

УДК 515.2

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЕКТОРІЇ ФОКУСА ЕЛІПСА, ЯКИЙ КОТИТЬСЯ ПО ПРЯМІЙ

Руденко С.Ю.

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)

Тел. (057) 337-25-61

Анотація – наведені формули для побудови меридіана ундулоїда – траєкторії фокуса еліпса, який котиться по прямій.

Ключові слова – поверхні сталої середньої кривини, фокус еліпса, ундулоїд, кочення еліпса.

Постановка проблеми. Поверхні сталої середньої кривини застосовуються при розрахунках гумових пневматичних виробів, адже вони забезпечують рівномірність розриву їх часток при певному внутрішньому тиску (тобто у них немає слабких місць). При чому, чим більша кривина поверхні сталої середньої кривини, тим більший тиск вона може витримати [1]. Рівномірність поверхні сталої середньої кривини на розрив пояснюється теоремою Пуасона-Лапласа [2]. Розгляд поверхні обертання сталої середньої кривини, наприклад, ундулоїда [3], звичайно зводиться до розгляду її меридіану. Тобто задача зводиться до відшукування меридіану, який би забезпечив властивості зазначеної поверхні. Меридіан ундулоїда збігається з траєкторією фокуса еліпса, коли цей еліпс котиться по прямій (рис. 1). Інтерес викликає автоматизація побудови форми меридіану.



Рис. 1. Меридіан ундулоїда як траєкторія фокуса.

Огляд відомих досліджень. Механічні прилади для креслення меридіану ундулоїда розроблені Уаттом [3] і Ейтсом [4]. Основу їх складає чотирикутник із сторонами, що перетинаються (рис. 2).

Нехай два стержня c_1 і c_2 однакової довжини $2c$ шарнірно поєднані своїми кінцями F_1, F_2 і G_1, G_2 з двома іншими стержнями a_1 і a_2 також однакової довжини $2a > 2c$, при чому так, що ці чотири

стержні утворюють плоский чотирикутник з рівними протилежними сторонами, дві з яких перетинаються (рис. 2). Точка перетину E стержнів a_1 і a_2 змінюватиме положення на цих стержнях, коли шарнірний чотирикутник прийматиме усілякі положення на площині.

Помістимо в точці E шарнір з гільзами, які взаємно обертаються одна відносно одної, і у яких можуть ковзати стержні a_1 і a_2 .

Зафіксуємо положення стержня c_1 і розглянемо криву, яку може утворювати рухома точка E . Відомо [4], що ця крива буде еліпсом з фокусами F_1 і F_2 і постійною сумою відстаней $2a$. Для доведення цього слід розглянути трикутники $F_2F_1G_2$ і $F_2G_1G_2$, які при усіляких положеннях шарнірного чотирикутника будуть конгруентними, адже у них попарно рівні сторони. Звідси маємо рівність кутів $\angle F_2G_1F_1 = \angle G_2F_2G_1$, тобто трикутник F_2EG_2 - рівнобедрений. Наслідком цього є виконання тотожностей $F_1E + F_2E = G_1E + G_2E = a$, що і доводить твердження.

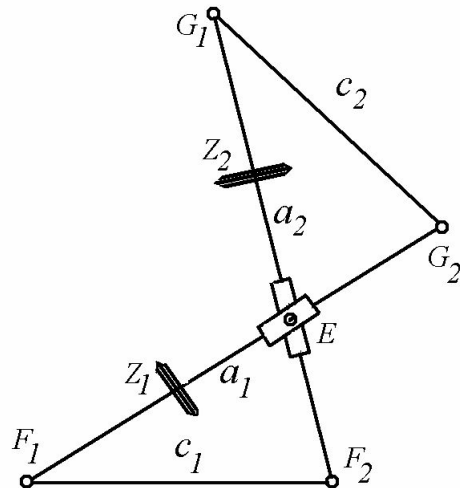


Рис. 2. Чотирикутник із сторонами, що перетинаються.

Принцип дії приладів Уатта і Ейтса для побудови меридіана ундулоїда базується на таких положеннях [4]. Нехай в довільних точках стержнів a_1 і a_2 закріплені два колеса Z_1 і Z_2 (рис. 2), які можуть обертатися навколо цих стержнів, як навколо осей, але не можуть ковзати по них. Нехай точка E рухається по деякій кривій і одночасно колеса котяться по площині цієї кривої і визначають положення точок F_1 і F_2 . Завдяки колесам напрям руху їх центрів співпадає з площиною коліс. Тоді траєкторії точки F_1 або F_2 визначають шукану криву.

Постановка завдання. На аналітичному рівні довести, що при фіксованому положенні стержня c_1 (рис. 2) точка E рухається по еліпсу (пряма задача), а також навести формули для побудови траєкторії фокусів еліпса (меридіану ундулоїда), коли цей еліпс котиться без проковзування вздовж прямої лінії (обернена задача).

Основна частина. Оберемо прямокутну систему координат так, щоб фокуси мали координати $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$. Координати точки E позначимо як u і v , і запишемо рівняння прямої F_1E :

$$\frac{u+c}{x+c} - \frac{v}{y} = 0. \quad (1)$$

Знайдемо координати точки G_2 як результат перетину прямої F_1E і кола радіуса $2a$ з центром в точці F_1 :

$$4a^2 - (u + c)^2 - v^2 = 0. \quad (2)$$

Після розв'язання відносно змінних u і v системи рівнянь (1) і (2), одержимо координати точки G_2 :

$$\begin{aligned} xG_2 &:= -c + \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}} + \frac{2ac}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}}; \\ yG_2 &:= \frac{2ya}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Також запишемо рівняння прямої F_2E :

$$\frac{u - c}{x - c} - \frac{v}{y} = 0. \quad (4)$$

Знайдемо координати точки G_1 як результат перетину прямої F_2E і кола радіуса $2a$ з центром в точці F_2 :

$$4a^2 - (u - c)^2 - v^2 = 0. \quad (5)$$

Після розв'язання відносно змінних u і v системи рівнянь (4) і (5), одержимо координати точки G_1 :

$$\begin{aligned} xG_1 &:= c + \frac{2ax}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}} - \frac{2ac}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}}; \\ yG_1 &:= \frac{2ya}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, змінні u і v дозволили одержати вирази для обчислення координат точок G_1 і G_2 . Тому для їх визначення складемо рівняння на основі формули відстані між точками G_1 і G_2 , яка (тобто відстань), за побудовою, дорівнює $2c$:

$$\begin{aligned} 4c^2 &= \left(2c + \frac{2ax}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}} - \frac{2ac}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}} - \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2ac}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}} \right)^2 - \left(\frac{2ya}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}} - \frac{2ya}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}} \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

В результаті одержимо рівняння кривої

$$\begin{aligned} F &:= 4c^2 - \left(2c + \frac{2ax}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}} - \frac{2ac}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}} - \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2ac}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}} \right)^2 - \left(\frac{2ya}{\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}} - \frac{2ya}{\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

У середовищі математичного пакету Maple без алгебраїчних перетворень було доведено, що рівняння (8) описує еліпс. Для цього

показано, що функція $F(x, y) = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ є тотожною нулю (з врахуванням $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ для обчислення малої півосі еліпса).

Таким чином, на аналітичному рівні було доведено, що крива, яку утворює при русі точка E при фіксованому положенні стержня s_1 , буде еліпсом з фокусами F_1 і F_2 і постійною сумою відстаней $2a$.

Далі наведемо співвідношення для опису миттєвих координат фокуса еліпса, який без проковзування котиться вздовж осі Ox проти руху годинникової стрілки з постійною кутовою швидкістю.

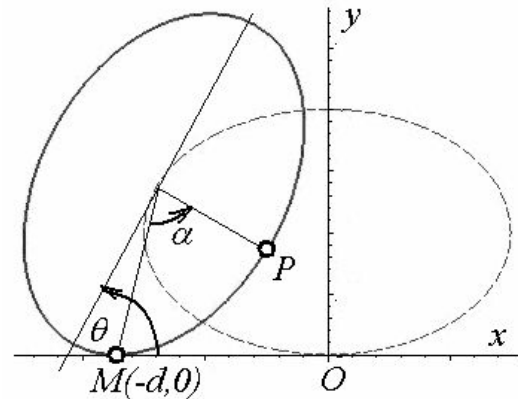


Рис. 3. Миттєве положення рухомого еліпса.

Нехай a і b є довжинами великої і малої осі еліпса, а його центр розташований у точці $(0, b)$. Таким чином, еліпс у початковому положенні описаний рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$ (рис. 3). Позначимо через θ кут, який велика вісь еліпса a утворює з віссю Ox (початкове значення $\theta = 0$). Для моделювання руху необхідно виміряти довжину d дуги MP еліпса при його коченні на кут θ .

Центральний кут α , що визначає довжину дуги шляху кочення еліпса можна обчислити за формулою $\alpha = \arctg \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \theta}$.

Довжина шляху кочення еліпса визначається еліптичним інтегралом

$$d = \int_{\alpha}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \quad (9)$$

В середовищі математичного пакету Maple можна обчислити точне значення цього інтеграла, яке має надто громіздкий вигляд для використання на практиці. Для пришвидшення обчислень автором заздалегідь було обчислено значення d для певних комбінацій параметрів a і b залежно від кута θ . Одержані дискретні значення $d(\theta)$ використовувалися при подальших обчисленнях.

Отже, точка дотику з віссю Ox при миттєвому положенні еліпса матиме координати $M(-d(\theta), 0)$.

Пояснити процес кочення еліпса вздовж горизонталі (у системі координат Oxy), можна за допомогою додаткової побудови, уявивши горизонтальний еліпс з центром у точці $(0, 0)$ із побудованою

дотичною в точці M (рис. 4). Відстань між точками M і P , виміряна по периметру еліпса, повинна дорівнювати обчисленому раніше значенню $d(\theta)$. Якщо рівняння еліпса задати у канонічному вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (10)$$

то обчислена змішана похідна функції (10) $-x b^2 / y a^2$ дозволяє визначити напрямок дотичної до еліпса

$$-\frac{x b^2}{y a^2} = \operatorname{tg} \theta. \quad (11)$$

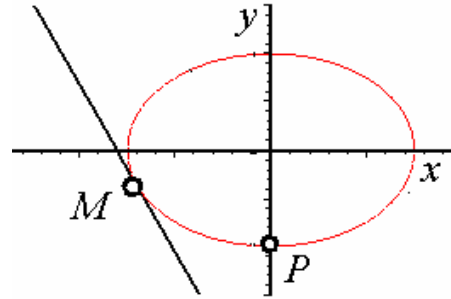


Рис. 4. Дотична до еліпса.

Після розв'язання системи рівнянь (10) і (11) обчислимо координати точки $M(x_0, y_0)$ дотику дотичної до еліпса:

$$x_0 = -\frac{a^2 \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}; \quad y_0 = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}. \quad (12)$$

Рівняння дотичної, поведеної через точку $M(x_0, y_0)$, має вигляд

$$-\frac{x \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{y}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} = 1. \quad (13)$$

Далі повернемо горизонтальний еліпс (рис. 4) проти руху стрілки годинника так, щоб дотична набула горизонтальне положення. А потім перенесемо повернутий еліпс так, щоб він прийняв миттєве положення, зображене на рис. 3.

Використавши матрицю обертання $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$, держимо координати повернутої точки дотику еліпса:

$$\begin{aligned} x_K &= -\frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} + \frac{b^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}; \\ y_K &= -\frac{a^2 \sin \theta \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} + \frac{b^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

а також рівняння нового (миттєвого) положення еліпса:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \theta \cos t - b \sin \theta \sin t - d(\theta) + \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{b^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}; \\ y(t) &= a \sin \theta \cos t + b \cos \theta \sin t + \frac{a^2 \sin \theta \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} + \frac{b^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Крім того, після обчислення координат нового центра еліпса

$$\begin{aligned}
 x_C &= -d(\theta) + \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{b^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}; \\
 y_C &= \frac{a^2 \sin \theta \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{b^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

з'являється можливість визначити координати обох фокусів еліпса у його новому (миттєвому) положенні:

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= x_C + \cos \theta \sqrt{a^2 - b^2}; & y_{F1} &= y_C + \sin \theta \sqrt{a^2 - b^2}; \\
 x_{F2} &= x_C - \cos \theta \sqrt{a^2 - b^2}; & y_{F2} &= y_C - \sin \theta \sqrt{a^2 - b^2}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

В результаті одержимо у явному вигляді нові координати обох фокусів еліпса:

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= -d(\theta) + \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{b^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} + \cos \theta \sqrt{a^2 - b^2}; \\
 y_{F1} &= \frac{a^2 \sin \theta \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{b^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} + \sin \theta \sqrt{a^2 - b^2}; \\
 x_{F2} &= -d(\theta) + \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{b^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \cos \theta \sqrt{a^2 - b^2}; \\
 y_{F2} &= \frac{a^2 \sin \theta \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \frac{b^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}} - \sin \theta \sqrt{a^2 - b^2}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

де, нагадаємо, символом $d(\theta)$ позначено еліптичний інтеграл (9).

На рис. 5 зображено миттєві положення еліпса та його фокусів в процесі кочення по осі Ox при $0 \leq \theta < \pi/2$. Побудову можна доповнити, враховуючи апріорну симетрію ундулоїда (рис. 6).

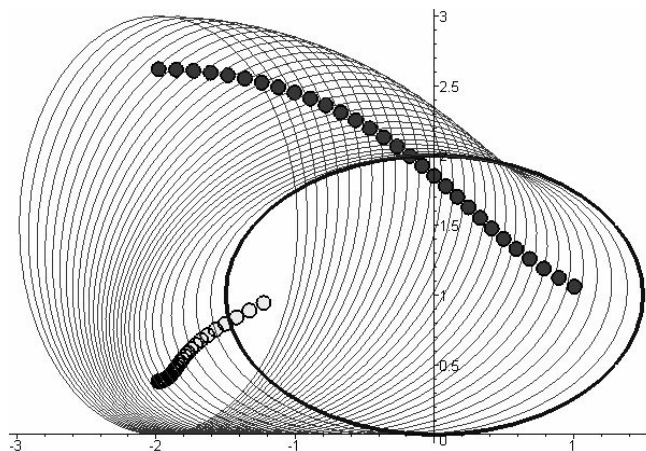


Рис. 5. Миттєві положення еліпса та його фокусів в процесі кочення по осі Ox при $0 \leq \theta < \pi/2$.

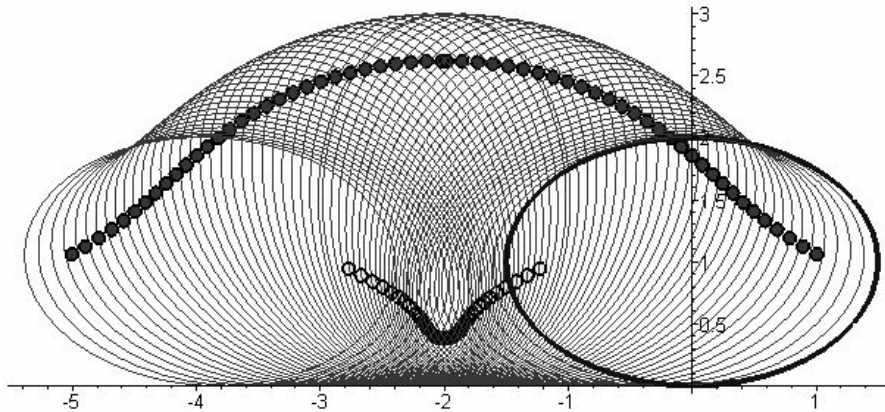


Рис. 6. Симетрична добудова положень еліпса та його фокусів.

Висновки. Табуляція еліптичного інтеграла дозволила скоротити час побудови комп'ютерної анімації руху. Подальші дослідження пов'язані з розглядом трьох інших положень дотичної (рис. 4).

Література

1. *Коровіна І.О.* Конструювання автомобільних балонів високого тиску у формі нодоїда / *І.О.Коровіна* // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 46.-Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С.134-141.
2. *Іванов А.О.* Лекции по классической дифференциальной геометрии / *А.О. Иванов, А.А. Тужилин.* – М.: Логос, 2009. - 224 с.
3. *Пульпинский Я.С.* Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм. Дисс. на соискание канд.техн наук, Пенза: ПГУАиС, 2006. – 140 с.
4. *Гильберт Д.* Наглядная геометрия./ *Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен* -М.: Едиториал УРСС, 2004. - 344 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ФОКУСА ЭЛЛИПСА, КОТОРЫЙ КАТИТСЯ ПО ПРЯМОЙ

С.Ю. Руденко

Аннотация - приведены формулы для построения меридиана ундулоида - траектории фокуса эллипса, который катится по прямой.

GEOMETRIC MODELING TRAJECTORY OF THE FOCUS OF THE ELLIPSE, WHICH ROLLS ALONG LINE

S.Rudenko

Summary

Abstract - The formulas for constructing unduloid - ie trajectory of the focus of the ellipse, which rolls along a straight line.