Розділ 4.

Аналітична геометрія.

4.1. Пряма лінія на площині.

Геометричним образом лінійного рівняння $Ax + By + C = 0$ є пряма на площині. Змінні *x* та *y*, що входять до рівняння, – це координати множини точок, що лежать на цій прямій. Якщо поділити рівняння прямої на один з відмінних від нуля коефіцієнтів *A*, *B*, *C*, то це рівняння буде залежати від двох параметрів, що визначають розміщення лінії відносно прямокутної системи координат.

Наприклад, якщо поділимо на $B \neq 0$, то одержимо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*:

$$y = kx + b, \tag{4.1}$$

де $k = \mathrm{tg}\alpha$, α – кут нахилу прямої до осі *OX*, *b* – відрізок, що відтинає пряма на осі *OY*.

Означення. Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$, де (x_0, y_0) – координати точки, що лежить на прямій, описує множину *прямих, що проходять через задану точку*.

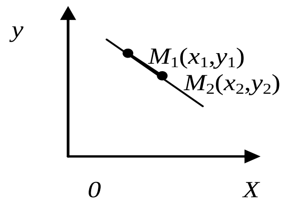


Рис. 4.1

Означення. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* (x_1, y_1) та (x_2, y_2), можна записати у вигляді:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.2}$$

Означення. Якщо рівняння прямої подати у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, то параметри a, b визначають відрізки, що відтинає пряма на відповідних осях системи координат.

Означення. *Кут між двома прямими* $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ знаходять за формулою:

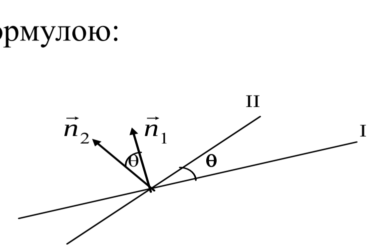


Рис. 4.2

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}, \tag{4.3}$$

$$\cos\theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{4.4}$$

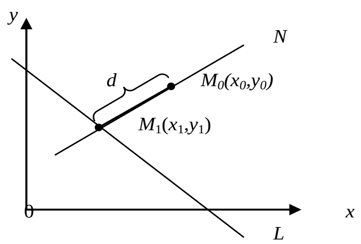


Рис. 4.3

з якої можна одержати *умову паралельності* ($k_1 = k_2$) і *перпендикулярності* $\left(k_2 = -\dfrac{1}{k_1}\right)$ двох прямих.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюють за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{4.5}$$

Дано рівняння сторін AB $(x - 3y + 3 = 0)$ і AC $(x + 3y + 3 = 0)$ трикутника *ABC*. Точка $D(-1; 3)$ – основа висоти AD. Записати рівняння медіани *AM*, бісектриси *AF* і висоти *AD* трикутника, а також знайти кут *A*.

● Знайдемо координати вершини *A*. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$ $A(-3; 0)$.

Запишемо рівняння висоти AD, використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки $\dfrac{x+3}{-1+3} = \dfrac{y}{3}$ або $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}$. Використовуючи умову перпендикулярності $\left(k_2 = -\dfrac{1}{k_1}\right)$, знайдемо кутовий коефіцієнт сторони *BC* трикутника: $k_2 = -\dfrac{2}{3}$. Тоді рівняння сторони *BC* можна записати так: $y - 3 = -\dfrac{2}{3}(x + 1)$; або $2x + 3y - 7 = 0$. Знайдемо координати вершин *B* і *C* трикутника, розв'язавши відповідно системи рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Одержимо: $B\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{13}{9}\right)$; $C\left(10; -\dfrac{13}{3}\right)$. Основа медіани — це середина відрізка *BC*; $M\left(\dfrac{17}{3}; \dfrac{13}{9}\right)$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, одержимо рівняння медіани: $3x - 18y - 43 = 0$. Знайдемо довжини сторін $AB = \dfrac{13\sqrt{10}}{9}$; $AC = \dfrac{13}{9}\sqrt{82}$. Тоді обчислимо відношення, у якому основа бісектриси поділяє сторону *BC*: $\lambda = \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{\dfrac{41}{5}}$.

За формулами $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ знайдемо координати основи бісектриси $F\left(\dfrac{30\sqrt{5} + 4\sqrt{41}}{3(\sqrt{5} + \sqrt{41})}; \dfrac{-13(4\sqrt{5} - \sqrt{41})}{9(\sqrt{5} + \sqrt{41})}\right)$. Рівняння бісектриси запишемо як рівняння прямої, що проходить через задані точки: $\dfrac{x+3}{3(39\sqrt{5} + 7\sqrt{41})} = \dfrac{-y}{13(4\sqrt{5} - \sqrt{41})}$. Для знаходження кута *A* визначимо кутові коефіцієнти прямої $AC - k_1 = -\dfrac{1}{3}$ і прямої $AB - k_2 = \dfrac{1}{3}$.

Тоді $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \dfrac{3}{5}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}$.

Дано трикутник $A(1;\,2)$, $B(3;\,7)$, $C(5;\,-13)$. Знайти відстань від вершини B до медіани, що проходить через точку A.

- Знайдемо координати основи медіани: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{7-13}{2} = -3$. Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки: $\dfrac{x-1}{4-1} = \dfrac{y-2}{-3-2}$, або $5x + 3y - 11 = 0$. Відстань від точки $B(3;\,7)$ до медіани знайдемо за формулою: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|5\cdot 3 + 3\cdot 7 - 11|}{\sqrt{25+9}} = \dfrac{25}{\sqrt{34}}$.

Знайти координати точки, що розташована на віддалі 5 одиниць від прямої $3x + 4y - 10 = 0$ і прямої $5x - 12y + 26 = 0$./

- Нехай $(x,\,y)$ – координати шуканої точки, тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{|3x + 4y - 10|}{\sqrt{9+16}} = 5; \\ \dfrac{|5x - 12y + 26|}{\sqrt{25+144}} = 5; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 1)\begin{cases} 3x + 4y = 35; \\ 5x - 12y = 39; \end{cases} & 3)\begin{cases} 3x - 4y = -15; \\ 5x - 12y = 39; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} 3x + 4y = 35; \\ 5x - 12y = -91; \end{cases} & 4)\begin{cases} 3x - 4y = -15; \\ 5x - 12y = -91. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, точок буде чотири: $A\left(\dfrac{72}{7};\,\dfrac{29}{28}\right)$; $B(1;\,8)$; $C(-21;\,-12)$; $D\left(-\dfrac{23}{2};\,-\dfrac{39}{8}\right)$.

Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими $2x - 9y + 18 = 0$ і $6x + 7y - 21 = 0$.

- Бісектриса є множиною точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x,\,y)$ — одна з точок цієї множини. Тоді, прирівнюючи відстані від цієї точки до прямих, маємо:

$$\frac{|\,2x - 9y + 18\,|}{\sqrt{4+81}} = \frac{|\,6x + 7y - 21\,|}{\sqrt{36+49}} \Rightarrow |\,2x - 9y + 18\,| = |\,6x + 7y - 21\,|.$$

З останнього рівняння маємо рівняння двох бісектрис у вигляді: $4x + 16y - 39 = 0$ і $8x - 2y - 3 = 0$. Слід зазначити, що бісектриси взаємно перпендикулярні: $k_1 = -\dfrac{1}{4}$; $k_2 = 4$.

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Вивести рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом.

2. Вивести рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.

3. Вивести рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

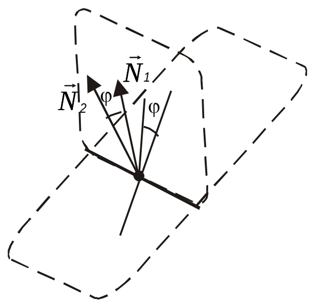
4.2. Площина і пряма у просторі.

4.2.1. Площина.

Будь-яке рівняння першого степеня відносно координат точки простору $Ax + Bx + Cz + D = 0$ відображає площину. Коефіцієнти при змінних *A, B, C* є компонентами вектора, перпендикулярного до площини.

Кут між двома площинами $Ax + By + Cz + D = 0$ і $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \qquad (4.6)$$



Умовою їх паралельності є: $\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1}$, а перпендикулярності – $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$.

Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини можна знайти за формулою: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4.2.2. Види рівнянь прямої.

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.7)$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори $\vec{N}_1$ $\vec{N}_2$ – не колінеарні. Система (4.7) називається *загальним рівнянням прямої*. Дістанемо ще деякі форми рівняння прямої.

А. Канонічне рівняння прямої. Нехай у системі координат *Oxyz* задано пряму *l* і ненульовий вектор $\vec{s}$, колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор $\vec{s} = (m,\ n,\ p)$. Тоді довільна точка *M* (*x, y, z*) лежатиме на прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\,. \tag{4.8}$$

Рівняння (4.8) називається ***канонічним рівнянням прямої у просторі.***

B. Параметричне рівняння прямої.

У рівнянні прямої (4.8) позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\,.$$

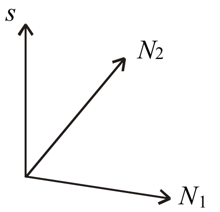
Звідси дістаємо: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt. \end{cases}$

C. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай дві точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$ у рівнянні (4.8), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\,. \tag{4.9}$$

Маючи кілька рівнянь однієї й тієї ж прямої, поміркуємо, як дістати зв'язок між ними. Розглянемо, як із загального рівняння (4.7) вивести канонічне рівняння (4.8). Для цього потрібно знайти точку, яка лежить на прямій, тобто розв'язати систему (4.7), і напрямний вектор $\vec{s}$ прямої. Пригадуючи геометричний зміст коефіцієнтів у рівнянні площини, записуємо вектор $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ – перпендикулярний до першої площини, а $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ – неперпендикулярний до другої.



Напрямний вектор прямої $\vec{s}$ перпендикулярний до обох цих векторів (рис.). Таким чином, $\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$. Використовуючи запис векторного добутку через визначник, дістаємо:

$$\vec{s}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)=(m,\ n,p)\,.. \tag{4.10}$$

4.2.3. Кут між прямими у просторі.

Нехай задано дві прямі

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{ і }\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\,.$$

Візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\,. \tag{4.11}$$

З останньої формули випливає *умова перпендикулярності* двох прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

а *умову паралельності* двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0 M_1}$ і $\vec{s}$ (рис.). Відомо, що площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Доходимо висновку, що шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

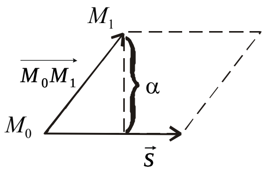


Рис. 4.4

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.. \qquad (4.12)$$

4.2.4. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

Нехай задано пряму $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ і площину $Ax + By + Cz + D = 0$ у просторі. Якщо $\dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$, то пряма перпендикулярна до площини, а коли $Am + Bn + Cp = 0$, пряма паралельна площині.

Нехай $Am + Bn + Cp \neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до канонічного рівняння прямої

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt$$

і підставимо значення *x, y, z* у рівняння площини:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Звідси, використовуючи умову непаралельності, знайдемо значення параметра

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Координати точки перетину:

$$x = x_0 + mt^*, \quad y = y_0 + nt^*, \quad z = z_0 + pt^*.$$

4.2.5. Кут між площиною і прямою.

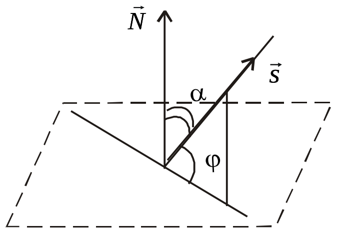


Рис. 4.5

Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину (рис.). Вектор $\vec{N}=\left(A,B,C\right)$ – перпендикулярний до площини, а кут α, який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90°. Тобто α + φ = 90°.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{N}\cdot\vec{s}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{s}\right|}.$$

Якщо $\alpha<90^{\circ}$, то $\cos\alpha=\cos(90-\varphi)=\sin\varphi$, а якщо $\alpha>90^{\circ}$, то $\cos\alpha=\cos(90-\varphi)=-\sin\varphi$, у будь-якому разі $\sin\varphi=\left|\cos\alpha\right|$. Отже,

$$\sin\varphi=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (4.13)$$

Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і утворює з площиною $2x+y-\sqrt{5}z=0$ кут 60°, і знаходження її відстані до точки $A(1;3;5)$.

● Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $Ax+By=0$, тому що вона проходить через вісь OZ. Використаємо другу умову задачі: $\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}=\frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{10}}$, з якої одержимо рівняння: $3\frac{A^2}{B^2}+8\frac{A}{B}-3=0$; $\frac{A}{B}=-3$ або $\frac{A}{B}=\frac{1}{3}$. Остаточно маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини: $3x-y=0$ і $x+3y=0$. Точка A лежить на першій площині, тому що $d_1=0$, а відстань її до другої площини $d_2=\frac{\left|1+9\right|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$.

Знайти напрямний вектор прямої

$$\begin{cases} x+y-z=0; \\ x-y=0 \end{cases}$$

і кути, які вона утворює з осями системи координат.

• Вектори $\vec{N}_1(1;1;-1)$ і $\vec{N}_2(1;-1;0)$ перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої $\vec{s}$ розташований перпендикулярно до кожного з векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тобто: $\vec{s} = (-1;-1;-2)$ або $\vec{s} = (1;1;2)$. Кути з осями знайдемо за формулами: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

[illegible]: Показати, що прямі $\begin{cases} x - z + 2 = 0; \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розташовані.

• Дві прямі будуть лежати на одній площині, коли їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2;1;0)$ лежить на першій прямій, а $M_2(2;4;2)$ – на другій. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (4;3;2)$. Напрямний вектор $\vec{s}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{s}_2 = (3;1;1)$. $(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Отже, прямі лежать на одній площині. Для запису рівняння цієї площини знайдемо вектор $\vec{N} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$. Точка $M_1(-2;1;0)$ лежить на цій площині. Отже, маємо: $x + 2 + 2(y-1) - 5z = 0$ або остаточно: $x + 2y - 5z = 0$.

Закінчіть вирази:

1. Загальне рівняння площини в просторі має вигляд: …
2. Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ направлений …
3. Якщо одна з проекцій вектора $\vec{N}$ на вісь системи координат дорівнює нулю, то …
4. Якщо дві проекції вектора $\vec{N}$ на осі системи координат дорівнюють нулю, то …
5. Кут між двома площинами знаходиться за формулою: …
6. Умовою перпендикулярності двох площин є …
7. Умовою паралельності двох площин є …
8. Нормальне рівняння площини має вигляд: …
9. Відстань від точки до площини знаходиться за формулою: …
10. Загальне рівняння прямої у просторі має вигляд: …
11. Канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд: …

12. Параметричне рівняння прямої у просторі має вигляд: …

13. Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки, має вигляд: ...

14. Кут між двома прямими у просторі визначається за формулою: …

15. Кут між прямою у просторі і площиною знаходиться за формулою: …

16. Умова паралельності прямої і площини, має вигляд: …

17. Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд: …

18. Умова того, що пряма лежить на площині, має вигляд: …

19. Точка перетину прямої і площини знаходиться за формулою: …

Вправи для самостійного розв'язування.

20. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0;1;3)$; $M_2(2;4;5)$; $M_3(1, -2, 1)$.

21. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(-4;0;4)$ і відтинає на осях OX і OY відповідно відрізки $a=4;\ b=3$.

22. Через точку $M(-1;2;3)$ проведено площину перпендикулярно до $\overrightarrow{OM}$. Написати її рівняння.

23. Знайдіть кут між площинами:

1) $x-2y+2z-8=0$ і $x+z-6=0$;

2) $x+2z-6=0$ і $x+2y-4=0$.

24. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(-1;-1;2)$ і перпендикулярна до площин $x-2y+z-4=0$ і $x+2y-2z+4=0$.

25. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(2;2;-2)$ і паралельна до площини $x-2y-3z=0$.

26. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1;-2;0)$ і $M_2(1;1;2)$ і перпендикулярна до площини $x+2y+2z-4=0$.

27. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $O(0;0;0)$, $A(3;-2;1)$ і $B(1;4;0)$.

28. Знайти кут між площиною $x-y+\sqrt{2}z-5=0$ і координатною площиною Oyz.

29. Обчислити відстані:

1) точки $(3;1;-1)$ до площини $22x+4y-20z-45=0$;

2) точки $(4;3;-2)$ до площини $3x-y+5z+1=0$;

3) точки $\left(2;0;-\dfrac{1}{2}\right)$ до площини $4x-4y+2z+17=0$.

30. Обчислити висоту піраміди, опущену з вершини S, якщо $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$.

31. Скласти рівняння площини, якщо вона віддалена від точок $A(6;1;-1)$, $B(0;5;4)$ і $C(5;2;0)$ відповідно на відстані $d_1=1$, $d_2=3$, $d_3=0$.

32. Знайти рівняння площин, що поділяють навпіл двогранні кути між площинами $3x-y+7z-4=0$ і $5x+3y-5z+2=0$.

33. На осі OZ знайти точку, рівновіддалену від двох площин: $x+4y-3z-2=0$ і $5x+z+8=0$.

34. Обчислити відстань між площинами $11x-2y-10z+15=0$ і $11x-2y-10z-45=0$.

35. Через лінію перетину площин $4x-y+3z-1=0$ і $x+5y-z+12=0$ провести площину, що: 1) проходить через точку $(1;1;1)$, 2) паралельна осі OY, 3) перпендикулярна до площини $2x-y+5z-3=0$.

36. На відстані 3 одиниць від площини $3x-6y-2z+14=0$ провести паралельну їй площину.

37. Знайти точки перетину прямої $\begin{cases} 6x+2y-z-9=0; \\ 3x+2y+2z-12=0 \end{cases}$ з координатними площинами.

38. Скласти рівняння ребер тетраедра, якщо його вершинами є: $A(0;0;2)$, $B(4;0;5)$, $C(5;3;0)$, $D(-1;4;-2)$.

39. Перевірити, чи лежать точки $(3;0;1)$, $(0;2;4)$, $\left(1;\frac{4}{3};3\right)$ на одній прямій.

40. Визначити напрямні косинуси прямих:

1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$;   2) $\frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}$.

41. Визначити кут між прямими $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ і $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$.

42. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0; \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$

43. Обчислити напрямні косинуси прямої $\begin{cases} 5x-6y+2z+21=0; \\ x-z+3=0. \end{cases}$

44. Через точку $(2;-5;3)$ провести пряму:

1) паралельно прямій $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$;

2) паралельно прямій $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0; \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

45. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.

46. Чи перетинаються прямі:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{5}$ і $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$;

2) $\begin{cases} 4x+z-1=0; \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x+y-z+4=0; \\ y+2z-8=0\ ? \end{cases}$

47. Написати рівняння перпендикуляра, проведеного від точки $(2;3;1)$ до прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

48. З початку системи координат опустіть перпендикуляр на пряму $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

49. Через точку $A(4;0;-1)$ провести пряму так, щоб вона перетинала дві прямі: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$ і $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

50. Знайти відстань від точки $O(0;0;0)$ до прямої $\frac{x+1}{3}=$ $=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{-5}$.

51. Знайти відстань між паралельними прямими $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$ і $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$.

52. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x+y-z=0$, а пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{x+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ лежить на цій площині.

53. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ і точку $(3;4;0)$.

54. Написати рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

55. Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і утворює однакові кути з площинами $3x-4y=0$, $y=0$; $z=0$. Знайти цей кут.

56. Знайти точку перетину прямої $x=2t-1,\ y=t+2,\ z=1-t$ з площиною $3x-2y+z=3$.

57. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ з площиною $x+2y+3z-29=0$.

58. Знайти проекцію точки $(3;1;-1)$ на площину $x+2y+3z-30=0$.

59. Знайти проекцію точки $(2;3;4)$ на пряму $x=y=z$.

60. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(2;1;0)$ на пряму $\begin{cases} x-3z+1=0; \\ y-2z=0. \end{cases}$

61. Через пряму $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+4y-3z+7=0$.

62. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на площину $x-y+3z+8=0$.

63. Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $(-3;2;5)$ на площини $4x+y-3z+13=0$ і $x-2y+z-11=0$.

64. Через пряму $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ провести площину паралельно площині $x+y-z+15=0$.

65. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки $(3;2;6)$.

66. На прямій $\begin{cases} x+2y+z=1; \\ 3x-y+4z=29 \end{cases}$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(3;11;4)$, $B(-5;-13;-2)$.

67. Знайти точку, симетричну точці $(4;3;10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

4.3. Криві другого порядку.

4.3.1. Еліпс та його канонічне рівняння. Властивості.

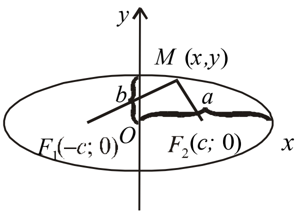
Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.. \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

На рис. зображено F_1 ($-c$, 0), F_2 (c, 0) – фокуси еліпса, M (x, y) – точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a,$ причому $2c < < 2a \Rightarrow a > c$.



Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.15)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (4.15). Якщо $x = 0$, $y = \pm b$, тобто точки (0, b) і (0, $-b$) є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають *малою піввіссю* еліпса. При $y = 0$, $x = \pm a$ і відповідно (a, 0); ($-a$; 0) є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a – *велика піввісь* еліпса. З парності виразу (9.24) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса – це відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$; за означенням $c<a$ і $\varepsilon\in[0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$, то $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

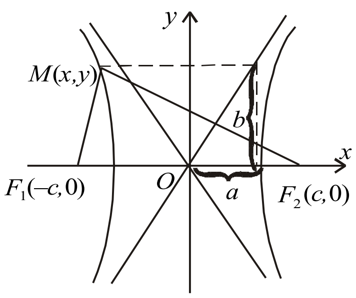
4.3.2. Гіпербола та її канонічне рівняння. Асимптоти гіперболи.

Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис., з якого бачимо, що точки F_1 ($-c$, 0) і F_2 (c, 0) – фокуси гіперболи, точка M (x, y) – точка визначеної множини. Тоді $\left||MF_1| - |MF_2|\right| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.16)$$



де $b^2 = c^2 - a^2$.

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь *Oy*. При $y=0$; $x=\pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ – точки перетину з віссю *Ox*. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей *Ox* і *Oy*, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, але $c>a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$, або $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі *Ox*.

Дві прямі, рівняння яких $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$; $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\dfrac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса – це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі *Oy* і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі *Oy* і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе *твердження: якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення* $\dfrac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}}$ *стале й дорівнює ексцентриситету, тобто* $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

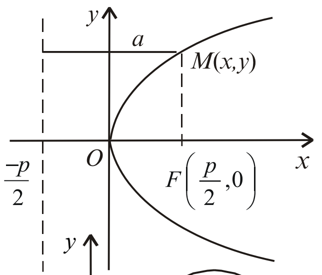
Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс, якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола, якщо* $\varepsilon > 1$.

4.3.3. Парабола та її канонічне рівняння. Властивості.

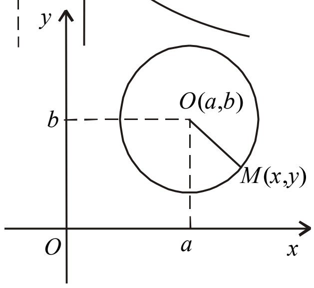
Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

За означенням $r = d$, отже (див. рис.):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px. \qquad (4.17)$$



– канонічне рівняння параболи, коли ε = 1. Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис.



Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис.).

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки – центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{4.18}$$

– канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (4.18), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

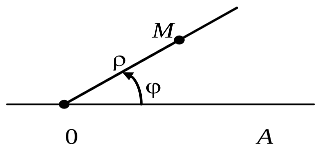


Рис. 4.6

4.3.4. Системи координат: полярна, циліндрична й сферична.

I. Полярна система.

O – полюс, OA – полярна вісь. Полярними координатами називаються числа ρ і φ, де ρ – перша координата або **полярний радіус**, число φ — друга координата або **полярний кут**.

Формули переходу декартова ↔ полярна

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{4.19}$$

І, навпаки

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\cdot tg\varphi=\frac{y}{x} \tag{4.20}$$

II. Циліндрична система

ρ – радіус, φ – кут у площині, z – вертикально:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases} \tag{4.21}$$

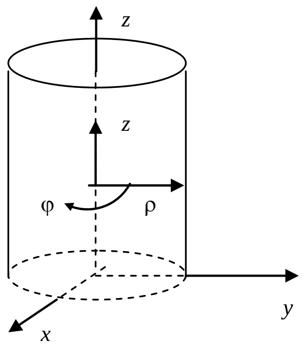


Рис. 4.7

III. Сферичні координати

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases} \tag{4.22}$$

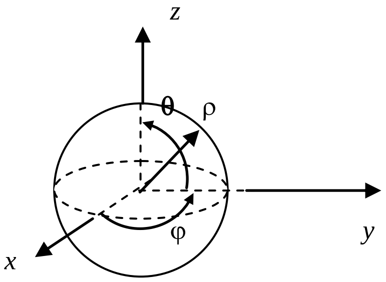


Рис. 4.8

4.4. Поверхні другого порядку.

4.4.1. Еліпсоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{4.23}$$

називається *еліпсоїдом.*

Для встановлення геометричного образу рівняння (4.23) скористаємось перерізами, паралельними площині Oxy. Кожен з наших перерізів визначається площиною $z = h$, де h – будь-яке число, а лінія, яка утворюється в перерізі, визначається системою рівнянь:

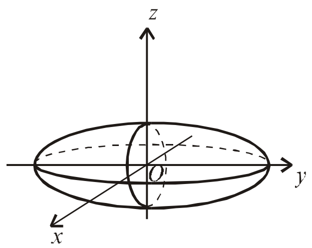


Рис. 4.9

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Дослідимо цю систему залежно від h. Якщо $|h|$ > *c*, то, оскільки *c* > 0, дістаємо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. У такому разі система рівнянь визначає уявний еліпс, тобто точок перетину еліпсоїда з площиною $z = h$ не існує. Якщо $h = \pm c$, то лінія перетину вироджується в точки (0; 0; –*c*), (0, 0, –*c*), тобто площини $z = \pm c$ дотикаються до еліпсоїда. Нарешті, якщо $|h| < c$ то досліджувану систему рівняння можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Перше рівняння визначає еліпс, півосі якого змінюються залежно від h. При $h = 0$ у перетині еліпсоїда площиною $z = 0$ маємо найбільший еліпс.

Таким чином, проведений аналіз дозволяє зобразити геометричний образ еліпсоїда як замкненої овальної поверхні (рис.).

4.4.2. Гіперболоїд.

I. Однопорожнинний гіперболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (4.24)$$

називається *однопорожнинним гіперболоїдом*.

Для встановлення геометричного образу цієї поверхні зробимо перерізи її координатними площинами Oxy $(y=0)$ і Oxy $(x=0)$. Дістанемо дві системи

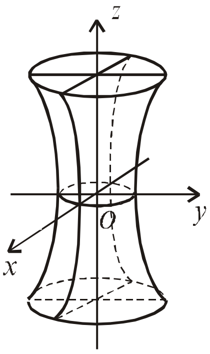


Рис. 4.10

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{cases} \text{ і } \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\\ x=0,\end{cases}$$

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи.

При перетині гіперболоїда площиною $z=h$ дістанемо лінії, що визначають еліпси

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1\\ z=h.\end{cases}$$

Якщо $h=0,$ маємо найменший еліпс при перетині гіперболоїда площиною $z=0$, якщо h необмежено зростає, то півосі еліпса зростають до нескінченності. Однопорожнинний гіперболоїд зображено на рис. .

II. Двопорожнинний гіперболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (4.25)$$

називається *двопорожнинним гіперболоїдом*.

При перерізі його координатними площинами *Oxz* і *Oyz* дістанемо рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ y=0\end{cases} \text{ і } \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0,\end{cases}$$

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи.

Розглянемо перерізи гіперболоїда площинами $z=h,$ дослідивши систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$$

Аналіз цих рівнянь показує, що при $|h| < c$ лінії перетину немає, при $|h| = c$ площина дотикається до гіперболоїда, при $|h| > c$ лінією перетину буде еліпс. Вигляд поверхні зображено на рис. .

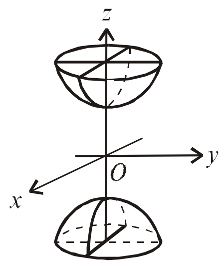


Рис. 4.11

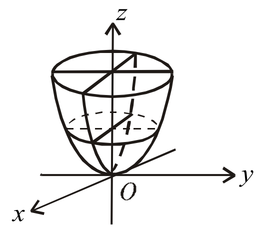


Рис. 4.12
Еліптичний параболоїд

4.4.3. Параболоїд.

I. Еліптичний параболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z, \text{ де } p > 0,\ q = 0, \qquad (4.26)$$

називається *еліптичним параболоїдом*.

При перетині еліптичного параболоїда координатними площинами Oxz і Oyz дістанемо лінії, що записуються рівняннями: $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases}$, з яких випливає, що ці лінії – параболи.

При перерізах параболоїда площинами $z = h$ маємо: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h, \end{cases}$, що відповідає еліпсам при $h > 0.$ Еліптичний параболоїд зображено на рис. .

II. Гіперболічний параболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z, \text{ де } p > 0,\ q = 0, \qquad (4.27)$$

називається *гіперболічним параболоїдом.*

Встановимо геометричний вигляд поверхні (4.27). У перетині параболоїда координатною площиною Oxz маємо $x^2 = 2pz;\ y = 0,$ тобто в перетині дістаємо параболу. Її вітки спрямовані вгору, вона симетрична відносно осі Oz. У перетині параболоїда площинами $y = h$ також утворюються параболи $x^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right),\ y = h.$

Якщо січні площини мають рівняння $x = h$, то маємо $y^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q}\right)$, $x = h$ і вітки парабол перетину площини з параболоїдом спрямовані вниз, а їхні вершини розміщені на параболах $x^2 = 2pz$.

Розглянемо, нарешті, перетини параболоїда площинами $z = h$. Нехай маємо

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1;\ z = h.$$

Із цих рівнянь випливає, що при $h > 0$ у перетині дістанемо гіперболи, що перетинають площину Oxz, а при $h < 0$ – гіперболи, що перетинають площину Oyz. З аналізу ліній перетину гіперболічного параболоїда відповідними площинами випливає, що він має вигляд, зображений на рис. .

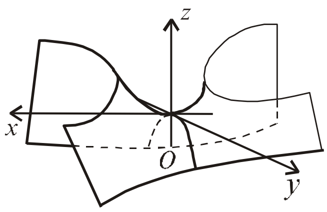


Рис. 4.13
Гіперболічний параболоїд

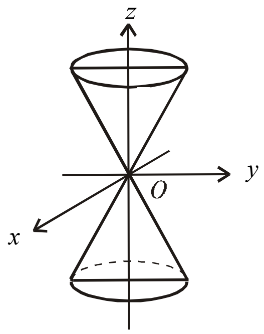


Рис. 4.14
Конус 2-го порядку

4.4.4. Конус другого порядку.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат описується рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, називається *конусом другого порядку*.

У перетині поверхні площинами $x = 0$ і $y = 0$ одержуємо пари прямих, які є твірними конічної поверхні.

Якщо розглянути перетини поверхні площинами $z = h$, то маємо $\frac{x^2}{a^2 \frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \frac{h^2}{c^2}} = 1;\ z = h$, тобто еліпси.

Аналіз перетинів дає змогу побудувати поверхню, зображену на рис. .

4.4.5. Циліндри.

Якщо $p = 0, q \neq 0;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ – *еліптичний циліндр* (рис. 4.15).

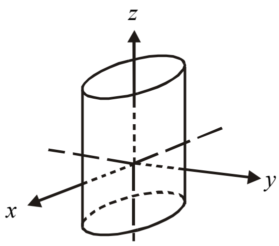


Рис. 4.15
Еліптичний циліндр

Якщо $p=0,\ q\neq 0;\ \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ – *гіперболічний циліндр* (рис. 4.16).

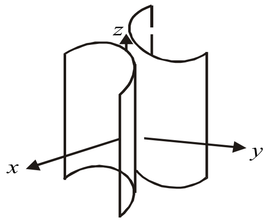


Рис. 4.16
Гіперболічний циліндр

Якщо $p^2+q^2\neq 0;\ \ \frac{z^2}{c^2}+qy=0$ – *параболічний циліндр* (рис. 4.17).

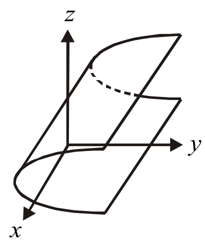


Рис. 4.17
Параболічний циліндр

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Кінцевими точками одного з діаметрів кола є точки $A(1;3)$ і $B(-3;5)$. Написати рівняння цього кола.

2. Знайти величину радіуса кола $x^2+y^2+6x-2y-5=0$.

3. Написати рівняння лінії центрів двох кіл: $x^2+y^2-6x+8y=0$ і $x^2+y^2+2x-12y+1=0$.

4. Обчислити довжини осей, координати фокусів та ексцентриситет еліпса $25x^2+169y^2=4225$.

5. Написати канонічні рівняння парабол, які проходять через точку $M(-2;-3)$.

6. Написати канонічні рівняння парабол, які проходять через точку $M(4;1)$.

7. Обчислити довжину дійсної осі, координати фокусів, ексцентриситет та написати рівняння асимптот гіперболи $64x^2-17y^2=1088$.

8. Обчислити відстань між центрами кіл $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ і $x^2+y^2+4x+14y+49=0$.

9. Обчислити координати центра і величину радіуса кола $x^2+y^2+4x+8y-5=0$.

10. Через точку $M(-2;5)$ провести прямі, які паралельні асимптотам гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1.$