**Григоренко В.К., Григоренко К.В.**

# *Відомий і невідомий Коші*

***Зміст***

Augustin Louis Cauchy

# 1. ВСТУП

Кожний, хто вивчав чи вивчає математичний аналіз, звичайно ж добре запам’ятав ім’я Огюстена Луї Коші, яке так часто згадувалось в багатьох теоретичних конструкціях. Математичний аналіз з часів Коші має чітку логічну структуру, зцементовану поняттям границі, яка є основною операцією математичного аналізу. Справді, неперервність функції, похідна функції, інтеграл, сума ряду просто не мислимі без границі. Чіткість, зрозумілість, відшліфованість курсу стала можливою внаслідок зусиль О. Коші, Б. Больцано, К. Вейєрштрасса, Г. Кантора і інших видатних математиків. Першим у цьому ряду стоїть О. Коші (1789–1857 рр.) – великий французький математик, який був родоначальником реформи математичного аналізу в першій половині XIX століття, метою якої було переведення математичного аналізу на новий рівень математичної строгості, обґрунтування його основних положень, розбудова його в рамках чіткої логічної концепції, яка радикально змінює його основу і дозволяє створити дійсно наукову теорію. У 27 років він став одним з найбільш авторитетних математиків Європи. Коші поклав початок цим революційним перетворенням, які видозмінили весь математичний аналіз від його глибинних основ до поверхні. Коші прийняв і найбільш діяльну участь у розбудові математичного аналізу на новій основі і в створенні багатьох суміжних з ним математичних дисциплін, як-от: теорія функцій комплексної змінної, диференціальні рівняння, методи математичної фізики, а також інших математичних і прикладних дисциплін: алгебри, геометрії, теорії чисел, теорії ймовірностей, оптики та інші. Швидкість, з якою Коші переходив від одного предмету до іншого, зокрема, дала йому можливість прокласти в математиці багато нових шляхів, які визначили її лице протягом майже п’ятидесяти років, що стало підґрунтям для майбутнього її розвитку. Все це виводить його на одне з чільних місць у ряду великих математиків світового рівня першої половини XIX століття.

Попереду всіх інших робіт Коші стоять роботи по обґрунтуванню аналізу. Його публікації з цього приводу дуже тісно пов’язані з викладацькою роботою в Політехнічній школі, яка заснована у 1794 році Г.Монжем. В ній О. Коші працював з 1813 року. Сюди відносяться:

1. «Курс аналізу (алгебраїчний аналіз)», 1821 р.
2. «Конспект лекцій по аналізу нескінченно малих», 1823 р.
3. «Лекції по прикладаннях аналізу до геометрії», 1826–1828 рр.
4. Багаточисельні публікації окремих робіт по диференціальних рівняннях, які пов’язані з літографованими записками 20-х років, але опублікованими тільки біля 1840 р. в «Comptes Rendus» (звіти) та інших.

Дві перших праці Коші відносяться до того періоду його діяльності, коли він скрупульозно піклувався про форму своїх праць. В них відчувається вже рука справжнього майстра, в якого на першому плані виступає чітка, впорядкована дедуктивна система. Тут розглядаються елементарні функції, в тому числі і в комплексній області, досліджуються нескінченні ряди. Коші чітко окреслює коло питань, які підлягають критичному аналізу. Тут дається бездоганне означення «нескінченно малої» з допомогою граничного переходу. Далі з допомогою нескінченно малої обґрунтовується означення неперервності: функція неперервна, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Потім детально він виклав вчення про збіжність нескінченних рядів. Коші пов’язав збіжність знакозмінних рядів із збіжністю рядів складених з модулів їх членів. Відносно абсолютно збіжних рядів він довів цілий ряд теорем, зокрема і теорему про те, що сума ряду, що є добутком двох абсолютно збіжних рядів, дорівнює добутку їх сум, знайшов ефективні строгі критерії збіжності. Коші бездоганно оперує $n$-частинними сумами ряду, збіжними до деякого значення зі швидкістю, яка вимірюється з допомогою оцінки залишкового члена.

Зазначимо, що Коші займався не лише обґрунтуванням математичного аналізу, але він виступав також і творцем нового. Зокрема, він знаходить теорему про те, що степеневий ряд має в комплексній області круг збіжності, доводить основну теорему алгебри і існування нуля в цілої раціональної функції $f(x+iy)=u+iv$ і т.д.

Велич і значення Коші як математика осмислюється при порівнянні його ідей і праць в галузі обґрунтування аналізу з працями його сучасників і попередників. Підхід Коші вигідно відрізняється від домінуючих до нього спроб інтуїтивного обґрунтування нескінченно малої і від точки зору Лагранжа («Теорія аналітичних функцій» (1797 р.) і «Лекції про числення функції» (1801 р.)), який будує аналіз на необґрунтованому фундаменті, вважаючи, що будь-яка функція розкладається в ряд і цим просто затемняє нові ідеї. У Коші ж чітко і яскраво проглядається бездоганне арифметичне обґрунтування математичного аналізу, і з цього часу починається «арифметизація» всієї математики в цілому. З його сучасників лише Б. Больцано (1817 р.) в такій же мірі, що й Коші, володів абсолютно точним поняттям неперервності і навіть ще більш глибоко аналізував його. Правда він це робив у загальних рисах, і, можливо, повністю не усвідомлюючи всієї глибини змісту своїх теоретичних конструкцій в математичному аналізі. Крім того, подеколи вони не були логічно узгодженими і не випливали з його стратегічної лінії.

Діяльність же Коші представляла собою дію чітко відлагодженого механізму, яка була узгоджена як по своїй суті, змісту, так і в технології виконання, загальності і деталях. Коші характерний «глобальний» підхід до розв'язання поставлених проблем.

Операція граничного переходу стає у Коші головною операцією математичного аналізу, а виклад за Коші математичного аналізу стає з того часу стандартним. Він виразно бачив перспективу перебудови математичного аналізу і першим діяв у цьому напрямку. За словами Н. Абеля (1826 р.): «Коші в даний час єдиний, хто знає як слід діяти в математиці, оскільки він розуміє, як слід формулювати і доводити математичні теореми». Він був фанатом в нових перетвореннях математичного аналізу, його ж роботи спочатку носили сенсаційний характер, а пізніше захопили уми математиків, стали взірцем для наслідування.

Інтегральне числення Коші починає з введення визначеного інтеграла, для якого дає арифметичне доведення його існування (першим започатковує теореми існування об'єктів у математиці). Лише після цього дається розклад функції в ряд Тейлора, розглядуваний з позиції практичного наближення функції з невід'ємною його частиною – оцінкою залишкового члена. Теорія ілюструється різноманітними прикладами, які наочно показують переваги і продуктивність нової теорії. При цьому одним прикладом функції $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, яка не розкладається в ряд Тейлора в точці $x=0$, хоча останній в ній збігається, Коші показує нежиттєвість підходу Лагранжа і його попередників. Крім того, Коші начисто вигнав з математичної практики звернення до інтуїції, звільнив математичний аналіз від доведень, які використовували геометрію і механіку. Він поставив на порядок дня питання про строгість математичних доведень і більш загальне питання – про істинні основи математики. Теоретичне обгрунтування математичного аналізу Коші було настільки міцне, що воно зберегло своє наукове значення майже до кінця XIX століття. Лише в кінці XIX ст. з'явилася потреба нового перегляду цих основ у зв'язку з необхідністю ще більш строгого обґрунтування для понять, які входили в класичний математичний аналіз. Це було виконане творцями нового напрямку в математичних концепціях – прихильниками теоретико-множинного пояснення функціональної залежності.

О. Коші приймав діяльну участь в розв'язанні найважливіших проблем математики першої половини XIX ст. Його ім'я входить до когорти найбільш знаних імен європейських математиків, які працювали в різних галузях: Ж. Лагранж, Г. Монж, Й. Пфафф, К. Гаусс, М. Ампер, Ж. Ліувілль, С. Пуассон, У. Гамільтон та ін.

Задача Коші, критерій Коші, ознака Коші, послідовність Коші, інтеграл Коші, інтегральна теорема Коші, теорема Коші, нерівність Коші, інтегральна формула Коші, формула Коші, розподіл Коші, рівняння Коші-Рімана, умова Коші, квадрика Коші. Такий, далеко не повний, перелік різних математичних тверджень, які належать Коші і носять його ім'я, і кожне з них є фундаментальним для математики. Вони навічно ввійшли в скарбницю світової математики і вкарбовані в її безсмертні томи. По своїй значущості Коші порівнюваний лише з Гауссом. «Математичні науки були блискуче представлені в першій половині XIX століття знаменитим математиком (великим геометром)» – Ш. Ерміт. Г. Вілейтнер, відомий німецький історик математики, з легкістю ставить француза Коші на друге місце після німця Гаусса. І це в першій половині XIX ст., коли Німеччина на математичній орбіті обганяла Францію і мала цілу плеяду знаменитих математиків – Якобі, Діріхле та ін. По природі своїх робіт, по силі свого аналітичного генія, по талановитості використовувати в дії всі засоби числення йому немає рівних у питаннях, в яких його техніка використання інструментарію викликає захоплення і є надзвичайно продуктивною і плодотворною. По силі його математичної проникливості та інтуїції, по розмаху його звершень він стоїть в один рівень з К. Гауссом – королем математиків, набагато переважає його по продуктивності (щоправда багато зробленого Гаусс не опублікував) і можливо лише небагато поступався йому по глибині і далекоглядності. Коші, як і Гаусс, з великою досконалістю об'єднував «чисту» і «прикладну» математику. Його, як і Гаусса, можна швидше віднести до числа сучасних «чистих» математиків, оскільки він надавав велике значення не тільки гнучкості, але й точності як форми, так і висновків. У його роботах з'являється сучасна строгість, яка стала характерною рисою математики XIX ст. і нагадувала епоху розквіту математики у Стародавній Греції. І обидва вони з легкістю і віртуозністю користувалися дискретною і неперервною концепцією. Слід зазначити, що деякі роботи О. Коші були написані поспішливо, хоча і містили нові важливі результати, бо відкривали шлях нових математичних досліджень. В зв'язку з цим К. Гаусс жартував так: «Коші страждає математичним поносом». І, можливо, що в зв'язку з цим Коші відповідав йому, що «Гаусс страждав математичним закрепом». Вони гідні один одного і могли дозволити собі такі жарти! Коші – великий, бо сила його математичного таланту змогла охопити великий спектр математичних дисциплін і прокласти в них глибокі сліди на віки вперед. Мемуари О. Коші завдяки його солідній гуманітарній освіті написані прекрасною французькою мовою. О. Коші писав вірші на французькій і латинській мовах. Крім того, він і інтенсивний викладач (К. Гаусс викладанням майже не займався). Але у Коші є ніби щось таке, що не притягує (можливо, навіть відштовхує) шанувальників. О. Оре, наприклад, вважає, що Коші не любили математики, вважаючи його лицеміром і егоїстом. Думається, що, можливо, вони не мали до нього особистих симпатій (Коші був замкненою людиною), але він був для них великим авторитетом. Можливо, і через те, що він до глибини душі шанувальник короля. У радянські часи це було само собою зрозумілим. Але він був людиною і мав право вибирати: чи бути прихильником короля, чи бути республіканцем! Але своїх поглядів він не змінював. В цьому він достойний Й. Кеплера. Коші був переконаний, що та повсякденна робота, з якої народжується математична творчість, не може протікати серед суєти і безладу. Він хотів працювати якомога більше, а для цього мала бути якомога спокійна атмосфера і революційні події, які створювали нервозність життя, його не тільки не приваблювали, а були для нього шкідливими – звідки різко негативне відношення його до революції і до революціонерів. Він знав, що кожна революція починається всенародним захопленням, а закінчується всенародним жахом. В пам'яті у нього завжди були живими й незабутніми спогади його особистих лихоліть в роки дитинства, коли його сім’я змушена була кілька років бідувати в невеликому маєтку поблизу села Аркей, коли йому з важкими труднощами вдалося вижити. Такою була його позиція. Коші – великий прихильник еволюційних процесів і виважених реформ. І він, залишившись без посад після революції 1830 року, поїхав у вигнання, але поглядів своїх не змінив.

Однак, суспільно-політична діяльність Коші, на відміну від наукової, мала надзвичайно консервативне спрямування і його особиста чесність часто призводила до конфліктних ситуацій.

А може такий образ створений його сучасниками. Бо його недоброзичливці і політичні противники у надзвичайно турбулентну епоху створили стійку легенду: що місце республіканця Монжа (після жорстких репресивних мір королівського режиму) в академії зайняв безсоромно Коші – вчений, ненаділений совістю, злочинно неуважний до молодих вчених (Н. Абеля, Е. Галуа), праці яких були надіслані до Паризької академії наук і потрапили на рецензію до Коші. Але, відомий голландський вчений Г. Фройденталь, наприклад, по відношенню до історій з «непризнаними геніями» настроєний доволі критично: «Жалісливі історії, які розповідають про Абеля, проста вигадка… Абель помер не від голоду, а від туберкульозу… Те, що Коші загубив одну з його робіт, –

наклепницька вигадка. У всякому випадку вірно, що Абель помер занадто рано і не встиг завоювати більшої слави. Це відноситься і до Галуа…».

Є факт, що характеризує Коші інакше. У 1822 році Михайла Васильовича Остроградського посадили у паризьку боргову тюрму за вимогою хазяїна готеля, якому від сильно заборгував. Перебуваючи у тюрмі, Остроградський написав роботу по теорії хвиль у посудині циліндричної форми і надіслав її на розгляд Коші. Той не відкинув її, а схвалив і домігся публікації її у Працях Паризької академії наук. Більш того, він викупив Михайла Васильовича з тюрми, не будучи вже дуже багатим, і порекомендував його на посаду викладача у ліцеї. А, здавалося б, дивним: переконаний клерикал врятував бувшого студента Харківського університету, позбавленого диплома за вільнодумство і невідвідування лекцій по богослов"ю. Чи було це проявом необізнаності Коші у питаннях політичних поглядів російського математика, важко сказати.

Ненав'язливо зауважимо, що Коші з честю проніс звання академіка і було б більше жалю, якби він це звання не отримав (двічі ж був забалотований). Ці історії при багаторазовому повторенні обростали неправдоподібними деталями. Факти такі непривабливі дійсно були. Але в основному вони спричинені тим, що статті Абеля і Галуа (особливо) не володіли ні достатньою ясністю, ні достатньою повнотою, оскільки були частинами більш загальної теорії (до того ж, вони визначали нові концепції у математиці) і по них важко було висловити остаточну оцінку. На це чітко вказують звіти про засідання академії наук від 11 липня 1831 року (А. Дальма. Э. Галуа. Революционер и математик, М., Наука, 1984р., с. 90), зокрема, рецензенти С. Лакруа і С. Пуассон мемуару Галуа про рівняння. Геніальні математики часто мають такий недолік, який швидко проходить. Крім того, стиль Коші був стилем, який був прийнятний в академіях того часу. Бурхлива епоха, у яку жив Коші, була насичена катаклізмами, відзначалась великою ворожнечею, непримиренністю до своїх політичних опонентів, була насичена надзвичайною конкурентністю і не приймала ніяких компромісів. Потрібно зважити на те, що саме у цей період працювало кілька визначних математиків і фізиків: Коші, Пуассон, Фур'є, Лаплас, Монж, Ампер, Ашетт (що не прізвище, то велична особистість). Коші серед них був наймолодшим (на 10–30 років). Нелегко було пробивати собі дорогу. І його честолюбність змушувала прагнути професорського званя.

Народжувалися нові виробничі буржуазні відносини, точилася конкуренція, боротьба за першість, за виживання. О. Коші був продуктом свого часу. Цим все й пояснюється. Гуманність у нього могла бути, але, можливо, була не до всіх.

Терміни написання відгуків не є обмеженими, а звідси і одержуються факти такого роду. Якщо вказувати скільки відгуків написав Коші за своє наукове життя, то ці два становлять значну меншість. Крім того, Н. Абель і Е. Галуа в той час були невідомі у науковому світі, молоді. Це уже пізніше було введене представлення наукових статей в журналах відомими вченими, які були ознайомлені зі змістом роботи, що впорядкувало і спростило роботу рецензентів про визначення цінності наукової праці. Такої впевненості з ряду перелічених вище причин у Коші не було. Як він міг, заслужений академік-математик віднестись до написаного нікому невідомим автором, що не має закінченої університетської освіти (Галуа), погано відредагованої та ще, до того ж, і дуже незвичного на його думку (воно набагато випереджало епоху і стало зрозумілим сучасникам через декілька десятиліть). До того ж долучалась і його неймовірна зайнятість. Це легко сказати: протягом тижня представлявся Коші мемуар в Академію, причому мемуари різноманітного змісту. Ці факти можуть тільки означати, що душа Коші не була широко відкритою до сприйняття всіх молодих математиків. В цьому відношенні він був строгим, хоча часом і дозволяв собі розслаблятися. Крім того, у Коші ще зберігалися пережитки минулого (XVII–XVIII ст.) – безкомпромісна боротьба за пріоритет. Такий потяг у нього був хворобливим. Цим, напевно, і пояснюється його бажання прискорити публікування своїх математичних творів – він був і людиною нового часу.

Думається, що вразливі історії про неуважність Коші до молодих вчених (це було правилом того часу і цим «відзначався» не лише Коші) видумані його супротивниками (згадаймо хоча б приклади протилежного плану з М. Остроградським і Ш. Ермітом). А правда полягала в тому, що Коші, представляючи роботу Галуа 1 червня 1829 року (звіти про засідання Академії наук), виступав перед Академією зі своєю доповіддю і запропонував Галуа доопрацювати роботу, аби той зміг представити її на здобуття високої нагороди Академії з математики. Робота була доопрацьована Галуа, представлена Академії і була послана постійному секретареві Академії Ж.Б. Фур'є. Однак, у травні Фур'є помер, а рукопис серед його паперів не був знайдений. Галуа стверджував упередженість до нього Академії, оскільки його прізвище Галуа і він лише студент. Треба врахувати, що його позиція по відношенню до властей була подеколи афектованою. Такі історії, зокрема, виходили з уст Л. Рішара (1795–1849 рр.), який викладав курс спеціальної математики в колежі Луї-ле-Гран, палкого республіканця за своїми поглядами. Його вихованцем був Е. Галуа (1811–1832 рр.) – геніальний математик, який загинув на дуелі. Саме Л.

Рішар далі поширював історії про статті Н. Абеля і Е. Галуа. Для повноти картини необхідно додати ще й таке.

Еваріст Галуа – видатна молода людина, самобутній геній з надзвичайним максималізмом, який відзначався глибиною математичного мислення, яке мало вжитися з ультра революційністю, що приводило його до постійних конфліктів з урядом і своїми противниками. Він також відзначався непомірним високомірством та неприборкуваним темпераментом, не бажав підкорюватися будь-якому порядку, ніякому авторитету. Жага його натури була настільки сильною, що він постійно шукав конфліктів аби отримати душевну рівновагу. Його ідейний антипод – Коші.

Нільс Абель – великий норвежець, людина надзвичайного глибокого таланту, присвятив себе проблемам математики. Задавлений постійною бідністю, скромний до соромливості, надихався своїми власними науковими відкриттями. Він глибоко переживав свою невлаштованість, його характер і відсутність знайомств не дозволили йому зблизитись з Коші, з яким він хотів познайомитись і працювати, бо він знав по публікаціях, що лише той знає, що робити у математиці. Його чекала чергова невдача і він важко переживав несправедливість долі. Але Коші був прикладом для нього, бо той показав йому комплексні числа і Абель плідно займався ними.

В зв’язку з цим згадаймо і неприступність Гаусса. Напевно, це не були перебільшені розповіді Лежандра і інших математиків про нього, бо як він недоброзичливо зустрів появу неевклідової геометрії Я. Больяї говорить краще всього про це.

Звичайно, О. Коші – людина і ніщо людське йому не чуже. Це – людина велика! А у великих і справи великі, і великими є їх недоліки. Можливо ці недоліки і невеликі, але їх міряють великими мірками, або приміряючи їх до великих, недоліки самі стають великими. Про це вам самим судити. А Коші ж мав і право на помилки, як і кожна людина. Як би там не було, а Коші для нас математик першої величини, велет, а його людські якості, які в великій мірі є дітьми епохи, стоять на другому плані і з плином часу одержують нову якість, так само як виростають неслухняні діти, стаючи дорослими людьми, стають потрібними суспільству, а часто і представляють собою його найпершу цінність.

Трагізм його в тому, що за своїми суспільними переконаннями він не був прогресивною людиною (але чесності, принциповості, стійкого захисту своїх ідеалів у нього не забрати!) і, в той же час, у своїй науковій творчості правильно відображав навколишній світ і тим самим діяльно сприяв його пізнанню. Він був не тільки продуктом часу, але і діяльною людиною часу. Він мав свою принципіальну позицію і, як кожен, мав право на неї. А хіба більше притягує до себе відомий математик і механік П. Лаплас, який одержав титул графа від Наполеона, а титули маркіза і пера – від короля? Він легко змінював свої політичні переконання. Ніщо так не висвічує характери людей, як такі грандіозні соціальні потрясіння, подібні Великій французькій революції, злету і падінню Наполеона, реставрації, Ста дням і другій реставрації Бурбонів. Якби їх не було, ми б і не знали, що знаменитий математик і творець «Небесної механіки» був політично безпринципною людиною. Перший том свого безсмертного твору він присвятив «Наполеону Великому», а останній – монарху, який змінив Наполеона. І, мабуть не прогадав, маючи від них привілеї. Такі ж почесті отримував від Конвенту і від Наполеона відомий математик-геометр і якобінець Г. Монж, якого в 1792 р. примусили стати міністром військово-морского флоту і колоній. Він добре справлявся з своїми обов’язками, був непідкупним і став справжнім революціонером, а займати високі пости в Парижі в той час було небезпечно. Г. Монж мав високий авторитет у Франції і особливо в Політехнічній школі, був особистим безкорисливим другом Наполеона, який в 1804 р. присвоїв йому титул графа. Монж прийняв його з вдячністю і немов забув, що недавно голосував за відміну всіх титулів. Справи у Монжа йшли все краще і краще до 1812 року, який мав стати днем слави, а став початком дня краху для самого Монжа. З поверненням Бурбонів на трон Г. Монж втратив все, що було здобуто важкою працею заради Франції, заради прогресу: були забрані титули і нагороди, він був жорстоко вигнаний з Академії наук і змушений був ховатись від властей. Такою виявилася злою іронія долі для цієї великої людини.

У свідків цього білого терору реставрації, природно виникало питання: хто займе місце Монжа в академії? Чи знайдеться у Франції математик, у якого відсутнє почуття пристойності, щоб зайняти місце чесного і доброго громадянина, визначного вченого, засновника Політехнічної школи, що виховав десятки вчених зі світовим іменем?...

Така людина знайшлася. Це був випускник цієї школи і учень Г. Монжа – О. Коші, який уже був авторитетним математиком, молодим (27 років), честолюбивим, прагнув утвердження і самореалізації (до речі, це була у нього вже третя спроба потрапити в члени Академії), він проявив себе надзвичайним монархістом. Він був не обраний в Паризьку академію, а призначений королівською владою (декретом). Дитячі і юнацькі роки Коші прийшлись на найбільш яскраву у світовій історії епоху руйнування феодалізму і становлення демократії. Здавалось, що молодий вчений повинен був увібрати в себе республіканські демократичні ідеї Монжа, як це було з «двома тисячами його синів» з Політехнічної школи, яка була сильною своїми революційними традиціями, закладеними ним же. Але добре серце не передалось ні великому честолюбцю Наполеону Бонапарту, ні майбутньому великому математику О. Коші. І хто б міг подумати, що з юнака, ровесника революції, вирощеного нею в умовах Політехнічної школи (школи нового типу, душею її були революційні ідеали), виросте такий реакціонер, клерикал, навіть ультра реакціонер! Але таке життя, такі уроки історії: титанічні зусилля вихователів часто приводять і до зворотних цілей. Про це свідчать і приклади, які мали місце в історії науки. Тут Коші – непоодинокий! Очевидно, тут свою негативну роль у формуванні світогляду Коші відіграли катаклізми революційних подій, які стали причиною його важких страждань.

Серед математиків свого часу Коші був зіркою першої величини, і його наукові досягнення одержали широке визнання: він був членом і почесним членом майже всіх академій країн світу. Незважаючи на це, життя і наукова діяльність Коші в літературі висвітлені надзвичайно мало, а в Україні про нього взагалі нічого не публікувалось, за винятком в основному біографічних даних.

Портрет Коші, який створили його сучасники (в основному, політичні опоненти), не підпадає під просту схему. Його відношення до режимів, які у Франції того часу часто змінювалися, пояснюється лише його гордістю, наявністю особистих амбіцій чи злостивості. Оскільки така схема, це те саме: «Хто не з нами, той проти нас». Життя людей настільки складне, що ця схема його не описує. Доля О. Коші насправді є закономірною, його реакція на події, відношення до людей, що його оточували, – це не просто випадки. Вони зумовлені подіями тієї турбулентної епохи, що виховала таких людей. І не тільки Коші так страждав. Це відноситься і до інших великих людей тієї епохи. Вчені того часу повинні були остерігатися займатися політикою. Тоді, коли перемогла буржуазія, вчений не мав права підтримувати її противників – роялістів чи єзуїтів. Коші ж активно підтримував і перших, і других. Тому і мав відповідний портрет. В епоху, коли загальнолюдські цінності, що відповідають християнським принципам, вийшли на перший план, відношення до Коші має змінитися. Він того заслуговує!

Для нас О. Коші – близький і, з часом, буде ставати ще ближчим, хоча він своїми справами піднятий на п'єдестал. І стає він ближчим не тому, що опускається до нас, а тому, що ми піднімаємось до нього, оволодівши його здобутками. Він для нас – один з найбільш великих математиків, що заклав основи сучасної математики (теорії функцій, математичної фізики, теорії пружності, математичного аналізу). Його ім’я навіки вкарбоване в їх томи.

Коші написав понад 800 мемуарів., Повний список яких поміщений в книзі Валсона: "Le baron Aug. C.", а також в "Каталозі" Лондонського королівського товариства. З більших творів Коші відомі: "Memoire sur les integrales definiesprises entre des limites imaginaires", "Lecons sur le calculdifferentiel", "Memoire sur la resolution des equations numeriques etsur la theorie de l'elimination", "Memoire sur la theorie de lalamiere "," Exercices mathematiques ". Паризька академія наук видає його "Oeuvres completes". На російську мову перекладені: "Алгебраїчний аналіз" (Лейпціг, 1864), "Короткий виклад диференціального й інтегрального числення" (СПб. 1831; переклад В. Буняковського).

## 2. ЕПОХА

Життя і творчість О.Л. Коші (перша половина XIX століття) протікало тоді, коли в суспільному житті, природознавстві й математиці пройшли суттєві зміни.

Велика французька революція 1789 року і наполеонівська епоха створили дуже сприятливі умови для подальшого розвитку математики. В континентальній Європі був відкритий шлях для промислової революції. Вона спонукала розвиток фізичних наук, створила нові суспільні класи з новими поглядами на життя, покликала до діяльності здорові сили народу, зацікавлені в науці і в технічній освіті. Європою прокотилася хвиля промислово-технічної революції. В академічне життя увірвалися прогресивні демократичні ідеї, які заполонили душі молодого покоління, застарілі форми мислення викликали критику, школи і університети перетворювались, оновлювались і модернізовувались. Утворювалися навчальні заклади нового типу, до освіти були покликані не тільки діти дворян, але й інших верств населення. Ентузіазм народу одержав свій вихід у розвитку наук, зокрема й математики.

Усе це відбувалося в епоху бурхливих потрясінь, які переживала Франція. Ось важливі віхи в історії Франції за півстоліття:

1789–1793 рр. – Велика французька революція;

1795 р. – державний переворот Наполеона;

1816 р. – реставрація Бурбонів;

1830 р. – повалення династії Бурбонів. Революція і вигнання Карла X. Режим нового короля Луї Філіпа;

1848 р. – революція, король Луї Філіп повалений; новий уряд відмінив присягу при зайнятті державних і керівних посад;

1852 р. – державний переворот Луї–Наполеона. Відновлена присяга, але від неї звільнялися деякі особи, у їх числі і Коші.

Зазначимо, що в цих умовах нова й різноманітна математична діяльність була викликана не технічними проблемами, які ставила промисловість, а внутрішніми проблемами математики. Справді, Англія – колиска промислової революції, вже декілька десятиліть була математично безплідною. Більше всього математика розвивалась у Франції і дещо пізніше у Німеччині, країнах, де більш різко відчувався ідеологічний розрив з минулим і де пройшли радикальні перетворення, які підготували грунт для нового економічного і політичного ладу. Це призвело до нових революційних віянь і в галузі математики. Вона звільнилась від минулих стереотипів і від тенденції бачити кінцеву мету точних наук в механіці і астрономії. Заняття наукою ставало більш далеким від вимог економіки, військової справи, промисловості. Зв'язок з практикою ставав опосередкованим, хоча практичні задачі продовжували давати поштовх до розвитку математики. Цьому сприяв і великий розмах різноманітного будівництва. На перше місце виходила думка (домінуюча в XIX столітті), що наука (і математика також) має своєю метою возвеличення людського розуму (К. Якобі (1804–1851)), а на другий план була витіснена думка, що ціллю математики є суспільна користь і пояснення явищ природи (Ж. Фур'є (1768–1830)) або, принаймні, визнавався синтез обох цих думок.

У XIX ст. ми вже не знаходимо математиків при королівських дворах або в аристократичних салонах. І бути членами академій вже не було головним їх заняттям.

Розширилась сітка навчальних закладів, що готували спеціалістів, стало більше університетів, вищих технічних шкіл; професори університетів стали займатися науковими дослідженнями, академіки – викладати в університетах. Зросла відповідальність викладача, професори математики стають вихователями та екзаменаторами молоді. Збільшилась кількість періодичних наукових видань, що відкрило більш широкі можливості публікацій робіт, покращило інформативність. Тіснішають зв'язки між вченими однієї нації. Латинська мова (мова співробітництва між математиками) змінюється національними мовами зі збереженням міжнародних зв'язків.

З розвитком математики з'явилися тенденції до спеціалізації (математики починають працювати в окремих галузях), і вона стала поділятись на чисту та прикладну. Чиста математика стала більш абстрактною. Це вело до необхідності вдосконалення основних її понять, що поновили її базу і суть, і врешті-решт призвело до проблеми обґрунтування аналізу на високому теоретичному рівні. Це була епоха надзвичайної конкуренції. Математики, що працювали у цей час, вели дискусії, які часто набирали непривабливих рис і, часом, перетворювалися у відкритий антагонізм. Демократизація складу вчених ще відчувала на собі впливи відносин станів. Мета (одержання нових математичних результатів) виправдовувала жорсткі, що часом набирали риси жорстокості, відносини між ними. Навіть у наш час важко представити, що у одному місті в один і той же час працювало кілька визначних математиків і фізиків: Коші, Пуассон, Фур'є, Лаплас, Лежандр, Монж, Ампер, Нав'є, Ашетт. Зазначимо, що Коші серед них наймолодший! Це була епоха незвичайного наукового піднесення, яке панувало в умах значної частини інтелектуальної еліти суспільства, що прагнула нових знань, незвичайного, несла на своїх плечах прогрес і наближувала своєю титанічною працею ідеали науково-технічної революції, у яку входила тогочасна Європа.

В цей же час зростала роль математики в системі наук. В зв'язку з тим, що вона набула аналітичний характер (це явище стало домінуючим), математичні методи стали проникати не тільки в механіку, з якою математика була в контакті ще з часів Архімеда, але й у фізику, техніку і економіку. Математичний аналіз став головною галуззю математичних знань. Домінуючими стали методи, які не потребували геометричного зображення, геометричних чи механічних міркувань, оскільки вони підлягають лише логіко-оперативному закону, який здійснюється алгебраїчно шляхом перетворень. Механіка, геометрія і т.і. стають областями застосування математичного аналізу. Їх явища і процеси стали моделюватися з допомогою теоретичних конструктів математичного аналізу і диференціальних рівнянь.

В цей час продовжується диференціація математики.

Від аналізу відокремлювались теорія диференціальних рівнянь, варіаційне числення, теорія спеціальних функцій, теорія функцій комплексної змінної, теорія рядів.

Прикладна математика все глибше проникає у техніку, гідромеханіку, теорію машин і механізмів. Все це свідчило, що настав час математиків, які мали здійснити революційні звершення в математиці. Час О. Коші (аналітик), Штейнер (чистий геометр), Келі (алгебраїст) та інших настав. Настав час спеціалізації по математичній фізиці, пізніше математичній статистиці, математичній логіці і т.д.

# 3. БІОГРАФІЯ
## 3.1. ДИТИНСТВО

Огюстен Луї Коші народився 21 серпня 1789 року в сім'ї юриста Луї Франсуа Коші (1760–1848 рр.). Батько його був глибоковіруючим католиком і переконаним монархістом. Народження первістка відбулося в трагічні для батька сім'ї дні. Всього лише п'ять тижнів тому повсталі парижани розгромили Бастилію – почалася Велика французька революція. До революції  Луї Франсуа займав посаду головного секретаря лейтенанта поліції, тепер же йому довелося задовольнятися скромною посадою начальника бюро лікарень і благодійних майстерень в Парижі.

Дитинство О. Л. Коші припадає на складний історичний період кризи революції, коли більшість шкіл була закрита. В цей час Луї Франсуа Коші вирішив за краще виїхати з Парижу, де панував хаос і терор. Сім'я переїхала в невеликий маєток біля села Аркей, де умови життя були надзвичайно складними. Продуктів харчування не вистачало і доводилося самим на своїй землі вирощувати кукурудзу, картоплю, квасолю і інші овочі. Треба було звикнути до важкої фізичної праці, впорядкувати режим дня, оптимізувати роботу і організувати навчання і дозвілля. Двоїстість його характеру якраз склалась у цих надзвичайно складних умовах. Він полюбляв спокій, виваженість, одноманітність, розміреність і не сприймав будь-які потрясіння.

Першим його учителем і вихователем став батько. Батько уважно слідкував за фізичним і розумовим розвитком дітей. Вихованець Паризького університету, автор досліджень в галузі мовознавства, він усіма силами намагався дати прекрасну освіту двом своїм старшим синам – Огюстену і Олександру. Поступово він привчав їх до занять, зберігаючи міру і проявляючи яскраві педагогічні здібності. Батько не тільки викладав хлопцям весь курс класичної школи, але й робив це в яскравій і незабутній формі – у віршах, щоб діти краще засвоювали і запам'ятовували матеріал. Віршованими лекціями було заповнено багато зошитів, які потім зберігалися як сімейні реліквії. Знайомлячи своїх дітей з історією, з шедеврами літератури стародавнього світу, прививаючи їм смак до мови і літератури (О. Коші мав читати в оригіналах твори античних авторів), батько у кожному зручному випадку вставляв і релігійні повчання.

У сім'ї панувала атмосфера дружби і поваги. На все життя Огюстен зберіг синівську повагу до батька і сердечну ніжність до матері. Навіть, в зрілі роки, готуючись прийняти яке-небудь важливе рішення, він звертався за порадою до матері і цінував  її думку.

Математичні здібності Огюстена Коші проявились дуже рано, ще тоді, коли він навчався під керівництвом батька. З великою цікавістю хлопець вивчав основи лічби і геометрію. В зв'язку з цим його біограф Вальсон відмітив, що, проглядаючи старі навчальні зошити Огюстена, можна зустріти роботу з мовознавства, що несподівано переривається математичними викладками, очевидно, що в нього в голові сяйнула якась математична думка, яка і одержала своє втілення на папері в числах і фігурах.

Завдячуючи близькості помістя батька до багатих маєтків відомих у Франції математика П. Лапласа (1749–1827 рр.) і хіміка К. Бертоле (1748–1822 рр.), математичні здібності Огюстена Луї з дитинства стали відомі багатьом французьким вченим, які були з ними добре знайомі. З часом, коли Лаплас став канцлером сенату і старійшиною вчених, він пам'ятав молодого школяра і допомагав йому порадами і підтримкою.

З 1800 р. Луї Франсуа Коші зайняв високий пост секретаря сенату, де працював під безпосереднім керівництвом Лапласа. В кабінеті батька в Люксембурзькому палаці Огюстен часто займався математикою та іншими науками. Там його зустрів ще один відомий математик Ж. Лагранж (1736–1813 рр.), який звернув увагу на надзвичайне наукове обдарування хлопця. Одного разу (в 1801 р.) в присутності деяких членів сенату Лагранж передбачав його блискуче майбутнє і сказав, що цей хлопець швидко затьмарить всіх геометрів, настільки хорошими були його успіхи. Разом з тим Лагранж радив батькові не форсувати розвиток математичного таланту сина до 17-річного віку, а дати спочатку йому ґрунтовну гуманітарну освіту. В якійсь мірі ця порада була виконана.

## 3.2. ЮНІСТЬ

В 15 років Огюстен Луї перейшов від гуманітарних наук до природничих і перш за все – до математики. Доля готувала його до того, щоб він став великим математиком, який поставив математику на рейки, на яких вона розвивалася довгий час. Батько, напевне, передбачав, яку освіту дати Огюстену, бо він вибирав головні предмети і супутні, які б допомагали синові найкраще розвивати математичні здібності. Така лінія освіти виявилася благотворною, бо пізніше у Коші виробилась комбінація математичного генія із чудовим письменницьким талантом. Він складав вірші на французькій і древньоєврейській мові, на латині, виклав у віршах деякі факти математики та астрономії, був здібним публіцистом.

Після закінчення елементарного курсу занять під керівництвом батька Огюстен Луї вступив до престижної Центральної школи Пантеону

(1802 р.), де в 1803–1804 рр. одержав ряд нагород за видатні успіхи в області гуманітарних наук (сучасних і древніх мов та французької літератури), в тому числі Великий приз, який призначався від імені глави держави.

Для Коші 1804 рік був і роком першого причастя. Готуючись до цієї урочистої події, він склав для себе програму в формі моральних правил під назвою «Рішення», яким він хотів слідувати в майбутньому житті. Серед них виділимо наступне зобов'язання: «Я ніколи не буду хвалитися тією невеликою кількістю наукових знань, які я одержав з допомогою мого батька, розуміючи перш за все, що якщо я і знаю що-небудь, то це тільки тому, що до мене приклали зусилля, і що, якби він такої праці не затратив, то я був би таким же невігласом, як і багато інших дітей».

За порадою Лагранжа Огюстен Луї майже два роки навчався математиці під керівництвом професора Діне, одного із сусідів по помістю в Аркеї.

В 1805 р. 16-річний Коші поступив у знамениту Паризьку Політехнічну школу, витримавши екзамен другим по списку. Тут він досяг відчутної переваги над своїми товаришами. Він займався математикою захоплено, віддаючи їй багато сил і часу, знаходив розв'язки більш красиві й прості для дуже складних задач в порівнянні з уже відомими, тренував свій розум, готуючись до складної інтелектуальної праці. Його наставниками були: С. Лакруа (1765–1843 рр.), Г. де Проні (1755–1839 рр.) і М. Ампер (1775–1836 рр.).

Через два роки він вступив до Школи мостів і доріг першим по списку, яку закінчив у 1810 р. також першим по списку. Після закінчення цієї школи Коші було призначено кандидатом на посаду інженера на будівництві Урського каналу, а потім на спорудженні мосту в Сен-Клу. Його талант і діловитість забезпечили йому подальше призначення на роботу по будівництву укріплень в порту Шербур (1810–1813 рр.).

Але увесь час він думав і жив математикою. Незважаючи на велике завантаження практичною роботою, Коші у вільний час захопився самостійним вивченням праць великих Лапласа, Лагранжа та інших математиків, а також захопився повторенням основ усієї математики по визначеному, складеному ним плану, починаючи з арифметики. Крім того, він знаходив час для безкоштовного викладання і підготовки бідних юнаків, які готувалися до вступу у спеціальні школи. При цьому він викладав не тільки природничі науки, але інколи й латинську мову. Ця його сподвижницька діяльність (він захоплювався нею протягом всього свого життя) відповідала його християнським устремлінням і від проведеної роботи він мав велике моральне задоволення. В цей час він веде надзвичайно насичене життя, бо встає о четвертій годині ранку і працює за строгим графіком. Від напруженої та інтенсивної роботи він не втомлюється, а якраз навпаки, вона приносить йому велику насолоду і полегшення. Крім того, ці заняття послужили хорошим тренуванням до його майбутньої професорської діяльності. Він також займався і самостійними математичними дослідженнями В цей період Коші підготував свою першу наукову роботу по теорії зводів, яка була передана на відзив академіку де Проні, але була втрачена.

## 3.3. ПЕРШІ ПЕРЕМОГИ

Вже у 1811–1812 рр. Коші представив кілька мемуарів у Паризьку академію наук, а в 1813 р. він переїхав до Парижу і цілком зайнявся науковою і викладацькою роботою в Політехнічній школі, Сорбонні і Колеж де Франс. Перша праця Огюстена Луї з математики відноситься до теорії многогранників (1811 р.). Потім була праця по теорії директрис, а в 1813 р. з'явились вже три мемуари з області алгебри. Блискучий успіх мав мемуар Коші по означених інтегралах (1814 р.), який відкрив нову епоху математичного аналізу. Чудовим був і мемуар наступного року, який присвячений многокутним числам. Ще через рік (1816 р.) Коші розв'язав задачу з теорії поширення хвиль на поверхні важкої рідини. Вона була представлена на конкурс Паризької академії наук і отримала премію. Ці та інші дослідження показали силу, різносторонність і глибину Коші як математика. Його поступово стали визнавати одним з найбільш визначних і багатогранних математиків своєї епохи і найвидатнішим її аналістом.

Інтенсивна наукова робота стала основою для балотування О. Коші в Паризьку академію наук. У 1813 р. Коші балотувався перший раз в академію, а в 1814 р. – другий раз, але не пройшов (був обраний Пуансо (1777–1859 рр.)). У 1816 р., після реставрації Бурбонів, установи академії були піддані різноманітним перетворенням і з неї були виключені з політичних мотивів Карно і Монж. Монж (визначний геометр) дуже глибоко переживав нанесену травму і через два роки помер.

«Обрання» Коші в академію звершилось із тиском монарха (однак, в цей час Коші уже був визначним вченим і мав право бути обраним) і в перший час викликало бурю незадоволення. Але поступово незадоволення пройшло, хвиля протестів швидко затихла. Це сталося завдяки енергійній і інтенсивній науковій і викладацькій діяльності вченого.

## 3.4. ЗРІЛІСТЬ

З 1816 р. Коші став професором Політехнічної школи і Сорбонни, пізніше, – Коллеж де Франс, і розпочинає інтенсивну викладацьку діяльність. Як згадують слухачі, Коші був лектором від бога, майстром слова, цікавим розповідачем. Він викликав повагу, довіру аудиторії, часто навіть зачаровував слухачів і активно стимулював їх розумову діяльність, викликаючи захоплення і розуміння аудиторії. Новизна його наукових поглядів і оригінальність методів часто утруднювали сприйняття матеріалу його учнями. Але, бачачи їх хвилювання, він викладав складні місця більш деталізовано і зрозуміло. Його курси, які він читав у Політехнічній школі, Сорбонні, Колеж де Франс були зразковими, на першому краю розвитку науки, містили практичні задачі, викликали велике захоплення і користувалися великою популярністю серед молоді не тільки Франції, але й багатьох інших країн. Слава про успіхи французьких математиків початку XIX століття, зокрема і Коші, поширювалася швидко, докотилася вона і до Харківського університету. Одержати математичну освіту з перших рук, в найкращих інститутах Франції, де першокласні вчені Лаплас, Фур'є, Лежандр, Пуассон, Біне, Коші та інші прокладали нові шляхи в математиці, математичній фізиці і механіці, було прагненням багатьох юнаків, які горіли бажанням прислужитися математиці. Таке прагнення було і у М. Остроградського і В. Буняковського, які майже в один і той же час були в Парижі, де слухали лекції видатних корифеїв математики, які творили на її теренах справжні чудеса і звали за собою. Для них цей час був часом напруженого навчання і початком інтенсивних досліджень, бо молодим підкоряються вершини. Коші разом з Пуассоном вивчили поширення малих хвиль в басейнах нескінченної глибини і обмежених стінками та інші задачі математичної фізики. Коші поставив кілька задач відносно поширення хвиль в басейнах різної форми, поширення тепла в твердих середовищах і інші. Одним з тих, хто їх розв'язав був М. Остроградський. Його високо цінував Коші. На це вказують його схвальні відгуки про успіхи свого вихованця і співробітника, який розвивав і поглиблював його досягнення. Уже в 1825 р. в одній з своїх робіт Коші згадував тих, хто працював по його тематиці і написав: «Один російський молодий чоловік, Остроградський, обдарований великою проникливістю і досить обізнаний у численні нескінченно малих, дає нове доведення згаданих мною вище формул, вміщених мною в 19-у зошиті «Журналу Політехнічної школи». М. Остроградський люб'язно повідомив нам головні результати своєї роботи» (Историко-математические исследования, вып.17, с. 24). Ця стаття

Коші дійшла до Харкова і викликала бурхливу радість А. Ф. Павловського за свого вихованця. Це означає, що оригінальність результатів Остроградського (в ту пору атеїста і вільнодумця) викликала захоплення Коші – клерикала і ультрароялiста! Коші вмів цінити оригінальні і талановиті речі, але вони перш за все мали бути викладені чітко, переконливо, повно і зрозуміло. Це особливо є принциповим для речей, які є новими в математиці. Зазначимо, що Коші навіть рекомендував Остроградського в Колеж Генріха V, який був елітним навіть для математиків французького походження. Якесь тепле відношення у Коші було до цього українського хлопця, такого незграбного, могутнього і разом з тим безпорадного, як мала дитина, і такого талановитого. Коші, будучи небагатою людиною, викупив Михайла з боргової в'язниці Кліші, бо той заборгував за харчування і квартиру, а гроші з далекої Полтави від батька приходили так невчасно.

Велике значення для загального прогресу викладання математичних наук мали лекційні курси Коші по алгебраїчному аналізу, по численню нескінченно малих, по прикладаннях аналізу до геометрії та інші.

Завдяки своїм лекційним курсам і науковим роботам Коші став одним з основоположників сучасного строгого викладу математичного аналізу, вільного від оманливих, а інколи і помилкових «очевидних» геометричних представлень, від невиправданих посилань на інтуїцію. В роботах «Курс аналізу» (1821) (російський переклад «Алгебраїчний аналіз» (1864)), «Резюме лекцій з числення нескінченно малих» (1823), «Лекції по прикладанню математичного аналізу до геометрії» Т.1–2, (1826–1828) і «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении» (1831) були обґрунтовані сучасне диференціальне і інтегральне числення, теорія рядів (ознака Коші, критерій Коші). Виклад базувався на систематичному використанні поняття границі (Коші розвинув це поняття); його праці послужили зразком для строгої побудови аналогічних курсів після Коші. Він вперше в 1815 р. поставив питання про строге обгрунтування основних положень математичного аналізу того часу: функція, неперервність, похідна, інтеграл, сума ряду. Стандарт логічної строгості, який склався в математичному аналізі в другій половині XVIII ст. відставав від прикладань. Різноманітні прикладні задачі часто приводили до тверджень, які важко вдавалося узгодити один з одним, а інколи це неможливо було і зробити. Наявна теорія часто давала різні результати, а в ній зустрічалися нестрогі доведення, які часто базувалися на геометричній інтуїції, яка сама потребувала критичного перегляду. Роботи Л. Ейлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа лише в деякій мірі оздоровили математику, але не змогли здійснити необхідну перебудову основ математики. Теоретичні дослідження вимагали нових, більш витончених аналітичних методів, які б ґрунтувалися на чітких і строгих вихідних позиціях. Задача критичного перегляду системи визначень і логічних прийомів доведень набула для математичного аналізу ще більшу актуальність. Від її розв'язання залежала доля всієї математики. От чому дослідження по обґрунтуванню математичного аналізу було питанням важливої ваги. Це питання стало необхідною умовою перегляду основ математичного аналізу, що відкрило плодотворні шляхи для його розбудови, дало продуктивні методи для його практичного використання і створило стартові площадки для нових узагальнень. Здійснена Коші революція в математичному аналізі, перетворила його в струнку наукову систему, що послужило гігантським поштовхом розвитку не тільки самого математичного аналізу в XIX–XX ст., але й багатьох його суміжних математичних дисциплін. Строгість, запропонована Коші в математиці, стала еталоном строгості в математиці. Мудрість концепції Коші в тому, що математичний аналіз мав бути побудований на основі поняття границі, яка використовувала інтуїтивно зрозуміле поняття дійсного числа.

У своїх лекціях він дав означення неперервності функції, а також означення іншим основним поняттям аналізу, провів дослідження елементарних функцій, розробив вчення про абсолютну і умовну збіжність рядів. Коші пов'язав збіжність знакозмінних рядів зі збіжністю рядів, складених з модулів їх членів. Відносно абсолютної збіжності, введеної таким чином, він довів ряд теорем і поставив на достатньо стійку основу дослідження ознак збіжності ряду. Це питання поки-що було висвітлено недостатньо (Маклорен, Даламбер). Коші знайшов кілька достатніх ознак збіжності ряду. В лекціях по численню нескінченно малих Коші дав класичне означення інтеграла, розглянув поняття невласного інтеграла, відкрив новий погляд на проблеми розкладу функції в ряди, з'ясував значення залишкового члена ряду Тейлора. Він надзвичайно скрупульозно дослідив збіжність рядів з обов'язковою строгою аналітичною оцінкою залишкового члена. На жаль, у Коші не було ще представлення про рівномірну збіжність функціонального ряду (введена Л. Зейделем і Д. Стоксом (1848 р.)). І на цьому ґрунті він одержує, взагалі кажучи, неправильну теорему про неперервність суми збіжного ряду (1821 р.). На помилку вказав Н. Абель (1826 р.).

Зазначимо, що хоча Коші і поставив своєю метою обґрунтування математичного аналізу і заявив (1829 р.), що він досяг необхідних меж строгості, але одночасно з цим допустив ряд помилок. Зрозуміло, що вони є цілком природніми, якщо врахувати новизну і надзвичайну точність розглядуваних речей. В таких випадках досягти послідовності і узгодженості теорії в усіх її принципіальних моментах справа майже неможлива.

Тепер зупинимось на конкретному змісті помилок Коші.

1. Подібно своїм сучасникам, Коші був переконаний, що з неперервності функції слідує її диференційовність і сформулював кілька теорем, в умовах яких припускав тільки неперервність, тоді як при доведенні використовував диференційовність, причому в деяких випадках уперто не зважав на свої помилки.

2. Ввівши строго поняття визначеного інтеграла, Коші намагався показати, що для будь-якої неперервної функції значення такого інтеграла існує і єдине; однак наведене ним доведення є помилковим, оскільки він не мав поняття рівномірної неперервності. Це поняття було пізніше введене в математику Г. Кантором і К. Вейєрштрассом.

3. Ясно розуміючи різницю між збіжними і розбіжними рядами, Коші тим не менше неодноразово пропонував неправильні теореми про розбіжні ряди і наводив помилкові їх доведення. Так, він стверджував, що сума нескінченного ряду неперервних функцій неперервна (це правильно лише при умові рівномірної збіжності ряду). Аналогічна помилка мала місце у нього при інтегруванні ряду, складеного з неперервних функцій.

4. Коші запропонував критерій збіжності послідовності (критерій збіжності Больцано-Коші), але не зумів довести його в смислі достатності, оскільки для цього необхідно було використати такі властивості дійсних чисел, які не були відомі ні самому Коші, ні його сучасникам. Це стало можливим тільки після того, як були побудовані теорії дійсного числа Р. Дедекіндом, Г. Кантором і К. Вейєрштрассом (70-і роки XIX століття).

5. Коші також був переконаний, що якщо функція двох змінних має в деякій точці границю, коли кожна із змінних окремо прямує до точки, то ця функція повинна прямувати до границі і в тому випадку, коли обидві змінні змінюються одночасно і (змінна) точка $M(x, y)$ прямує до точки $M_0(x_0, y_0)$. Неправильність цього твердження Коші слідує, наприклад, для функції

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & якщо\ xy = 0, \\ 1, & якщо\ xy = 1. \end{cases}$$

6. Запропонувавши програму строгого викладу математичного аналізу, Коші у своїх дослідженнях часто відхилявся від цього правила, а продовжував ігнорувати строгість. Зокрема, він ніколи не доводив неперервність розглядуваних функцій, оперував з рядами, незважаючи на існування проблеми збіжності, допускав перестановку членів в умовно

збіжних рядах. Він міг дозволити собі таку розкіш, оскільки його безпомилкова інтуїція дозволяла йому вгадувати істину навіть тоді, коли її не вдавалося встановити у відповідності з стандартами строгості, але в підручниках для вищої школи це було просто недоречним, бо принаймні не узгоджувалося з проголошеною програмою.

В наш час такі помилки є неприпустимими навіть для студентів молодших курсів, які бачать далеко, тому що стоять на плечах Коші, який був першопроходцем і мав право на помилки.

Слід відмітити, що поряд з великою схожістю двох титанів, Гаусса і Коші, в цьому відношенні вони різко відмінні, що й породжувало психологічну неприйнятність один одного. Безмежно вимогливий до себе, Гаусс публікував порівняно небагато робіт. Навпаки, Коші публікував надзвичайно багато робіт. Очевидно, він намагався обійняти необмежене. При цьому деякі роботи у нього не були відпрацьовані, оскільки у книгах і статтях зустрічались помилки (зазвичай легко виправлювані, але інколи вони були серйозними), що викликало незадоволення Гаусса.

Зазначимо, що Коші був авторитетний математик. Уже до 20-х років XIX ст. він мав репутацію одного з найбільш великих математиків. Його нові ідеї сприймалися навіть маститими математиками і отримали визнання. Виступаючи в Академії з доповіддю про збіжність рядів, він так розхвилював уже старого П. Лапласа, що цей великий вчений поспішив додому, для того, щоб перевірити ряди в своїй «Небесній механіці». Здається, він встановив, що там немає грубих помилок.

В теорії диференціальних рівнянь йому належить заслуга постановки однієї з основних задач цієї теорії (задача Коші). Він сформулював і довів основну теорему існування і єдиності (при даних початкових умовах) розв’язків диференціальних рівнянь для випадку дійсних і комплексних змінних (для останніх він розвинув метод мажорант).

За 40 років творчого життя Коші написав 789 робіт, які друкувались головним чином в працях Паризької академії (вона обмежувала об’єми статей інших авторів аби справлятися з друкуванням наукової продукції Коші, тому що в деякі періоди свого життя він кожного тижня представляв академії новий мемуар), а потім були відображені у «Зібранні творів» в двох серіях, які охоплюють 26 томів. У його роботах закладені основи багатьох напрямів сучасної математики і її прикладань. Великою заслугою Коші є те, що він зробив вирішальний крок в сторону створення теорії аналітичних функцій комплексної змінної, основу якої заклали Л. Ейлер (1707–1783 рр.) і Ж. Даламбер (1717–1783 рр.). Коші розробив геометричну інтерпретацію комплексної змінної (як точки, яка пересувається в площині по тому чи іншому шляху інтегрування), встановив умови диференційованості в комплексній області, вивчив поняття комплексного інтеграла (теорема Коші), почав дослідження особливих точок, довів розклад функції комплексної змінної в ряд, розглянув поняття круга збіжності. Його роботи в цьому напрямі стали фундаментом подальшого розвитку теорії.

Коші запропонував метод інтегрування рівнянь в частинних похідних першого порядку, розробив теорію лишків, її застосування до різних питань аналізу. Фундаментальні дослідження Коші в математичному аналізі і математичній фізиці є настільки важливими, що відсувають на другий план його значні дослідження в інших галузях математики: алгебрі (розвивав теорію детермінантів, ввів поняття скінченної групи, розвинув вчення про симетричні функції і алгебраїчні рівняння), теорії чисел.

В області застосування математики головні результати Коші відносяться до деяких розділів фізики, астрономії, теорії пружності (ввів поняття напруженості, склав диференціальне рівняння рівноваги для елементарного прямокутного паралелепіпеда, розширив поняття деформації, вивів співвідношення між шістьма компонентами напруги і шістьма компонентами деформації для ізотропного тіла, дослідив також деформацію прямокутних стержнів, зокрема задачу про кручення), оптики (математично розвинув теорію Френеля і теорію дисперсії), теоретичної механіки, небесної механіки, гідромеханіки.

Науковій творчості Коші притаманний «глобальний» підхід до розв’язування поставлених проблем: знаючи результати для нескінченного числа значень досліджуваного об’єкта (графічно це зображується кривою), він виводив загальні властивості функцій для будь-якого значення об’єкта.

Коші – член багатьох іноземних АН (майже всіх академій світу), Лондонського королівського товариства, почесний член Петербурзької АН (з 1831 р.), кавалер ордену Почесного легіону. Він користувався надзвичайним авторитетом серед математиків. Цей авторитет він заслужив своїми великими відкриттями в усіх галузях математики. Головним у творчості Коші є фундаментальна ідея: розширити межі пізнання, підготувати ґрунт для подальших фундаментальних відкриттів. І лише цим можна пояснити деяку незакінченість його праць.

## 3.5. ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ

Ми вже відмічали, що з 1813 р. Коші працював у Політехнічній школі, Сорбонні, а пізніше – Колеж де Франс. Він був першокласним лектором, виконував свої обов’язки натхненно, бездоганно і скрупульозно.

Написав кілька підручників, які стали зразковими для дальшого викладання. Багато поколінь навчалося по його книгах, вчилися математичній строгості, логічній довершеності, систематизованості теорії і її прикладанням. Він учитель багатьох видатних математиків і авторів книг, які отримали широку відомість.

Педагогічна діяльність Коші була перервана в 1830 р. після повалення династії Бурбонів. Революція і вигнання Карла Х різко змінили його долю, яка вже набула стабільності. Коші був переконаним католиком і легітимістом і після липневої революції пережив складну і важку драму. Від нього вимагалась присяга у вірності новому режиму Луї Філіпа, але він безкомпромісно відмовився це зробити і був негайно звільнений з усіх посад. Не допомагало ні відоме ім’я, ні його великі заслуги перед математикою і перед освітою. Його також не влаштовувала перспектива стати приватним учителем і він вирішив залишити батьківщину. Спочатку відправився в Швейцарію, у Фрібург. У 1831 р. йому запропонували кафедру математичної фізики в Туринському університеті, яку створив спеціально для нього король Сардінії. Потім, 1832 р., Коші став вихователем колишнього наслідника французького престолу 13-річного принца-герцога Бордоського. Карл Х поселився в Празі і запросив Коші в якості вчителя і вихователя сина. Коші кілька років подорожував з ним по Європі. В нагороду за виховання сина Карл Х надав Коші титул барона. Однак обов’язки вчителя і вихователя принца, які Коші виконував відповідально, забирали в нього майже весь час і не давали можливості займатися математичними дослідженнями. Крім того, ще долучалась туга за батьківщиною. Коші пропонували різні посади, але він відмовлявся від них, керуючись своїми католицькими і роялістськими переконаннями.

У 1838 р. вчений вирішив повернутися в Францію. Місце в академії усі ці роки зберігалось за ним. В «Сповіщеннях» академії публікувались його роботи. На батьківщині Коші енергійно став вести подальші наукові дослідження. Інтенсивність в ці роки в нього збільшилась. В останні 19 років свого життя він помістив в різних виданнях академії більше 500 мемуарів. Майже в кожному з них містились нові відкриття, нові ідеї. Працьовитість Коші вражала сучасників і інколи він кожного тижня представляв Академії новий мемуар. З 1826 р. він почав друкувати «Exercices mathematiques», свій власний журнал, який містив його роботи з різних галузей математики. Крім математичних праць він писав і твори політичного та релігійного змісту. У 1839 р. Коші обрали в «Бюро Довгот» (одна з установ академії), але його не затвердив новий король. Однак Коші продовжував там працювати, щоправда, без утримання, і проявив себе як талановитий астроном.

Після лютневої революції 1848 р. король Луї-Філіп був повалений, а новий уряд відмінив присягу при зайнятті державних і громадських посад, що дозволило Коші зайняти вакантну кафедру в Сорбонні. Нова небезпека з'явилася в 1852 р.: після державного перевороту Луї-Наполеона Бонапарта –була відновлена присяга. Однак, за особливим указом, від неї звільнялися деякі особи, в тому числі Коші і Араго.

## 3.6. ОСОБИСТІСТЬ

Зазначимо, що світогляд Коші формувався у надзвичайно складний час. Згадаймо, що в ті часи відбулися три кровопролитні революції, кілька кривавих державних переворотів, велося декілька важких воєн. Все розпочалося великою французькою революцією 1789 року, яка до 1794 року декілька разів змінювала своє лице, що супроводжувалося складними суспільними катаклізмами. Франція була залита кров'ю. Багато визначних людей Франції позбулися своїх голів (Лавуазьє, Кондорсе і багато інших). Революція підняла на своїх руках багаточисленні ешафоти і завершилася державним переворотом Наполеона Бонапарта, правління якого супроводжувалося спустошливими війнами. О. Коші, як глибоко віруюча людина, з відразою відносився до насильства. Він був прихильником еволюційних змін в суспільстві, але не революційних. Суспільні потрясіння глибоко ранили його, виводили з душевної рівноваги, створювали дискомфорт в його розмірених заняттях наукою і викладанням. Він був інтелектуальним аристократом в політиці, безмежно консервативним і, навіть, реакційним, будучи людиною XVIII ст. Але в його бурхливий час, час складних потрясінь, час влади юрби і актів політичного насилля, що викликало в нього страх і жах, а тому він мусив схилятися, маючи чітку політичну позицію до того, що на його думку давало спокій і врівноваженість. Він вірив лише в розумні реформи. Його консервативні почуття були ностальгією по тих часах, які створювали спокій і відлагоджений стиль життя, які так були потрібні його заняттям цією чудовою наукою. Зрозуміло, що і замкненість занять математикою також в деякому відношенні породжувала його консерватизм поглядів і можливо несердечність у відношені до праць деяких молодих вчених, що, звичайно ж, породжувало їх адекватну реакцію у відношенні до нього, або, вірніше всього, він вимагав поваги до себе, до своїх власних якостей. І це було не більше, ніж гідність. Для Коші така реакція була принаймні незрозумілою, тому що, вихований в найкращих християнських традиціях, був поштивим до старших і, можливо, чекав відповідної поштивості від молодших. Але чи міг він її мати від молодих геніїв, які мали до того ж діаметральну політичну орієнтацію? Надзвичайна особиста честолюбність Коші пояснювалась лише надзвичайною любов'ю до математики, служінням своєму божеству усіма фібрами своєї душі. Вклад його в математику дійсно є монументальним, і його ім'я назавжди вкарбоване в її томи. Його недоліки легко знімаються при близькому ознайомленні з його натурою, з його глибоким внутрішнім світом, який непоказний зовні, але глибокий, міцно схований за гординею вразливості і християнської досконалості. Коші не був широкою натурою, розкритою для усіх, у ньому переважала більше замкненість, ніж гординя. Він був знаменитим математиком, але, можливо, не став великою Людиною – у цьому трагізм О.Л. Коші. Та й ідейні противники попрацювали занадто добре аби якомога гірше очорнити його. А наукові успіхи його були безсумнівними. Це, а також твердість його позиції, викликали заздрощі і політичну пильність, які зумовлювали критику і упередженість.

Зазначимо, що своїм відношенням до релігії він створював собі проблеми ще в молоді роки. В листі до матері (1810 р.) він виливає свою душу: «вони стверджують, що моя відданість примушує мене загордитися, стати самовпевненим і захопленим собою». Самовіддано працювати навчили його у Політехнічній школі, а потяг до математики був у О. Коші ще з дитинства. Звичайно ж його великі успіхи в математиці породжували нездорове відношення до нього. Та, крім того, О. Коші не був вільним і від амбіцій.

Коші не мав особливо хороших відносин з іншими вченими, доречніше сказати, що він мав складні відносини з багатьма математиками. В це число потрапляють Ж. Ліувілль, Ж. Понселе, Ж. Дюгамель та інші математики Франції того часу. І все з приводу пріоритету взагалі в незначних питаннях, в дрібницях. Це відбивалося на його житті, створювало грунт для гіркої печалі, захмарювало небосхил відносин, що, можливо, і вкоротило його життя. Постійні суперечки не надавали йому оптимізму, а вели до усамітнення і замкненості. Себе він знаходив лише в інтенсивній математичній роботі. О. Коші – яскравий приклад трудоголіка, його факел горів, як тільки він починав займатися якоюсь математичною проблемою. Коші буквально пронизував її силою і могутністю свого емоційного таланту. Його розум не припиняв своєї титанічної діяльності аж поки проблема не була вирішена. Величезний науковий творчий потенціал Коші не мав поразок таких, які мала його боротьба за пріоритет. Справді, він прагнув обняти надзвичайно широкий діапазон математичних наук і, зрозуміло, що в цих областях працювало багато математиків, які одержували також перемоги і, звичайно, відстань у кілька років у XIX столітті на математичних фронтах була вже звичайним явищем. О. Коші, маючи таку величезну творчу геніальність, використав її в повному об'ємі, одержавши надзвичайно багато нових результатів, та навіть без кількох з них велич його імені не зменшиться, але поява навіть одного інциденту з визнанням пріоритету для математика такого рівня є явищем неповторним і жалюгідним.

В психологічному плані Коші був складною натурою. Він непримиренно відносився до захисту своїх авторських прав, інколи вступав у спір про пріоритет навіть по дрібних питаннях. Високоосвічений, ввічливий і доброзичливий навіть до простих людей – сусідів, яким він багато допомагав і матеріально, він разом з тим халатно і недоброзичливо відносився до молодих вчених. Відомий наступний факт: одну з кращих своїх робіт молодий норвезький математик Н. Абель (1802–1829 рр.) представив Паризькій академії. Коші доручили рецензувати цю роботу, але він… загубив її в своїх паперах (це було звичайним явищем в академії, згадаймо хоча б подібний факт з роботою самого Коші, правда, ці факти мало афішуються). Тільки після енергійної настійливості німецького математика К. Якобі Коші вдалося відшукати роботу Абеля. Але, на жаль, це трапилося вже після смерті її автора. Таку ж негативну роль відіграв Коші і в долі іншого молодого математика Е. Галуа (1811–1832 рр.). Думається, що таку репутацію Коші створили його ідейні противники, хоча того, що у нього було негативного, у нього забрати не можна.

30 жовтня 1826 р. на засіданні Паризької академії наук О. Коші повинен був зробити повідомлення про зміст одного із представлених Н. Абелем мемуарів. Надмірно зайнятий своїми ідеями і роботами Коші загубив мемуар серед своїх паперів. В 1830 р. Абелю (посмертно) за ці дослідження разом з К. Якобі була присуджена велика премія Паризької академії наук. Це вже після смерті Абеля Коші відшукав загублений раніше ним мемуар, протягом тижня підготував повідомлення, зробив його на черговому засіданні академії наук, де і було прийнято рішення про присудження Абелю і Якобі великої премії.

Можливо (така думка має право на існування) ця робота і «загубилася» у Коші через те, що містила теорему Абеля про неперервність, яка ліквідовувала недолік самого Коші, допущений ним у «Курсі аналізу», бо Абель протиставляє хибному твердженню Коші про те, що ніби сума збіжного ряду неперервних функцій є неперервною функцією твердження: якщо степеневий ряд збіжний в якій-небудь граничній точці його круга збіжності, то він рівномірно збіжний на всьому радіусі, що веде в цю точку і, значить, функція, яка представляється цим рядом всередині круга збіжності при прямуванні до заданої точки по радіусу має границю, рівну сумі ряду. В своєму знаменитому мемуарі, який був присвячений біноміальному ряду (1826 р.) Абель наводить приклад ряду, складеного з синусів: $sin\,x-\frac{1}{2}sin\,2x+\frac{1}{3}sin\,3x-...$; хоча цей ряд збіжний при всіх значеннях $x$, але його сума в точках $x=(2m+1)\pi$ ($m$ – ціле число) має розрив. В той же час по відношенню до степеневого ряду Абель строго довів неперервність його суми при кожному значенні змінної, при якому ряд збіжний, навіть якщо це значення співпадає з кінцем проміжку збіжності: якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ збіжний (хоча і не абсолютно) при $x=R$, то його сума $f(x)$ при цьому значенні неперервна зліва, тобто $f(R-0)=\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n$ .

При доведенні Абель фактично встановлює наявність тієї властивості, яка пізніше одержала назву рівномірної збіжності ряду. Це поняття, і сам термін, з'явились у К. Вейєрштрасса (1841 р.) в роботі, яка була опублікована значно пізніше, а різниця між рівномірною і нерівномірною збіжностями була досліджена Л.Зайделем (1848 р.) і Д. Стоксом (1849 р.).

А праці другого молодого математика Е. Галуа (1811–1832 рр.) також двічі, – у 1829 р. та 1830 р. загублювались у Коші.

Є гіпотеза, що Коші так відносився до молодих математиків, які займалися близькими до Коші проблемами і могли бути його конкурентами. Але думається, що все-таки не в цьому справа. Адже згадаємо його відношення до М. Остроградського – математика, який займався поширенням тепла (цими задачами займався і Коші), і Коші з великою похвалою віднісся до нього, допомагав, піклувався по-батьківському. О. Коші про молодого Остроградського висловився так, що він «вельми тямущий і обдарований неабиякою проникливістю». Краще відізватися великому метру про юнака, що робить перші серйозні успіхи мабуть і не можна. Навіть через 30 років після свого перебування в Парижі, з нагоди свого обрання в члени-кореспонденти Паризької академії наук, М. Остроградський просить передати його подяку математикам академії і Коші, «моєму знаменитому учителю, вченому, який охопивши усі науки у всій їх широті, поширив їх межі подібно Ейлеру». Так само по-батьківському відносився Коші до свого молодого співвітчизника математика Ш. Ерміта (1822–1901 рр.). Він допомагав йому, коли той важко хворів, був уважним до його математичних занять. Після цього між ними встановилися дружні відносини, Ерміт став переконаним католиком і завжди пам'ятав свого вчителя «дорогого и обожаемого учителя» – це слова Ш. Ерміта. Коші сам був переконаним католиком, намагався поступати згідно своїх принципів і вважав, що людина без коливань відкине будь-яку гіпотезу, яка суперечить істині.

Думається, що причина такого відношення в іншому: Коші, очевидно, так відносився до кожного, хто мав відкриті і яскраві республіканські переконання. Тобто, він завжди і у всіх випадках був консерватором і ні на йоту від цього не відступався. Маючи надзвичайно тверді політичні і релігійні переконання, він толерантно не відносився до своїх противників, можна сказати, що відношення було навіть ворожим. Це почасти переносилось і на відношення до них в наукових сферах. Компромісу не могло бути ні за яких обставин, бо вони відповідали взаємністю. Недружнє відношення могло породити тільки недружнє відношення. Можна тільки гадати, як би все складалося, коли б Коші мав республіканські переконання. Про це навіть важко собі уявити, оскільки кожна молекула його тіла була відданою тільки Бурбонам! Ми можемо тільки додати, що О. Коші був людиною свого часу, коли відбувалися запеклі сутички між клерикалами і радикалами. Вони обмінювалися ударами і вважали нанесення їх якомога болючіше справою честі.

Причину часто недружнього відношення Коші до видатних молодих математиків, очевидно, не визначалися хворобливим відношенням до їх успіхів, які часто лежали в тих наукових сферах, якими займався і сам Коші, як про це люблять писати люди протилежних партій. Вони відносились до особи Коші і до його успіхів упереджено.

Крім Остроградського, Коші мав ще багато учнів. Найбільш значні з них є Ж.К. Буке (1819–1885 рр.), член Паризької АН та Ш.О.А. Бріо (1817–1882 рр.) (вони відомі по рівнянню Бріо і Буке). Крім того, вони ввели терміни «голоморфний» та «мероморфний».

Розгніваний на Коші, Абель називав його в своїх листах з Парижу на батьківщину ханжею і єзуїтом. Підстав так говорити Абелю додавало і те, що йому не вдалося встановити особистих контактів з Коші, незважаючи на всі його прикладені зусилля, а таких контактів він прагнув. Це було вираженням погляду на Коші зі сторони молодих паризьких математиків. Дійсно, Коші активно підтримував єзуїтів, випустив дві книги на їх захист, допомагав матеріально у боротьбі з противниками католицького вчення. Поділяючи консервативні і навіть реакційні погляди, він недоброзичливо відносився до прогресивної філософії XVIII ст., яку вважав джерелом багатьох бід і занепаду моралі. Як свідчить біограф Вальсон, при виборах нових членів академії голос Коші визначався не науковими заслугами кандидата, а близькістю політичних і релігійних поглядів того до його власних. Разом з тим Коші виступав ініціатором збирання різних благочинних пожертвувань. Він наполягав на звільненні від податків бідних молодят, клопотався про допомогу голодуючим ірландцям.

По політичних переконаннях Коші – ультрарояліст, прихильник старої вітки Бурбонів, клерикал. Зазначимо, що це була людина з чітко вираженою політичною позицією. Причому його позиція варта поваги, оскільки він її не змінював ні за яких обставин і від цього мав складні періоди свого життя. Всі обставини життя Коші суттєво залежали від історичних подій і політичної ситуації в країні. Це було непросто, оскільки О. Коші був одруженим з 1818 р. з Алоїзою де Бюр і у них було дві дочки. У 1830 р., після липневої революції і падіння Бурбонів, він емігрував з Франції. Не міг же він відмовитися від тієї присяги, яку їм приніс! У цей час кілька років він був учителем і вихователем сина короля, який на той час теж був у вигнанні. Повернувся лише 1838 р. і, не маючи права викладати без принесення присяги (він відмовлявся її прийняти) існуючому режиму нового імператора Луї Філіпа, викладав у другорядному єзуїтському коледжі, але одержав світове визнання ще за життя, будучи членом майже всіх академій. В кінці 1848 р. після нової революції він одержав місце в Сорбонні, але присяги так і не приніс. Лише пізніше заслуги Коші були оцінені і він був звільнений від приймання присяги. Можливо, що деякий спокій міг принести Коші відхід від активного і переконаного висловлювання своїх поглядів. Але б напевно, він був би не Коші, якби так зробив. Він не міг цього зробити, бо це була не просто людина, а особистість з своїми переконаннями, які він ставив над усе.

Тут ми можемо висловити жаль з приводу цього: з одного боку небажання нових урядів працювати з людьми (навіть такого високого ґатунку, як Коші), які мають інші переконання, а з другого боку обмеженість поглядів людини, яка була «майже поряд з К. Гауссом» (за висловом Ф. Клейна) в математиці, але не відчувала пульсу життя – належність людини до якоїсь партії.

Ми відкидаємо твердження деяких математиків, які вбачали, що надзвичайна продуктивність Коші пояснювалась лише його власними амбіціями, корисливістю і прагненням працювати лише для себе, в намаганні закінчувати досліджування аби скінчити їх. Ми знаходимо цінність його досліджень в прокладанні нових шляхів в математиці. Навіть тоді, коли Коші досягав вершини, він не повертався назад, залишаючи іншим прокладати царські дороги в математиці. Звичайно, Коші був честолюбивим і в пору великої конкуренції, його незвичайна захопленість математикою і працелюбство, породжували нестримний потяг до одержання нових звершень у математиці.

Діяльність Коші стимулювала грандіозні математичні успіхи наступних поколінь і в першу чергу Вейєрштрасса і Кантора. Створена ним математична техніка дала можливість розширити фронт математичних досліджень і, разом з тим, поглибити і підвести надійний фундамент. Його глибокі оцінки відіграли основоположне значення в подальшому розвитку математики, незважаючи на реакційні ідеали.

Дослідження Коші стали стартовими для проведення нових досліджень практично в усіх його сферах. Його фундаментальні методи стали домінуючими в багатьох розділах математики, а ідеї плодотворними і продуктивними. Математики використовували у своїх роботах його концепції, ідеї, його підходи, методику, збагачуючи відкриттями їх значення і могутність, які несли слід і силу його генія.

Результати Коші відкрили шлях загальній теорії функції, важливому аналітичному творінню кінця XIX – початку XX століттів. Пам’ятні відкриття Рімана і Вейєрштрасса на цьому шляху, знаменита теорема Міттаг-Леффлера були підготовлені працями великого французького геометра. Ще до Пюізьо Ерміт застосував теорію функції комплексної змінної за Коші до теорії еліптичних функцій і поширив теорему Коші про лишки на кратні інтеграли від функції комплексної змінної. Теорію інтегралів функції однієї комплексної змінної, створену Коші, А. Пуанкаре поширив на кратні інтеграли.

Бріо і Буке продовжили праці Коші про властивості функцій, які визначаються диференціальними рівняннями. Вивчення цієї праці стало стартовим майданчиком для досліджень А. Пуанкаре (1854–1912 рр.) в теорії диференціальних рівнянь. У 1882 р. він поширив результат Коші на системи диференціальних рівнянь в частинних похідних (умови збіжності ряду Тейлора) на ряди, які представляють розв’язки системи, а С.В. Ковалевська (1850–1891 рр.) одержує теорему існування і єдиності розв’язку задачі Коші для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Конструктивне продовження одержали і дослідження Коші в інших галузях науки. Ми не можемо згадати тут всього того, чим зобов’язана Коші наука, але ми можемо, принаймні, сказати про те, чим зобов’язані йому всі ми. Його праці глибокі і надихаючі, вчать нас розуміти математику, її суть, її творчі пружини. Його життя цілком і повністю присвячене науці, а любов його до математики є взірцем любові для всіх майбутніх поколінь. Ідеї, якими так щедро наповнені його твори, представляють собою нетлінне багатство математики і є джерелом нових математичних досліджень. Вони впливали на слухачів і читачів як безпосередньо, так впливають і на відстані часу, бо представляють собою родюче джерело нового. Слава, яку шукав Коші (на цьому наполягають його ідейні противники), приходила і приходить до нього навіть не хотячи. Її він достойний, цінність його праць безсмертна.

Помер Коші 23 травня 1857 року і похований в містечку Со, де була школа, якою він опікувався.

# 4. ПОЛІТЕХНІЧНА ШКОЛА У ПЕРШІ ДВАДЦЯТЬ РОКІВ СВОГО ІСНУВАННЯ

*Політехнічна школа – школа нового типу.*

1. Передумови організації Політехнічної школи.

У 1789 році в результаті революції буржуазія прийшла до влади, перемігши дворянство і духовенство. Ідеологи буржуазії створювали систему раціоналістичної філософії, відстоювали пріоритет природничих наук і проповідували ідею загальної освіти. Соціальна революція відкривала шлях до демократизації школи, реальної (життєво корисної) освіти і гармонічного розвитку особистості. Нові суспільні умови створили ґрунт для розгляду цілого комплексу питань, пов'язаних з освітою і вихованням. У законодавчі установи революційної Франції надійшло кілька проектів (Кондорсе, Лепелетьє, Лавуазьє та ін.), у яких пропонувалась перебудова організації освіти: введення обов'язкового безоплатного навчання, вилучення шкіл з рук духовенства, озброєння учнів реальними знаннями (цього вимагали потреби зростаючого виробництва), виховання дітей в дусі республіканського патріотизму, відмова викладання релігії і т. ін. Жоден з проектів не був втілений в життя, але революція відкрила доступ буржуазії в середні і вищі навчальні заклади, поклала початок спеціальній освіті, відкрила шлях до створення елементарної народної освіти. При цьому поширюється роль держави у справи освіти і виховання.

2. Організація Політехнічної школи.

Початком нового періоду в розвитку математичної освіти у Франції, який став епохою піднесення математики у Європі, є заснування військових шкіл і академій у кінці XVIII ст. Такі школи існували і за межами Франції: артилерійська академія у Турині (Італія), військова школа у Вулвічі (Англія). Але поява їх у Франції стала явищем надзвичайно позитивним у розвитку математики, оскільки у них мобілізувалися найкращі молоді сили усієї країни, найкращі науковці викладали і сам процес викладання був організований так досконало, що результати виявилися кращими від очікуваних. Значна частина часу відводилась математиці, яка ставала складовою і найбільш важливою частиною підготовки військових інженерів. Централізація такої підготовки пояснювалась необхідністю мати такі кадри, які б могли вирішувати ті проблеми, які поставали перед країною. Політехнічна школа стала провідним навчальним закладом, оскільки її випускники могли продовжувати навчання у головних військових школах, тільки вони могли займати головні посади у державі. Політехнічна школа стала еталоном для усіх технічних і військових шкіл, включаючи Вестпойнтську школу (США).

Знаменита Політехнічна школа була організована в Парижі 11 березня 1794 року декретом Конвенту і спочатку називалася «Центральною школою публічних робіт». З 1 вересня 1795 р. цей вищий навчальний заклад був перейменований в «Політехнічну школу», девізом якої з 1805 р. стали слова: «*Батьківщина, наука, слава*». В тому ж році школу перевели в нові приміщення на горі Св. Женев'єви. Це був важкий період революції, коли ліквідація всіх навчальних закладів і втрата молодих людей вимагали нагальних конструктивних рішень в питаннях підготовки елітних професійних кадрів для потреб нової французької держави. Школа була організована для підготовки і виховання офіцерів революційної армії, а пізніше – армії Наполеона.

*Політехнична школа на горі Святої Женев'єви (Париж)*

Організатором, керівником і натхненником Політехнічної школи був Г. Монж (1746–1818 рр.) – відомий математик і політичний діяч наполеонівської епохи. Він був головною рушійною силою цієї великої справи. Монж ще до паризького періоду свого життя, у військовій школі в Мезьєрі методикою викладання нарисної геометрії передав багаточисленній аудиторії імпульс до подальшої роботи в області математики. Його науковий вплив вийшов далеко за межі Франції. Наукова і педагогічна діяльність Монжа знаходилась у повній рівновазі з його адміністративними і організаторськими інтересами. У той час математик і інженер були героями дня. Школа, вирішальний вплив в якій належав такій людині, по своєму характеру була націлена на виконання практичних проблем того часу. Це сприяло і формам організації навчання, що цілком були розраховані на крайнє напруження сил, на досягнення якомога вищої успішності. Всі міри строгості, підігрівання честолюбства, картини блискучих життєвих перспектив – все це використовувалось для гранично високого розкриття сил.

Сплав досвіду і молодості давав свої швидкі результати. Важливою складовою навчального процесу було поєднання навчання з дослідницькою роботою. Кращі вчені Франції були запрошені для викладання. Кар'єра видатних математиків (Лагранжа, Лапласа, Монжа, Лежандра та ін.) продовжувалась у Політехнічній школі. Для якісної підготовки інженерів-будівельників, інженерів-шляховиків, гірничих інженерів, військових інженерів були запрошені кращі науковці Франції.

Якраз завдяки своїй військовій спрямованості вона збереглася, незважаючи на зміну конституції. В усі періоди її значення зростало, вона розширялась, була престижною в усі часи і відповідала своєму високому статусу і, що головне, готувала прекрасних кандидатів, які після двох років навчання в Політехнічній школі мали продовжити інженерну освіту в «Інституті шляхів сполучення (доріг і мостів)», «Гірничому інституті» і військових школах (Воєнно-інженерній та артилерійській школах). Ці школи були не однаковими за своїм рангом. Ми їх перелічили в порядку його спадання. Випускники кожного з цих вузькоспеціальних інститутів одержували елітні призначення на цивільну чи військову службу.

Треба віддати честь Наполеону за те, що він одним з перших зрозумів, що невігластво само по собі не може принести нічого, крім руйнувань. Революція (1789 р.) перейшла в терор 1793 р., під час якого панувала влада нечуваної жорстокості. Замість всенародного благоденства всі побачили вчених, які відправлялися на ешафот або рятувались втечею, а наука боролася за своє існування.

Наполеон наказував створювати навчальні заклади або спонукав до цього. Але не було вчителів. Тому необхідно було їх мати (1500 чоловік). З цією метою була відкрита Нормальна школа, в якій став працювати Ж. Фур'є.

Конвент запросив творців математики викладати її, причому, професорам було заборонено читати лекції по записках! Була створена атмосфера вільного спілкування викладача і учнів, яка розкріпостила учня і розбудила в ньому творчі сили, що привело до блискучого періоду в розвитку французької математики. В ній запанував революційний дух свободи.

Коли Наполеон коронувався імператором, молодь з Політехнічної школи запротестувала.

Керівник школи Г. Монж захищав їх, говорячи, що Наполеон достатньо попрацював, щоб зробити їх республіканцями, то нехай почекає, щоб вони стали прихильниками імператора, та й дії його дуже різкі: від республіки до імперії.

Зазначимо, що організація і функціонування Політехнічної школи повністю відповідали її задумам одержати прекрасних спеціалістів. Політехнічна школа ввібрала в себе усе краще, що було на той час в освітньому просторі Франції. Вона також стала гігантським кроком вперед у справі вищої школи, тому що розв'язала гострі проблеми поповнення інженерного корпусу, який був тоді у дефіциті. Успіхи французької армії на початку XIX ст. пояснювалися не лише високим розвитком математики у Франції та її професійним викладанням у Політехнічній школі, а й тим, що відбір кандидатів у офіцерський корпус здійснювався по успіхах у математиці. Це один з яскравих прикладів державної політики: математика і математики високо цінувались державою не лише на словах, а й на ділі.

Зазначимо, що у вищій школі XVIII ст. в основному вивчалася елементарна математика. Тому, крім вчених трактатів для підготовлених читачів, що були типовими для часів Ейлера (1707–1783 рр.), потребувалися підручники для студентів цієї школи. І вони були написані лекторами Політехнічної школи: С. Лакруа, Г. Монжем, Біо та ін. По їх підручниках цілі покоління вивчали аналіз, нарисну геометрію, аналітичну геометрію. Їх вплив можна прослідкувати і до наших днів.

При створенні Політехнічної школи була продумана кожна складова її функціонування: від залучення абітурієнтів, вступних іспитів до випускних іспитів. Уся діяльність у школі була підпорядкована єдиній меті – отримати кваліфікованого інженера.

3. Організація вступу в Політехнічну школу.

По усій Франції розсилалися завдання з математики для учнів, що мали знання за середню школу. Велика кількість вправ давала можливість ґрунтовно оволодіти цим матеріалом. Потім слідував дуже строгий екзамен, у результаті якого з великої кількості претендентів відбирались 150 осіб, які були зараховані. Відбір відбувався чисто статистично, по кількості «пунктів», набраних з 2000 можливих. Абсолютний рекорд за увесь час існування школи складає 1875 пунктів і він належить відомому математику Ж. Адамару (1865–1963 рр.).

4. Діяльність Політехнічної школи.

Політехнічна школа – школа інженерної освіти нового типу, якій не було рівних у світі. Вона виникла в час, коли Франція переживала період гострої нестачі кваліфікованих спеціалістів технічного профілю. В основі її головної ідеї було положення про те, що різні галузі техніки і промисловості вимагали практично однакової підготовки з математики, фізики, механіки, хімії, креслення, а також, впевненість у тому, що студент з такою підготовкою в подальшому успішно оволодіє необхідними знаннями у будь-якій спеціальній області.

Принцип, покладений в основу системи вступних екзаменів (зберігається і донині) закладає у своїй основі, що «екзаменатор повинен бути впевненим в інтелігентності кандидата», тобто, він повинен звертати увагу не на заучування предмета, а на його глибоке розуміння. У Політехнічній школі, як писав Ф. Клейн («Лекции по истории математики») «усі міри строгості, впливу на честолюбство, окрилене перспективою блискучої життєвої майбутності, залучались для того, щоб примусити учнів до крайності напружувати свої сили. Знання вбивалися в голову до повного володіння предметом». А Олександр I, після відвідин цієї школи, відмітив, що «це найкраща установа, створена людиною» (Воронина М.М. Габриэль Ламе. М., Наука, 1987).

Політехнічна школа використала багатий досвід ліцею Людовіка.

Ліцей Людовіка Великого славився своїми традиціями: там були введені різноманітні нагороди за успішне навчання, участь у щомісячних конкурсах серед учнів. Найбільша увага у ліцеї приділялась викладанню математики, латині, французької мови, малювання, вихованню почуття дружби, взаємодопомоги і відповідальності.

Звичайно, Політехнічна школа була привілейована, але діяла вона в режимі наближеному до оптимального і була надійним фактором духовного розвитку у Франції на початку XIX століття і пізніше. Функціонування школи привело до необхідності покращення системи народної освіти, яка у Франції уже була загальнообов’язковою. Гімназії, звільнившись від богословського керівництва, стали переорієнтовуватись на фізико-математичні науки, поряд з стародавніми мовами. До класичних гімназій додались реальні. Широкими кроками наука прийшла і у вищу школу. З’явились нові можливості для розвитку математичної творчості – були засновані спеціальні математичні журнали. І першим у Франції став «Журнал Політехнічної школи» (1795 р.), а потім і інші: Жергонна «Аннали математики, чистої і прикладної» (1810 р.), Ліувілля «Журнал чистої і прикладної математики» (1836 р.).

Знання викладались до повного оволодіння матеріалом, поряд з професорами мались репетитори (вперше в історії вищої школи!), які проводили практичні і лабораторні заняття, пояснювали матеріал і проводили опитування.

Екзаменаторам надавалось право шляхом виключно строгого і скрупульозного випускного екзамену з’ясовувати, в якій мірі кожний кандидат оволодів матеріалом.

Такій організації викладання відповідав і навчальний план. Математика в ньому посідала тверде перше місце – 20 годин лекцій на тиждень та ще постійні заняття з репетиторами – навантаження на студента було значним. Курс математики включав у себе такі розділи:

| | |
|---|---|
| – чистий аналіз | 108 подвійних годин (по 1 ½ год.); |
| – прикладання аналізу до геометрії | 17 подвійних годин; |
| – механіка | 94 подвійних години; |
| – нарисна геометрія | 153 подвійних години; |
| – креслення | 175 подвійних годин. |
| Всього | 547 подвійних годин. |

В навчанні панував дух суперництва. Праця з видатними педагогами і науковцями посилювала здоровий дух в навчанні. У школі був створений «культ» навчання. Був виданий закон, який зобов’язував публікувати лекції, які читались в школі. Якраз тоді і народилися перші видатні підручники і посібники по математиці. Значна частина підручників з’явилась на основі лекцій, що читали кращі науковці Франції. Підручники роздавалися усім студентам, які мали можливість вивчати математику, що дало змогу значно прискорити читання лекцій, оскільки не було потреби проводити усі обчислення на дошці, а слухачі могли більш вдумливо слухати лектора. Інтенсивне функціонування школи не могло не відобразитись і на науці в цілому. Майже все, чого досягла Франція в перші десятиліття XIX ст. в області математики, фізики і хімії, фактично іде з Політехнічної школи. Це був період розквіту, в більшості своїй, прикладної математики.

Серед перших викладачів математики і механіки Політехнічної школи були: Ж. Лагранж (1736–1813 рр.), Г. Монж, Р. Проні, Ж. Ашетт. З 1813 по 1830 рр. в ній викладав О. Коші. Вихованцями школи в різні часи були С. Пуассон, Г. Ламе, Г. Коріоліс, Л. Пуансо, М. Шаль, Ж. Ліувілль, Д. Араго, У. Левер’є, А. Пуанкаре і інші математики, які були гордістю Франції. Директорський пост в ній довгий час займав її вихованець, а пізніше генерал, математик і механік Ж.-В. Понселе.

У цій атмосфері Політехнічної школи навчався О. Коші. Він закінчив її першим по списку, а тому продовжив своє навчання в Інституті шляхів сполучення, а пізніше і працював до 1830 р. в Політехнічній школі і став активним учасником розквіту математики.

Разом з ним працювали видатні уми Франції: П. Лаплас, Ж. Фур’є, А. Лежандр, С. Пуассон і інші видатні математики і механіки. Присутність навіть одного з них було б честю, бо кожний з них визначав епоху в математиці і фізиці. Вони тільки історично були разом, тому що працювали в умовах жорсткої конкуренції, натхненно і безкомпромісно.

Політехнічна школа в Парижі відіграла важливе значення у становленні вищої технічної освіти в Європі. Вона започаткувала новий стиль функціонування вищих навчальних закладів. Цей стиль відзначається надзвичайною динамічністю, поєднанням наукового та викладацького потенціалу визначних вчених, цілеспрямованою та систематизованою організацією навчальної роботи, розрахованої на високий результат. Діяльність Політехнічної школи стала початком прогресивних змін в галузі освіти. З’явилась система народної освіти не тільки у Франції, але в усіх розвинених країнах Європи. Навіть величезна Росія почала скидати кайдани відсталості, провела прогресивні освітні реформи. Дещо послабився вплив церкви на освітній процес, оскільки створювалась система державних народних шкіл.

З часів Політехнічної школи значно розширився курс математики у вищій школі і отримав якісно нову складову – вища математика зайняла домінуюче становище. Значення елементарної математики у вищій школі падало. Крім того, були введені практичні і лабораторні заняття. Введення їх проходило повільно, тоді, як вища математика входила у вищу школу порівняно швидко.

## 5. ХАРАКТЕР РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ НА ПОЧАТКУ XIX СТОЛІТТЯ.

Життя і діяльність Коші протікали тоді, коли зросла роль математики в системі наук. Вона одержала чіткий аналітичний характер, математичні методи проникли не тільки в механіку, а й у фізику, техніку і економіку. Математичний аналіз став головною галуззю знань.

У XVIII столітті домінуючим був розвиток механіки (небесної механіки і механіки без тертя), а тому фізика займала підпорядковане становище. Характерним для математики XVIII століття було те, що математики спираючись на механіку та геометрію інтуїтивно займалися питанням існування.

Ідучи за Ньютоном вважалося, що кожний рух має швидкість і прискорення. І, значить, кожна функція має першу і другу похідні, що кожна функція розкладається в ряд Тейлора і, значить, має похідні будь-якого порядку. Математики того часу в основному цікавились одержанням нових результатів, які надходили один за одним.

В розвитку математичного аналізу в першій половині XIX століття слід виділити два вирішальних моменти.

1. Значно розширилась область застосування його методів в природознавстві. Якщо раніше головними областями прикладання математичного аналізу були механіка (в тому числі небесна) і оптика, то тепер на перший план виходять і різноманітні проблеми математичної фізики. Математичні методи також одержали плодотворне поле прикладань в термодинаміці, електродинаміці і т.д. Все обумовлює прогрес тих частин математичного аналізу, які виступають моделями реальних процесів: диференціальних рівнянь, зокрема з частинними похідними, а в зв’язку з ними і теорії тригонометричних рядів, окремих розділів інтегрального числення, теорії функцій комплексної змінної, варіаційного числення і т.д.

2. Друга характерна особливість в розвитку математичного аналізу є перебудова його основ. Великий накопичений в XVIII столітті матеріал, а також багаточисельні труднощі, які виникли (особливо в зв’язку з розв’язуванням задач математичної фізики) в теорії рядів, в інтегруванні розривних функцій і інші викликали на початку XIX століття постановку нових проблем або нову постановку вже відомих проблем, без вирішення яких став неможливим рух вперед. Від вивчення окремих розкладів в ряди і окремих більш частинних видів функцій математики звертаються до загальних проблем збіжності рядів, розкладу функції в ряди того чи іншого виду, до вивчення загальних властивостей широких класів функцій, перш

за все неперервних до розв'язання «проблем існування» різних об'єктів математичного аналізу, які б задовольняли зрослому стандарту строгості. Математики переконуються в необхідності доводити теореми математичного аналізу на арифметичній основі, а не на зверненні до наочних, але далеко не завжди точних представлень геометрії і механіки (хоча вони і не відмовляються від користування геометричними або фізичними моделями в своїй творчій роботі).

В першій половині XIX століття життєво важливими стали задачі, якими моделювалися проблеми перетворення теплоти в механічну роботу, що поставило фізику серед наук на одне з чільних місць. Внаслідок нагромадження великої кількості результатів, подальшого розвитку техніки питання точності та існування стали в математиці першочерговими.

У зв'язку з цим постало завдання розвитку нових методів математики, які розв'язували б проблеми теорії теплоти, електродинаміки, земного магнетизму, оптики, теорії пружності і т.д. О.Л. Коші вказував, що в цей час методи математичного аналізу стали застосовувати в «теорії пружності, до поширення теплоти в тілах або в просторі, до поширення хвиль на поверхні рідини, до передачі звуку твердими тілами, до теорії динамічної електрики, до теорії струсу пружних пластин; нарешті до теорії світла, в які входять різні явища відбивання, простого заломлення, поляризації і т.д.» (О. Коши, Семь лекций общей физики, пер. з франц. СПб., 1872, стр.4 и след. (Коші читав лекції з фізики у 1831 р.)).

Математика також отримує стимули розвитку від нових задач астрономії, механіки, геодезії і інших наук. При цьому, якщо в XVIII ст. основна увага приділялась розв'язанню окремих питань астрономії, механіки і фізики, то вже в кінці XVIII на початку XIX століть ситуація різко змінилася: головна увага дослідників зосередилась на побудові загальних теорій, які охоплювали всі можливі види об'єктів досліджень (з деякої області), у їх взаємозв'язках. Кожна теорія тепер стала оцінюватись в першу чергу по тому, настільки вона володіла загальністю. Це сприяло виробленню особливих вимог до математики в смислі фундаментальності і строгості.

На цьому шляху були одержані глибокі результати в диференціальному і інтегральному численні, теорії диференціальних рівнянь, варіаційному численні, аналітичній механіці, алгебрі і теорії чисел.

В першій половині XIX ст. скарбниця математики поповнилась багатьма фундаментальними результатами. До їх числа відносяться значний розвиток, обгрунтування і узагальнення математичного аналізу і теорії диференціальних рівнянь (звичайних і в частинних похідних), розбудова теорії функцій комплексної змінної, тригонометричних рядів, неевклідової, диференціальної і проективної геометрії, розв'язання фундаментальних проблем алгебри, розвиток арифметики кватерніонів і т.д.

В першій половині XIX ст. розбудовуються основи загальної теорії границь, істотної для обгрунтування математичного аналізу (О. Л. Коші, Б. Больцано і інші).

Зазначимо, що дослідження Б. Больцано були пронизані новаторським теоретико-функціональним духом, який не був властивим навіть найбільш видатним аналістам його часу. Зазначимо, що до кінця вони не були зрозумілі і самому автору (Больцано). Наприклад, Больцано не знав, що побудована ним функція ніде не диференційовна на будь-якій щільній множині точок. Це довів у 1922 р. К. Рихлік, який вивчав його праці, що зберігалися в рукописах і мали помилкові або неповні висновки, а почасти не були послідовно розбудовані і він у ній пропонував один з шляхів розвитку математичного аналізу. Це було далекою перспективою, а ближню перспективу вказав Коші. Він же здійснив і її виконання.

Основу нової теорії границь складала ідея потенціальної нескінченності, яка проявлялась в двох формах: нескінченно малої і нескінченно великої. В першому випадку – це змінна, яка необмежено прямує до нуля. В другому випадку – це змінна, яка в кожний момент має цілком визначене скінченне значення, але значення якої з часом стане і буде залишатись по модулю більше будь-якого, як завгодно великого, додатного числа.

Зазначимо, що обмежитись однією тільки потенціальною нескінченністю не можна!

Справді більш тонкі дослідження, які провів Б. Больцано (1781–1848 рр.) говорили про користь того, що для з'ясування (уточнення) природи основних понять математичного аналізу і для доведення деяких його фундаментальних теорем доцільно застосовувати ідею актуальної нескінченності, прообразом якої є нескінченна множина, дана всіма своїми елементами (наприклад, в абстракції відрізка, який дається всіма своїми точками, використовується концепція актуальної нескінченності). На користь такого підходу говорили (одержані пізніше) дослідження по теорії тригонометричних рядів і узагальненню поняття інтеграла.

Однак, хоча Б. Больцано і здобув у першій чверті XIX ст. ряд фундаментальних результатів щодо основних понять математичного аналізу, вони не могли в той час справити вирішального значення на розвиток математичного аналізу. Праці Б. Больцано були надруковані набагато пізніше, а основна його праця «Вчення про функції», написана в 1830 р., побачила світ тільки через 100 років – у 1930 р. Справа в тому, що Больцано (чех за національністю) підтримував національно-визвольний рух чеського народу проти австрійсько-угорського панування, а тому йому заборонили не тільки викладати у Празькому університеті, а й друкувати свої праці. У зв'язку з цим багато фундаментальних теорем, одержаних Больцано, були перевідкриті дещо пізніше іншими математиками незалежно від нього.

Зрозуміло, що ми маємо порівняти вклад Б. Больцано і О. Коші в розвиток теорії границь. Перш за все треба мати на увазі, що з точки зору розвинутого класичного аналізу означення неперервності у Больцано має переваги перед означенням Коші. В 30-і роки XIX ст. Больцано (результати опубліковані лише в 1930 р.) далеко пройшов у теоретико-функціональному напрямку, поставив задачу побудови теорії дійсного числа і, навіть мав початки його теорії. Це був перший крок на шляху «чисто арифметичної» (за словами Дедекінда, 1872 р.) побудови основ початків математичного аналізу. До думки про необхідність такої теорії знову прийшов Дедекінд (1858 р.). Він здійснив побудову розгорнутої і строгої теорії дійсного числа (1859 р., опублікована 1872 р.). В цей час свої теорії дійсного числа дали Г. Кантор і К. Вейєрштрасс. Зазначимо, що повна арифметизація аналізу закінчена К. Вейєштрассом у 70-і роки XIX ст. Коші ж теоретико-функціональний напрям сам по собі не цікавив, оскільки він не належав до чистих математиків, а був тісно пов'язаний з прикладними питаннями і поєднав числення нескінченно малих з теорією границь, що стало дієвим інструментом дослідження і «наріжним» каменем радикального чи навіть революційного перетворення математичного аналізу, оскільки раніше метод границь використовувався переважно для пояснення логічних труднощів, які були притаманні принципам і прийомам традиційного числення нескінченно малих. Нові методи одержали в руках самого Коші ефективне застосування в теорії рядів, побудові диференціального числення, теорії інтеграла, теорії диференціальних рівнянь і т.і. З їх розвитком постали багаточисельні проблеми існування, які відігравали раніше дуже скромну роль. Тепер же вони вийшли на перший план і внаслідок цього були встановлені нові критерії математичної строгості, що й вирішило подальший розвиток математичного аналізу майже до кінця XIX ст. Коші – творець і основоположник його.

Таким чином, закладання основ нового математичного аналізу, здійснення революції в його основах і розбудова його – це результати титанічних зусиль О. Коші, який своєю невтомною працею привів математичний аналіз до чіткого і строгого впорядкування, розвинув його і суміжні з ним математичні і прикладні дисципліни і спрямував його поступальну ходу в русло дійсно наукової теорії.

# 6. МЕТОДОЛОГІЧНА КОНЦЕПЦІЯ О. КОШІ

О. Коші займався дослідженнями у різноманітних галузях науки, розвиваючи широкий діапазон. У нього був глобальний підхід. При цьому він дотримувався таких основних принципів:

1) необхідність вивчення різних напрямків і дисциплін математики;

2) прагнення знайти зв'язки різних галузей математики;

3) поєднання теоретичних і практичних досліджень;

4) прагнення спостерігати математичні факти і на їх основі робити висновки;

5) прагнення проникнути у глибину предмета, явища, аби з'ясувати його зміст і глибинні зв'язки та залежності;

6) прагнення вивчати основи різних математичних галузей і на їх основі вести її розбудову;

7) інтенсивне поєднання досліджень у галузі математики з її викладанням;

8) охоплення якомога більш широкого спектру математичних досліджень;

9) намагання якнайшвидшої публікації своїх повних наукових результатів;

10) здійснення широких зв'язків з іншими математиками.

***1.*** *Особливості системи і методологія математичного аналізу до Коші.*

Математичний аналіз як самостійна наукова дисципліна, незалежна від механіки і геометрії, починається в середині XVIII ст. (Ейлер, Лагранж, Даламбер і їх послідовники). Ці математики побудували різні системи математичного аналізу, які відрізняються між собою трактовкою основних понять, принципів і частково логікою побудови, способами міркувань і доведень, підходами до з'ясування границь прикладання методів математичного аналізу і трактовкою основних його понять (функція, неперервність, похідна, інтеграл і т.д.).

Коші вивчив спільне в цих різних системах математичного аналізу і те нове в математичному аналізі, яке протирічило цьому спільному.

До 1810 р. в математичному аналізі використовувались переважно аналітичні функції. Вважалося, що загальним способом задання будь-якої функції є степеневий ряд. Можливість представлення функції $y = f(x)$ степеневим рядом був самоочевидний факт, оскільки функції, якими користувалися математики XVIII ст., цією властивістю володіли. Лагранж навіть намагався довести цей факт, але безуспішно. Вважалося також, що задання функції на якому-небудь проміжку визначає її поведінку в цілому, що сукупність різних кривих, заданих на різних проміжках, не може бути охарактеризована одним аналітичним виразом.

Розклади елементарних функцій в ряди здійснювались без застосування диференціального числення, з допомогою біному Ньютона і методу невизначених коефіцієнтів. Тому була спроба довести біном Ньютона для від'ємних і дробових показників степеня без диференціального числення. В зв'язку з такою трактовкою предмета досліджень математичного аналізу був розроблений його понятійний апарат. Вважалось, що трансцендентні функції задаються лише нескінченною кількістю алгебраїчних функцій. Цим виключалися з математичного аналізу аналітичні трансцендентні функції. Функцію $y = f(x)$ у математичному аналізі вважали неперервною (Л. Ейлер), якщо вона задавалась одним аналітичним виразом (однією формулою). У противному разі вона вважалась розривною. З цієї точки зору функція $y = \frac{1}{x}$ вважалася неперервною, а функція $y = |x| = \begin{cases} x, & якщо\ x \geq 0, \\ -x, & якщо\ x < 0 \end{cases}$ – розривною. Така трактовка в доведеннях не працювала, а обмежувала множину розглядуваних функцій, що викликало часті непорозуміння і суперечки, наприклад, про коливання струни (Ейлер і Даламбер). Похідна означувалась так: $f'(x_0) \stackrel{def}{=} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)\Big|_{x=x_0}$. Якщо функція аналітична, то це дає можливість знайти $f'(x_0)$, в противному разі цей прийом був не ефективний. Інколи означували $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, але для знаходження цієї границі вимагалось спочатку в чисельнику виділити множник $x - x_0$, на нього скоротити і покласти $x = x_0$.

Загальні правила диференціювання доводили з допомогою вказаних означень похідної. Знаходження похідних основних елементарних функцій базувалось на їх представленні степеневими рядами. Питання про існування первісної підінтегральної функції не досліджувалось. Визначений інтеграл трактувався як різниця значень первісної в точках $a$ і $b$, $a < b$.

Методологія математичного аналізу XVIII ст. (способи міркувань і доведень, принципи обґрунтування основних положень) представляла собою зведення істини у вищій математиці до непорушних істин елементарної математики – принцип «алгебраїчного узагальненя». Ейлер говорив про всезагальність принципів математики (і в алгебрі, і в математичному аналізі вони діють).

***2.*** *Критика Коші методологічного алгебраїчного узагальнення:*

A. Понятійний апарат, закони, правила арифметики і елементарної алгебри зберігають силу і в інфінітезимальних процесах. Це приводить до непорозумінь і навіть помилок (сума ряду, комутативність, асоціативність, інтегрування і диференціювання суми ряду і т.д.).

B. Вважалось, що закони і правила операцій без обмежень переносяться з дійсної на комплексну область.

C. Вважалось, що всі функції, які розглядаються в математичному аналізі є неперервні, тобто завжди $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

D. При доведеннях використовувались дані елементарної геометрії і неповна індукція.

Приклади доведень фактів з допомогою «алгебраїчного узагальнення»:

а) теорема Маклорена про розклад функції в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots$$

Покладаючи $x$=0, одержували:

$$f(0) = a_0,\ a_1 = f'(0),\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ldots$$

Вихідним в цьому доведенні є неявне припущення, що будь-яка функція може бути представлена степеневим рядом, як тільки існують $f(0),\ f'(0), \ldots,\ f^{(n)}(0), \ldots$

б) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (в смислі рівності рядів) - використовується принцип Ейлера про всезагальність;

в) ряди отримувались в результаті розкладу функції, а тому вважалось, що і довільний ряд має суму;

г) на нескінченні суми переносились властивості скінченних сум.

Отже, існуючі трактовки обмежували область функцій і розширювали область операційного апарату, бо в рамках «алгебраїчного узагальнення» розкрити реальний смисл цих речей (парадоксів) не можна.

На початку XIX ст. в теорії теплоти і гідродинаміці стали досліджуватись проблеми, для розв'язання яких апарат математичного аналізу XVIII ст. не працював. Треба було корінним чином перебудувати традиційну систему математичного аналізу. Вузловими тут стали питання, пов'язані з тригонометричними рядами, з розширенням області досліджуваних функцій дійсної змінної, з розробленням нової теорії інтегрування, зокрема, з'ясувати можливість рівності $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$, з необхідністю теорії функцій комплексної змінної. Залишилась без вирішення і проблема обгрунтування диференціального числення.

***3.*** *Незважаючи на обмеженість концепції «алгебраїчного узагальнення»*, вона відіграла важливу роль, щоб здійснити аналіз ситуації з питань, які виникали, що дало можливість здійснити нову побудову математичного аналізу. Всі відомі на той час концепції математичного аналізу намагались звільнити математичний аналіз від поняття нескінченно малої, як актуальної, так і потенціальної.

Математичний аналіз, як показав Лагранж, можна розвинути без поняття границі і нескінченно малої, якщо прийняти його вчення про аналітичні функції. Загальноприйнята в XVIII ст. трактовка математики як науки про скалярні величини приводила до заперечення об'єктивності поняття нескінченно малої. Якщо $A$ – скінченна величина, $\alpha$ – актуально нескінченно мала, то, як показав Лейбніц, для одержання правильних результатів в теорії і прикладаннях диференціального числення треба приймати $A+\alpha = A$, але це протирічить основній властивості скалярної величини: ціле більше частини. Якщо $\alpha$ – потенціально нескінченна мала, то її границя є нуль. Але нуль (як знак скалярної величини) є тільки знак «ніщо». Як можна говорити про границю змінної, якщо вона зникла? Крім того, границя може бути від'ємним числом. Навіть на початку XIX ст. багато математиків відкидали об'єктивність поняття від'ємного числа. Негативну роль відігравала і містика, з якою в XVII – XVIII ст. (Лейбніц, Вольф) зв'язувалося поняття нескінченно малої. З кінця XVIII ст. і початку XIX ст. під диференціалом розуміли вираз $dy = f'(x)dx$, що дозволило в деякій мірі подолати обмеженість існуючих систем математичного аналізу (не підкреслювалося, що різниця $\Delta y - dy$ є нескінченно мала вищого порядку, ніж $dx$).

***4.*** *Атмосфера Політехнічної школи*, спілкування з видатними математиками і фізиками того часу – Лапласом, Монжем, Лагранжем, – надзвичайно плодотворно вплинули на Коші, який назавжди зберіг смак до конкретних постановок проблем, цінив і використовував зв'язки математики з природознавством, вмів поєднувати висоти астрономії з яскравістю образного геометричного, аналітичного і фізичного мислення, причому часом практика реальних задач переважала його прагнення досягти абсолютно точної реалізації його ціленаправленої думки. Напевно тому ним використана лише потенціальна нескінченність, як реальний інструмент того часу. Зокрема, очевидно, використання ним актуальної нескінченності було під забороною, яка диктувалась прагненням не ставити строго логічний аналіз математичних співвідношень поза зв'язків з практикою. Очевидно, були і інші причини того, що Коші ігнорував поняття актуальної нескінченності. Причини цього факту частково лежали поза математикою: у обмеженості світогляду Коші. Він виступав з гострою критикою ідеї актуальної нескінченності, вважаючи, що вона приводить до протиріч. Та й використання актуальної нескінченності виявилося не на часі. Напрацювання з цього питання мав Б. Больцано. Але вони виявилися розрізненими, не вписувалися у зрозумілу схему, не відповідали цілі, яку ставив Больцано. До того ж, вони опубліковані набагато пізніше перебудов основ аналізу. Для Коші, *нескінченно велика величина* – це змінна, яка у процесі своєї зміни по модулю стає і буде залишатися більше будь-якого, наперед заданого додатного числа. Позиція Коші була добре зрозумілою, а позиція Больцано – ні.

Природній інтерес до процесу творення завжди підсвідомо, невільно захоплює слухача або читача. Тому історичний розвиток повинен бути на першому плані.

До 1816 року Коші оформив круг ідей, які визначили його програму. Вона представляла собою чітку і яскраву перспективу подальших досліджень у галузі математичного аналізу. Його програмі судилась прекрасна доля: вона відразу завоювала прихильність і швидко здобула популярність і нині може бути прийнятою як тривіальність. Але це був надзвичайно революційний крок. Мабуть з певністю можна сказати, що він забував про свої ідейно-політичні принципи, коли творив і вражав усіх своєю продуктивністю.

Нова постановка задач обгрунтування математичного аналізу ясно показувала, що справа не тільки у визнанні і застосуванні нескінченно малих, але, перш за все, у науковому тлумаченні їх змісту і обгрунтованому на цьому використанні їх у алгоритмах математичного аналізу (у понятті похідної, визначеного інтеграла і т.д.). Однак, щоб це зробити, потрібно було подолати пануюче в XVIII ст. вузьке тлумачення поняття границі, розробити загальну теорію границь.

Коші об’єднав ідею нескінченно малої та границі, а розбудовану ним теорію границь використав для строгої побудови математичного аналізу. Коші розглядав нескінченно малу не з точки зору її розмірів, а як величину, що перебуває у процесі змінювання, у процесі необмеженого зменшення.

Вивчення розривних функцій і співставлення їх з функціями неперервними змусило визнати те, що раніше вважалось неможливим: що границя, до якої прямує послідовність значень функції, при прямуванні аргументу до деякої точки, може виявитись відмінним від значення функції в цій точці. Значить, границя не завжди є «останнім» значенням змінної, але в усіх випадках границя є число, до якого змінна наближається необмежено.

Значить, $dx$ і $dy$ не необхідно нулі або «містичні» актуально нескінченні малі; нескінченно мала – це змінна, яка має границею нуль, причому цей факт з протиріччями і парадоксами не пов’язаний.

Коші подолав і другу обмежуючу тенденцію, яка стримувала трактовку означення границі. Він визнав, що змінна може наближатись до своєї границі не тільки монотонно, але й коливаючись, інколи приймаючи значення, рівні її границі. Ця обставина надала теорії Коші необхідну загальність і виключну гнучкість. Поняття границі стало домінуючим в математичному аналізі з часів О. Коші. Класичний математичний аналіз одержав можливість надійної розбудови і свого завершення.

Виконане Коші узагальнення теорії границь Ньютона-Даламбера дозволило йому дати поняттю нескінченно малої реальне тлумачення і підвести під алгоритм Лейбніца-Ньютона достатній науковий фундамент. Завдяки цьому Коші зміг підвести фундамент під вчення про неперервність і розриви функцій, обгрунтувати диференціальне числення і, що, особливо важливо, розвинути початки наукової концепції визначеного інтеграла.

У процесі таких досліджень Коші разом з Больцано, Лобачевським, Діріхле і іншими видатними математиками XIX ст. по-новому підійшли до тлумачення строгості математичних доведень, в першу чергу доведень тверджень математичного аналізу.

У своїх працях Коші чітко виклав вчення про неперервні і розривні функції, вивчив природу розриву функцій і їх типи, з’ясував відмінності між неперервністю і диференційовністю функції. Він заклав основи нової методології розбудови класичного математичного аналізу як науки про всі можливі види функцій дійсної змінної в їх загальному вигляді. Корінним змінам був підданий не лише об’єкт математичного аналізу, але й методи вивчення функцій. Ця методологія стала панівною в математичному аналізі XIX ст., що дозволило одержати чітку його логічну структуру, а також поле для його майбутніх розбудов, зокрема обгрунтувати подвійні, потрійні, криволінійні, поверхневі інтеграли незалежно від невизначеного інтеграла.

Нова постановка задач обгрунтування математичного аналізу показала реальність застосовуваних методів в алгоритмах математичного аналізу, що революціонізувало прикладну математику, оскільки її фундамент одержав надійну логічну основу.

***5.*** *У першій половині XIX ст.* почали складатись основи загальної теорії границь, суттєвої для обгрунтування математичного аналізу і розробки дійових методів його дальшого розвитку. Започаткували цей шлях О. Коші (1814 р.) та Б. Больцано (1817 р.).

Основу нової теорії границь складала ідея потенціальної нескінченності, яка проявлялася в двох формах: нескінченно малої і нескінченно великої величин. У першому випадку малась змінна, яка необмежено прямувала до нуля. У другому випадку мається змінна, яка в кожний момент має цілком визначене скінченне значення, але її значення стають по модулю більше будь-якого, як завгодно великого, додатного числа. Разом з тим більш тонкі і глибокі дослідження, які провів Б. Больцано, показали, що для уточнення природи основних понять математичного аналізу і для доведення деяких його фундаментальних теорем доцільно використовувати ідею актуальної нескінченності, прообраз якої складає нескінченна множина, дана всіма своїми елементами. На користь такого підходу говорили (проведені пізніше) дослідження по теорії тригонометричних рядів і узагальненню поняття інтеграла.

Поряд з Гауссом Коші був видатним аналітиком першої половини XIX ст. Природно було б думати, що Коші (Гаусс питаннями обґрунтування математичного аналізу не займався) повинен був стати на чолі тих, хто почав активно розробляти теорію границь, а тому б мав би розробляти і вчення про актуальну нескінченність. В дійсності ж було не так: Коші не тільки не визнавав актуальної нескінченності (її думав використати Больцано для глибокого обґрунтування математичного аналізу), але виступив з її різкою критикою. Причому ця критика велась з цілком окреслених філософських позицій.

Коші справедливо вважав, що якщо множина тіл природи нескінченна або кожна з них поділяється до нескінченності, то кількісна характеристика всіх речей, як і множина частин тіла, не може бути виражена натуральним числом. Для цієї цілі може служити тільки нескінченне (кардинальне транс фінітне число). Але він вважав, що неможливо зробити припущення про нескінченно велике число об’єктів, одночасно існуючих, не впадаючи в явні протиріччя.

Розглянемо його міркування [30]. Він думав, що вважати натуральний ряд 1, 2, 3, 4, …, продовжений до нескінченності, існуючим (заданий всіма своїми елементами) беззмістовно. Справді, думав він, якщо вважати ряд натуральних чисел продовженим до нескінченності, то квадратів натуральних чисел є стільки ж ($n \leftrightarrow n^2$), але чим більше натуральне число $n$, тим менше і менше стає відношення числа квадратів натуральних чисел сегмента $[1;n]$ до числа $n$, звідки має слідувати, що якщо ряд цілих чисел міг би бути продовжений до нескінченності, то квадрати цього ряду повинні були б складати в цьому ряді дуже невелику меншість. Отже, не можна вважати існуючим весь ряд натуральних чисел, що задається всіма своїми елементами, тобто абстракція актуальної нескінченності неможлива.

Зазначимо, що ці міркування Коші є наслідок ототожнення властивостей скінченних і нескінченних множин. Таким чином, з цих міркувань ще не слідує, що актуальна нескінченність неможлива, а лише слідує, що властивості скінченних і нескінченних множин є різними. Зокрема, твердження, що «ціле більше кожної своєї частини», правильне для скінченних множин, в області нескінченних множин втрачає силу.

Пізніші дослідження (Кантор, Дедекінд) показали, що, прийнявши актуальну нескінченність (вона не є логічно бездоганною, а, отже, не може бути використана необмежено), можна розбудувати теорію множин і ввести трансфінітні числа, тобто перейти на більш високу ступінь пізнання.

***6.*** *Коші, як і Гаусс, а раніше Лейбніц*, висловився проти застосування в математиці актуальної нескінченності. Однак, як підкреслював Кантор [14], аналіз аргументації цих великих математиків показує, що кожний з них виходив з деякого тезису, який в методологічному сенсі не відрізнявся від вихідної позиції Арістотеля. Арістотель заперечував актуальну нескінченність тільки тому, що якщо її визнати, то треба згодитись із тим, що парне число може дорівнювати непарному!? Так само позиції Коші і інших, в основному, складала віра в те, що трансфінітним числам притаманна деяка властивість, яка насправді притаманна тільки скінченним числам. Але яким би великим не був їхній авторитет, однак їхня критика актуальної нескінченності неконструктивна.

Коші був глибоко релігійною людиною, а теологи вважали, що поняття актуальної нескінченності несумісне з догматом релігії про створення світу богом, що й було причиною його виступу проти неї. Оперування лише потенціальною нескінченністю відкрило ті горизонти, які побачив О. Коші. Він плідно попрацював на цьому шляху. Однак, при цьому поле діяльності настільки розширилось, що відкрились нові пласти труднощів в математичному аналізі, які були пов'язані з проблемами його обгрунтування на глибинних горизонтах. З'явилися труднощі, що приводили математиків до помилок, що могли бути усунені з допомогою: а) побудови строгої теорії дійсного числа; б) розробки теорії нескінченних множин і теорії функцій, яка б включала неперервні функції і класи розривних функцій. Це призводило до необхідності введення в математику абстракції актуальної нескінченності. Від подолання цих труднощів залежали подальші успіхи математичного аналізу, які випали на третю третину XIX ст.

***7.*** *Концепція Коші основ математичного аналізу і теорії рядів* багато в чому сприяла подоланню кризового стану, в якому знаходились ці розділи математики у XVIII і початку XIX ст. Разом з тим вона не була достатньо завершеною по змісту і по внутрішній логіці своєї побудови. Найбільш широко (але не з чіткими обрисами) розгорнув програму Б. Больцано. Але навіть виконання програми Коші забезпечило становлення його на надійні рейки і забезпечило його розвиток на 30-40 років вперед. Час для актуальної нескінченності ще не настав, а тому виконання програми Больцано відклалось на 50-60 років і більше. Таким був хід розвитку математичного аналізу. В математиці незабаром були поставлені проблеми, часом дуже складні, без розв'язання яких не можливий був подальший розвиток математичного аналізу і теорії рядів. З точки зору методологічного аспекту цих проблем, вони поділяються на два суттєво різних типи.

Розробка проблем *першого типу* могла бути здійснена в рамках концепції Коші з допомогою потенціальної нескінченності, без застосування ідеї актуальної нескінченності. Розробка проблем другого типу вимагала виходу за рамки концепції Коші, оскільки вона могла бути розв'язана (це показав подальший розвиток математики) тільки з використанням актуальної нескінченності.

До проблем *першого типу* відноситься проблема неперервності суми збіжного ряду, складеного з неперервних функцій. Коші не володів рівномірною збіжністю ряду, а тому питання про неперервність суми ряду зводив лише до збіжності ряду, що, взагалі кажучи, не є правильним. Поняття рівномірної збіжності функціонального ряду (К. Вейєрштрасс, Л. Зейдель, Д. Стокс (1847–1848 рр.)) дозволило розвинути і уточнити принципи теорії функціональних рядів. Це було зроблено в рамках концепції Коші. Також була розвинута не тільки рівномірна збіжність, а й збіжність в середньому і т.і.

Розглянемо тепер проблеми *другого типу*, які показують, що концепція Коші розвитку основ математичного аналізу, строго кажучи, містила логічний круг. Справді, Коші узагальнив поняття границі і довів критерій збіжності числового ряду, опираючись на арифметику дійсних чисел. Разом з тим він визначив ірраціональне число як «границю різних дробів, яких значення більш і більш наближається до нього» (О. Коші. Алгебраїчний аналіз, пер. з франц., 1864, с. 4). Цей дефект привернув увагу математиків. Щоб усунути його необхідно було побудувати арифметику дійсних чисел без використання в ній поняття границі. У 1858 році

Р. Дедекінд розробив свій варіант арифметики дійсних чисел, який був опублікований лише в 1872 р. Дедекінд вважав за необхідне будувати арифметику дійсних чисел тільки на основі арифметики раціональних чисел, причому так, щоб множина дійсних чисел володіла неперервністю, яка властива множині точок прямої. В цьому випадку множина дійсних чисел і множина точок прямої будуть подібними і арифметика дійсних чисел стане дієвим апаратом досліджень явищ на прямій, що і відкриє шлях до побудови строгої теорії границь і доведення основних теорем математичного аналізу. Дедекінд інтерпретував множину усіх можливих розрізів у множині раціональних чисел як дійсні числа і визначив для них відношення >, =, <, а також операції $+$, $-$, $\times$, $\div$.

Зазначимо, що множина усіх можливих розрізів у множині $Q$ – це нескінченна множина, задана всіма своїми елементами згідно їх побудови. Оскільки її структура є копією структури множини точок прямої, то остання також є нескінченною множиною, яка задана всіма своїми елементами. Отже, теорія Дедекінда дійсного числа суттєво використовує актуальну нескінченність, тобто в рамках концепції Коші ця теорія неможлива. Еквівалентні теорії Дедекінда теорія дійсного числа Кантора (в загальних рисах вона є у Больцано) і Вейєрштрасса теж використовують актуальну нескінченність.

Концепція Коші має ще один негативний момент, який спричинений обмеженістю його методологічної концепції, яка однак на той час відігравала велике значення.

Коші виключив розбіжні ряди з математики, оскільки в розвинутій ним концепції математичного аналізу вони не мають суми і не знаходять застосування. Протягом кількох десятків років математики строго дотримувались поглядів Коші. Але в кінці XIX ст., у зв’язку з розвитком поняття про узагальнення підсумовування рядів, математики зробили з теорії розбіжних рядів один із сильних інструментів сучасної математики. Це стало результатом уточнення і узагальнення концепції Ейлера про розбіжні ряди. Рівень строгості при цьому підвищився, оскільки він відповідав рівню знань в математиці XIX ст.

***8.*** *Гносеологічні основи системи і методології Коші.*

Система математичного аналізу Коші відрізняється від систем попередників.

1. Областю дослідження є множина неперервних (частково розривних) функцій, в яких аналітичні функції є підклас.

2. Для вивчення цих функцій використовується узагальнена теорія границь з потенціально нескінченними малими.

3. У теорії границь Коші вдало отримав достатнє наукове обґрунтування алгоритма нескінченно малих Ньютона-Лейбніца. Це забезпечило системі Коші природність і простоту побудов, а також можливість ефективних і науково-обгрунтованих прикладань.

4. Місце методології «алгебраїчного узагальнення» зайняла нова методологія, яка направлена на виявлення умов і меж істинності кожного твердження, з врахуванням характеру розглядуваних в ньому величин. В зв'язку з цим одержали особливе значення теореми існування і чітка відмінність необхідних і достатніх умов.

5. Методологія «алгебраїчного узагальнення» відносила до області можливого лише те, що по основних властивостях не відрізнялося від раніше отриманих (по аналогії). Методологія Коші одержала суттєво нові результати.

6. Використано новий понятійний апарат, який відповідає розширеній області досліджень, нові принципи і нова методологія.

7. Поставлене і частково розв'язане питання про область дії методології «алгебраїчного узагальнення». Розв'язані деякі парадокси математичного аналізу.

8. Методологія Коші використала усе раціональне, що створили у математичному аналізі попередники, наповнена новим змістом і отримала розвиток, дозволила уточнити і встановити чіткі межі для математичного аналізу. Принциповими і новими в ньому є: неперервні функції і їх властивості, теорія визначених інтегралів, теорія рядів (числових і функціональних) і їх обґрунтування з допомогою узагальненої теорії границь.

Зазначимо, що методологічна концепція Коші виявилася надзвичайно плодотворною. Вона стала рушійною силою нових революційних перетворень в математиці, які одержали своє втілення в остаточному зведенні геометрії до алгебри. Часто говорять, що Декарт і Ферма здійснили таке зведення. Однак це не зовсім правильно, оскільки, як і раніше, математики апелювали до геометричних понять: довжини, площі, об'єму. Коші першим дав логічне означення цих понять. Він започаткував встановлення зв'язку між геометричними поняттями і обчислювальними операціями. Тільки після цього геометрія була повністю зведена до алгебри, оскільки загальне поняття числа представляє собою результат вимірювання довжини; геометрія на площині і в просторі була зведена до геометрії прямої. Цим відкривався прямий шлях до арифметизації аналізу, для цього потрібно було одержати лише загальне поняття дійсного числа, без апеляції до процесу вимірювання.

В результаті реконструкції Коші математичний аналіз став продуктивним для вивчення реальної дійсності і відкрив нові перспективи для досліджень і узагальнень, тому що система Коші направлена на вивчення загального.

Більш глибоке дослідження основ математичного аналізу вимагало методів і фактів теорії множин і теорії функцій дійсної змінної. Головна заслуга в цьому належить чеському математику Б. Больцано (1781–1848 рр.). Зауважимо, що його праці стали відомі математикам лише в 70-х роках, а деякі і пізніше, а тому багато його відкриттів перевідкрито О. Коші, К. Вейєрштрассом. Рукопис його найважливішої праці “Вчення про функції” став відомий лише в 1920 році. Отже, практично праці Больцано не справили вирішального значення на розвиток математичного аналізу, а інакше його розвиток був би прискорений. Зокрема, Больцано ще в 1817 році сформулював і довів теорему про існування точної верхньої (нижньої) межі в обмеженій непорожній множині дійсних чисел. Вейєрштрассом ця теорема вивчалась після 1860 року. Раніше Коші і Больцано дали критерій збіжності послідовності, строге означення неперервності функцій, теорему про проміжне значення неперервної функції. Больцано належить і перший приклад неперервної функції без похідної в кожній точці. Значно пізніше такі приклади були наведені К. Вейєрштрассом і Ван дер Варденом. Розглядав Больцано і нескінченні множини, існування граничних точок в них. Зокрема, дав і означення нескінченної множини, яке носить ім’я Дедекінда, який одержав його пізніше. Теорія ж множин була повністю побудована в завершеному вигляді Г. Кантором в 1873–1875 рр. Повністю ж математичний аналіз був обгрунтований після побудови теорії дійсного числа Вейєрштрассом, Дедекіндом і Кантором у 1875 році.

# 7. О. КОШІ І РЕВОЛЮЦІЯ В МАТЕМАТИЧНОМУ АНАЛІЗІ У ПЕРШІЙ ЧВЕРТІ XIX СТОЛІТТЯ

***1.*** *Коші розробив нову систему математичного аналізу*, яка суттєво відрізняється від систем його великих попередників. Ця нова система не є простою реформою, але є корінною зміною фундаментальних основ аналізу, тобто є революцією в математичному аналізі. Ця система має свої закономірності, принципи і методологію. Вона є синтезом основних результатів початкового етапу наукової революції в цій галузі математики, яка відбувалася з 1810 року. Систему Коші викладено в його працях «Алгебраїчний аналіз» (1821 р.) і «Короткий виклад уроків про диференціальне та інтегральне числення» (1823 р.). Важливим при цьому є той факт, що Коші повністю відмовився від послуг механіки і геометрії, якими так часто користувалися його попередники. Це він зробив не тільки тому, що геометричні механічні представлення обмежені і у більш тонких випадках можуть привести до неправильних висновків. Так, не можна наочно представити собі неперервний рух, для якого у будь-який момент часу відсутня швидкість або неперервну криву, яка у жодній точці не має дотичної, а аналітично – це можливо. Заслуга Коші і в тому, що він першим створив аналітичний апарат, який дозволив вибудувати математичний аналіз без послуг механіки і геометрії. Він став потужним їх інструментом.

Зазначимо, що Коші, незалежно від Больцано (1817 р. і дещо раніше), розробив важливі стартові елементи нової системи математичного аналізу, яка вилилася в стратегічну лінію його революційних змін протягом всього XIX ст. Без сумніву Коші дав перший поштовх для радикальних змін. Про це з повною впевненістю свідчить програма його першого курсу лекцій в Політехнічній школі, наміченого на 1816 р., що зберігається в архіві Академії наук в Парижі. В цій програмі уже йде мова про «відмінність між неперервними і розривними функціями» і про «правила збіжності рядів». Звичайно ж, роботу Больцано, яка вийшла друком в 1817 р., Коші в цей час читати не міг, хоча міг читати її пізніше. Така можливість не виключена. Але, якщо Коші і познайомився з цією працею Больцано до складання своїх знаменитих робіт (1821–1823 рр.), то не це «знайомство» визначало характер радикальної реформи в математичному аналізі. Вона була обумовлена назрілими потребами в математичному аналізі в цілому, які вперше були глибоко проаналізовані Коші і результати дослідження викладені в його відомому мемуарі 1814 р. про визначені інтеграли.

Важливим є й те, що Коші мав програму системної перебудови усього математичного аналізу знизу до верху і реалізував її, а Больцано мав лише деякі її фрагменти, які були пов'язані переважно з проблемою нескінченності.

Крім того, зазначимо, що праці Б. Больцано були майже не помічені його сучасниками, може тому, що ім'я автора було невідоме серед математиків – в той час він був професором філософії релігії Празького університету, звідки в 1820 р. звільнений за вільнолюбство і потім не працював і став ще більш невідомим. Хоча, деякі видатні сучасники знали ці праці Больцано (М. Лобачевський і Н. Абель). Слід також відмітити деяку близькість означень Коші і Больцано (неперервності, критерію збіжності рядів). Р. Декарт, напевне, з цього приводу сказав би, що «істина одна і та ж сама – в Парижі і у Празі».

Обидва ж вони служили одній великій справі – розвитку математичного аналізу і їх імена стоять поруч: теорема Больцано-Коші, критерій Коші-Больцано, бо вони гідні один одного.

***2.*** *Проблема побудови математичного аналізу* так, щоб основні його поняття і принципи дозволили б обґрунтувати алгоритм Ньютона-Лейбніца, була основною проблемою обґрунтування математичного аналізу кінця XVIII ст. – початку XIX ст.

Дослідження на початку XIX ст. задач теорії теплоти і гідродинаміки показали, що необхідно розвинути існуючий апарат математичного аналізу при докорінній перебудові традиційних систем математичного аналізу і радикальній зміні його методології. Вузловими стали питання, пов'язані з теорією тригонометричних рядів, з розширенням області досліджуваних функцій дійсної змінної, з розробкою нової теорії інтегрування і теорії функції комплексної змінної. Залишалася задача обґрунтування диференціального числення.

Розглядаючи різницю $f(x+\Delta x)-f(x)$, необхідно враховувати, що $\Delta x \to 0$, тобто є потенціально нескінченною малою. Нескінченно малі, з'ясувалося, необхідні і при розгляді невласних інтегралів. Справді, якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, крім точки $x=c$, то $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)dx$ (тут $\varepsilon$ і $\eta$ – потенціально нескінченні малі). Означення визначеного і невласного інтеграла пов'язані через граничний перехід.

Дослідження нових питань теорії визначених інтегралів – звичайних і невласних, особливо аналіз умов їх існування, – змушували Коші вивчити функції, для яких при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$ або $\Delta y$ не прямує до нуля, застосовуючи теорію границь, що включала в себе потенціально нескінченно малу. У новій системі математичного аналізу такі функції мали стати об’єктом вивчення, а теорія границь – інструментом вивчення. Оскільки аналітичні функції є вузьким підкласом функцій, для яких з $\Delta x \to 0$ слідує, що $\Delta y \to 0$ (неперервні функції), то необхідно було розробити новий понятійний апарат нових принципів і нової методології, а також здійснити корінну перебудову логічної структури математичного аналізу в цілому.

Коші знайшов функцію $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \\ 0, x = 0, \end{cases}$ ряд Маклорена якої в кожній точці збігається до нуля, а не до цієї функції. В зв’язку з цим він у 1829 році встановив відмінність між збіжністю ряду і збіжністю до даної функції. В світлі цього факту всі раніше розвинуті системи математичного аналізу виявилися вузькими, логічно недосконалими. Тому і були поставлені задачі: 1) як побудувати диференціальне числення без степеневих рядів? 2) якщо для функції $f(x)$ можна побудувати ряд Маклорена, то при яких умовах він буде збігатися до функції $f(x)$?

Звичайно ж, виникає тоді задача про визначення суми ряду. Це поняття виникає і при обґрунтуванні теорії аналітичних функцій в комплексній області.

***3.** Математичний аналіз Коші: принципи і структура.*

***А.** Структура системи Коші*. «Алгебраїчний аналіз» Коші присвячений загальним властивостям неперервних і розривних функцій, а також новій теорії числових і функціональних рядів. Тут же викладається теорія границь. Розробка і систематизація вперше здійснена Коші. Це зроблено на спеціальній мові $(\varepsilon - \delta)$, яка виявилася логічно бездоганною, прозорою і продуктивною. У «Короткому викладі…» міститься диференціальне і інтегральне числення за Коші.

***Б.** Означення і способи задання функції*.

Коші виходив з означення: якщо змінні $y$ і $x$ пов’язані між собою так, що по даному значенню $x$ можна визначити значення $y$, то $x$ – незалежна змінна, а $y$ – функція від $x$. Це означення функції було загальним для того часу. Але Коші розділяє поняття «функція» і поняття «аналітичний вираз» (формула), бо у нього є тільки один із способів задання – аналітичний. Він не вимагає і того, щоб функція задавалась одним аналітичним виразом. Коші також відкинув трактовку будь-якої функції як аналітичної. Ця концепція Коші відкрила шлях до одержання нового означення функції, яке б обслуговувало потреби різних галузей математики. Воно було дане М. Лобачевським (1834 р.) і Г. Діріхле (1837 р.).

***В.*** *Теорія границь*. До Коші математики використовували поняття границі за Даламбером. Даламбер вважав, що одна величина є границею другої величини, якщо друга може стати до першої ближче, ніж задана наперед близькість, яка б мала остання не була, причому величина, яка наближається, не може перебільшувати величину, до якої вона наближається. Звідси слідує, що змінні за Даламбером – монотонні, а границя – одностороння, причому границя не мала співпадати ні з яким значенням змінної. Означення границі як односторонньої недосяжної границі монотонної послідовності було недостатнім. Воно ще мало б розвинутись в поняття границі функції, звільнившись від обмежень. Теорія границь Даламбера не включала в себе поняття збіжності послідовностей і не включала критерію збіжності, не мала алгоритмічного характеру і не була оперативною.

Не увінчалася успіхом і спроба Лагранжа побудувати математичний аналіз (без поняття границі) з допомогою степеневих рядів. При такій побудові треба було, по-перше, обмежитися лише аналітичними функціями, а, по-друге, треба було довести, що будь-яка функція майже скрізь представляється степеневим рядом. Як з'ясувалось пізніше (Коші відіграв в цьому головну роль), теорія Лагранжа, незважаючи на свою привабливість, містила неусувний логічний круг: основна теорема про розклад функції в ряд слідує з неявного припущення, що будь-яка функція має розклад в ряд Тейлора. Крім того, подальша розбудова теорії не може бути здійснена без нескінченно малих і граничних переходів. Крім того, як вказував Коші, що принципи диференціального числення і його найбільш важливі прикладання можна легше викласти без теорії рядів.

В цьому зв'язку залишається єдина можливість уточнення поняття границі, її існування і ефективного знаходження.

Коші висунув означення неперервності функції $y = f(x)$, використовуючи потенціально нескінченно малу, як рівноправну з іншими величинами об'єкта дослідження. Для розбудови теорії границь і далі теорії неперервних функцій Коші використовує арифметику дійсних чисел і вона стає фундаментом математичного аналізу. Нуль одержує рівноправність з додатніми і від'ємними величинами – вихідний пункт зміни величини. Цим легалізується поняття від'ємного числа і створюється база для визначення нескінченно малої, як змінної, границя якої є нуль. Нескінченно велика для Коші – це змінна, яка в процесі своєї зміни по модулю стає більшою будь-якого наперед заданого числа. Отже, в системі Коші немає актуальної нескінченності. Спираючись на означення границі нескінченно малої, Коші встановив необхідну і достатню умову існування границі змінної і обґрунтував вчення про порядки нескінченно малих. Це дало алгоритму нескінченно малих Ньютона-Лейбніца достатнє обґрунтування і зробило його компонентом системи Коші. З допомогою теорії границь Коші означив основні поняття математичного аналізу (суму ряду, неперервність, похідну, диференціал, визначений і невласний інтеграли і т. д.), довів для них відповідні теореми. Теорія границь дозволила забезпечити при цих доведеннях виконуваність основних вимог його методології: з'ясувати, для яких величин, при яких умовах і в яких межах мають місце доводжувані твердження. Вона допомогла Коші довести основні теореми існування, чітко розрізнити необхідні умови від достатніх.

***Г.*** *Неперервність і розриви функцій*.

Предметом вивчення у математичному аналізі Коші вважав неперервні функції, які утворюють ширший клас від аналітичних функцій. Якщо до Коші неперервна функція представлялася глобальною характеристикою, яка визначалася її формулою (аналітичним виразом), то він висунув для неї характеристику локальну – її поведінку у як завгодно малому околі точки. Це сприйнятне для неперервної і для розривної функції. В системі Коші традиційне означення неперервності втратило зміст.

Коші дослідив властивості неперервних функцій, неперервність і розриви елементарних функцій. Він довів ряд теорем, які характеризують неперервність функцій (перетворення в нуль, проходження через кожне проміжне значення) і те, що, якщо функція $f(x)$ неперервна, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Він також показав неперервність основних елементарних функцій в природніх областях їх існування, навів приклади розривів функцій і встановив достатні умови неперервності складної функції, суми і добутку функцій.

***Д.*** *Збіжні і розбіжні ряди*. Після побудови теорії границь, ряди, які раніше представляли аморфну множину, були поділені на дві групи: збіжні і розбіжні ряди. Завдяки цьому вдалось встановити точне поняття суми ряду і розбудова теорії числових і степеневих рядів пішла правильним курсом. Було одержано цілий ряд достатніх ознак збіжності. Одними з перших були достатні ознаки збіжності, які встановив і довів О. Коші. Коші пішов і далі. Він ввів поділ знакозмінних рядів на абсолютно збіжні і неабсолютно збіжні, довів теорему про добуток двох абсолютно збіжних рядів. Пізніше Г. Діріхле (1853 р.) і Б. Ріманом були одержані теореми, які стали носити імена своїх першовідкривачів. Згідно цих теорем, абсолютно збіжні ряди мають властивості скінченних сум; умовно збіжні ряди цих властивостей не мають.

Такого роду факти змусили математиків відмовитись від необґрунтованого, чисто формального перенесення основних понять і властивостей скінченних сум на всі нескінченні ряди і допомогли їм розробити наукові принципи теорії рядів, які ґрунтуються на теорії границь.

Коші означив суму ряду як границю послідовності його частинних сум. Він встановив необхідну і достатню умову збіжності ряду, кілька достатніх ознак збіжності для знакододатніх рядів і переніс їх на абсолютно збіжні ряди і довів, що на них переносяться властивості скінченних сум, а також зауважив, що правило множення для неабсолютно збіжних рядів не є правильним. Ці результати перенесені ним на комплексну область.

***Е.*** *Похідна і диференціал функції.* Коші вимагає неперервності функції на $(a,b)$ як необхідної умови для існування похідної і вводить означення похідної в точці $f'(x_0)\overset{def}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ і диференціала $df(x)\overset{def}{=}\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}$. Якщо покласти $\alpha h=t$, то $df(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}h=f'(x)h$.

Оскільки Коші знайшов границі $\dfrac{\sin x}{x}$, $(1+x)^{1/x}$ при $x\to 0$, то він легко знайшов і похідні основних елементарних функцій. Він також довів теорему про середнє. Коші знав, що в точці $x=0$ похідна функції $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ не існує.

***Є.*** *Теорія інтегрування.* Коші побудував інтегральне числення (визначений інтеграл) для неперервних функцій на $[a,b]$, встановив його існування і властивості, описав інтеграл із змінною верхньою межею і цим підвів базу під невизначений інтеграл, встановив умови диференціювання і інтегрування визначеного інтеграла по параметру. Коші будував визначений інтеграл так: для неперервної на сегменті $[a,b]$ функції $f(x)$ він склав суму $S=(x_1-a)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})$, розбиваючи сегмент $[a,b]$ на частини точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, потім довів, що незалежно від способу розбиття сегмента $[a,b]$ при умовах, що $n$ зростає необмежено і всі різниці $x_i-x_{i-1}$ прямують до нуля, ця сума має границю, яка називається визначеним інтегралом. При цьому він вказував, що значення $f(x)$ можна брати не обов'язково в лівих кінцях інтервалів розбиття, а в будь-яких їх точках і це не змінить границі суми *S*, тобто визначеного інтеграла.

Виходячи з означення інтеграла і неперервної функції, Коші довів властивості визначеного інтеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

2) $\int_a^b f(x \pm \alpha)dx = \int_{a\pm\alpha}^{b\pm\alpha} f(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a+\theta(b-a)), \quad 0 \le \theta \le 1$;

4) якщо функція $\varphi(x)$ зберігає знак на $[a,b]$, то $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)dx, \ a \le \xi \le b$ і інші, які вже були відомі раніше, уніфікувавши їх доведення.

Невизначений інтеграл Коші ввів як частинний випадок визначеного, при змінній верхній межі. Він довів неперервність такого інтеграла по верхній межі і теорему про те, що похідна його по верхній межі дорівнює підінтегральній функції. Коші також довів справедливість формули Ньютона-Лейбніца.

Отже, Коші сформулював і довів усі властивості визначеного інтеграла, довів їх для неперервних функцій і створив систему інтеграла, якої до нього не було. Закінчену форму інтегральному численню за Коші надав абат Муаньо (1840–1844 рр.) (учень Коші), який користуючись його ідеями і вказівками висловив основну теорему аналізу про те, що операції диференціювання і інтегрування є взаємно оберненими: $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$.

Ним також розроблена теорія невласних інтегралів першого і другого роду. Зокрема, він показав, що якщо одна або обидві межі інтегрування нескінченні, то суму *S* скласти не можна. Те ж саме буде і у випадку, коли підінтегральна функція на проміжку інтегрування перетворюється в нескінченність. Необхідно було дати інше означення інтеграла, що й зробив Коші. Якщо $f(x)$ обмежена скрізь на проміжку інтегрування, але стає необмеженою в одному або обох кінцях його, то інтеграл визначається формулою $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\xi_1 \to a \\ \xi_2 \to b}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx$ при умові існування цієї границі. Для нескінченних меж інтегрування інтеграл визначається тією ж формулою, тільки $a \to -\infty$, або $b \to \infty$, або ж $a \to -\infty$

і $b \to \infty$. При цьому розглядається і випадок, коли точка розриву є внутрішньою точкою сегмента.

Як бачимо, дане Коші означення невласних інтегралів без суттєвих змін дійшло до наших днів.

Крім того, він встановив причину деяких парадоксів: $\int_0^1 \frac{x^n - x^m}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{x^n}{\ln x} dx - \int_0^1 \frac{x^m}{\ln x} dx$. Ця рівність неправильна, тому що інтеграл зліва збіжний, а обидва справа – розбіжні. Ним також показано, що «алгебраїчне узагальнення» не є надійною зброєю математики і її прикладань.

В першій чверті XIX ст. Коші розробив точне означення визначеного інтеграла і довів його існування в припущенні неперервності підінтегральної функції. Він показав також, що якщо функція $f(x)$ обмежена на сегменті $[a,b]$ і має на ньому скінченне число точок розриву, то $\int_a^b f(x)dx$ існує. Коли стали досліджувати тригонометричні ряди, виникла необхідність подальшого узагальнення поняття визначеного інтеграла. З допомогою тригонометричних рядів можна представляти і функції, які мають на $(-\pi,\pi)$ безліч точок розриву. Оскільки коефіцієнти тригонометричного ряду визначаються за формулами Ейлера-Фур'є (через інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ чи $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$), то природно виникали два питання: що треба розуміти під $\int_a^b f(x)dx$, якщо на $[a,b]$ функція має безліч точок розриву? При яких умовах цей інтеграл існує? Перші фундаментальні результати при розв'язанні цих питань одержали Б. Ріман (1853 р.) та Г. Кантор. Зазначимо, що для розв'язання другої задачі необхідно було ввести поняття міри множини (Лебег, 1902 р.), а попередньо побудувати теорію множин (Г. Кантор, 1875–1887 рр.). Зазначимо, що теорія множин Кантора суттєво використовує актуальну нескінченність. Відмітимо, що глибоке її застосування принесло нові труднощі в математику, які стали відправними точками для подальшого її розвитку.

Суттєво збагатив Коші і теорію подвійних інтегралів. Зокрема, він показав, що якщо функція $f(x,y)$ на $[a,b;c,d]$ неперервна, то обидва повторні інтеграли рівні. У 1844 році Коші поширив дослідження Гаусса з питань застосування варіацій подвійного інтеграла на будь-які кратні інтеграли.

***Ж.*** *Степеневі ряди*.

Коші довів єдиність розкладу функції в степеневий ряд і встановив розклади для $(1+x)^{\alpha}$, $a^{x}$, $ln(1+x)$, $sin\,x$, $cos\,x$, розглянув питання про збіжність степеневих рядів до функцій, які їх породжують, досліджуючи залишкові члени у формулах Тейлора і Маклорена. До Коші питання збіжності рядів ставилось лише у тих випадках, коли мова йшла про обчислення значень функції, представленої рядом. У таких випадках не тільки турбувались про збіжність ряду, але й намагались зробити ряд, по можливості, швидше збіжним. Для представлення функції рядом вважалось цілком достатнім, щоб ряд був одержаний з даного аналітичного виразу шляхом яких-небудь формальних перетворень, наприклад, для функцій $y=\dfrac{1}{a-x}$ шляхом ділення «кутом» одиниці на $a$–$x$ або, що давало другий ряд, –1 на $x$–$a$, або, для функції $a^{x}$ в результаті двократного формального застосування «біноміальної» теореми до виразу $\left[(1+a-1)^{n}\right]^{\frac{x}{n}}$ і т.д. Лише після робіт Коші задачі обчислення значення функції і її представлення рядом перестали розглядати як різні. У 1823 році Коші знайшов свою форму залишкового члена і встановив точні умови збіжності ряду Тейлора до даної функції, а у лекціях з диференціального числення (1829 р.) дослідив різницю між збіжністю ряду взагалі і збіжністю до даної функції. Він збагатив теорію рядів встановленням області збіжності степеневих рядів. Для останніх (1844 р.) визначений круг збіжності і виведена формула для радіуса області збіжності, яка носить назву формули Коші-Адамара. Тоді ж він ввів і поняття радіуса збіжності ряду. О. Коші першим розглянув приклад функції $y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & якщо\ x\neq 0, \\ 0, & якщо\ x=0 \end{cases}$, яка має усі коефіцієнти ряду Тейлора рівні нулю, а сама вона не є нульовою.

Крім того, не завжди успішно, Коші доводив теореми для функціональних рядів, члени яких є функції неперервні. Зазначимо, що у Коші відсутнє поняття рівномірної збіжності ряду в інтервалі, що завадило його теорії рядів досягнути остаточної досконалості. Відсутність цього поняття у Коші привело до того, що він висловлює неправильне твердження, що сума збіжного ряду неперервних функцій є обов’язково неперервною (першим вказав на необхідність рівномірної збіжності Н. Абель (1826 р.) для одного степеневого ряду). Загальне ж поняття рівномірно збіжного ряду одержане К. Вейєрштрассом (1841 р.)

(неопубліковане), Л. Зейделем і Д. Стоксом (1848 р.). Це дозволило одержати чітку і строгу теорію функціональних рядів.

***3.*** *Тригонометрія*. Слід відмітити ще один важливий момент. Коші у «Курсі алгебраїчного аналізу» (1821 р.) оригінально побудував усю тригонометрію (на основі теореми синусів). При цьому і теорема косинусів виводиться з теореми синусів. Він надавав важливе значення узагальнення теорем додавання.

О. Коші не міг, звичайно, обійти і питання загального обґрунтування плоскої тригонометрії.

Зазначимо, що на початку XIX ст. йшло уточнення тригонометрії, приведення її до сучасного вигляду. Недоліком її залишився той факт, що функції і формули часто визначались і встановлювались для кутів, менших за $90^0$.

Л. Карно у 1801–1803 рр. відкрив спосіб визначення знаку в інших квадрантах. Звідси він одержав універсальний характер теорем про суму і різницю тригонометричних функцій, встановивши, що вони містять і інші формули та побудував усю плоску тригонометрію на основі теореми про проекції. Загальноприйняту тепер ідею – розглядати синус і косинус як координати точки круга з радіусом 1 і на цій основі визначати їх знак, – висловив вперше Ж. Біо (1802 р.). Свою систему тригонометрії виклав Лежандр у 1804 р. У 1821 р. у «Курсі алгебраїчного аналізу» Коші оригінально здійснює побудову усієї тригонометрії на основі теореми синусів, з якої виводиться і теорема косинусів.

Розроблена ним нова методична система одразу ж випробувалась на лекціях в Політехнічній школі, які читав сам Коші у 20-х роках XIX ст., а потім опублікована ставала здобутком і інших математиків, а також студентів Франції. Російською мовою «Курс алгебраїчного аналізу» був виданий у Лейпцигу у 1864 р., а «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении» у перекладі на російську мову В. Буняковським, видане у Петербурзі у 1831 р. Вони стали еталоном для написання підручників з математичного аналізу.

***І.*** *Функціональні рівняння*. О. Коші першим започаткував аналітичний метод розв'язування функціональних рівнянь. Суть цього методу: якщо шукана функція неперервна, то її можна послідовно будувати, виходячи з даного функціонального рівняння і застосовуючи метод підстановок для натуральних, цілих, раціональних і, нарешті, усіх дійсних значень аргумента. Він виявився досить продуктивним. З його допомогою було знайдено у неперервних функціях багато розв'язків рівнянь, для яких сам по собі метод підстановок не давав відповіді. Такими функціональними рівняннями були ті, розвязками яких є елементарні функції $ax, a^x, \log_a x$ та інші. Кілька основних прикладів було ним розглянуто в «Курсі алгебраїчного аналізу» (1821 р.):

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Детальний аналіз показує, що Коші є автором цілого ряду систематичних робіт, виконаних на високому рівні математичної строгості і досконалості побудови. Це була революція в основах математики – арифметизація аналізу. Його дослідження у математичному аналізі зумовили корінні зміни у методах його побудови. Теореми стали доводитись у точно визначених межах їх правомірності, а при введенні нових понять вимагалося з'ясування можливості їх існування. Зазначимо, що вплив Коші на формування математики на новій основі в Європі у XIX ст. став домінуючим. Опублікована робота з алгебраїчного аналізу (1821 р.) дуже швидко знайшла широкий відгук у Європі. Вона була із захопленням сприйнята і стала еталоном для написання нових посібників з математичного аналізу, а ідеї Коші стали стартовими для майбутніх наукових досліджень у галузі аналізу.

***4.*** *Розширення і удосконалення системи Коші побудови математичного аналізу.*

Методологія Коші розширила і поглибила можливості апарату математичного аналізу. Фур'є вважав теорію границь Коші найбільш ефективним з методів досліджень і доведень. Методику Коші використали і розвинули Абель, Діріхле, Лобачевський, Остроградський та інші.

Була детально розроблена теорія розривних функцій, зокрема їх типізація. Коші, наприклад, вважав, що $\Delta y \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$ і відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ завжди має границю, тобто неперервні функції співпадають з диференційовними. З досліджень Фур'є, Діріхле і Рімана виникла необхідність у вивченні розривних функцій, особливо тих, які мають розрив першого роду. Вивчення таких функцій показало, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, що корінним чином відрізнялося від традиційного погляду. Проблема узагальнення поняття визначеного інтегралу, розробленого для неперервних функцій, стимулювала подальше вивчення більш «тонких» властивостей неперервних і розривних функцій і структури множин, на яких вони задані або мають розрив. Тому панівне положення завоювало визначення функцій, дане Больцано, Лобачевським, Діріхле. Були побудовані приклади неперервних, але ніде не диференційовних функцій. Діріхле і Ріман вивчили суть відмінностей між абсолютно і умовно збіжними рядами. Д. Стокс, Л. Зайдель і К. Вейєрштрасс ввели поняття рівномірної збіжності функціонального ряду і з його допомогою встановили достатні умови неперервності суми функціонального ряду і можливості його почленного диференціювання і інтегрування. В цьому напрямку йшли і фундаментальні дослідження Абеля в теорії степеневих рядів, які дозволили уточнити і деякі доведення Коші, які відносяться до функціональних рядів. Ці дослідження дозволили визначити реальні межі тієї частини вчення про числові і функціональні ряди, в яких методологія «алгебраїчного узагальнення» є діючою. Був обґрунтований і принцип стяжної системи сегментів, яким Коші доводив теорему про проміжне значення неперервної функції. Це було зроблено з допомогою теореми про існування границі монотонної послідовності, яку довів Вейєрштрасс. Коші не розрізняв поняття найбільшого значення функції і поняття точної верхньої границі множини її значень. Цей факт мав місце тому, що Коші обмежувався лише абстракцією потенціальної нескінченності. Доведення цих тверджень здійснене в другій половині XIX ст. на основі абстракції актуальної нескінченності. Початок таким дослідженням поклав Больцано. Актуальна нескінченність була суттєво розгорнута у його праці «Парадокси нескінченного» (1851 р.) (це остання праця Больцано, написана в 1847–1848 рр.). Повний імпульс дослідженню функції було одержано після побудови теорії дійсного числа і створення Г. Кантором теорії множин.

Коші ж заклав основи стратегії в зміні змісту і корінному перетворенні математичного аналізу і теорії рядів, яка була ним почата і в основному закінчена ним самим, а пізніше математиками другої половини XIX ст. (Б. Ріманом, К. Вейєрштрассом).

Концепція основ математичного аналізу і теорії рядів Коші сприяла подоланню кризи, у якій знаходились ці галузі математики на початку XIX ст. Вона дала імпульс їх розвитку на цілих 50 років. Однак, концепція Коші не давала можливості мати завершену за змістом і по внутрішній логіці побудову повної математичної теорії. В основах математичного аналізу виявились проблеми, пов’язані з необхідністю розбудови теорії дійсного числа. Для цього абстракція потенціальної нескінченності була недостатньою. Для досягнення цієї мети необхідна була абстракція актуальної нескінченності. Для цього потрібно було вийти за рамки межі концепції Коші.

Аналіз зробленого Коші показує, що вже з 20-х років XIX ст. він послідовно, крок за кроком здійснює арифметизацію сучасного аналізу. Зазначимо, що ця програма виникла у Коші в результаті читання лекцій в Політехнічній школі. Розгортання її Коші (1821–1827 рр.) було переднім краєм математичної науки. Це ще раз свідчить про те, що до викладання математики в ній ставились надзвичайно високі вимоги, що свідчить про високий рівень математичної спеціалізації інженерів-прикладників.

Зазначимо, крім того, що система Коші реформування математичного аналізу була ж зразу прийнята багатьма видатними математиками. Наприклад, М. Лобачевський до 1823 р. дотримувався при викладанні математичного аналізу системи Лагранжа (Лакруа). Програма Коші показала, що ця система далека від досконалості. І Лобачевський змінює свої погляди на предмет і методи математичного аналізу з визнанням ним системи і методології Коші.

***5.** Труднощі визнання теорії границь за О. Коші.*

До середини XIX ст. була розроблена теорія границь, з допомогою якої було викладено диференціальне і інтегральне числення. Одержувалась чітка, логічна, зрозуміла і зв'язна теорія. Однак теорія границь Коші була визнана не зразу. Багато видатних математиків Європи не визнавали його плодотворних ідей і з недовірою сприймали нову теорію. Наприклад, С. Пуассон не використовував цей метод в своїх роботах, задовольняючись лейбніцевським численням нескінченно малих. Більшість англійських математиків також не визнавали нових ідей Коші, як і символіки Лейбніца, класифікуючи їх мало не образою пам'яті великого Ньютона.

Зміст критики в основному зводився до двох положень:

1) поняття границі у Коші не має алгоритмічного характеру, оскільки є описовим і не має кількісних оцінок. В цьому напрямку критику викликали поняття: «необмежено наближається», «як завгодно мале» і т.д. Справді, цей недолік утруднював застосування теорії границь Коші до прикладних задач;

2) у теорії границь Коші були помічені логічні прогалини, які не були усунені ні самим Коші, ні його прихильниками. Такою логічною прогалиною в системі Коші було означення дійсного числа. Це було помічено в результаті більш тонкого і глибокого аналізу. Справді, означення дійсного числа за Коші реалізується через границю послідовності раціональних чисел. Але перш ніж означити так ці числа, потрібно вимагати існування його. Це означає, що, або одержувалось замкнене коло в міркуваннях, або вихід мав шукатись в глибокому аналізі поняття нескінченної множини, до якої зводились побудови. Для цього необхідно було визнавати абстракцію актуальної нескінченності, що лежить в основі нескінченних множин. Сам Коші не визнавав актуальної нескінченності (див. Методологічна концепція О. Коші). Час Коші не вимагав значних її застосувань у теоретичних конструкціях. Зазначимо, що перша половина XIX ст. була періодом, коли математика розвивалась в

тісному зв'язку з прикладними задачами і час суто теоретичних математичних досліджень був ще попереду. В цей час домінуючу роль в математиці відігравала потенціальна нескінченність. З давніх пір (Арістотель) вважалося, що актуальна нескінченність зв'язана з парадоксами. Один тільки Б. Больцано накреслив поки-що тільки в загальних рисах обриси майбутнього актуальної нескінченності, усвідомлюючи її роль в математиці. Він був чистим теоретиком, а його праці були невідомі його сучасникам (з ряду причин вони були не надруковані в той час), та й, напевне, не були б ними серйозно сприйняті. Згадаймо, як сприйняли сучасники теоретичні дослідження в галузі неевклідової геометрії М. Лобачевського і Я. Больяї. Можливо і роботи Б. Больцано чекала б така доля? О. Коші ж хоч і був видатним аналістом свого часу, але тісно був зв'язаний з прикладними задачами, та й, можливо, не міг зробити ще одного революційного кроку в математиці. Час тих, хто його зробив, був ще попереду. Виховані ж вони були очевидно на праці Б. Больцано, яка вийшла в 1851 р. Вже скоро, у 1859 р., Р. Дедекінд створив теорію дійсного числа на основі *D*-розрізів у множині раціональних чисел. Праця його була опублікована лише в 1872 р. після довгих роздумів.

Алгоритмічний характер концепції границі за Коші приніс К. Вейєрштрасс. Він дав і струнку $(\varepsilon-\delta)$-символіку. Боротьба, яка точилася навколо основних понять математичного аналізу, зокрема, і навколо поняття границі Коші з часу її введення і не затухала з появою робіт Коші в першій третині XIX ст., почала стихати десь біля кінця XIX ст. Боротьба змістилася в основи математики, де актуальна нескінченність була на кожному кроці, оскільки теорія множин стала фундаментом математики.

# 8. ПЕРІОД КОШІ В СТВОРЕННІ І РОЗВИТКУ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Другим досягненням Коші є створення основ загальної теорії функцій комплексної змінної, яка по своєму значенню не поступається першому досягненню – обґрунтуванню основ математичного аналізу. Справді, Коші належить систематична розробка теорії функцій комплексної змінної. Коші разом з Гауссом в 20-х роках XIX ст. ввели і обґрунтували операції над числами виду $\alpha \pm \beta\, i$, ввели термін «комплексне число», знайшли його модуль, ввели аргумент цього числа. У 1821 р. Коші увів головне значення функції. Усе це дозволило ввести комплексні числа в алгебру і створило передумови для побудови теорії функцій комплексної змінної.

Коші мав особливий дар володіти достатньо загальною точкою зору, з якої розглядувана та чи інша проблема була окремою ланкою у ланцюгу споріднених проблем. Це дозволяло йому робити і більш доступною для дослідження проблему, і застосовувати апробований до неї метод до споріднених проблем. Прикладом може служити уведене Коші інтегрування по шляху на комплексній площині. Цей спосіб виявився і зручним, і надійним, і швидко привів Коші до мети.

Задача зводилась в основному до розв'язання двох проблем:

1. Інтегрування в комплексній області по замкнених кривих.

Коші відкрив знамениту теорему про інтеграл від однозначних комплексних функцій по замкненій кривій:

$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} Res\ f(z)\Big|_{z=a_k}$, де $Res\ f(z)\Big|_{z=a_k}$ – лишки функції відносно особливої точки $a_k$ функції $f(z)$, що лежить всередині кривої *C*. Далі він одержав інтеграл по довільній кривій, що з'єднує дві точки. Він знайшов і важливі прикладання цієї теореми, знаючи її значення. Зазначимо, що, можливо, лише Гаусс (1811 р.) мав точне представлення про характер інтеграла $\int \frac{dz}{z}$. При цьому, для вироблення системи, Коші витлумачив зміст основних понять і операцій з уявними. Перші суттєві результати Коші опублікував у 1825 р. в двох роботах: «Мемуар про теорію визначених інтегралів» і «Мемуар про визначені інтеграли, взяті між уявними межами». Перший з них був написаний ще у 1814 р. В ньому Коші реалізує ідею застосування уявних величин до обчислення визначених інтегралів.

Вихідний пункт для Коші:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

(відомий Ейлеру, 1769 р.). Потім Коші вибирає дві функції *u* і *v*, які задовольняють умови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2)$$

Як відомо, ці умови задовольняє дійсна і уявна частини аналітичної функції $F(x+iy) = u + iv$. Відмітимо тут, те, що дійсна і уявна частини аналітичної функції $u+iv$ задовольняють цим рівнянням, відомо було не тільки Ейлеру, але і дещо раніше Даламберу у задачах гідромеханіки. Але глибоке теоретичне значення рівнянь Ейлера-Даламбера з'ясував Коші і дещо пізніше – Ріман, по іменах яких вона найчастіше і називається. У Ейлера і Даламбера вони – необхідна умова аналітичної функції, а у Коші – ще і достатня (при деяких додаткових умовах). Підставивши в (1) замість $f(x,y)$ ліві і праві частини (2), Коші одержав

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial v}{\partial y}dxdy = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial u}{\partial x}dxdy;$$

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial u}{\partial y}dydx = -\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial v}{\partial x}dxdy,$$

звідки

$$\int_{x_0}^{X}\left(V(x,Y) - V(x,y_0)\right)dx = \int_{y_0}^{Y}\left(U(X,y) - U(x_0,y)\right)dy; \qquad (3)$$

$$\int_{x_0}^{X}\left(U(x,Y) - U(x,y_0)\right)dx = \int_{y_0}^{Y}\left(V(x,y) - V(x_0,y_0)\right)dy. \qquad (4)$$

Щоб одержати інтеграл від функції комплексної змінної, помножимо (3) на $i$ і додамо (4):

$$\int_{x_0}^{X} F(x+iY)dx - \int_{x_0}^{X} F(x+iy_0)dx = \int_{y_0}^{Y} F(x+iy)idy - \int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)idy$$

або

$$\int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)idy + \int_{x_0}^{X} F(x+iY)dx = \int_{x_0}^{X} F(x+iy_0)dx + \int_{y_0}^{Y} F(X+iy_0)idy,$$

що є інтегральною теоремою Коші для інтегрування по прямокутному контуру: $\int_{ADC} F(z)dz = \int_{ABC} F(z)dz$.

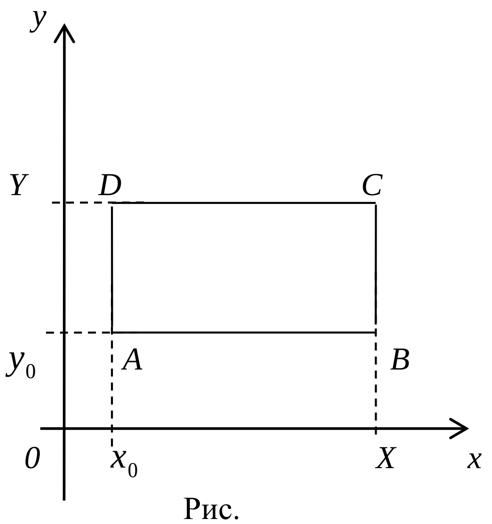


Рис.

При цьому Коші вказує на необхідність умови $f(x, y) \neq \infty$ на сторонах прямокутника і всередині нього.

У другому мемуарі Коші з’ясовує смисл інтеграла $\int\limits_{x_0+iy_0}^{X+iY} f(z)dz$ (див. рис.). Він заміщує інтеграл інтегралом вздовж деякої кривої, що з’єднує на комплексній площині точки $(x_0, y_0)$ і $(X, Y)$. Якщо розглянути функції $x = x(t), y = y(t)$ – монотонні і неперервні при $t \in [t_0, T]$ і задовольняють умовам: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $x(T) = X$, $y(T) = Y$, то одержується інтеграл $\int\limits_{t_0}^{T} (x' + iy') f(x + iy)dt$. Після цього іде формулювання інтегральної теореми: якщо $f(x + iy)$ скінченна і неперервна в прямокутнику $x_0 \leq x \leq X$ і $y_0 \leq y \leq Y$, то значення інтеграла не залежить від шляху інтегрування. Для її доведення Коші застосовує методи варіаційного числення: варіація інтеграла дорівнює нулю.

Сучасний вигляд даної теореми дали Фальк (1883 р.) і Гурса (1884р.).

Перехід Коші до аналізу випадків, коли $f(z)$ перетворюється в нескінченність на границі або всередині прямокутника привів його до необхідності введення поняття лишку функції відносно особливих точок. Ще у 1814 р. він прийшов до нього, знаходячи різницю між двома інтегралами із спільними межами, але взятими по різних шляхах, між якими є полюси функції. У 1826 р. з’являється і сам термін. Теорія лишків оформилась у Коші в 1826–1829 рр., але він продовжує розвивати теорію лишків і в наступні роки, знаходячи нові й нові її прикладання до розв’язання задач інтегрального числення, алгебраїчних, трансцендентних і диференціальних рівнянь (системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами, теорії розкладу функції в ряди і математичної фізики). Цікаво, що при цьому Коші переконливо підкреслював наявність ідеї лишку у Ейлера і не відстоював свій пріоритет.

У роботах Коші вперше з'явилася і інтегральна формула (пізніше названа його іменем) – важлива для розбудови теорії функції комплексної змінної і її прикладань. Вона була введена в роботах Коші по розкладу аналітичних функцій в ряди. В явній формі вона зустрічається в роботі «Про небесну механіку і про нове числення, що називається численням границь» (1831 р.): $\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\bar{x}\right) dp = 2\pi\ f\left(0\right)$. Пізніше вона здобула сучасний вигляд $f\left(x\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f\left(\bar{x}\right)}{\bar{x} - x} d\bar{x}$ (використовується співвідношення $dp = \frac{d\bar{x}}{i\bar{x}}$), де $C$ – коло.

Далі одержані узагальнення цієї формули, коли $C$ – замкнена спрямлювана жорданова крива і її застосування до теорії збіжності рядів, для виведення залишкового члена ряду Тейлора. Тепер ця формула широко використовується в теорії спеціальних функцій, аналітичній теорії диференціальних рівнянь, аналітичній теорії чисел, теоретичній фізиці, різних областях механіки і зберігає актуальність і в наш час.

Ми констатуємо, що в руках Коші теорія функцій комплексної змінної перетворилася з корисного для гідродинаміки і аеродинаміки знаряддя в нову самостійну область математичних досліджень. Його роботи в цій галузі почалися з 1814 р. Кожна з них була надійним каменем у фундаменті нової науки, яка визнавалася спеціалістами повністю і знаходила свою сферу прикладань.

У 1826–1829 рр. Коші розробив теорію лишків.

2. Розклад довільної функції комплексної змінної в степеневий ряд, радіус збіжності якого дорівнює відстані до найближчої особливої точки. 1831 р. Коші одержує теорему про розклад функції комплексної змінної в степеневий ряд. Він встановлює не тільки критерій аналітичності функції, але і дає мажоранту розкладу у вигляді геометричної прогресії, що надзвичайно важливо для усіх застосувань степеневих рядів. Для доведення він використовує інтеграл, який пізніше названий його ім'ям. Коші наводить цікаві приклади функцій, які мають розклади у степеневі ряди, і тих, які їх не мають. Цим він створює стартові майданчики для подальших досліджень.

Публікація робіт Коші мала плодотворний вплив на подальшу розбудову комплексного аналізу: Лоран (1843 р.) здійснив розклад функції, аналітичної в кільці, по додатних і від'ємних степенях аргументу $z$, а

Пюізьо (1850 р.) встановив, що в «точці розгалудження» функція розкладається в ряд по додатних і від'ємних степенях аргументу $z$.

В 1830 р., коли Коші був у вигнанні, починається ослаблення продуктивності французьких математиків, і німці в своєму розвитку одержують статус першої нації в математиці. У Франції період підйому змінився на період тимчасового занепаду. Були розв'язані важливі задачі в математиці. Видатні математики зійшли зі сцени, а дослідження в теоретичній сфері в Франції ще чекали свого часу.

## 9. ВІДКРИТТЯ О. КОШІ У ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Початок XIX ст став переломним періодом і у розвитку диференціальних рівнянь. І, як і у математичному аналізі, корінну перебудову тут зробив той же О. Коші. Високо оцінює вклад Коші в перебудову основ математики російський академік А.М. Колмогоров (1903–1987 рр.) у праці «Современная математика». Значення Коші в тому, що він ввів у математику доведення існування математичних об'єктів, які визначаються нескінченними процесами. Це стало потужним поштовхом для створення нових методів математики. Уточнення понятійного апарату математичного аналізу відкрило для Коші нові шляхи бачення проблем існуючої теорії диференціальних рівнянь. На початок XIX ст. теорія диференціальних рівнянь представляла собою сукупність розрізнених частинних прийомів розв'язування окремих рівнянь. Постіно поставала проблема існування розв'язків, аналогічно, як і для алгебраїчних рівнянь. Для встановлення існування розв'язків і визначення їх характеру, необхідно було виходити з виду рівняння.

Коші встановив, що критерій П. Лапласа (1782 р.) є необхідний, але не є достатнім для існування особливих розв'язків, а тому потрібно встановити ще деякі додаткові умови (для достатності), що і було ним запропоновано у вигляді дослідження інтеграла деякого виду.

Коші вперше поставив теорію диференціальних рівнянь на наукову основу, запропонувавши на своїх лекціях в Політехнічній школі (1820–1830 рр.) три методи, які встановлюють існування розв'язків (опубліковані його учнем Ф. Муаньо в «Лекціях з диференціального і інтегрального числення» (1844 р.)).

Коші є автором першого доведення існування розв'язку диференціального рівняння, яке задовольняє в області, що не має особливих точок, даним початковим умовам. Ця задача названа пізніше його іменем: *«Задача Коші»*. Коші завжди відчував необхідність таких доведень. Справді в теорії диференціальних рівнянь, яка здобувала свою науковість, виходячи з практичних прикладань, які бурхливо розвивались на початку XIX ст., не можна було виходити з інтуїтивної переконаності в існуванні загальних розв'язків, а необхідно було переконатись в існуванні розв'язків, виходячи з відомих даних про розв'язки. Такі перші теореми існування розв'язків, що задовольняють початковим умовам, започаткував Коші на початку XIX ст. І у теорії диференціальних рівнянь він продовжував здійснювати свою програму уточнення понять та методів на основі підвищеного рівня математичної строгості.

Зазначимо, що математики XVIII ст. не мали достатньо підстав сумніватися в існуванні границь і інтегралів, які вони обчислювали, в існуванні розв’язків диференціальних рівнянь, які вони розв’язували. Область існування їх співпадала з областю застосування обчислювальних алгоритмів. Ситуація кардинально почала змінюватися тоді, коли стала розширюватися область існування і часто теореми існування не давали алгоритму розв’язку. Звідси з’явилася відраза до основних теорем математичного аналізу – теорем існування. Іншою стала ситуація на початку XIX ст. Необхідність обгрунтування математичного аналізу в усій загальності і особливо задача вивчення функцій в усіх можливих проявах і взаємозв’язках (функції неперервні і розривні і їх основні властивості; існування похідних функцій; існування інтегралів від неперервних і розривних функцій; збіжність і розбіжність невласних інтегралів) поставили теореми існування на перше місце. Зокрема, теореми існування (критерій існування границі змінної) виявились суттєво необхідними і для узагальненої теорії границь. Справді, якщо змінна змінюється неперервно, то множина її значень є інтервал, а границя його, права чи ліва, – точка, і вона проглядається «оптично» (за словами М. Лузіна). Якщо ж зняти ці обмеження, то треба знайти умови при яких змінна має границю. Це питання повністю розв’язав Коші. Він довів, що послідовність $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ має границю тоді і тільки тоді, коли $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0>0\,\forall n>n_0\,\forall m=1,2,3,\ldots\Rightarrow\left|x_n-x_{n+m}\right|<\varepsilon$. Ця теорема відіграє в математичному аналізі фундаментальну роль.

В XX ст. доведення теорем існування стали невід’ємною частиною багатьох теоретичних досліджень, ввійшли в норму математичної строгості, яка (і це є заслуга Коші) в наш час визначає законність застосувань і має принципове значення.

Особливо продуктивним виявився підхід Коші, який грунтується на припущенні, що коефіцієнти диференціального рівняння розкладаються в нескінченні ряди. Виявляється, тоді для шуканих інтегралів можуть бути складені степеневі ряди, збіжність яких доводиться з допомогою спеціально підібраних мажорант. Цей метод Коші поширив і на комплексну область.

Спочатку в лекціях по аналізу, які читав Коші у Політехнічній школі, дав розв’язок теореми існування, яка характерна в наш час для будь-якого серйозного курсу вищої математики, в якій вивчаються диференціальні рівняння. Ця задача в найпростішому формулюванні: дано рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right). \qquad (1)$$

Довести існування і єдиність його розв'язку, якщо

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

Коші довів це в області, де $f(x, y)$ і $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ неперервні. При цьому він, використовуючи метод ламаних Ейлера, одержував апроксимуючу інтегральну криву. Далі доводилось існування граничної функції $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$, яка задовольняє початкові умови. Ідея Коші в цьому напрямку виявилася надзвичайно плодотворною. Доведення Коші в 1844 р. було удосконалене його учнем Ф. Муаньо. В 1876 р. Ліпшиць розширив область, в якій існує єдиний розв'язок розглядуваного диференціального рівняння, ввівши клас функцій $f(x, y)$, які задовольняють умову Ліпшиця $\exists L > 0 \; \forall y_1 \; \forall y_2 \; \left( \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| < L \left| y_1 - y_2 \right| \right)$.

Подальше узагальнення теореми Коші існування і єдності отримав Осгуд (1911 р.) [34].

Доведення теореми існування і єдиності розв'язку для звичайного диференціального рівняння першого і будь-якого порядку і для системи таких рівнянь О. Коші провів методом мажорант. Метод мажорант для рівняння (1) з початковою умовою (2) полягає в наступному. Функція $f(x, y)$ у рівнянні (1) заміняється мажорантою, тобто аналітичною функцією $F(x, y)$, коефіцієнти розкладу якої в степеневий ряд невід'ємні і не менші модулів відповідних коефіцієнтів розкладу в степеневий ряд функції $f(x, y)$. Мажоранта вибирається по можливості настільки простою, щоб рівняння (1) інтегрувалось у явному вигляді, тобто з явного вигляду розв'язку $y(x)$ задачі

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(0) = a_0, \quad a_0 = const > 0$$

слідувала б збіжність відповідного йому степеневого ряду, який є очевидною мажорантою для розв'язку задачі (1), (2).

Коші користувався мажорантами вигляду

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)}, \; M, a, b \text{ – сталі.} \qquad (3)$$

Пізніше Вейєрштрасс став користуватися більш простими мажорантами виду $\frac{M}{1 - \frac{x + y}{a}}$, $M, a$ – сталі більші нуля, що спростило доведення існування аналітичного розв'язку методом мажорант.

Коші побудував три методи доведення існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ (метод границь, метод послідовних наближень, метод мажорант). Перший метод Коші викладений на лекціях у Політехнічній школі. Продумуючи курс теорії диференціальних рівнянь, Коші критично переосмислив відому для нього систему у світлі нових принципових установок, які він розробив ще у 1814 р. При цьому перший метод Коші в теорії диференціальних рівнянь органічно вписався в його наукову концепцію: розглядати диференціальне рівняння як границю рівнянь у скінченних різницях. Він давав можливість отримати розклад інтеграла в ряди, збіжні при усіх значеннях змінних, при яких функція $f(x, y)$ – неперервна. В цьому сенсі, як стверджував Е. Пікар, «цей метод перевищує усі інші методи». Перший метод Коші пізніше переніс на комплексну область.

О. Коші не тільки на новий рівень підняв метод послідовних наближень, але й розширив його зміст, перетворивши його з наближеного методу розв'язування диференціальних рівнянь у потужний теоретичний метод теорії диференціальних рівнянь, який використовує інструментарій рядів. Це дозволило стимулювати розвиток теорії диференціальних рівнянь і, разом з тим, дало поштовх розвитку прикладного аналізу.

Коші розв'язав проблему, яка стала наріжним каменем теорії диференціальних рівнянь. Проблема існування і єдиності розв'язків є однією з важливих у сучасній теорії дифрівнянь, як звичайних, так і в частинних похідних. Пріоритет у постановці і розв'язанні належить саме О. Коші. Ця проблема визріла у самих надрах диференціальних рівнянь. Спочатку була впевненість, що метод розв'язування диференціальних рівнянь у вигляді степеневого ряду завжди веде до мети. У багатьох випадках так і було, тому що такі ряди збігаються в деякій області і задовольняють диференціальні рівняння. Ці результати наводили на хибну впевненість про існування розв'язків у вигляді функцій, які представляються рядами у будь-якому випадку. Це нагадує ситуацію, яка існувала у алгебрі для рівнянь: була спочатку впевненість, що розв'язними є рівняння будь-якого степеня. Але там була одержана основна теорема алгебри. Вона строго доведена К. Гауссом.

Для диференціальних рівнянь проблема існування і єдиності розв'язку поставлена і розв'язана у різних формах О. Коші.

Слід відзначити, що розв'язання проблеми Коші для диференціальних рівнянь у ідейно-теоретичному і логічному відношенні є на порядок вищим, ніж розв'язання проблеми у алгебрі.

Гаусс дав строге доведення основної теореми алгебри про те, що кожне алгебраїчне рівняння має корінь. Так само Коші створив для диференціальних рівнянь надійну основу, довівши, що диференціальне рівняння завжди має розвязок, що задовольняє певні умови. Порівняння тут явно вигідніше для Коші. Питання про існування і число коренів алгебраїчного рівняння було поставлене не Гауссом. Гаусс дав строге і блискуче розв'язання у чотирьох доведеннях. У теорії диференціальних рівнянь проблема по своїй складності є структурою складнішою, ніж алгебраїчна проблема, і вона була розв'язана Коші кількома способами. Але це далеко не все.

Підхід Коші до розв'язання цієї проблеми містив настільки важливі і плодотворні ідеї, що на основі їх пізніше розвинулась нова вітка аналізу – аналітична теорія диференціальних рівнянь, а пізніше, і якісна теорія диференціальних рівнянь. Так, крім того, методи Коші стали ефективним інструментом з практичної точки зору, оскільки дозволили отримувати наближені розв'язки диференціальних рівнянь з урахуванням допущених похибок. Тому ідеї Коші стали потужним поштовхом для створення нової цільної і, разом з тим, строгої теорії диференціальних рівнянь, яка відзначається стрункістю. Коші належить честь перетворення корисної для прикладаь математичної галузі у самостійну теорію математичних досліджень. За нею послідували нові узагальнення.

Коші також суттєво уточнив характер досліджень по знаходженню особливих розв'язків з допомогою строгого аналізу збіжності (1844 р.). Він знайшов перший приклад розв'язку, який був одночасно і особливим, і частинним інтегралом.

У 1874 р. С. Ковалевська, використовуючи мажоранти Вейєрштрасса, довела теорему існування і єдиності розв'язку для диференціальних рівнянь в частинних похідних. Вона започаткувала створення теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних. До того часу глибоко були вивчені диференціальні рівняння математичної фізики, тобто окремі випадки диференціальних рівнянь в частинних похідних, які виникали в конкретних фізичних задачах: рівняння теплопровідності, рівняння коливання струни, рівняння Лапласа і т.д..

Вказані вище дослідження С. Ковалевської надали питанню про розв'язність задачі Коші для рівнянь і систем з частинними похідними в цілком визначеному смислі завершальний характер.

У 1842 р. Коші поширив свій метод на випадок рівняння $n$-ого порядку, звівши його до системи рівнянь першого порядку, а потім і на деякі диференціальні рівняння в частинних похідних, розробивши свій метод характеристичних полос. Якщо раніше вивчались в основному конкретні рівняння математичної фізики, то в часи Коші із загальних розрізнених результатів теорії рівнянь з частинними похідними була побудована і сама теорія рівнянь з частинними похідними першого порядку. В її побудові діяльну участь прийняв і О. Коші. Зокрема, ним знайдені теореми про існування аналітичного (тобто такого, що представляється у вигляді степеневого ряду) розв’язку лінійних систем рівнянь з частинними похідними.

У 1827 р. Коші розвинув ідею Бріссона (1808 р.) аналогії між однорідним диференціальним рівнянням $n$-го порядку і алгебраїчним рівнянням $n$-го степеня. Для лінійних систем він створив метод так званого «числення лишків» (1839 р.).

Коші також здійснив модифікацію методу ламаних Ейлера для наближеного розв’язування диференціальних рівнянь, яка широко використовується у обчислювальній математиці і є одним з варіантів скінченно-різницевого методу для наближеного розв’язування звичайних диференціальних рівнянь.

Ще у 1819 р. Коші розробив метод характеристик, який був відкритий Г. Монжем, і слідом з’явилися праці, у яких досліджені характеристики для різних видів диференціальних рівнянь у частинних похідних різних порядків. Таким чином, О. Коші розвивав і галузь геометричної інтерпретації теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. У його працях метод характеристик одержав закінчену форму, що відкрило шлях до нового етапу у розвитку теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку, який визначав роботи К. Якобі (1804–1851 рр.). Загальну теорему для диференціальних рівнянь у частинних похідних довела С. Ковалевська (1875 р.). А. Пуанкаре високо цінив ці роботи Ковалевської. Він писав: «Ковалевська значно спростила доведення і надала їм закінчену форму».

Теорема Коші-Ковалевської займає важливе місце в сучасній теорії рівнянь з частинними похідними. Їй належить одне з перших місць за числом застосувань в різних областях теорії рівнянь з частинними похідними: теорема Хольмгрена про єдиність розв’язку задачі Коші для гіперболічних рівнянь (Шаудер, Петровський), сучасна теорія розв’язності лінійних рівнянь і багато інших результатів.

У 1890 р. Е. Пікар розвинув ідею Коші і створив метод послідовних наближень для доведення теорем існування і єдиності розв’язку диференціального рівняння, який став основою для розробки методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь. Д. Пеано (1890 р.) довів теорему про існування розв’язку (без єдиності) диференціального рівняння в області, на якій $f(x,y)$ є неперервною.

Сказане вище дає усі підстави сказати, шо Коші вказав для теорії диференціальних рівнянь нові принципові положення і нові методи розбудови, як істали домінуючими у ній і дали можливість одержати наукову, цільну, логічно струнку теорію диференціальних рівнянь.

# 10. ВКЛАД О. КОШІ В ТЕОРІЮ ПРУЖНОСТІ І ОПТИКУ

Ідеї Коші (він активно поєднував чисту і прикладну математику) сприймались математиками-аналістами і математиками-прикладниками і відразу ж використовувались, то наукового спадку в Коші не виявилося (як, наприклад, в Гаусса). Гаусс належав до XVIII ст., точніше водорозділу XVIII і XIX ст. (велике листування), а Коші – до XIX ст., – у нього все опубліковане за життя.

На початку XIX ст. диференціальні рівняння (звичайні і у частинних похідних) отримали потужні стимули для свого використання у задачах механіки і математичної фізики. Стає можливою тісна взаємодія теоретичних і практичних досліджень. Навколо розв'язання проблем математичної фізики ґрупувались великі колективи вчених, утворюючи наукові школи. Особливо значним було об'єднання вчених у Політехнічній школі (Париж). Задачами математичної фізики успішно займалися Фур'є, Пуассон, Біо та інші. Коші не залишався осторонь цих проблем. Його дослідження у цій галузі знань теж надзвичайно плодотворні.

На початку 20-х років XIX ст. Коші разом з Пуассоном вивчив поширення хвиль у басейнах нескінченної глибини і обмежених стінками та інші задачі математичної фізики. Коші поставив ряд задач відносно поширення хвиль у басейнах різної форми, поширення тепла у твердих середовищах та ін. Одним з тих, хто отримав розвязки для кількох з них, був М.В. Остроградський, перебуваючи у Парижі. Коші дав високу оцінку його роботам, підкреслюючи їх важливість, повноту і чіткість. Уже тільки це показує безпідставність спроб звинуватити Коші у непомірному намаганні тільки самостійно одержувати нові результати.

Диференціальні рівняння теорії пружності для трьохвимірного випадку вперше виведені Л. Нав'є (1821 р.); при цьому він виходив з представлень молекулярної теорії і досліджував лише ізотропні середовища (Коші разом з Нав'є належить до основоположників математичної теорії пружності).

30 вересня 1822 року Паризькій академії був представлений мемуар Коші – «Дослідження рівноваги і внутрішнього руху твердих тіл і рідин, пружних і непружних». Зміст його опубліковано удругому і третьому томах «Математичних вправ» Коші [30]. Коші розвинув у ньому загальний континуальний підхід у механіці суцільних середовищ (континуальний підхід Ейлера-Коші).

У кінці 20-х років були одержані дві системи рівнянь теорії пружності, які характеризують ізотропне тіло однією (Нав'є) і двома (Коші) пружними константами.

Коші, починаючи з 1825 р., обгрунтовує феноменологічний спосіб описання цих явищ, який розглядає тіла як неперервне суцільне середовище і оперує двома «тензорами» – напруженням (Коші ввів це поняття) і деформацією. Він також ввів поверхню нормальних напружень, яка була названа пізніше його іменем (квадрика Коші). Введення цих понять є важливим кроком вперед в порівнянні з одним лише рівномірно розподіленим по всіх напрямках тиском рідини, яке було відоме в XVIII ст. Визначальним для розвитку теорії пружності і усієї механіки суцільних середовищ став континуальний підхід Коші, розроблений ним у 20-х роках. У 1827 р. Коші поширив цей підхід на анізотропні (кристалічні) середовища, а в 1828–1830 рр. йому вдалось дати на цій базі математичне обгрунтування найпростіших законів оптики Френеля – досягнення, якого він прагнув з початку своїх досліджень. В роботах по оптиці Коші дав математичне тлумачення теорії дисперсії і дифракції світла, яка була запропонована французьким фізиком Огюстеном Жаком Френелем (1788–1827 рр.). Він також дослідив рух світлової хвилі в умовах подвійного заломлення, створив знамениту теорію хвиль на поверхні важкої рідини, створив загальне рівняння руху світлового ефіру, встановив закони заломлення і відбивання, не звертаючись до сумнівних гіпотез. Зокрема, вивів формулу для залежності показника заломлення від довжини хвилі.

Зазначимо, що в двох важливих пунктах його теорія розходилась із спостереженнями Френеля і з його точкою зору:

1) вона вимагала, щоб коливання поляризованого світла, які, згідно Френеля, лежать в площині поляризації, були перпендикулярні цій площині;

2) вона в усіх середовищах поряд з поперечними коливаннями давала також і повздовжні, які, у відповідності із спостереженнями, в оптиці ніякої ролі не відіграють.

Обидва ці спірних питання були в полі зору найвидатніших фізиків і математиків до остаточної перемоги максвелловської теорії світла. Навіть у 1896 р., коли з'явилися рентгенівські промені, висловлювалась думка, що це і є шукані повздовжні коливання світла.

Коші також склав диференціальне рівняння рівноваги для елементарного прямокутного пералелепіпеда, розширив поняття деформації. Дослідив також деформацію прямокутних стержнів, зокрема задачу про кручення.

Крім цих невідповідностей, була ще одна широка область оптичних явищ, які не описувались з допомогою феноменологічної теорії – дисперсія світла. Коші (1835–1836 рр.) з допомогою молекулярних представлень якісно пояснює це явище, висунувши припущення, що відстані між молекулами не є малими в порівнянні з довжиною хвилі світла. Дисперсійна формула Коші $n = a + \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda^2} + \ldots$ ще й нині застосовується по відношенню до середовищ, полоси поглинання яких лежать в інфрачервоній частині спектра.

У 1828 р. Коші і Пуассон застосували загальні рівняння для оцінки придатності елементарної теорії згину тонких стержнів, а у наступному році Коші вивів наближені формули для скруту тонких прямокутних стержнів.

Ці дослідження Коші дали поштовх для розвитку загальної теорії згину призматичних стержнів у 50-х роках XIX ст.

Науковій творчості Коші властивий глобальний підхід до розв'язання поставлених проблем: знаючи результати для нескінченного числа значень досліджуваного об'єкта (що графічно зображується у вигляді кривої), він виводив загальні властивості функції для будь-якого значення об'єкта.

# 11. АЛГЕБРАЇЧНІ ПРАЦІ О. КОШІ

У 1813 р. Коші написав першу працю про симетричні функції (в ній новим способом доведена основна теорема теорії симетричних многочленів), пізніше вивчав алгебраїчні рівняння. Загальна теорія лінійних рівнянь з багатьма невідомими ним розроблена у 1821 р. Зокрема, він одержав його розв'язки у 1847 р. з допомогою коренів з одиниці. Коші (1847 р.) поширив метод Ейлера-Безу, удосконалений К. Якобі (1837 р.), на випадок кількох змінних у методі виключення змінних. Коші знайшов також два доведення основної теореми алгебри (1820 р. – не цілком строге, і 1831 р.).

Коші також належить новий спосіб розв'язування рівнянь («Comptes reudus…» від 5 вересня 1837 р.). Цей спосіб зводиться до того, що, якщо є рівняння $f(x)=\varphi(x)-\chi(x)=0$, причому $\varphi(x)$ – сума усіх членів з додатними коефіцієнтами, а $\chi(x)$ – сума усіх членів з від'ємними коефіцієнтами у $f(x)$, і, якщо в межах від *a* до *b* знаходиться тільки один корінь рівняння $f(x)=0$, то за нові межі кореня можна взяти

$$a_1 = a + \frac{-f(a)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}, \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{\varphi'(b)-\chi'(a)};$$

якщо $b-a=j,\ b_1-a_1=j_1,$ то $j_1 < \frac{j^2}{2}\cdot\frac{k}{\varphi'(b)-\chi'(a)},$ де $k=\min\left(2\chi''(b)+\varphi''(b)-\chi''(a);\, 2\varphi''(b)-\varphi''(a)+\chi''(b)\right).$

Зазначимо, що методи, які пропонував Коші, знаходили свій шлях до слухачів і не тільки Політехнічної школи чи Сорбонни.

Сомов И.И., за мотивами праць Коші, написав підручник «Теория алгебраических уравнений высших степеней», Моск. ун., М., 1838 г., 382с. У ньому він наводить і другий спосіб Коші обчислення коренів, що залежить від коренів квадратного рівняння.

Уже у 40-50-х роках XIX ст. алгебраїчні праці Коші знайшли поширення у Петербурзі, Харкові та інших університетах.

В алгебрі Коші розвинув теорію визначників (йому належить і термін «*визначник*», 1812р.), знайшов усі їх основні властивості (зокрема, довів теорему множення), ввів поняття «модуля» комплексного числа, «спряжених» комплексних чисел, узагальнив теорему Штурма для комплексних коренів, повністю вивчив головні властивості визначників, зокрема, теорему множення, а пізніше теорему множення визначників він поширив і на матриці.

У 1815 р. Коші займається питанням про транспозицію елементів визначника і вводить при цьому відомий визначник, який дорівнює добутку деяких різниць і, по суті, примикає до ідеї Ван дер Монда.

Великою популярністю користується доведена Коші нерівність, що середнє арифметичне додатних чисел не менше їх середнього геометричного:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots x_n}\ .$$

Вона опублікована у 1821 р. З тих пір вона традиційно вважається однією з найбільш важливих числових нерівностей. За майже два століття з'явилось кілька десятків різних доведень цієї нерівності. Традиція була започаткована самим Коші. Його доведення займало кілька сторінок складних викладок.

Коші також займався теорією чисел (теоремою Ферма про многокутні числа, законом взаємності – знайшов новий спосіб його доведення), дослідженням по теорії цілих алгебраїчних чисел, в яких він одержав ряд результатів, пізніше в більш загальній формі встановлених німецьким математиком Е. Куммером. Він першим вивчив загальне невизначене тренарне кубічне рівняння і знайшов теореми про невизначені тренарні квадратні рівняння в конгруенціях з однаковим модулем і спільним розв'язком.

Чудовим був мемуар 1815 р., який присвячений многокутним числам. У ньому Коші знайшов доведення теореми Ферма про невизначені рівняння для будь-якого $n$: будь-яке число є або деяке $n$-кутне число, або сума не більш, ніж $n$ $n$-кутних чисел. Коші (1829 р.) розглянув частинні випадки теорії порівнянь вищих степенів (повна теорія порівнянь вищих степенів створена К. Гауссом). У 1840 р. Коші показав, що оцінка Діріхле (1837 р.) для так званих гауссових сум одержується при переході до границі у формулі, яка встановлена Коші (1817 р.), займався рядами Фарея (1816 р.), одержав часткові результати і при доведенні великої теореми Ферма.

Ортогональні перетворення загальної квадратичної форми у суму квадратів були глибоко вивчені Коші (1829 р.). Зокрема, він довів, що для квадратичної форми $n$ (однорідних) змінних рівняння перетворення завжди має дійсні розв'язки (1829 р.).

О. Коші – засновник теорії скінченних груп. Він ввів (1815 р.) поняття скінченної групи. Групу Коші називав «системою спряжених підстановок». Він звів у систему теоретико-групові ідеї своїх попередників. З 1815 р. Коші провів серію досліджень по теорії скінченних груп, довівши, зокрема, теорему про те, що кожна група, порядок якої поділяється на просте число *p*, містить принаймні одну підгрупу порядку *p*.

Зазначимо, що в першій половині XIX ст. факти теорії груп відігравали ще допоміжну роль, головним чином в теорії алгебраїчних рівнянь. Досліджувана в цей час сфера теорії груп належала до теорії скінченних груп – груп підстановок. У становленні і розбудові теорії скінченних груп одне з чільних місць належить Коші. Тоді стала відомою і теорема Коші: якщо число різних значень *v* менше *p* – найбільшого простого числа, що не перевищує *n*, то воно не більше 2. Звідси одержується результат, що не існує функції від п'яти величин, що має три або чотири різні значення. Цією теоремою зацікавився Н. Абель у 1826 р. і використав її в своїх дослідженнях про неможливість розв'язності рівнянь, степінь яких більше 4. Подальші роботи Коші по теорії груп опубліковані у 1844–1846 рр. У 1844 р. він довів, висунуту без доведення Галуа, теорему про те, що кожна група, порядок якої поділяється на просте число *p*, містить, принаймні, одну підгрупу порядку *p*. Цінним у діяльності Коші є й те, що він також зробив перші кроки у переході від груп підстановок до абстрактних груп.

Лише до середини XIX ст. з'ясувалось, що поняття групи має більш широкі застосування, оскільки стало зрозумілим, що найбільш важливі значення груп залежать не від характеру елементів підстановки, а від групової операції. З'явилась теорія абстрактних груп після роботи Жордана (1870 р.), в якій було підведено підсумки теорії скінченних груп, започаткованої Коші.

У працях Коші, поряд з повними доведеннями і твердженнями, міститься кілька важливих моментів. Перш за все, Коші перший став розробляти тематику, зв'язок якої з теорією рівнянь не є безпосереднім. Іншим суттєвим моментом є прагнення Коші навести узагальнення і чіткий виклад усіх відомостей про підстановки. Ця риса, характерна і для інших праць Коші, має важливе значення для класифікацій усього матеріалу і його очищення від зайвих і сторонніх ідей, для створення необхідної термінології.

Одночасно Коші вивчає властивості підстановок. Він визначає для них операцію множення, а це приводить до поняття степеня підстановки. У результаті узагальнення своєї інтерпретації підстановок він приходить, власне кажучи, до вивчення циклічних груп. Ним поставлені питання, які ведуть до подальших узагальнень і до аналізу подальших властивостей підстановок. Однак, ці ідеї Коші виявилися не на часі. Ніхто не відгукнувся на них, а сам Коші повернувся до них у 40-х роках XIX ст. З'явилась ціла серія статей за короткий час: 19 – з 15 вересня 1845 р. до початку лютого

1846 р. В історичній літературі з повним правом відмічається численність нових результатів, які одержав Коші у цій області.

Він вивчає нові властивості підстановок, формулює поняття групи підстановок і у своїх формальних рівняннях фактично виражає співвідношення, аналогічні пізнішим формулюванням групи А. Келі. Коші, при цьому, встановлює ознаки розкладу групи на прямі добутки. Правда, скрупульозний аналіз Коші, на жаль, не закінчує ні підкресленням значення, ні можливості вивчення інваріантних підгруп. Сам виклад ускладнює доведення і не є наочним. Тому Коші робить лише деякі вказівки, які сприяють вивченню примітивних систем і розробці лінійних груп. Прийнята Коші методика не є ідеальною і мало сприяє вивченню властивостей підгруп, вивчення яких потребує більш детальної класифікації різних типів функцій $n$ букв, для чого засоби, якими володів Коші, були недостатніми. Тому він, за винятком деяких випадків, обмежився вивченням підгруп симетричних груп.

Слід тут зазначити, що невеликий проміжок часу, протягом якого Коші займався цими питаннями, або переключення уваги на дослідження в інших областях математики, не дозволили йому створити засоби для дослідження властивостей підгруп, у тому числі і для інваріантних, що, можливо, виявило сильний вплив на дослідників, роботи яких безпосередньо пов’язані з працями Коші.

Ми вказували, що роботи Коші 1815 р. використав Н. Абель, а дещо пізніше і Е. Галуа. Роботи ж 1844–1846 рр. по теорії підстановки особливо сприйняли молоді англійські математики А. Келі, Д. Сільвестр, Т. Кіркман та французькі математики Ш. Ерміт, Ж. Серре, К. Жордан, Е. Матьє.

До речі, і сам Коші негайно реагував на роботи інших вчених по суміжній з ним тематиці, цитував їх, вказуючи джерела інформації, доповнював і розвивав їх результати. Одним словом, він завжди був у пошуку, титанічно працював на ниві математики. Праці Коші створювали потужні імпульси до нових узагальнень або до спрощення доведень, створювали характер тенденцій.

Продовжувачі робіт Коші користувалися його символікою, термінологією, поняттями, ідеями, вказівками.

Роботи Коші, що опубліковані у 1844–1846 рр., вийшли у світ на межі двох різних періодів розвитку теорії груп. Раніше властивості груп підстановок вивчалися в окремих випадках і лише у тісному зв’язку з проблематикою теорії рівнянь. Спільною метою, яка об’єднувала більшість авторів, було вивчення рівнянь степеня $n \geq 5$. Стан суттєво змінився у результаті появи багаточисленних робіт Коші, у яких були узагальнені і впорядковані розсіяні до того результати. Коші створив систему понять і термінів, у яких важливе місце зайняли і його власні ідеї. Коші поставив вивчення груп підстановок на надійний фундамент, на якому далі розвивалась теорія. Необхідність такого вивчення зумовлювалась розробкою теорії Галуа. Заслугою Коші стало узагальнення існуючої проблематики. Тому в ній розглядаються не тільки питання, пов’язані з вивченням скінченних груп підстановок та їх властивостей, включаючи означення підгруп і змінюваність елементів, але здійснюються і міркування, які стоються виду функцій *n* букв і можливого числа їх значень. На нашу думку, існуюча теорія рівнянь, слабке проникнення теорії Галуа і, в результаті, незагальний характер задач, приводили до результатів, які оцінювалися лише як багатство теорії рівнянь, що не дозволяло викристалізувати загальні результати. Але надійна база Коші для цього уже була створена. Його результати стимулювали дослідження в галузі теорії груп. А Келі у 1854 р. вводить поняття групи. Поштовхом вивчення її властивостей стали дослідження К. Жордана 1861 р.

На закінчення скажемо, що систематичне вивчення теорії груп веде з праць Коші 1844–1846 рр. Виникає власна проблематика теорії груп, яка розвивається уже самостійно, висуває нові питання, створює систему понять, створює апарат, у результаті якого стає придатною до використання в інших розділах математики.

# 12. ДОСЛІДЖЕННЯ О. КОШІ В ГЕОМЕТРІЇ

Дослідження Коші по геометрії могли б залишитися в тіні його досягнень в математичному аналізі, алгебрі, математичній фізиці, механіці, якби не його робота «Про многокутники і многогранники», опублікована в 1813 році.

Перебуваючи в Шербурі у 1811 р. Коші написав свій перший мемуар про многокутники, у якому розв’язав деякі питання, які не піддавалися зусиллям першокласних математиків. Зокрема, Л. Пуансо встановив чотири правильних неопуклих многогранники («тіла Пуансо», 1809 р.). У цих многогранниках або грані перетинаються між собою, або самі грані є многокутниками, які самоперетинаються. О. Коші довів неіснування інших неопуклих правильних многогранників. Потім (1813 р.) послідував ще один мемуар про многокутники, в якому доведена теорема Коші про опуклі многокутники.

Коші належить також узагальнення теорії многогранників, він розробив новий спосіб дослідження поверхонь 2-го порядку, встановив правила прикладання аналізу до геометрії; дав цікаві дослідження точки дотику і дотичних, спрямлювання і квадратури кривих.

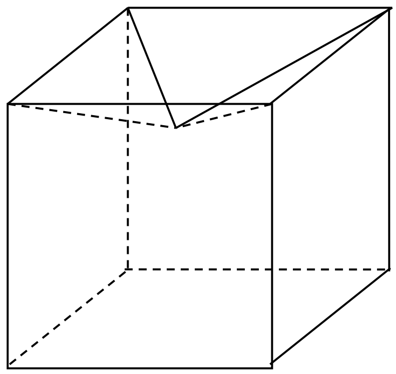
В роботі 1813 року була доведена знаменита теорема про опуклі многогранники: два опуклі многогранники з відповідними конгруентними і однаково розміщеними гранями мають рівні двогранні кути між відповідними границями [14].

Під многогранником розуміється множина $M$ плоских многокутників-граней, розміщених у просторі так, що:

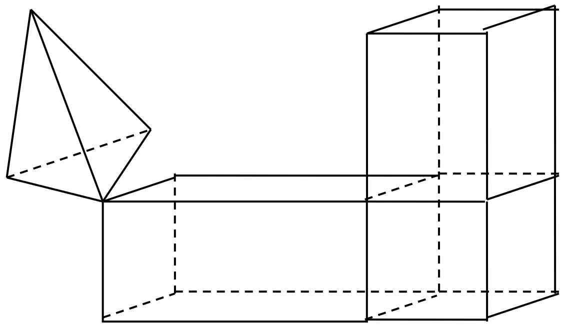
1) кожна сторона будь-якого з них є стороною в точності ще одного многокутника;

2) від кожного многокутника з $M$ до будь-якого іншого можна пройти ланцюжком многокутників з $M$, в якій послідовні многокутники мають спільну сторону;

3) якщо два многокутники мають спільну вершину, то з’єднуючий їх ланцюжок можна скласти з многокутників, які всі мають цю вершину.



Мал. 1



Мал. 2

На мал. 1 – многогранник; на мал. 2 – ні. Справді, ця сукупність многокутників не утворює многокутника, бо не виконується умова 1) для сторони *AB*; для многокутників *ABCD* і *DEF* немає з'єднуючого їх ланцюжка, тобто не виконується умова 2); умова 3) не виконується у вершині *G*.

Два многогранника *рівні* або *конгруентні*, якщо їх можна сумістити з допомогою руху. Нагадаємо, що многогранник називається *опуклим*, якщо для кожної його грані площина, яка проходить через цю грань, залишає всі інші грані многогранника по одну сторону від цієї площини.

*Теорема Коші про єдиність*. Два опуклих многогранника з відповідно рівними гранями, складеними в одному і тому ж порядку, рівні.

Розглянемо тепер многогранник на мал. 1 (башту з продавленим чотирьохскатним дахом і башту з чотирьохскатним дахом на кубічних основах). Вони складені з відповідно рівних граней, які примикають одна до одної в одному і тому ж порядку. Але ці многогранники не рівні між собою. Один з них не опуклий, а, як довів Коші, в класі опуклих многогранників подібна ситуація неможлива. Його теорема пояснює, чому модель опуклого многогранника не деформується, або, як ще говорять, не згинається. Многогранник, який може неперервно деформуватись так, що його грані залишаються плоскими і рівними самі собі, а змінюються лише його двогранні кути, називається *згинаючим*. Якщо ж такої неперервної деформації не існує, то многогранник *незгинаючий*.

Опуклий многогранник незгинаючий. Дійсно, припустимо, що опуклий многогранник $M$ згинаючий. Тоді існує другий, не рівний йому многогранник $M'$, двогранні кути якого мало відрізняються від відповідних кутів многогранника $M$. Якщо відмінність кутів достатньо мала, то многогранник $M'$ також опуклий. А оскільки відповідні грані цих многогранників рівні, то, згідно теореми Коші, і самі многогранники конгруентні.

Для доведення своєї теореми Коші запропонував новий метод, який, за словами А. Д. Александрова, «представляє собою одне з найкрасивіших міркувань, які тільки знає геометрія».

*Теорема Коші* (1813 р.) (в сучасному формулюванні): Якщо два опуклих многогранники ізометричні один одному (тобто один многогранник може бути взаємно однозначно відображений на інший многогранник зі збереженням довжин ліній, які містяться в ньому), то другий многогранник може бути одержаний з першого многогранника в результаті руху його як жорсткого цілого (або рухом і дзеркальним відображенням). Звідси, зокрема, слідує, що якщо грані опуклого многогранника жорсткі, то він сам жорсткий, хоча б його грані були скріплені одні з іншими по ребрах шарнірно.

Це твердження припускав правильним ще Евклід, але довів його О. Коші тільки через 2000 років після Евкліда.

Він також довів, що два опуклих многогранники з відповідно конгруентними і однаково розміщеними гранями мають рівні двогранні кути між відповідними гранями.

Крім того, Коші знайшов рівняння площини і параметричне представлення прямої в просторі (1826 р.). Він же знайшов і нормальне рівняння прямої (1853 р.). Слід також зазначити, що Коші, нарешті, переборов і труднощі, які визначалися існуванням несумірних величин при вивченні системи довжини кривої. Він першим дав логічне означення поняття довжини, площі і об’єму.

У теорії поверхонь Коші вперше показав, що якщо усі чотири корені (відповідні конусам) дійсні, то існує спільний для усіх поверхонь полярний тетраедр, визначення якого він звів (1829 р.) до спільного перетворення обох квадратичних форм у суму квадрантів.

Він також започаткував теорему про сталість суми величин, обернених квадратам спряжених напівдіаметрів (1826 р.).

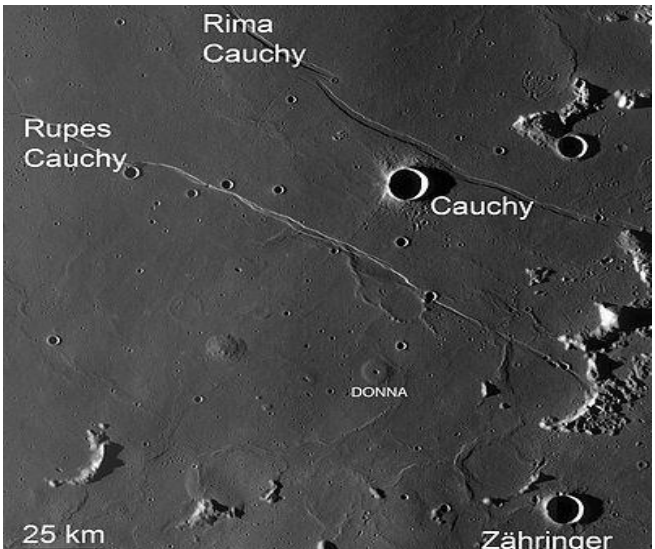
# 13. КОШІ І АСТРОНОМІЯ

Вражаючою є надзвичайна легкість, з якою він переходив від однієї галузі дослідження до іншої. В цьому йому немає рівних в історії науки.

Ш. Ерміт вказує, що «небесна механіка також була об'єктом багаточисленних прославлених мемуарів О. Коші» [21, с. 173]. Починаючи з 1838 р. Коші (без утримання!) працював у «Бюро Довгот» – астрономічна структура академії і впритул мав можливість займатися астрономією. При цьому «якраз з допомогою своїх нових астрономічних методів, одержаних з надглибокого аналізу, Коші зміг в кілька днів перевірити числові результати важливої праці, якій Левер'є присвятив кілька років, – про рух планети Паллади, і спеціально – про велику нерівність, яка є результатом дії Юпітера» [21, с. 173]. За принципом Левер'є Пюізьо зрозуміло і детально виклав згаданий вище метод, яким Коші перевірив результати Левер'є [21, с. 173].

Таким чином, Коші створив новий ефективний спосіб обчислення руху планет, розробив обчислювальні методи в астрономічних дослідженнях.

Його іменем названо кратер на Місяці. Це невеликий ударний кратер у східній частині Моря Спокою на видимій стороні Місяця, затверджена Міжнародним астрономічним союзом в 1935 році. Кратер Коші має близьку до циркулярної форму. Вал з чітко окресленою гострою кромкою і гладким внутрішнім схилом з високим альбедо, що спускається до невеликої ділянки плоского дна. На внутрішньому схилі видно осипи порід, що утворюють яскраві радіальні смуги. До західної частини зовнішнього схилу примикають два невеликих хребта, утворюючи подобу латинської літери "V".



Кратер Коші і сателітний кратер Коші D належать до кратерів, у яких зареєстровані температурні аномалії під час затемнень. Пояснюється це тим, що подібні кратери мають невеликий вік і скелі не встигли покритися реголітом, що надають термоізолюючого впливу.

# 14. КОШІ І ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.

У XIX ст. теорія ймовірностей одержала нові стимули для свого розвитку. Вони були різні за змістом, оскільки були пов'язані із задачами природознавства, практичними потребами суспільства і з внутрішніми потребами математики.

Починаючи з 20-х років XIX ст. характерним є використання теорії ймовірностей у задачах створення єдиної теорії спостережень, стрільби, страхування, поведінки випадкових величин, демографії та ін.

Помітний вклад у теорію ймовірностей вніс О. Коші. У 1831–1853 рр. він опублікував більше десяти мемуарів, які стосуються математичної обробки спостережень і до теорії ймовірностей. Коші досліджував обробку спостережень за методом середніх і з допомогою принципу «мінімаксу», тобто принципу, що приводить до таких максимальних за модулем остаточних ухилах, які мінімальні серед будь-яких способів обробки. Метод, до речі, застосовується і у наш час у теорії статистичних рішень. Коші помітив, що максимум лінійної функції невід'ємних змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, які задовольняють $m$ допоміжним лінійним рівнянням ($m<n$), досягається при умові рівності нулю ($n–m$) цих змінних. Тим самим він довів одну з теорем теорії лінійного програмування.

Коші належить належить розв'язок витонченої задачі відшукання щільності розподілу $f(\varepsilon)$ похибок спостережень $\varepsilon_i$ $(i=1, 2, ..., n)$ при умові максимальної ймовірност $P\{w_1 < \Delta x < w_2\}$ для похибки одного з невідомих ($x$) знаходитися у будь-якому заданому інтервалі $(w_1; w_2)$. Для шуканого парного розподілу $f(\varepsilon) = f(-\varepsilon)$ він одержує для $\theta > 0$ функцію $\varphi(\theta) = e^{-c\theta^{\mu+1}}$, де $\mu$ – дійсне і $c$>0. При $\mu \in (-1; 1]$ ця функція є характеристичною, а відповідний розподіл є стійким.

У 1853 р. Коші створює розподіл ймовірностей випадкової величини $X$, який задається щільністю $p(x; \lambda; \mu) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}$, $|x| < \infty$, $\mu \in (-\infty; +\infty)$, $\lambda > 0$ – параметр. Коші вивчив його властивості. Він пізніше дістав назву «розподіл Коші». Частково цей розподіл дещо раніше вивчався Пуассоном.

Особливий інтерес представляє робота Коші «Про ймовірності помилок, які спотворюють середні результати спостережень однієї і тієї ж природи» (1853 р.) [32]. У цій роботі Коші доводить центральну граничну теорему. Він приводить і оцінки похибок, які виникають при зроблених припущеннях.

Зазначимо, що у роботах цього циклу Коші широко використовує «косинус–перетворення Фур'є».

На закінчення слід відмітити, що Коші взяв активну участь при побудові основи аналітичних методів у теорії ймовірностей, висував ідеї нових граничних теорем і глибоко відчував важливість їх як для теорії похибок спостережень, так і для демографії, теорії стрільби, а також самої теорії ймовірностей.

Це був період створення теорії ймовірностей, і Коші, як і інші визначні математики П. Лаплас, С. Пуассон та ін. прикладав зусилля до теоретичного обґрунтування матеріалу, який виникав у багатьох прикладних задачах, що моделювалися теорією ймовірностей. Треба віддати належне їх генію, що дозволяв передбачувати потребу, цінність і принциповість наукових ідей, які з'являлися, але ще мали неточності, елементи незакінченості. Та стратегічний напрям у відкритті майбутніх закономірностей був вибраний вірно.

# 15. СПАДЩИНА КОШІ ТА ЙОГО УЧНІ

Велетенська діяльність Коші не зводилась тільки до успіхів, яких він досяг сам; він орієнтував молоді уми, широко відкриваючи двері в майбутнє.

Серед математиків найчастіше розрізняють два види розуму: одні займаються, в основному, створенням нових плацдармів у науці, розширенням поля невідомих досліджень, вводячи нові поняття і стрімко розвиваючи фронт досліджень і розширюючи математичні горизонти, ідуть уперед, прокладаючи нові дороги у сфері пізнання, залишаючи за собою брили, що містять невивченого матеріалу, але такого, який уже легше проглядається. Вони не турбуються за труднощі, які потрібно перебороти, вивчаючи цей не перероблений матеріал. Вони шукають нові методи для пізнання. Інші ж віддають перевагу залишитись в області добре розроблених понять, вивчають ці відколупані великі камені, вносять певні систему знань, поглиблюють вже відомі розроблені методи і поширюють їх на більш нові області. Вони мають своєю метою вичерпати усі можливі наслідки, зробити їх максимально очевидними, віднайти нові зв'язки і залежності, зробити близькою і зрозумілою отриману істину. В історії математики вчених першого напрямку декілька: Піфагор, Евклід, Архімед, Аполлоній, Декарт, Ньютон, Ейлер, Гаусс. До них ми маємо долучити і Коші. Слід зазначити, що у Коші були обидва ці напрямки та, крім того, був ще й третій – він прекрасний прикладник: майже усі розроблені ним методи одержували у його титанічній діяльності обов'язкове застосування. Коші, як випускник Політехнічної школи, умів підходити практично до будь-якої прикладної задачі і отримати з неї усе. Він любив «витиснути» з методу усе, що він міг дати, усе, на що був розрахований по своїй потенції, любив доводити до досконалості і логічної довершеності поглиблення і розширення меж методу. Щоправда, страждав, що не до останнього степеня досконалості оформив свої результати. Але, оскільки це були щойно народжені результати, то вони довершеності оформлення і не мусять мати. Репутація ж математика залежить від кількості незграбних доведень, які він отримає протягом свого життя. А Коші, без сумніву, дорожив своєю репутацією. Він, у своєму роді, оригінальний математик, своєрідний по своєму складу характера, по глибині своєї душі, яка часто і важко проглядається і, яка часто не є зрозумілою. Він першопроходець. А у першопроходців є помилки. У нього не було боязні друкувати свої праці, вони були спонтанним творінням вченого, який відкриває завісу невідомого, отримує першородну істину, підносить її читачу ніби щойно народжену дитину, ще зовсім незрілу, але вже сильну, що отримала гігантський потенціал. Він знав, що за ним будуть іти математики, які внесуть необхідні корективи, уточнення. Він писав свої праці на єдиному диханні, ніби одним змахом руки, поспішаючи донести істину. Його праці нагадують музичні ноктюрни Шопена, зробені вправною рукою майстра. На другий день з’являлися нові інтереси, виникали нові захоплення зовсім на іншому напрямку (часто діаметрально протилежному), виникали нові проблеми, за які він захоплено брався і так само швидко народжував своє дітище, яке було так само універсальне, відкривало нові незвідані таємниці. Зі знанням справи продовжувався поєдинок титана, а в результаті отримувались розв’язання нових задач.

І чим би Коші не займався, він скрізь знаходить нові важливі результати, створює або вдосконалює уже відомі (часом, і забуті) методи. Любив натхненно займатися математикою завжди і у будь-який час. Особливо з нетерпінням чекав канікул (мав немале академічне навантаження), коли міг нарешті усього себе віддати любимій справі. Але й навчальні заняття для Коші були творчим процесом. Він із запалом розповідав на лекціях багато з того, що не входило у програму і щойно одержаного ним або іншими світилами.

Вплив О. Коші на розвиток математики впродовж 30–70-х років XIX століття поза сумнівом, якщо не сказати, що він значний. Математики-аналізисти цього періоду, в основному, добудовували ту будівлю математичного аналізу, програма якого була закладена ним у 20-х роках. Протягом цього часу було скурпульозно здійснено необхідну реконструкцію усіх складових частин математичного аналізу, що було започатковано Коші і проводилось з його участю. Зазначимо, що математики у той час відчували сильний аналітичний вплив Коші, причому не тільки ті, що працювали в галузі аналізу, але й інші. Зокрема, на надійному фундаменті розвивалися теорія диференціальних рівнянь, методи математичної фізики та інші.

Ті нові ідеї, що з’явилися у 70-і роки XIX ст. (основні з них – у теорії множин), дозволили підійти до переосмислення існуючої будівлі математики і стали потужним імпульсом для нової її перебудови на основі створеної продуктивної основи – теорії множин.

Ім’я Коші в нерозривному зв’язку з цілим рядом математичних конструктів не сходить зі сторінок наукової літератури. Потрібні глибокі наукові дослідження його наукових праць. Але думається, що той шлях, яким пішла математика після Коші, неоднозначно показує силу і потужну стратегію його діяльності на ниві усієї математики. Його стратегічна лінія полягала не у форсуванні новітніх ідей, які були б передчасними (про це яскраво свідчить досвід Больцано – його ідеї випереджали час, хоча теж були потрібними і знайшли своє визнання пізніше, це було однією з причин його несприйнятності), а й у скрупульозній перебудові аналізу на нових ідеях, які були ближньою перспективою – цим заповнювався вакуум нерозуміння ідей Больцано. Після усвідомлення концепцій Коші ідеї Больцано стали природніми і, зрозуміло, були сприйняті, і послужили подальшому послідовному розвитку математичного аналізу.

Творчість Коші не з тих, про які можна мати глибоке представлення у кількох словах, оскільки ємке та охоплююче представлення про неї дається одним словом – гігант, який торкнувся у своїй діяльності багатьох предметів, що не тільки багаточисленні й різноманітні, але складні і глибоко змістовні. І скрізь Коші був на передньому краю досліджень, усього торкався вправною рукою талановитого майстра, який до самопожертви любив свою справу. Його розум працював не тільки в режимі послідовності, але навіть його феномен в тому, що він міг вести продуктивні дослідження одночасно по кількох різноманітних предметах, які були далекі один від одного. І, здається, для нього не було ніяких перешкод; він діяв зібрано, мобільно і на одному диханні проводив дослідження і, одержавши результат, йшов далі. Це повторювалось і повторювалось. І невтомний розум генерував нові ідеї, а вправні руки ледве встигали записувати усе щойно народжене. Коші відзначався великим завзяттям, якоюсь завзятістю чи, навіть, затятістю, брати нові і нові, ніким раніше не взяті математичні вершини, які були його глибинною суттю, що захоплювала всіціло.

Основні принципи, яких дотримувався Коші у науці: необхідність вивчення різних напрямів і різних математичних дисциплін, прагнення знайти їх зв'язки, уміння спостерігати математичні факти і на їх основі робити висновки, прагнення проникнути у глибину предмета, знайти практичні застосування.

Коші – людина великого таланту і надзвичайної працьовитості, тонкого розуму і привабливості. Він є особистістю яскравою. Так визнають усі і, навіть, його недруги.

Той розмах математичних досліджень, якими прославилася Франція у галузях, якими займався Коші, свідчить, що у нього було багато учнів і послідовників. З повним правом до них слід віднести не тільки тих, хто безпосередньо спілкувався з ним, працював під його керівництвом, хто слухав його численні лекції у Політехнічній школі, Сорбонні, Коледж де Франс, але й тих, хто навчався по його навчальним курсам, використовував його поради. Назвати їх усіх – справа безнадійна. Найкрупнішими з них є: Ш. Ерміт (1822–1901 рр.) – академік Паризької АН, Ж. Буке (1819–1885 рр.) – академік Паризької АН, Ж. Бріо (1817–1882 рр.) – професор

Сорбонни, В.-А. Пьюізьо (1820–1883 рр.) – академік Паризької АН, М. Остроградський (1801–1862 рр.) – академік Петербурзької АН, В. Буняковський (1804–1889 рр.) – академік Петербурзької АН, П. Лоран (1813–1854 рр.) – різнобічний математик, який відомий своїм рядом, А. Пуанкаре (1854–1912 рр.) – академік Паризької АН, Ф. Муаньо (1823–1886 рр.), С. Ковалевська (1850–1891 рр.) – член-коресплндент Петербурзької АН, перша у Росії та Північній Європі жінка-професор і перша у світі жінка-професор математики, та багато інших відомих математиків.

Вони продовжили математичні дослідження свого великого учителя в багатьох галузях. Його результати відкрили шлях для теорії функцій – важливої аналітичної теорії нашого часу. Пам'ятні фундаментальні відкриття Б. Рімана та К. Вейєрштрасса на цьому шляху, знаменита теорема Міттаг-Лефлера були підготовлені працями великого французького математика. Особливо багато і захоплююче відзивався про свого учителя Ш. Ерміт. Він стверджував, що Коші зобов'язані усі частини математики великими відкриттями. Головне місце у творчості Коші, за думкою Ерміта, займає фундаментальна ідея: поширити початкові поняття інтеграла, примушуючи змінну проходити від однієї межі до другої, пробігаючи через послідовність уявних значень по довільному шляху. Наука не мала прикладу більш плодовитого поняття. Ерміт докладно розповідає про різні напрями досліджень Коші, причому зауважує, що «небесна механіка була об'єктом багато численних прославлених мемуарів Коші», і говорить про його праці у цій області [21, с. 161–170, 267]. При цьому, «якраз з допомогою своїх повних астрономічних методів, одержаних з глибинного аналізу, Коші зміг у кілька днів перевірити числові результати важливої праці, якій Левер'є присвятив кілька років, – про рух планети Паллади і, спеціально – про велику нерівність, викликається дією Юпітера» [21, с. 173].

Зазначимо, що виклад Коші був надзвичайно стислим і за проханням Левер'є Пьюізьо (учень Коші) дуже зрозуміло і докладно виклав метод Коші, яким той перевірив результати Левер'є [21, с. 173].

Бріо і Буке продовжили праці Коші про властивості функцій, які визначаються диференціальними рівняннями.

Пьюізьо показав, як принципи Коші можуть привести до суттєвих властивостей алгебраїчних функцій та їх інтегралів (відома його іменна теорема).

Роботи Пьюізьо відкрили поле для досліджень, які привели до великих математичних відкриттів, що здійснили Ріман і Вейєрштрасс. Основний мемуар В. Пьюізьо «Дослідження про алгебраїчні функції». Сам Коші не виділяв клас алгебраїчних функцій як окремий об'єкт вивчення в аналізі. Заслуга загальної постановки проблеми і перші результати тут належать Пьюізьо. Однак, він чітко підкреслював, що його дослідження базуються на працях Коші і він розвивав його ідеї. Зазначимо, що ці слова не були простою даниною ввічливості своєму учителю.

Принципове значення роботи Пьюізьо в тому, що тут вперше в історії математики системно досліджується широкий клас багатозначних функцій, для аналітичного представлення яких були відомі тільки локальні засоби розкладу в степеневий ряд (звичайний або узагальнений), збіжний в окремі точки.

Оскільки класичний апарат аналізу (похідна і інтеграл) будуються для однозначних функцій, то необхідно було розщепити багатозначні функції на однозначні вітки, встановити зв'язки і способи переходу від однієї вітки до іншої, вивчити структуру області можливого виділення, з'ясувати характер особливих точок (полюси, критичні точки розриву). При цьому Пьюізьо висловлював (1850 р.) раніше Рімана (1857 р.) ідею аналітичного продовження і узагальнює інтеграл Коші, користуючись рядами $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\psi(z)\right)^k$ , які загальніші від степеневих. Пьюізьо, таким чином, фактично з'ясовує структуру багатолистної рімановоі поверхні, яка визначається алгебраїчним рівнянням $f(u, z) = 0$. Він знайшов розміщення усіх її точок розгалудження і визначив характер переходу з одного листа до іншого в околі будь-якої з них. Пьюізьо розглядає і топологічні (гомотонічні) ідеї, які пізніше були розвинуті Ріманом. Пьюізьо ставить і розв'язує задачу, не виконуючи фактично процес продовження по деякому шляху, що не проходить через особливі точки і, спираючись лише на відомості про характер поведінки функції в околі особливих точок, порівнювати кінцеві результати продовження вздовж різних шляхів на рімановій поверхні із спільним початком і кінцями, розміщеннями на різних листах, але таких, що проектуються в одну і ту ж точку площини.

Ріман же додав саме істотне і глибоке, ввівши поняття порядку зв'язності і роду поверхні і співвідношення між ними. Отже, Пьюізьо підготував будівельний матеріал, яким скористався Ріман для побудови своєї геніальної конструкції.

Слід відмітити, що і після Рімана не усі переходили з комплексної площини на поверхню Рімана (абстракція більш високого порядку), оскільки, як вказують Бріо і Буке, «концепція поверхні з кратними листками представляє собою деякі труднощі: незважаючи на прекрасні результати, до яких Ріман прийшов…» і «він не здається нам таким, що має переваги», оскільки «ідея Коші дуже добре підходить для представлення багатозначних функцій, остатньо приєднати до значень змінної відповідне значення функції…» [30].

Звідси слідує, що ідеї Коші і його система є сильними і надзвичайно живучими, особливо для його учнів, бо у їх розумінні одержана нами система рівносильна системі Рімана. Паритет між французькими і німецькими математиками встановлено у цій галузі математики, якщо прийняти до уваги, що вони дуже суперничали. Ми лише відзначимо, що ідеї Коші виявилися надзвичайно плодотворними у комплексному аналізі і знаходили свій розвиток і поширення.

Пьюізьо першим помітив недостатність і неправильність представлення алгебраїчних ірраціональностей та інших величин у вигляді поліномів і раціональних дробів. Виходячи з теорії Коші, він відкрив роль критичних точок і обставини зміни початкових значень коренів, коли змінна повертається до своєї вихідної точки, описавши замкнений контур, який містить усередині одну або кілька таких точок. Ерміт [21] вказує: «Він дослідив наслідки цих результатів до вивчення інтегралів від алгебраїчних диференціалів. Пьюізьо вказав, що різні шляхи інтегрування породжують різні означення. Це привело до пояснення походження, до тих пір цілковито таємничого, періодичності кругових функцій, еліптичних функцій, трансцендентних від декількох змінних, означених Якобі, як обернені функції гіпереліптичних інтегралів».

Ще до Пьюізьо Ерміт застосував теорію функцій комплексної змінної за Коші до теорії еліптичних функцій. Бріо і Буке використали принципи Коші у теорії диференціальних рівнянь першого порядку, що виявило великий вплив на дослідження в області аналізу. Усе це викликало до життя потужні дослідження А. Пуанкаре в області звичайних диференціальних рівнянь і С. Ковалевської в області диференціальних рівнянь в частинних похідних.

А. Пуанкаре поширює на кратні інтеграли теорію інтегралів однієї комплексної змінної, створену Коші. У 1882 р. Пуанкаре розглядає системи диференціальних рівнянь в частинних похідних і поширює результати Коші (умови збіжності ряду Тейлора) на ряди, які представляють розв’язки системи. Розгортаючи свої результати, він асимптотичні ряди (1886 р.) і застосовує їх до диференціальних рівнянь і складної задачі трьох тіл. Ерміт узагальнив теореми Коші про лишки на кратні інтеграли від функції комплексної змінної.

Таким блискучим завершенням стали розгорнуті О. Коші дослідження, які він почав у 1813 р. теоремою про многогранники, з якої слідує, що якщо грані опуклого многокутника жорсткі, то він сам жорсткий, хоча б його грані були з’єднані одна з другою по ребрах шарнірно. Це припускав ще Евклід, але тріумф її доведення випав на долю молодого Коші через 2000 років після Евкліда.

Творчість О. Коші – найкраще творіння у математичному аналізі XIX століття, чудова перлина світової математичної думки. Вона до самих глибин змінила саму суть математичног аналізу, внесла новий зміст, осучаснила його, впорядкувала і привела до досконалого вигляду. Він створив механізм, який залишив у математиці такий слід, що мобілізував її внутрішні ресурси, які породили його чіткість і виразність, незвичайну зорієнтованість, зцементувала його складові частини і підняла на новий виток розбудови. Плодотворність його концепції постійно демонструє свою силу, концептує здатність продуктивного розвитку, що свідчить про те, що це є результат діяльності генія. Його оригінальні ідеї про зв'язок різних теорій, про зв'язок теорії і практики мають і сьогодні реальне значення. Його твори – унікальне зібрання методів, нетлінний пам’ятник їх автору.

У Франції не прийнято відмічати ювілейні дати знаменитих вчених – таке просто не є прийнятним там. Дуже жаль, що Франція забула, яку блискучу славу приносять їй великі вчені і серед них – цей великий Геометр. Без сумніву, у свій час він високо тримав скіпетр аналізу, він достойний усіх тих почесних титулів, якими був нагороджений за життя. Він працював, долав усі тяготи й складнощі долі, пережив багато наприємностей, не чекав нічого іншого, окрім задоволення від усвідомлення виконаного обов’язку ученого, поваги і, часо, заздрощів тих, хто працював поряд з ним.

Коші листувався з багатьма математиками і фізиками. Вона займала значне місце у його житті. Він відповідав на листи дуже акуратно, щедро ділився своїми думками і знаннями як математичного, так і нематематичного змісту.

Особливе місце займає його листування з Г. Коріолісом (1792–1843 рр.).

Зокрема, у листі до нього у 1837 р. Коші пише, що його означення неперервності припускає однозначність функції і, що точки, у яких функція стає багатозначною, хоча б вона і залишалась скінченною, він розглядає як розриви неперервності. З цієї точки зору функція $\sqrt{x}$ не буде неперервною у точці $x$=0. Щоб зрозуміти позицію Коші зазначимо, що у будь-якій однозначній області площини, що не містить початку координат, можна означити неперервну і однозначну вітку функції комплексної змінної $\sqrt{z}$, тоді,як цього не можна зробити для областей, що містять цю точку; завдяки цьому точка $z$=0 і є особливою точкою функції $\sqrt{z}$.

Листування Коші різноманітне за тематикою. У ній зустрічаються питання з теорії функцій комплексної змінної, з диференціальних рівнянь, алгебри, геометрії, методів математичної фізики, астрономії та ін. Коші часто повідомляє про відомі йому результати математиків інших країн, про свої нові результати, знайомить з математичною літературою, пропонує питання для наукових досліджень, ділиться міркуваннями, припущеннями, пропонує розглянути інші методи доведень, висловлює різні гіпотезт. Одним словом, і в листуванні Коші – зайнятий математичними проблемами та їх розв’язанням. Це ще раз підкреслює його надзвичайну захопленість математикою і фізикою.

# 16. О. КОШІ – ТВОРЕЦЬ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ І СИМВОЛІКИ

О. Коші був не тільки визначним математиком, який володів талантом і надзвичайною працьовитістю, мав талант літератора, полеміста, але був також найбільш видатним творцем нових математичних термінів і символіки. І на цьому поприщі він стоїть в одному ряду з такими гігантами, як Г. Лейбніц (1646–1716 рр.) і Д. Сільвестр (1814–19-897 рр.). І у цій сфері діяльності Коші – неперевершений. Вдячні нащадки користуються цого термінами і символікою, яка є вдалою і зручною в користуванні. Слід зазначити, що справою створення і вдосконалення термінології і символіки Коші займався протягом усього свого життя і у кожній галузі математики він залишав свої оригінальні сліди у вигляді іменних теорем та інших математичних конструктів. Важко уявити математику без термінології і символіки Коші.

1815 р. – О. Коші, вперше у математиці, вживає у сучасному тепер значенні термін «детермінант». У Гаусса, наприклад, детермінант – це дискримінант квадратичної форми (1801 р.).

1815 р. – Коші вводить у загальному вигляді визначник, який носить тепер ім'я Ван дер Монда.

1815 р. – вводить поняття «скінченної групи».

1815 р. – Коші вперше застосовує вживані до цього часу терміни «транзитивність» і «транспозиція».

1815 р. – вводить композицію (множення) підстановок, порядок підстановки, циклічний їх запис.

1821 р. – Коші вводить найменування «спряжені» для комплексних чисел $a+bi$ і $a–bi$.

1821 р. – називає число $\sqrt{a^2+b^2}$ *модулем* комплексного числа $a+bi$.

1821 р. – рекомендує строго розрізняти символи для позначень натуральних і десяткових логарифмів і у «Курсі алгебраїчного аналізу» вводить знак десяткового логарифма – $lg$.

1821 р. – Коші вводить поняття і термін «абсолютна збіжність ряду».

1821 р. – вводить сучасне означення границі неперервності функції, похідної, визначеного інтеграла, суми ряду.

1825 р. – введене поняття і термін «лишок функції».

1826 р. – застосовує поняття «головна нормаль до поверхні».

1826 р. – вводить в теорії пружності поняття «напруженість».

1837 р. – Коші вводить поняття «особливі точки» і «круг збіжності ряду».

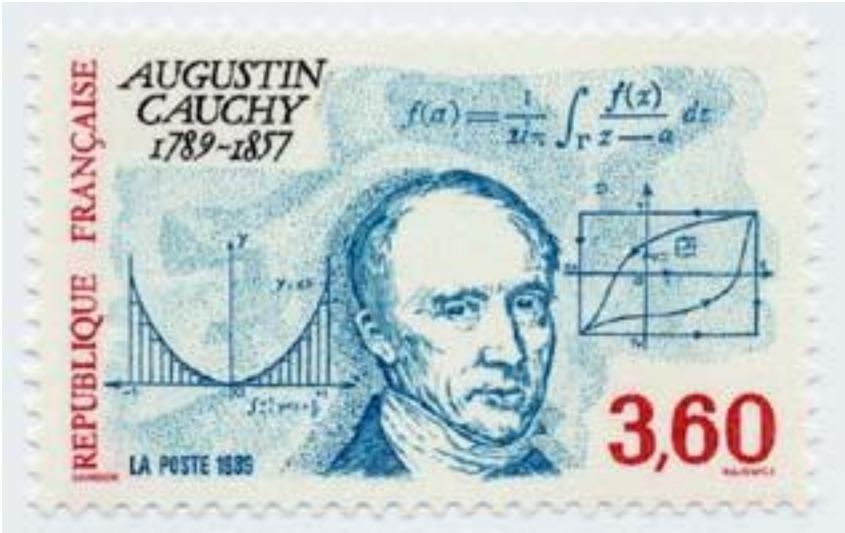
1847 р. – застосовує термін «аргумент комплексного числа» і визначає його через кут на комплексній площині.

1853 р. – вводить позначення вектора – «¯».

1853 р. – термін «радіус-вектор».

Усе це свідчить про багатогранність його діяльності на цьому напрямку.

Коші користувався і позначеннями, які діставалися цому в спадок від видатних попередників, але і, разом з тим, удосконалював їх і був творцем нового, робив усе, що залежало від нього, аби прискорити рух уперед, широко відкривав інструментарій, який служив якомога швидшому прогресу.




*Поштова марка в честь О.Л. Коші*

*О.Л. Коші у різні роки свого життя*

# ПІСЛЯМОВА

Ось перегорнута остання сторінка і у читача виникає багато запитань. Звичайно, так і має бути, оскільки математична творчість Коші досліджена ще не повністю. Він належав до потужного творчого потоку, який був викликаний до життя подіями двох останніх десятиліть XVIII ст., що привело до нового математичного мислення. Одним із творців цього нового мислення і є О. Л. Коші. Він видатний математик, член майже всіх академій наук світу. Працював в багатьох галузях математики і фізики. Він автор 789 прижиттєвих публікацій, які стали відправними точками в багатьох математичних дослідженнях різних вчених. І думається: звідки в цієї людини було стільки енергії, натхненності, заповзяття, працьовитості. Більше всього – від просвітління душі, яке в нього наступало завжди від душевної рівноваги, яка породжувалася його незвичайною любов'ю до математики, яка переборюючи догми всіх часів, направлена в майбутнє. В ній можна досягти не тільки гармонії, але й вічного руху вперед до досконалості. У нього була постійна необхідність підсвідомого перебування в круговороті математичного життя, в полоні всього життя, коли все приходить і йде, знову приходить і йде, а людина має надію таким способом виразити і увічнити себе. Він автор революції в математичному аналізі, творець теорії функції комплексної змінної, разом з Л. Нав'є творець теорії пружності, здійснив важливий внесок в теорію диференціальних рівнянь, алгебру, геометрію, оптику і інші. Навіть у сузір'ї математиків і механіків Франції 10-х–40-х років XIX ст. він є одним з перших і найактивніших. А це ж Г. Монж, П. Лаплас, А. Лежандр, Ж. Фур'є, С. Пуассон… Вони створили самі собі прижиттєві пам'ятники. А вдячні нащадки продовжують їх справу. І бачать далеко, тому що стоять на плечах гігантів. Коші – піонер класичного аналізу, натхненник і організатор революційних реформ. На нашу думку, його відношення до науки є глибоко людським і має яскраво виражений індивідуальний характер, який пояснюється надзвичайним його прагненням розширити горизонти пізнання. Він мав щоденну необхідність зробити щось нове на якомусь фронті математики. А міг він багато. Коші володів багатьма методами досліджень і використовував їх з легкістю, за бажанням. Різні науки використовують різні методи і одна людина в більшій мірі здатна правильно, повно і достатньо успішно володіти тільки однією зброєю. Він володів багатьма і володів успішно. О. Коші ввів порядок в математичний аналіз і його тріумф відобразився в прикладних дисциплінах.

Коші геніально передбачив значення границі в математичному аналізі. Перебудова математичного аналізу дала новий поштовх використання границі в інших математичних дисциплінах, зокрема в функціональному аналізі. Таким чином, Коші підготував грунт для нових досліджень і збагатив новими плодотворними ідеями математику, яка вийшла на нові горизонти. Це добре видно в теорії рядів. Сам Б. Тейлор (1685–1731 рр.) – творець рядів, навіть, не ставив питання про збіжність, К. Маклорен (1698–1746 рр.) намагався включити в дослідження кожного ряду також і розгляд його збіжності. Питання про збіжність як першочергове для ряду було настільки чужим духу XVIII ст., що навіть сам Л. Ейлер (1707–1783 рр.) не вважав за потрібне ні розглядати його, ні прислухатись до нагадувань Маклорена: «Для грецької строгості у математиків XVIII ст. не було часу». Вони рухались вперед і одержували нові результати. Тільки Ж. Лагранж (1736–1813 рр.) піднявся над духом XVIII ст. Він ввів залишковий член ряду, поклав ряд Тейлора в основу аналізу. Та виявилося це було занадто. Коші повернув тільки збіжним рядам їх справжню силу, а сила розбіжних рядів була «оцінена» багатьма поколіннями математиків, які працювали значно пізніше.

О. Коші був математиком нової формації – формації XIX ст. Він найбільш активний математик XIX ст. Це – математик-аналіст, який поставив на перше місце строгість математичних доведень або, більш загальніше, – про істинні основи математики. Над цим питанням математики працюють і понині. «Його можна поставити майже поряд з Гауссом» – така оцінка французькому математику, дана німецьким математиком Феліксом Клейном, дуже вагома, особливо, якщо врахувати, що взаємовідносини між французькими і німецькими математиками розвивались в атмосфері гострої конкуренції і визнання заслуг суперників ніколи не відзначалось щедрістю. Якщо ж ще зняти упередженість, з якою відносився Клейн до математиків не німецького походження, то Коші такий же великий математик як і Гаусс. Інший відомий німець, значний спеціаліст з історії математики Г. Вілейтнер у своїй відомій праці з історії математики чітко ставить О. Коші на друге місце слідом за К. Гауссом.

Коші за своє життя мав усе. І радість багатьох перемог, і гіркоту невдач від нерозв'язаних проблем. Велика кількість його результатів свідчить, що перемог було набагато більше, ніж поразок. Він був пошанований і урядом – мав високі нагороди. Його активність на науковому грунті принесла багато блискучих перемог Франції, а йому особисто – блискучу славу великого Геометра. Він високо тримав скіпетр аналізу, а у роки вигнання, коли продуктивність його роботи зменшувалась, а Фур'є та Лаплас уже пішли, славу першої математичної нації завоювали німці. Великі успіхи Коші породжували його ідейних супротивників-заздрісників, які робили усе можливе і неможливе, аби хоч трохи применшити його важливі заслуги, кидаючи ложки дьогтю, обливаючи його. Але великий трудівник продовжував плідно і продуктивно працювати не чекаючи нічого, крім задоволення від виконання свого обов'язку вченого. Це був мудрий принцип, якого він дотримувався і заслужив симпатію, захоплення і повагу своїх шанувальників. А сам він був глибоким, багатогранним мислителем, натхненним професором і вченим величезної енергії, людина з яскравою оригінальністю і дотепністю, послідовний легітиміст і клерикал, якому з широкою виразністю думки вдалося охопити майже усі області математики і фізики.

В суспільно-політичному житті він людина XVIII ст. – рояліст, консерватор, непримиренний противник республіканських поглядів. Коші – людина з яскраво вираженою політичною позицією. У 1830 р. Коші емігрував за кордон: як переконаний монархіст, він не бажав служити навіть королю з роду Бурбонів, якщо той потрапив на трон в результаті революції! Він з одного боку – сучасник XIX ст. і разом з тим – його полеміст.

Своїм життям і діяльністю довів, що вчений не може бути ізольованим від суспільства. Його наслідує Е. Галуа (1811–1832) з тією лише різницею, що у нього наукові і суспільні ідеали єдині. Ця єдність переслідувалась королівською владою і результат виявився трагічним. У Коші наукові і суспільні ідеали протилежні. Така протилежність ідеалів одержала негативну реакцію демократичної частини суспільства і результат теж відомий – Коші виглядає непривабливим у своєму закостенілому ореолі.

Людину визначають її діяльність і вчинки. Нею можна захоплюватися, бути байдужою до неї, можна зневажати. До Коші не можна бути байдужим. Ним можна захоплюватися або зневажати. им можна захоплюватися або зневажати. Наше дослідження досягне мети, якщо стрілка компасу сприйняття Коші відхилиться хоч трохи від зневажання до захоплення.

Але він дійсно зробив багато для розвитку математики, і якщо яка-небудь праця, зроблена людиною, заслуговує безсмертя, то такою працею є праця Огюстена Луї Коші.

## Основні дати життя і діяльності Огюстена Луї Коші

1789 р., 21 серпня – народився О.Л. Коші.

1795 – 1801 рр. – одержав елементарних знань під керівництвом батька.

1802 – 1805 рр. – навчався у Центральній школі Пантеону.

1805 – 1807 рр. – студент Політехнічної школи у Парижі.

1807 – 1810 рр. – студент школи мостів і доріг у Парижі.

1810 – 1813 рр. – інженер на будівництві військового порту у Шербурі.

1811 р. – початок наукової діяльності О. Коші у галузі математики. Представляє кілька робіт з алгебри, геометрії і механіки Паризькій академії.

1814 – 1816 рр. – екзаменатор і репетитор у Політехнічній школі.

1814 р. – початок інтенсивної наукової роботи у галузі математичного аналізу.

1816 р. – професор Політехнічної школи.

1816 – 1830 рр. – професор Сорбонни.

1816 р. – член Інституту Франції (Академії наук).

1818 р. – одруження з Алоїзою де Бюр.

1830 – 1838 рр. – роки еміграції.

1830 р. – професор університету у Фрібурзі (Швейцарія).

1831 р. – професор кафедри математичної фізики у Турині (Італія).

1832 – 1838 рр. – учитель і вихователь сина Карла X (Прага, Чехія).

1838 р. – учитель єзуїтського коледжу у Парижі, продовжує працювати в академії.

1839 р. – обраний у «Бюро Довгот», працює без утримання.

1848 р. – професор Колеж де Франс і Сорбонни.

1857 р., 23 травня – помер Огюстен Коші.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики. – К.: НПУ ім. М. Драгоманова, 2004.
2. Белхост Б. Огюстен Коши. – М., Наука, 1997.
3. Бобынин В.В. Огюстен Луи Коши (очерк его жизни и деятельности). «Физ.-мат. науки в их настоящем и прошедшем», 1887, т.3, №№ 1–3.
4. Боголюбов А.Н. Математики и механики. Биографический справочник. – К., Наукова думка, 1983.
5. Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики. Биографический словарь-справочник. – К., Радянська школа, 1987.
6. Буняковский В.Я. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. – Изд-во ИАНЦ, СПб, 1831.
7. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 468 с.
8. Дальма А. Эварист Галуа. Революционер и математик. Пер. с фр. Ю.С. Родман. Под ред. Ю.И. Мерзлякова. – М., Наука, 1984.
9. Добровольський В.О. Михайло Васильович Остроградський. – Київ, 2001.
10. Кантор Г. О различных точках зрения на бесконечное. – Сб. НИМ (Новые идеи в математике), СПб, 1915.
11. Клайн М. Математика. Утрата определенности. – М., Мир, 1984.
12. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст. Ч. 1. – М., 1937.
13. Коши О.Л. Алгебраический аналіз, пер. с фр., – Лейпциг, 1864.
14. Коши О.Л. Исследование о многогранниках. Успехи математических наук, 1944, вып. 10.
15. Коши О.Л. Конспект лекций по анализу бесконечно малых, 1823.
16. Коши О.Л. Семь лекцій общей функции, пер. с фр., – СПб, 1872.
17. Маркушевич А.И. Очерки по истории теории аналитических функций. – М.-Л., 1951.
18. Молодший В.Н. Коши и революция в математическом анализе в первоц четверти XIX ст., ИМИ, вып. XXIII, с. 32–54.
19. Молодший В.Н. Очерки по философским вопросам математики. – М., Изд. Просвещение, 1969.
20. Никифоровский В.А. Путь к интегралу. – М., Наука, 1985.
21. Ожигова Е.П. Шарль Эрмит. – Л., Наука, 1982.
22. Оре О. Замечательній математик Нильс Хенрик Абель. – М., 1961.
23. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, – М.-Л., ГИТТЛ, 1950.
24. Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1974.
25. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. – М., Наука, 1984.

26. Тимченко И.Ю. Основания теории математических функцій. Ч. 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. – Одесса, 1899.
27. Фигье Л. Светила науки от древности до наших дней. – Т. III, СПб, М., 1873.
28. Bell E.T. Men of mathematics. – Нью-Йорк, 1937 (1-е изд.), 1962 (2-е изд.).
29. Briot Ch., Bouquet J. Theorie des fonctions elliptiques, 2, ed Paris, 1875.
30. Cauchy A.L. Exercices de mathematiques, – Paris, 1827–1828.
31. Cauchy A.L. Oeuvres completes, 12, ser. 2, – Paris, 1958, p. 104–114.
32. J. de math. pures et appl. Paris, 1850, 15.
33. Lacroix S. Traite du calcul differential et du calcul integral, 1–3, – Paris, 1810–1819.
34. Valson C. La vie des travaux du baron Cauchy. Paris, 1868.