зростає або прямує до значення , які не входять в область визначення функції. Крім цих елементарних способів, ефективним засобом для знаходження границь функції в указаних особливих випадках являється наступне

правило Лопіталя: *границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин дорівнює границі відношення їх похідних (якщо остання границя існує або дорівнює нескінченності).*

Випадки знаходження границь:

1) $\left[\frac{0}{0}\right]$ – коли функція являє собою відношення двох нескінченно малих величин;

2) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ – коли функція являє собою відношення двох нескінченно великих величин.

Згідно правилу Лопіталя в цих випадках можна замінити відношення функцій відношенням їх похідних, тобто якщо $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ одночасно прямують до нуля або до нескінченності при $x \to a$ або $x \to \infty$, то

$$\lim \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \lim \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)}.$$

Якщо остання границя існує або дорівнює нескінченності, то вона буде дорівнювати шуканій границі. Якщо ж відношення похідних також буде являти випадок $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то можна знову застосовувати правило Лопіталя, якщо це корисно, до одержання результату.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{7\cos x}{2} = \frac{7}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 7x + 5}$.

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

4.2. Випадки $[0\cdot\infty]$ та $[\infty-\infty]$.

Зауваження. Всі невизначеності виду $[0\cdot\infty]$; $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$ до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

1) $[0\cdot\infty]$— коли функція являє собою добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику величину;

2) $[\infty-\infty]$— коли функція являє різницю двох додатних нескінченно великих величин.

В цих випадках знаходження границі функції зводиться до випадку $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ шляхом перетворення функції до виду дробу.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність виду $[\infty - \infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

4.3. Випадки $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

Випадки знаходження границі:

1) 1^∞ – коли функція являє степінь, основа якого прямує до одиниці, а показник – до нескінченності;

2) ∞^0 – коли функція являє степінь, основа якого прямує до нескінченності, а показник – до нуля;

3) 0^0 – коли функція являє степінь, основа та показник якої прямує до нуля.

Ці випадки знаходження границі функції зводяться до випадків $[0\cdot\infty]$, а потім до випадку $\left[\frac{0}{0}\right]$або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$наступним шляхом: функція логарифмується та спочатку знаходять границю її логарифма, а потім за знайденою границею логарифма знаходять і границю самої функції.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Це невизначеність виду $[0^0]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y = (\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

При $x \to 1$ маємо невизначеність $[1^\infty]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}}, \quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1}; \quad \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Зауваження. Часто границі обчислюють, комбінуючи різні методи — застосування шкали еквівалентностей та правила Лопіталя.

4.4. Дослідження функцій. Зростання та спадання.

З допомогою похідної можна дослідити функцію, побудувати її графік, знайти найбільше та найменше значення на інтервалі і т.д.

При дослідженні функції важливу роль відіграє поняття монотонності. Функція називається монотонною, якщо вона зростає або спадає в області свого визначення. Нагадаємо: функція $f\ (x)$ називається *зростаючою на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$); функція *спадна* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Запишемо основні ознаки зростання та спадання функції:

Якщо $f'(x) > 0$ на $(a;\ b)$, то функція $f(x)$ *зростає* на цьому інтервалі.
Якщо $f'(x) < 0$ на $(a;\ b)$, то функція $f(x)$ *спадає* на цьому інтервалі.

Основна схема дослідження функції на монотонність

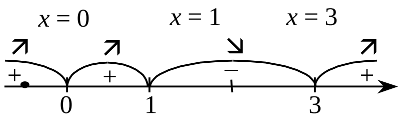
1) Знайти область визначення та інтервали, на яких функція неперервна.
2) Знайти похідну $f'(x)$.
3) Знайти нулі функції $f'(x)$, тобто корені рівняння $f'(x) = 0$ (якщо вони є), і розбити інтервал $(a;\ b)$ за допомогою знайдених коренів $x_1, x_2, \ldots, x_k$,.
4) Визначити знак похідної на кожному із таких інтервалів.
5) Записати потрібний результат дослідження (інтервали монотонності).
6)

Приклад. Знайти інтервали зростання і спадання функції $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 15$.

Маємо : область визначення ($x \in R$). Функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3) = 0,$$

звідки



Похідна $f'(x)$ неперервна для $x \in (-\infty;\ +\infty)$ і перетворюється на нуль лише в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, тому вона в інтервалах $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 3)$ і $(3;\ +\infty)$ зберігає знак. Оскільки $f'(-1) > 0$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, $f'(2) < 0$, $f'(5) > 0$, $f'(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty;\ 0)$, $f'(x) > 0$, $x \in (0;\ 1)$, $f'(x) < 0$, $x \in (1;\ 3)$, $f'(x) > 0$, $x \in (3;\ +\infty)$.

Тому функція $f(x)$ зростає на інтервалах $(-\infty;\ 0)$; $(0;\ 1)$; $(3;\ +\infty)$ і спадає на інтервалі $(1;\ 3)$.

4.5. Екстремуми функції.

Якщо функція змінює характер монотонності в певних точках, то виникають точки які називають точками екстремуму. За певних умов, ця точка може бути точкою максимуму чи точкою мінімуму. Коли в цій точці похідна рівна нулю, то дану точку називають стаціонарною точкою функції $f(x)$.

Означення. Точки інтервалу $(a; b)$, в яких похідна $f'(x)$ перетворюється в нуль ($f'(x) = 0$), називаються ***стаціонарними точками*** функції $f(x)$ в інтервалі $(a; b)$.

Теорема 1 (перше правило). Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі стаціонарної точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, в якій $f(x)$ неперервна. Тоді:

1) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий максимум;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то в точці x_0 функція $f(x)$ має строгий мінімум;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знака, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має. На основі даної теореми можна сформулювати таку *схему для дослідження неперервної функції* $y = f(x)$ на максимум і мінімум за допомогою першої похідної:

Схема для дослідження неперервної функції $y = f(x)$ ***на максимум і мінімум.***

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x) = 0$;

б) знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки.

4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Таким чином, маємо таке схематичне зображення можливих випадків:

<table>
<tr><td>x (досліджуваний інтервал змінної)</td><td>(x_1, x_2)</td><td>x_2</td><td>(x_2, x_3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f'(x)$ (знак похідної в досліджуваному інтервалі)</td><td>+</td><td rowspan="3">$f\,(x_2) = 0$
або не існує</td><td>–</td></tr>
<tr><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td></td><td>+ (–)</td><td>+ (–)</td></tr>
</table>

↘

$f(x)$ (характер поводження функції)	↗ Функція зростає	Точка максимуму	Функція спадає ↘
	Функція спадає ↘	Точка мінімуму	Функція зростає ↗
	Функція зростає (спадає) ↗ ↘	Немає ні максимуму, ні мінімуму	Функція зростає (спадає) ↗ ↘

Приклад. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0 \; (f'(x) = 0)$. Звідки $x_1 = 1, \; x_2 = 3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали :

$(-\infty, 1)$, $(1,3)$ $(3, +\infty)$.

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$x = 0 \in (-\infty, 1), \; y'(0) = 3 > 0$;

$$x = 2 \in (1,3), \; y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$

$x = 4 \in (3, +\infty), \; y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0$.

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 1).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення $x = 1$ похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при $x = 1$ функція має максимум:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}.$$

Таблиця 1

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	$y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$	↘	$y_{\min}(3) = 1$	↗

При переході через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x = 3 функція має мінімум:

$Y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$

На інтервалі:

1) $(-\infty,\,1)$ — функція зростає;

2) (1, 3) — спадає;

3) $(3,\,+\infty)$ — зростає.

Крім того,

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\right)=\pm\infty.$$

На основі проведеного дослідження будуємо графік функції (рис. 3).

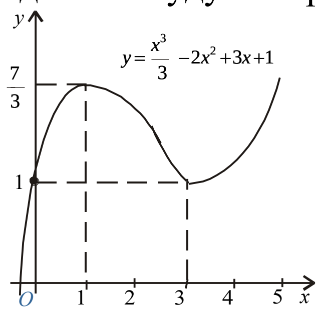


Рис. 3

Часто буває доцільним досліджувати функцію на екстремум за допомогою другої похідної. Розглянемо суть цього методу, використавши друге правило.

Теорема 2 (друге правило). Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x_0)>0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x_0)<0$ — максимум;

3) якщо $f''(x_0)=0$ — питання залишається відкритим, і для його розв’язання треба застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Приклад. За допомогою другої похідної дослідити на екстремум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Перша похідна цієї функції $y'=x^2-4x+3$ перетворюється в нуль у точках x = 1 і x = 3 (див. попередній приклад).

Друга похідна $y''=2x-4$:

а) при x = 1 $y''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0$, звідси в точці x = 1 функція має максимум $y_{max}(1) = \frac{7}{3}$;

б) при x = 3 $y''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$, тобто в точці x = 3 функція має мінімум $Y_{min}(3) = 1$ (див. рис. 3).

4.6. Найбільше і найменше значення функції.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [*a*; *b*], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку [*a*; *b*] називається *абсолютним максимумом*, а найменше — *абсолютним мінімумом*.

Правило. Якщо треба знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку [*a*, *b*], то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно треба діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

Приклад. Визначити на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$:

$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$;

$y'' = 6x, \quad y''(1) = 6 > 0$.

Таким чином, у точці x = 1 маємо мінімум: $y_{min}(1) = 1$.

Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці x = = –1 маємо максимум: $y_{max}(-1) = 5$.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}, \quad y(-3) = -15$.

3. Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{найб} = y_{max}(-1) = 5$, а найменше — $y_{найм} = y(-3) = -15$.

Графік функції зображено на рис. 4.

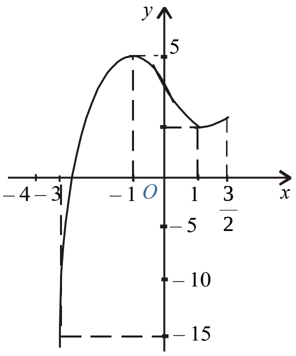


Рис. 4

4.7. Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину.

Означення. Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

З графіка функції $y = f(x)$ (рис. 5) бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (a, c) і вгнутою на проміжку (c, b).

Означення. Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину*. На рис. 5 точка M – точка перегину.

Наведемо дві теореми.

Теорема 1. 1) Якщо в усіх точках проміжку (c, b) для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $(f''(x) > 0)$, то графік функції угнутий.

2) Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна від'ємна $(f''(x) < 0)$, то графік функції опуклий.

Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Рис. 5

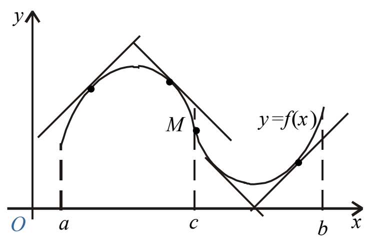
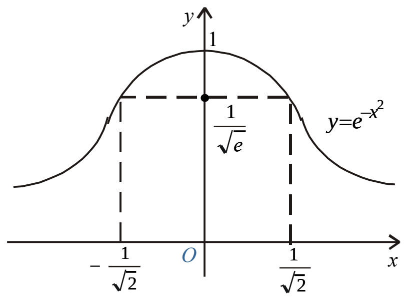


Рис .6



Приклад. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли $x^2 - \frac{1}{2} = 0$, звідки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції (рис. 6).

Результати дослідження заносимо в табл. 2.

Таблиця 2

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

4.8. Асимптоти.

Змінна точка M рухається по кривій у нескінченність, коли відстань від цієї точки до початку координат необмежено зростає.

Означення. Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань d від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля (7). Асимптоти бувають *вертикальні* й *похилі*.

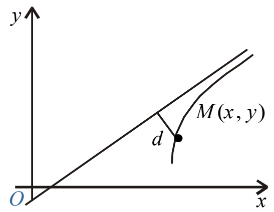


Рис.7

Вертикальні асимптоти. Якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$,або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y = f(x)$.

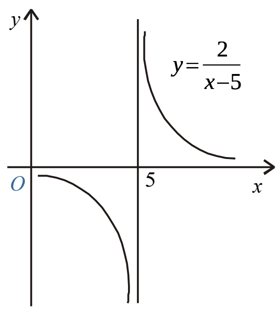


Рис.8.

Приклад. Крива $y=\frac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x = 5$, оскільки $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} y=\pm\infty$ (рис. 8).

Похилі асимптоти. Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Якщо хоча б одна з границь (9) не існує, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

Приклад. Визначити асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm0} y = \lim_{x\to\pm0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \lim_{x\to\pm0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right) = \mp\infty,$$

то пряма $x=0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ — похила асимптота для графіка функції (рис. 9).

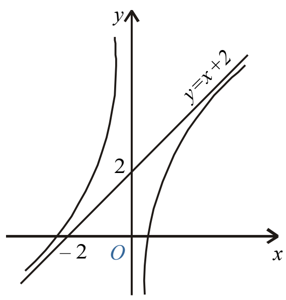


Рис. 9.

4.9. План дослідження функцій і побудови їхніх графіків.

При дослідженні функцій треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли *x* прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях *x* за винятком значення *x* = 1. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ 1<x<+\infty\}$.

2. Точка *x* = 1 є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to1\pm0} y=\lim_{x\to1\pm0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1\pm0}(x-1)^2}=+\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки *x* = 1 маємо нескінченний розрив.
Точка *x* = 1 — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма *x* = 1 є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю *Ox*: *y* = 0, $\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,\ 2x-1=0,\ x=\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю *Oy*: *x* = 0, $y=\frac{-1}{1}=-1,\ (0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 3:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3};\quad y'=0\Rightarrow$$

$-2x=0\Rightarrow x=0$ — критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку *x* = 0 на екстремум:

при $x=-1$ $y'=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

Таблиця 3

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	$\searrow$	$y_{\min}$ (–1)	$\nearrow$	Не існує	$\searrow$

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min}=\frac{-1}{1}=-1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y'(x)<0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y''=\frac{-2(x-1)^3+6x(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\quad y''=0\Rightarrow$$

$2(2x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\frac{1}{2}$:

при $x=-1$ $y''=\frac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\frac{1}{8}<0(-)$;

при $x=0$ $y''=\frac{2}{1}=2>0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx-0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y''>0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 4.

Таблиця 4

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$	1	$(1,\ +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис.10: *(–5; – 0,3)*, $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$, *(2; 3), (3; 1,3).*

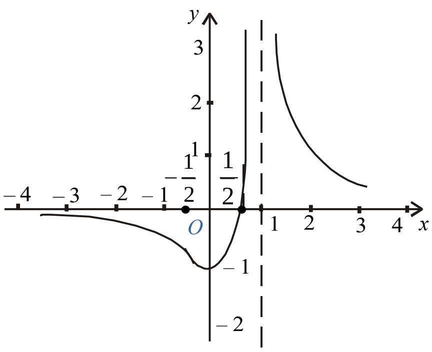


Рис. 10

Завдання для перевірки знань.

Знайти границі:

77. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. *Відповідь.* $\dfrac{3}{5}$.

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. *Відповідь.* 2.

79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{3}$.

80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$. *Відповідь.* $-\dfrac{1}{2}$.

81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. *Відповідь.* –2.

82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. *Відповідь.* 2.

83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{x}}{\operatorname{tg} x-x}$. *Відповідь*. 1.

84. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}\right)$. *Відповідь*. $\dfrac{2}{3}$.

85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cos x}{x^{4}}$. *Відповідь*. $1/3$.

86. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^{x}-e^{a}\right)}$. *Відповідь*. 1.

87. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^{n}e^{-x}\right)$. *Відповідь*. 0.

88. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \operatorname{ctg}\pi x)$. *Відповідь*. $\dfrac{1}{\pi}$.

89. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot \operatorname{ctg} x)$. *Відповідь*. 1.

90. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$. *Відповідь*. 0.

91. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь*. 0.

92. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$. *Відповідь*. 1.

93. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$. *Відповідь*. e^{2}.

94. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. *Відповідь*. $-\dfrac{1}{2}$.

95. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2}}-\operatorname{ctg}^{2}x\right)$. *Відповідь*. $\dfrac{2}{3}$.

96. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$. *Відповідь*. 1.

97. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^{2}}$. *Відповідь*. e^{-6}.

98. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+2^{x}\right)^{1/x}$. *Відповідь*. 2.

Знайти інтервали монотонності функцій:

99. $y=x^{4}-2x^{2}-5$.

Відповідь. $(-\infty,-1)$ – спадає; $(-1,\,0)$ – зростає; $(0,\,1)$ – спадає; $(1,\,+\infty)$ – зростає.

100. $y=(x-2)^{5}(2x+1)^{4}$.

Відповідь. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ – зростає; $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{18}\right)$ – спадає; $\left(\dfrac{11}{18},+\infty\right)$ – зростає.

101. $y=2-3x+x^{3}$.

Відповідь. На інтервалах $(-\infty,-1)$ та $(1,+\infty)$ функція зростає; на інтервалі (– 1, 1) – спадає.

102. $y=\dfrac{1-x+x^{2}}{1+x+x^{2}}$.

Відповідь. $(-\infty, -1)$ – зростає; $(-1, 1)$ – спадає; $(1, +\infty)$ – зростає.

103. $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

Відповідь. $(-\infty, 0)$ – спадає; $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ — зростає; $(1, +\infty)$ — спадає.

Знайти екстремуми функцій:

104. $y=2x^3-3x^2$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}(1)=-1$.

105. $y=2x^3-6x^2-18x+7$. *Відповідь.* $y_{\max}(-1)=17,\ y_{\min}(3)=-47$.

106. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$. *Відповідь.* $y_{\max}(0)=4,\ y_{\min}(-2)=\dfrac{8}{3}$.

107. $y=x^2\left(1-x\sqrt{x}\right)$. *Відповідь.* $y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}\left(2\sqrt[3]{2/49}\right)=\dfrac{12}{49}\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}$.

108. $y=x+\sqrt{3-x}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{11}{4}\right)=\dfrac{13}{4}$.

109. $y=\dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$. *Відповідь.* $y_{\min}\left(\dfrac{2}{3}\right)=2$.

110. $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{205}}{10}$.

Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

111. $y=x^4-2x^3+3;\ [-3, 2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=2,\ y_{\text{найб}}=66$.

112. $y=x^4-2x^2+5;\ [-2, 2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=4,\ y_{\text{найб}}=13$.

113. $y=x+2\sqrt{x};\ [0, 4]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0,\ y_{\text{найб}}=8$.

114. $y=x^5-5x^4+5x^3+1;\ [-1, 2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-10,\ y_{\text{найб}}=2$.

115. $y=x^3-3x^2+6x-2;\ [-1, 1]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-12,\ y_{\text{найб}}=2$.

116. $y=\sqrt{100-x^2};\ [-6, 8]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=6,\ y_{\text{найб}}=10$.

117. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ [0, 1]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=\dfrac{3}{5},\ y_{\text{найб}}=1$.

118. $y=\dfrac{x-1}{x+1};\ [0, 4]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-1,\ y_{\text{найб}}=\dfrac{3}{5}$.

За допомогою другої похідної знайти екстремуми функцій:

119. $y=x^3-2ax^2+a^2x\quad (a>0)$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{4}{27}a^3,\ y_{\min}(a)=0$.

120. $y=x^2(a-x)^2$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^4}{16},\ y_{\min}(0)=0,\ y_{\min}(a)=0$.

121. $y=x+\dfrac{a^2}{x}\quad (a>0)$. *Відповідь.* $y_{\max}(-a)=-2a,\ y_{\min}(a)=2a$.

122. $y=x+\sqrt{1-x}$. *Відповідь.* $y_{\max}\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$.

Знайти точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості графіків функцій.

123. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$ *Відповідь.* Точка перегину $\left(\frac{5}{3}, -\frac{250}{27}\right)$. Інтервали: опуклості – $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, угнутості – $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

124. $y = (x+1)^4 + e^x.$ *Відповідь.* Точок перегину не існує, графік функції вгнутий.

125. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4.$ *Відповідь.* Точки перегину –3,294 та 2,114. Інтервали: опуклості – $(-\infty, -3)$, угнутості – $(-3, 2)$, опуклості – $(2, +\infty)$.

126. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$

Відповідь. Точка перегину (1, –1). Інтервали: опуклості – $(-\infty, 1)$, угнутості – $(1, +\infty)$.

Знайти асимптоти кривих:

127. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$ *Відповідь.* $y = 0$.

128. $y = 2x - \frac{\cos x}{x}.$ *Відповідь.* $x = 0$; $y = 2x$.

129. $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x.$ *Відповідь.* $x = 0$; $y = -3x$.

130. $y = \frac{1}{2}x + \mathrm{arctg}\, x.$ *Відповідь.* $y = \frac{1}{2}x + \pi$; $y = \frac{1}{2}x$.

131. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right).$ *Відповідь.* $x = -\frac{1}{e}$, $y = x + \frac{1}{e}$.

132. $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1.$ *Відповідь.* $x = 0$, $y = x + 3$.

Дослідити функції та побудувати їх графіки:

133. $y = \frac{x}{1 + x^2}.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty < x < +\infty)$. Графік симетричний відносно початку координат. $y_{\max}(1) = \frac{1}{2}$, $y_{\min}(-1) = -\frac{1}{2}$. Точки перегину $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

134. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$

Відповідь. Не визначена при $x = \pm 1$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\max}(0) = 0$. При $x < -1$ зростає, при $x > 1$ спадає. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = \pm 1$, $y = 1$.

135. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім значень $x=1,\ x=2,\ x=3.$ $y_{\max}\approx -2{,}6$ при $x\approx 2{,}58,$ $y_{\min}\approx 2{,}6$ при $x\approx 1{,}42.$ Точок перегину немає. Асимптоти $x=1,\ x=2,\ x=3,\ y=0.$

136. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ **.**

Відповідь. Асимптоти $x=\pm 2,\ y=x$. Функція непарна. Графік проходить через початок координат. На інтервалі (– 2; 2) функція монотонно спадає. Екстремуми:

$$y_{\min}\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3},\ y_{\max}\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}\ ,$$

точка перегину (0; 0). На інтервалах $(-\infty,-2)$ та (0, 2) графік функції опуклий, на інтервалах (–2, 0) та $(2,+\infty)$ — угнутий.

137. $y=16x(x-1)^3$**.**

Відповідь. $y_{\min}\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{27}{16},\ y_{\text{т.пер}}.(1)=0,\ y_{\text{т.пер}}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$. Асимптот немає.

138. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0.$ $y_{\min}\left(\dfrac{1}{2}\right)=3.$ Точка перегину $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2},\ 0\right)$. Асимптота x = 0.

139. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=\pm\sqrt{3}.$ Функція непарна. $y_{\max}(3)=-4{,}5;\ y_{\min}(-3)=4{,}5.$ Точка перегину $(0,\ 0).$ Асимптоти $x=\pm\sqrt{3}$ та $x+y=0$.

140. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=-1.$ $y_{\min}(-3)=-3\dfrac{3}{8}.$ Точка перегину $(0,\ 0).$ Асимптоти $x=-1$ та $y=\dfrac{1}{2}x-1.$

141. $y\left(x^3-1\right)=x^4.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=1.$ $y_{\max}(0)=0,$ $y_{\min}\left(\sqrt[3]{4}\right)=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}.$ Точка перегину $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right).$ Асимптоти $x=1$ та $y=x.$

142. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\max}(1)=\frac{7}{2}$, $y_{\max}(-3)=-\frac{11}{6}$, $y_{\min}(2)=\frac{27}{8}$. Абсциса точки перегину графіка функції $x=\frac{9}{7}$. Асимптоти $x=0$ та $y=\frac{1}{2}x+1$.

143. $(y-x)x^4+8=0$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\max}(-2)=-2{,}5$. Графік точок перегину немає. Асимптоти $x=0$ та $y=x$.

144. $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0)=0$. Абсциса точки перегину графіка функції $x=2\pm\sqrt{2}$. Асимптота $y=0$.

145. $y=x-\ln(x+1)$.

Відповідь. Область визначення $(-1,+\infty)$. $y_{\min}(0)=0$. Графік не має точок перегину. Асимптота $x=-1$.

146. $y=x^2e^{-x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. Функція парна $y_{\max}(\pm1)=\frac{1}{e}$, $y_{\min}(0)=0$. Абсциси точок перегину графіка функції $x=\pm\frac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2}$. Асимптота $y=0$.

147. $y=x^3e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. $y_{\max}(3)=\frac{27}{e^3}$. Абсциси точок перегину $x=0$, $x=3\pm\sqrt{3}$. Асимптота $y=0$.

148. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. На інтервалі $(-\infty,-1)$ функція зростає від e до ∞; на інтервалі $(0,+\infty)$ зростає від 1 до e. Графік складається з двох окремих віток. Асимптоти $y=e$ та $x=-1$.

149. $y=x+\sin x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. Екстремумів та асимптот не має. Функція непарна. Точки перегину $(k\pi,k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; в точках перегину графік перетинає пряму $y=x$.

150. $y=x\cdot\sin x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. Функція парна. Абсциси точок екстремуму задовольняють рівняння $\operatorname{tg} x = -x.$ Абсциси точок перегину задовольняють рівняння $x \operatorname{tg} x = 2.$ Асимптот немає.

151. $y = \cos x - \ln \cos x.$

Відповідь. Функція визначена на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$ де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$ Період $T = 2\pi.$ Функція парна. $y_{\min}(2k\pi) = 1.$ Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

152. $y = x - 2\operatorname{arctg} x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція непарна. $y_{\max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1,$ $y_{\min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}.$ Точка перегину (0, 0). Асимптоти $y = x \pm \pi.$

153. $y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 1,$ $x = 3.$ $y_{\max}(2) = e^{-1}.$ Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = 1,$ $x = 3,$ $y = 1.$

154. $y = \sqrt[3]{x^2} - x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ $y_{\max}\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27},$ $y_{\min}(0) = 0.$ Графік не має точок перегину та асимптот.

Розділ 5.
ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ.

Ряд задач диференціального числення був розв’язаний ще в Стародавні часи.

Основне поняття диференціального числення – поняття похідної – виникло в XVII ст. у зв'язку з необхідністю розв’язання ряду задач з фізики, механіки і математики, у першу чергу наступних двох: визначення швидкості прямолінійного нерівномірного руху і побудови дотичної до похідної плоскої кривої.

Перша з цих задач була уперше розв’язана *Ньютоном*. Функцію він називав **флюентою**, тобто змінною величиною (від латинського *fluere* – текти), похідну ж – **флюксією** (від того ж *fluere*). Ньютон позначав функції останніми літерами латинського алфавіту *u, x, y, z*, а їх флюксії, тобто похідні від флюент за часом, – відповідно тими ж літерами з крапкою над ними.

Для доведення свого правила Ньютон, наслідуючи в основному *Ферма*, розглядає нескінченно малий приріст часу *dt*, що він позначав знаком x+0, відмінним від нуля. Вираз x+0, що позначається нині дельта ікс і називається **диференціалом** (*dx*), Ньютон називав **моментом**.

Ньютон прийшов до поняття похідної, виходячи з питань механіки. Свої результати в цій області він виклав у трактаті, названому ним «Метод флексій і нескінченних рядів», що був складений близько 1671 р. Припускають, що Ньютон відкрив свій метод флюксій ще в середині 60-х років XVII в., однак вищезгаданий його трактат був опублікований посмертно лише в 1736 р.

Математиків XV–XVII ст. довго хвилювало питання про існування загального методу для побудови дотичної в будь-якій точці кривої. Задача ця була зв'язана також з вивченням рухів тіл і з відшуканням екстремумів найбільших і найменших значень різних функцій.

Деякі окремі випадки розв’язання задач були дані ще в Стародавні часи. Так, у «Початках» *Евкліда* подано спосіб побудови дотичної до кола, *Архімед* побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, *Аполлоній* – до еліпса, гіперболи і параболи. Однак давньогрецькі вчені не вирішили задачу до кінця, тобто не знайшли загального методу, придатного для побудови дотичної до будь-якої плоскої кривої в довільній її точці.

Із самого початку XVII в. чимало вчених, у тому числі *Торрічеллі*, *Вівіані, Роберваль, Барроу*, намагалися знайти розв’язок цієї проблеми, використовуючи кінематичні міркування. Перший загальний спосіб побудови дотичної до алгебраїчної кривої був викладений у «Геометрії» *Декарта*. Більш загального і важливим для розвитку диференціального числення був метод побудови дотичних Ферма.

Ґрунтуючись на результатах Ферма і деяких інших висновках, *Лейбніц* значно глибше узагальнив своїх попередників і розв’язав задачу, про яку йде мова, створивши відповідний алгоритм. У нього задача знаходження тангенсу кута нахилу , тобто кутового коефіцієнта дотичної в точці М, до плоскої кривої, обумовленою функцією, зводиться до знаходженню похідної функції у по незалежній змінній х при даному її значенні (або в даній точці) $x=x_1$.

Можна навести й інші приклади, що показують, яку велику роль грає поняття похідної в науці і техніці: прискорення – є похідна від швидкості за часом, теплоємність тіла – є похідна від кількості тепла по температурі, швидкість радіоактивного розпаду – є похідна від маси радіоактивної речовини за часом і т.п. Вивчення властивостей і способів обчислення похідних і їхнє застосування до дослідження функцій складає головний предмет диференціального числення.

Перша друкована праця по диференціальному численню була опублікована *Лейбніцем* у 1684 р. Це були мемуари, що з'явилися в 1682 р. у математичному журналі «*Acta Eruditorum*» (прототип «*Навчальних записок*») під заголовком «*Новий метод максимумів і мінімумів, а також дотичних, для якого не є перешкодою дробові й ірраціональні кількості, і особливий для цього спосіб обчислення*». У цій статті, що складається усього лише з 6 сторінок, міститься виклад суті методу обчислення нескінченно малих,зокрема викладаються основні правила диференціювання. Отже, якщо в «Методі флюксій» як первісне поняття фігурує швидкість, то в «Новому методі» Лейбніца таким поняттям є дотична.

Збільшення абсциси Лейбніц позначав через *dx*, що відповідає збільшенню ординати – через *dy*. Нині уживаний символ похідної бере свій початок від Лейбніца. У Лейбніца основним поняттям була не похідна, для якої він навіть спеціального терміна не мав, а диференціал.

У середині XVIII ст. Ейлер став користуватися грецькою літерою Δ для позначення приростів змінних величин, тобто

$\Delta y = y_2 - y_1$,

$\Delta x = x_2 - x_1$ і т.д.

Це позначення збереглося понині.

Позначення y' або $f'(x)$ для похідної ввів Лагранж.

Сам термін «*похідна*» уперше зустрічається у француза *Луа Арбогаста* в його книзі «*Обчислення похідних*», опублікованої в Парижі у 1800 р. Цим терміном відразу ж став користуватися і *Лагранж*. Термін цей швидко увійшов у загальний ужиток, а Коші, використовуючи початкову літеру цього терміна, став позначати похідну символом *Dy* або *Df(x)*.

Термінологія Ньютона (флюенти, флюксії) і його символи похідної утратили своє значення. Лише у фізиці і механіці в деяких випадках позначають крапками над літерами похідні за часом.

Перший друкований курс диференціального числення вийшов у світ у Парижі в 1696 р. під заголовком «*Аналіз нескінченно малих*». Його автор *Г.Ф. Де Лопіталь* за основу цієї книги взяв рукопис *Йоганна Бернуллі*, одного з найближчих співробітників Лейбніца. Ось чому цей курс варто розглядати як типовий здобуток школи Лейбніца.

У першій же главі своєї книги Лопіталь вимагає, «щоб величина, збільшена або зменшена на іншу нескінченно малу величину, могла бути розглянута як незмінна». Отут нескінченно мала розглядається як нуль, її можна відкидати. Це один з фундаментальних принципів обчислення нескінченно малих Лейбніца, нині відкинутий наукою. Цим принципом користувався Лопіталь і при обґрунтуванні формул диференціювання.

У перший період розробки математичного аналізу основоположники цієї теорії не могли досить чітко і ясно обґрунтувати принципи цієї теорії і тому шукали підтвердження правильності теорії в узгодженості математичних висновків з досвідом, із практикою при вирішенні задач механіки й астрономії. Однак проста перевірка гіпотези на практиці не дає абсолютної впевненості в її непогрішності. Досить одного факту, що не погодиться з даною гіпотезою, як вона буде спростована. Ось чому на наступних етапах перед математиками виникла проблема суворого математичного обґрунтування теорії математичного аналізу.

Вона на вигляд недолуга:
Штришок маленький, та й усе,
Але яку значну потугу
Цей ледь помітний знак несе!
Це символ моря знань високих,
Який не має меж і дна.
Не ступите не раз ні кроку
Без терміну, що зветься «похідна»!

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1988. — 432 с.
2. *Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Высшая математика. — К.: Вища шк., 1987. — 552 с.
3. *Пак В. В., Носенко Й. Л.* Вища математика. — К.: Либідь, 1996. — 440 с.
4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — Т. 1, 2. — М.: Наука, 1985. — 580 с., 602 с.
5. Збірник задач з вищої математики / За ред. Ф. С.Гудименка. — К.: КУ, 1967. — 352 с.
6. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1975. — 416 с.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу (для вузов) / Под ред. Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
8. *Стрижак Т. Г., Коновалова Н. Р.* Математический анализ. — К.: Либідь, 1995. — 240 с.
9. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Под ред. *Г. И. Кручковича*. — М.: Высш, шк., 1970. — 512 с.
10. *Тевтяшев А.Д., Литвин О.Г.* Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. — Х.:Рубікон, 1999. – 320 с.