






MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

 DOI 10.51582/interconf.19-20.07.2024.046

Умови єдиності рішення задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі

Азаренко Олена Василівна¹ , **Гончаренко Юлія Юріївна²** ,
Дівізінюк Михайло Михайлович³ ,
Землянський Олександр Миколайович⁴ ,
Фаррахов Олександр Володимирович⁵ 

¹ доктор фізико-математичних наук, професор, заступник керівника;
Науково-дослідний лабораторно-експериментальний центр «БРАНД ТРЕЙД»; Україна

² доктор технічних наук, доцент, професор кафедри кібербезпеки та захисту інформації;
Європейський університет; Україна

³ доктор фізико-математичних наук, професор, головний науковий співробітник;
Центр інформаційно-аналітичного та технічного забезпечення моніторингу об'єктів атомної
енергетики Національної академії наук України; Україна

⁴ кандидат технічних наук, доцент, начальник наукового відділу;
Черкаський інститут пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля
Національного університету цивільного захисту України; Україна

⁵ кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник;
Центр інформаційно-аналітичного та технічного забезпечення моніторингу об'єктів атомної
енергетики Національної академії наук України; Україна

Анотація.

Аналізуються умови єдиності рішення задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної мети. Спочатку розглянуті фактори, що визначають властивості відображення та розсіювання для малих повітряних цілей. Потім дано опис рішення зворотного завдання відновлення образу малої повітряної цілі. Після чого проаналізовано суть перетворення Радону, променевого та віялового перетворень та їх використання за відсутності повної інформації. Наприкінці зроблено висновок про фактори, що забезпечують єдиність рішення задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі.

Ключові слова:

об'єкт критичної інфраструктури
терористичний вплив
станція радіолокації
безпілотний літальний апарат
перетворення Радону
віялове перетворення

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

Вступ

Однією із складових частин забезпечення безпеки України є захист критичної інфраструктури держави від терористичного впливу [1]. До складу цієї інфраструктури входять атомні, теплові та гідроелектростанції, металургійні та нафтохімічні комбінати, та інші стратегічні об'єкти, що охороняються [2,3]. Головною небезпекою для цих об'єктів є ударні безпілотні літальні апарати (БПЛА), які систематично атакують об'єкти критичної інфраструктури (ОКІ) [4,5]. Зараз основним засобом виявлення БПЛА та інших повітряних цілей є імпульсні радіолокаційні станції (РЛС). Вони забезпечують вирішення завдань охорони та захисту ОКІ [6-8]. Дослідження властивостей БПЛА – малих повітряних цілей, як об'єктів, що відображують і розсіюють електромагнітні хвилі, показує [9-11], що знання цих характеристик, однією з яких є зворотне розсіювання, дозволяє відновлювати образ малої повітряної цілі, що підвищує ефективність експлуатації РЛС. У свою чергу це забезпечує зростання ступеня забезпечення безпеки ОКІ та інших стратегічних об'єктів, що охороняються.

Мета роботи – сформулювати умови єдиності рішення задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання. Спочатку розглянути фактори, що визначають властивості відображення та розсіювання для малих повітряних цілей. Потім дати опис рішення зворотної задачі відновлення образу малої повітряної цілі. Після чого проаналізувати суть перетворення Радону, променевого та віялового перетворень та їх використання за відсутності повної інформації. Наприкінці зробити висновок про фактори, що забезпечують єдиність рішення задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі.

Виклад основного матеріалу

Фактори, що визначають властивості відображення та розсіювання для малих повітряних цілей

Схема опромінення електромагнітною хвилею радіолокаційної цілі представлена на рис. 1 [9-11].

Функція $j(x)$ описує ступінь поглинання електромагнітних променів поверхнею БПЛА у певній точці x . Величина ΔI показує зміну інтенсивності електромагнітного випромінювання, що

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

відбувається при цьому, на нескінченно малому відрізку Δx в точці x

$$\frac{\Delta I}{I} = j(x)\Delta x \quad (1)$$

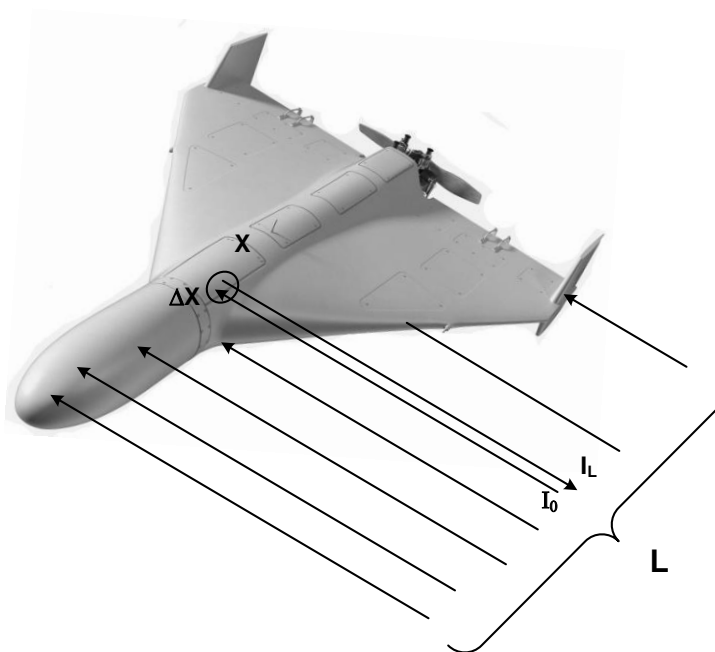


Рисунок 1
Схема опромінення радіолокаційної цілі

Сумарний результат, коли на радіолокаційну ціль падає L променів, буде

$$\frac{I_1}{I_0} = \exp\left\{-\int_L j(x)\Delta x\right\} \quad (2)$$

де I_0 початкова інтенсивність поодинокого променя,

I_1 – його інтенсивність після відображення від радіолокаційної цілі.

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

При цьому враховується, що властивості малої повітряної цілі, як об'єкта, що відображає і розсіює електромагнітні хвилі, визначаються п'ятьма факторами [12], Перший – частота зондувальної електромагнітної хвилі (робоча частота радіолокаційної станції). Другий – геометричні розміри малої повітряної цілі. Третій – конфігурація повітряної цілі. Четвертий – властивості поверхні, що покриває повітряну ціль, матеріал із якого це покриття виготовлено. П'ятий – ракурс зондування малої повітряної цілі. Знання цих факторів забезпечує точний розрахунок енергетичного потенціалу та дальності виявлення радіолокаційних цілей.

Опис рішення оберненої задачі для відновлення образу малої повітряної цілі

Відомо [13,14], що обернені завдання для гіперболічних диференціальних рівнянь у деяких випадках можна звести до завдань інтегральної геометрії, та отримати рішення у наближенні Ритова (3)

$$u_I w_R(x) = -f \int_{R^2} H_0(f|x-y|) j(y) u_I(y) dy \quad (3)$$

де u_I – потік променів, що підходять до цілі,

w_R – наближення Ритова,

f – частота електромагнітної хвилі,

R^2 – об'єкт, що розсіює електромагнітні хвилі,

H_0 – функція Ханкеля першого роду нульового порядку,

x, y – відліки по осях абсцис та ординат.

Оскільки в рамках наближення Ритова лінійні інтегралі функцій розсіювання описуються розсіяним полем поза об'єктом, що розсіює, то для високих частот електромагнітних хвиль можна отримати теоретичний варіант граничного випадку зворотного завдання розсіювання для хвильового рівняння [15] наступного виду

$$\int_{\theta \cdot x = s} j(x) dx = -2i w_R(r\theta + s\theta^\perp) \quad (4)$$

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

де r – фіксоване число більше одиниці, тобто W_R змінюється поза кола радіусу r ,

$\theta \in S^1$ – одиничний вектор, який визначає напрямок поширення хвилі,

θ^\perp – ортогональ до одиничного вектора.

Цей варіант вирішення теоретичної задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі в рамках наближення Ритова, дозволяє отримати чисельний результат ефективної площі поверхні, що відображає силует цілі вздовж лінії зондування. Додаткові обчислення значень характеристичної функції розсіювання радіолокаційної цілі з її площинних інтегралів у тривимірному евклідовому просторі з суттєво неповною вибіркою значень тривимірного перетворення Радону забезпечують відновлення об'ємного образу (форми або конфігурації) цілі радіолокації. Однак тут виникають питання про єдиність рішення задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі.

Суть перетворення Радону, променевого та віялового перетворень та їх використання за відсутності повної інформації

Перетворення Радону R (n – мірне) відображає функцію, визначену в R^n , у безліч її інтегралів по гіперплощинах у R^n . Іншими словами, якщо вектор θ належить одиничній сфері S^{n-1} та відстань від початку координат s входить до R^1 , то справедливо (5)

$$Rj(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} j(x) dx = \int_{\theta^\perp} j(s\theta + y) dy \quad (5)$$

де $\theta \in S^{n-1}$, і $s \in R^1$.

Вираз (5) являє собою інтеграл функції j , що належить простору Шварца, за гіперплощиною, перпендикулярною вектору θ та розташованої на відстані s від початку координат.

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

Простір Шварца - це простір речових функцій, що швидко спадають. Ці функції нескінченно диференційовані. Самі функції і всі їх похідні на нескінченності прагнуть до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію. Найпростішим прикладом функції цього простору буде нескінченно диференційована функція з компактним носієм.

Функція Rj є парною і визначена в R^{n+1} на одиничному циліндрі виду (6)

$$Z = S^{n-1} \times R^1 \quad (6)$$

Тоді справедливо (7) і (8)

$$Rj(-\theta, -s) = Rj(\theta, s) \quad (7)$$

$$R_{\theta}j(s) = Rj(\theta, s) \quad (8)$$

Променеве перетворення P (n - мірне) відображає функцію, визначену в R^n , в багатьох її інтегралах. Іншими словами

$$Pj(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} j(x + t\theta) dt \quad (9)$$

де $\theta \in S^{n-1}$ і $s \in R^1$.

Вираз (9) є інтегралом функції $j \in \Phi(R^n)$ по прямій, що проходить через точку x у напрямку θ . Очевидно, що величина $Pj(\theta, x)$ не змінюється при зміщенні точки x у напрямку θ . З цієї причини, як правило, вибирають x з підпростору θ^\perp , чим визначають Pj на дотичному розшаруванні T сфери S^{n-1} , що описано умовою (10)

$$T = \{(\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp\} \quad (10)$$

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

Введемо позначення проєкції j на θ^\perp .

$$P_{\theta}j(x) = Pj(\theta, x) \quad (11)$$

При $n=2$ оператори \mathbf{P} і \mathbf{R} збігаються з точністю до позначення аргументів. Очевидно, що $Pj(w, s)$ можна уявити у вигляді інтеграла від Pj для любого $\theta \in S^{n-1}$, для якого $\theta \perp w$.

Іншими словами справедливий вираз (12)

$$Rj(w, s) = \int_{x \in \theta^\perp, x \cdot w = s} Pj(\theta, x) dx \quad (12)$$

Віялове перетворення є інтегралом функції j по променю з початком $a \in R^n$ і напрямом $\theta \in S^{n-1}$, тобто

$$Dj(a, \theta) = \int_0^\infty j(a + t\theta) dt \quad (13)$$

Введемо позначення (14)

$$D_{\theta}j(\theta) = Dj(a, \theta) \quad (14)$$

Вираз (14) є інтегралом функції j по променю з початком $a \in R^1$, і напрямом $\theta \in S^{n-1}$.

Нехай

$$D_{\theta}j(\theta) = Dj(a, \theta) \quad (15)$$

Тоді, якщо $j \in \Phi(R^n)$ то функції $R_{\theta}j, P_{\theta}j, Rj, Pj$ належать простору Шварца, кожне з яких задане на R^1, θ^\perp, Z, T .
Введемо поняття подвійних операторів.

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

Оператори \mathbf{R} і $\mathbf{R}^\#$ утворюють подвійну пару в сенсі інтегральної геометрії, тобто оператор \mathbf{R} задає інтегрування по всіх точках площини, а оператор $\mathbf{R}^\#$ задає інтегрування по всіх площинах, що проходять через цю точку.

Такий самий зв'язок існує між операторами \mathbf{P} і $\mathbf{P}^\#$.

Тоді застосовуючи перетворення Гільберта виду (16), отримуємо значення функції j , яка описується залежністю (17)

$$\mathbf{H}h(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^1} \frac{h(t)}{s-t} dt \quad (16)$$

$$j = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{R}^\# \mathbf{H}^{n-1} g^{(n-1)} \quad (17)$$

де $h \in \Phi(\mathbf{R}^n)$,

g – аргумент, при якому хоча б одна з подвійних функцій $(\mathbf{R}|j)g, j\mathbf{R}^\#|g|$ була б інтегрованою.

В залежності (17) $(n-1)$ -ша похідна береться за другою змінною з використанням (18)

$$\mathbf{H}^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \mathbf{H} - \text{при парному } n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} - \text{при непарному } n \end{cases} \quad (18)$$

Тоді отримуємо (19)

$$j(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \mathbf{H}g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta - \text{при парному } n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta - \text{при непарному } n \end{cases} \quad (19)$$

Залежності (19) прийнято називати формулами звернення. З

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

них впливає теоретичний висновок, що функція $j \in \Phi$ однозначно визначається будь-якою із функцій R_j, P_j .

Проте слід зауважити, що $g(\theta, x \cdot \theta)$ є інтеграл функції j за гіперплощиною, перпендикулярною вектору θ і проходить через точку x . При непарному n можна вирахувати (19), знаючи $g(\theta, x \cdot \theta)$ для всіх $\theta \in S^{n-1}$ і всіх x з деякої околиці точки x . Отримуємо, що завдання відновлення функції за її інтегралами по гіперплощинам у непарному просторі є локальним завданням. Локальність завдання полягає в тому, що функція в деякій точці визначається інтегралами по гіперплощинах, що перетинають околицю цієї точки.

При парно мірному просторі для визначення функції використовується перетворення Гільберта. Тепер завдання відновлення функції не є локальним. Тепер для обчислення значення функції в деякій точці потрібні значення інтегралів по всіх гіперплощин, що перетинає носій цієї функції. Вирішення практичних завдань не забезпечує повноту такої інформації. Тут і виникає ключове питання – чи можна однозначно визначити функцію j не маючи повної інформації. Тобто отримати єдиність рішення задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі.

Нехай S – відкрита множина в S^{n-1} , A – безперервно диференційована крива, і $\Omega \subseteq R^n$ – обмежена відкрита множина. Нехай для будь-якого $\theta \in S$ існує така точка $a \in A$, що промінь $a + t\theta$, $t \geq 0$, не має спільних точок з Ω .

Тоді для всякого цілого $k \geq 0$ і $a, x \in R^n$ визначимо віялове перетворення виду (20)

$$D_k j(a, x) = \int_0^{\infty} t^k j(a + tx) dt \quad (20)$$

При $k = 0$ впливає, що $Dj(a, \theta) = 0$. Нехай за деякого $k \geq 0$

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

виконується умова (21), тобто

$$D_k j(a, \theta) = 0, \quad a \in A, \quad \theta \in S \quad (21)$$

Тоді для точок x , що належать відкритому конусу виду (22), справедливо (23)

$$C = \left\{ x \neq 0, \frac{x}{|x|} \in S \right\} \quad (22)$$

$$D_k j(a, x) = 0, \quad a \in A \quad (23)$$

Нехай $a = a(s)$ – параметричне подання A . Позначимо i -ю часткову похідну функції j через j_i . Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} D_{k+1} j(a(s), x) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty t^{k+1} j(a(s) + tx) dt = \int_0^\infty t^{k+1} \sum_{i=1}^n a_i'(s) j_i(a(s) + tx) dt = \\ &= \int_0^\infty t^k \sum_{i=1}^n a_i'(s) \frac{\partial}{\partial x_i} j(a(s) + tx) dt = \sum_{i=1}^n a_i'(s) \frac{\partial}{\partial x_i} D_k j(a(s), x) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Тобто при $x \in S$ $D_k j(a(s), x)$ обертається в нуль на відкритій множині C . Отже функція $D_{k+1} j(a, x)$ постійна на A при $x \in C$. у випадку, якщо ця функція дорівнює нулю, хоча б для однієї точки $a \in A$, то вона дорівнює нулю на всій кривій A . Тоді справедливе твердження, що якщо $j \in C_0^\infty(\Omega)$ і $Dj(a, \theta) = 0$ при $a \in A$ і $\theta \in S$, то в області сканування $\{a + t\theta: a \in A, \theta \in S\}$ функція $j = 0$.

Введення променя $a + t\theta$, що не перетинає Ω , є необхідним. Навіть для спрощеного прикладу, де Ω – одиничне коло в R^2 ,

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

то функції, що згладжують j рівні одиниці у верхній смузі, -1 в нижній, i в решті площини дорівнюють нулю.

У випадку, коли A – відрізок $[a, b]$, а S визначається кутом φ , то функція J не обертається в нуль в області сканування та віялове перетворення D_j не дорівнює нулю $A \times S$.

У свою чергу, це дозволяє стверджувати, що теоретично можливе тривимірне відновлення об'єкта, але при цьому повинні виконуватися такі умови. Перше – об'єкт зондування та пристрій зондування повинні забезпечити кутові переміщення, щоб забезпечити сканування з різних ракурсів. Друге – діаграма, яка здійснює віялове сканування має бути досить вузькою. Третя частота зондування має бути досить високою.

Висновки

Таким чином, розглянутий варіант вирішення теоретичної задачі зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі в рамках наближення Ритова, дозволяє отримати чисельний результат ефективної площі поверхні силуету цілі, що відображає, вздовж лінії зондування. Додаткові обчислення значень характеристичної функції розсіювання радіолокаційної цілі за її площинними інтегралами у тривимірному евклідовому просторі з суттєво неповною вибіркою значень тривимірного перетворення Радону забезпечують відновлення об'ємного образу (форми або конфігурації) цілі радіолокації.

Теоретичні розрахунки щодо відновлення образу малої повітряної цілі матимуть єдине рішення, якщо буде забезпечено кутове переміщення пристрою та об'єкта сканування. Відновлюваний образ буде тим точніше, чим вузьше діаграма сканування і чим вище частота електромагнітної хвилі радіолокаційного зондування.

References:

- [1] Офіційне інтернет-представництво Президента України. (2024). *Ключове завдання нашої держави... Промови та звернення*. Вилучено з: <https://www.president.gov.ua/news/speeches>
- [2] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Шевченко Р.І., Шевченко О.С. (2023). Характеристика об'єктів критичної інфраструктури держави (особливості ядерних та інших стратегічних об'єктів). *Комунальне господарство міст*. Том 1, випуск 175. С.160–168. <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2023-1-175-160-168>

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

- [3] Портал «Все про бухгалтерський облік». (2024). *Постанова КМУ від 04.03.2015р. № 83 «Про затвердження переліку об'єктів державної власності, що мають стратегічне значення для економіки і безпеки держави».* (Редакція від 26.08.2021р.). Вилучено з: <https://document.vobu.ua/doc/7863>
- [4] «Вікіпедія». (2024). *Перелік атак БПЛА Shahed 136.* Вилучено з: https://uk.wikipedia.org/wiki/Перелік_атак_БПЛА_Shahed_136
- [5] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Камишенцев Г.В., Фаррахов О.В. (2024). *Аналіз деяких аспектів терористичних вплив ударними дронами. Theoretical and empirical scientific research: concept and trends: Collection of scientific papers «ЛОГОС» with Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference, Oxford, February 2, 2024.* «P.C. Publishing House», United Kingdom. P.128–133. <https://doi.org/10.36074/logos-02.02.202>
- [6] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Камишенцев Г.В., Фаррахов О.В. (2024). *Деякі аспекти класифікації безпілотних літальних апаратів в інтересах захисту об'єктів критичної інфраструктури. Scientific Collection «InterConf+», 43(193): with the Proceedings of the 6th International Scientific and Practical Conference «Scientific Goals and Purposes in XXI Century» (March 19–20, 2024; Seattle, USA) / comp. by LLC SPC «InterConf».* Seattle: ProQuest LLC. С.624–637. <https://doi.org/10.51582/interconf.19-20.03.2024.060>
- [7] Електронна версія «Велика українська енциклопедія». (2024). *Радіолокаційна станція.* Вилучено з: [https://vue.gov.ua/Радіолокаційна станція](https://vue.gov.ua/Радіолокаційна_станція)
- [8] Дивізінюк, М.М., Азаренко, Е.В., Гончаренко, Ю.Ю., Лазаренко, С.В., Ожиганова, М.И. (2019). *Информационно-технические методы предотвращения чрезвычайных ситуаций террористического характера на объектах критической инфраструктуры. Часть 1. С использованием активных импульсных радиолокационных средств.* Монографія. Київ. ДУ «ІГНС НАН України».
- [9] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Землянський О.М., Фаррахов О.В. (2024). *Основні закономірності процесу виявлення цілей імпульсними радіолокаційними станціями при забезпеченні безпеки об'єктів критичної інфраструктури. Scientific Collection «InterConf+», 45(201): with the Proceedings of the 8th International Scientific and Practical Conference «International Scientific Discussion: Problems, Tasks and Prospects» (May 19–20, 2024; Brighton, United Kingdom) / comp. by LLC.* С. 650–660. <https://doi.org/10.51582/interconf.19-20.05.2024.067>
- [10] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Землянський О.М., Фаррахов О.В. (2024). *Закономірності поширення, згасання та спаду інтенсивності електромагнітних хвиль в атмосфері, що впливають на експлуатацію радіолокаційних станцій, які забезпечують безпеку об'єктів критичної інфраструктури. ГРААЛЬ НАУКИ : міжнар. наук. журнал. – Вінниця : ГО «Європейська наукова платформа»; НУ «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці».* No 40. – С. 235–248. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.07.06.2024.036>

MILITARY AFFAIRS AND NATIONAL SECURITY

- [11] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Землянський О.М., Фаррахов О.В. Характеристика енергетичного потенціалу станцій радіолокації, що забезпечують безпеку об'єктів критичної інфраструктури та властивостей відображення малих повітряних цілей в залежності від різних чинників. *Scientific Collection «InterConf+», Vol. 46(205)* : with the Proceedings of the 9th International Scientific and Practical Conference «Current Issues and Prospects for The Development of Scientific Research» (June 19–20, 2024; Orléans, France) / comp. by LLC SPC «InterConf». Orléans: Epi, 2024. С. 549–561. <https://doi.org/10.51582/interconf.19-20.06.2024.052>
- [12] David J. Griffiths. (1998). *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, Upper Saddle, New Jersey.
- [13] Adams R.A. (1975). *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press.
- [14] Тихонов А.Н. (1978). *Математические задачи компьютерной томографии*. Москва. Наука.
- [15] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Фаррахов О.В., Сівоха І.М. (2024). Варіант рішення теоретичного завдання зворотного розсіювання для відновлення образу малої повітряної цілі. *Грааль науки : міжнар. наук. журнал. – Вінниця : ГО «Європейська наукова платформа»; НУ «Інститут науково-технічної інтеграції та співпраці», No 41. – С. 195–203.* <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.05.07.2024.029>