Національний університет цивільного захисту України

С.В. Говаленков, О.А. Тарасенко

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ЧАСТИНА 1.

2024

УДК 517(07)

Друкується за рішенням
вченої ради факультету
техногенно-екологічної безпеки
НУЦЗ України
Протокол від 29.01.2024р. № 5

Рецензент: доктор технічних наук, професор С.В. Поздєєв, головний науковий співробітник Черкаського інституту пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля.

Говаленков С.В., Тарасенко О.А.
Практикум з вищої математики. Частина 1. / С.В. Говаленков, О.А. Тарасенко. – Х.: НУЦЗУ, 2024. – 89 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика» з 3 тем. Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи. Призначені для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр" за у галузях знань 26 «Цивільна безпека» та 10 «Природничі науки».

Друкується за авторською редакцією.
Відповідальний за випуск С.В. Говаленков.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дуже важливою формою навчання курсантів та студентів є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення теоретичного матеріалу за підручником і конспектом, розгляду та самостійного розв'язання задач, причому опанування теоретичних знань є необхідною передумовою формування практичних навичок і вмінь, але не завжди є цілком достатнім для цього. Вміння розв'язувати задачі формується виключно шляхом цілеспрямованої та копіткої самостійної роботи, в першу чергу пов'язаної з аналізом прикладів розв'язання задач, які наведені у підручниках та навчальних посібниках.

При самостійному розв'язанні задач часто виникають певні труднощі, які пов'язані або з вибором методу розв'язування задачі, або з суто технічними особливостями обраного методу. Вибір методу розв'язування вимагає глибокого аналізу прикладів з метою встановлення закономірностей, яким підкоряється цей вибір. Для вирішення другої складової треба систематично працювати, виконуючи всі завдання викладача, в тому числі й ті, які здаються дуже простими.

Основне мета цього навчального посібника – допомогти слухачам подолати певні складності при вивченні навчального матеріалу та навчити їх свідомо застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач.

Дисципліна "Вища математика" є однією з фундаментальних дисциплін, яка формує науковий і методичний апарат, необхідний для вивчення інших фундаментальних дисциплін. Курс "Вищої математики" є частиною циклу природничо-наукової підготовки і спрямований на розвиток загальної математичної культури, формування діалектико-матеріалістичного світогляду, надає уявлення про методи і задачі, що розглядаються. Вивчення дисципліни передбачає систематичне і послідовне відображення загальних математичних положень і методів щодо вирішення задач фундаментальних і прикладних дисциплін.

Вивчення дисципліни “Вища математика” базується на засадах теоретичних і практичних знань і вмінь, отриманих курсантами та студентами в загальноосвітніх навчальних закладах, і вона є фундаментальною дисципліною, на якій базуються практично всі інженерні та технічні дисципліни.

У навчальному посібнику викладено матеріал з 3 тем. Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв’язанням необхідної кількості задач різного рівня складності. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи, до яких наведені відповіді.

Автори сподіваються, що така побудова посібника надає слухачеві необхідні можливості для активної самостійної роботи, що сприятиме засвоєнню учбового матеріалу при вивченні дисципліни «Вища математика».

ЛІТЕРАТУРА ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Основна:

1. О.Є. Басманов, І.К. Кириченко, Л.В. Мігунова, О.П. Сознік. Вища математика. Х.: АПБУ, 2003.

2. Мунтян В.К., Говаленков С.В. Вища математика: методичні рекомендації з організації самостійної роботи при вивченні дисципліни. – Х.: НУЦЗУ, 2015. - 213 с.

3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах у 4 ч. Х.: ХНУРЕ, 2002.

Додаткова:

4. Давидов М.О. Математичний аналіз: у 3 ч., К.: ВШ, 1990.

5. Шкіль М.І. Математичний аналіз: у 2 ч., К.: ВШ, 1978.

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Теоретичний матеріал. Поняття матриці. Матриця-рядок, матриця-стовпець, діагональна, трикутна, одинична, нуль-матриця. Дії над матрицями та їх властивості: додавання, віднімання, транспонування, множення матриці на число, множення матриць. Визначники другого та третього порядків, їх обчислення та властивості. Мінори і алгебраїчні доповнення. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Обернена матриця. Матричний запис СЛАР. Побудова рішення СЛАР за допомогою оберненої матриці. Найпростіші перетворення СЛАР. Квадратні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матричний спосіб розв'язку квадратних систем. Правило Крамера. Однорідні СЛАР. Розв'язання СЛАР методом Гаусса.

Внаслідок вивчення матеріалу слухачі повинні знати поняття «ранг матриці», «обернена матриця», навчитися виконувати дії над матрицями (знаходити суму і різницю матриць, добуток матриць, знаходити обернену матрицю, виконувати операцію транспонування матриці). Треба навчитись обчислювати визначники другого та третього порядків, знати їх властивості.

Для розв’язання систем лінійних рівнянь слід оволодіти такими методами, як матричний, Крамера та Гауса.

Тема 1. Елементи лінійної алгебри.

1. Матриці, дії над матрицями.

1.1 Теоретичний матеріал.

Матрицею називається сукупність $m \cdot n$ чисел або інших математичних об’єктів, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, яка має m рядків та n стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Термін матриця походить від латинського matrix – “матка тварини” і пояснюється тим, що перші матриці, розглянуті англійськими математиками Д. Сільвестром (1814-1897) та А. Келі (1821-1895), породжували лінійні перетворення. Сучасне позначення матриці круглими дужками запровадив англійський математик Каліс у 1913р.

Горизонтальні ряди називаються *рядками* матриці, а вертикальні стовпці – *стовпцями* матриці. Символи a_{11}, a_{12}, ..., a_{ij}, які входять у матрицю, називаються її *елементами.* Перший індекс вказує номер рядка, другий – номер стовпця. Таким чином, елемент a_{ij}, знаходиться на перетині $i-$го рядка і $j-$го стовпця. У загальному випадку елементами матриці можуть бути будь-які математичні об’єкти: дійсні та комплексні числа, вектори, многочлени, функції, оператори тощо. Слід зазначити, що матрицю, яка має один рядок і один стовпець, тобто матрицю (a) ототожнюють із самим її елементом a. З метою скороченого запису для матриць використовується позначення $A=(a_{ij})_{mn}$, де $i=1,2,\dots,m;\ j=1,\ 2,\dots,n$ (або іншими латинськими літерами, наприклад *B, C, D* тощо)

Кількість рядків m та стовпців n у матриці може бути довільним, причому число рядків може бути і менше, і дорівнювати, і більше від числа стовпців. Числа m і n визначають розмір матриці. Якщо матриця має m рядків та n стовпців, то кажуть, що її розміри $m\cdot n$.

Матриця, в якої $m=n$, називається *квадратною*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а число n – її *порядком.* Елементи a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} утворюють *головну діагональ* квадратної матриці.

Будь-якій квадратній матриці можна поставити у відповідність дуже важливу її характеристику, яка називається *визначник* або *детермінант* матриці. Визначник матриці A позначають $\det A$ або $|A|$.

Квадратна матриця, в якої відмінні від нуля тільки елементи, що розташовані на головній діагоналі, називається *діагональною*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, в якої всі елементи головної діагоналі – одиниці – називається *одиничною,* та позначається E або I:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця, в якої всі елементи дорівнюють нулю, називається *нульовою* матрицею, або *нуль-матрицею* та позначається O:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Нульова матриця, подібно до одиничної, є аналогом звичайного нуля в матричній алгебрі.

Матриця, яка має лише один рядок або один стовпець, називається відповідно *матрицею-рядком* або *матрицею-стовпцем.*

Наприклад, B – матриця-рядок: $B = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$, при цьому $m=1$, n – довільне; C – матриця-стовпець:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

де $n=1$, m – довільне.

1.2 Основні дії з матрицями.

1.2.1 Сума і різниця матриць.

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Алгебраїчною сумою матриць $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ буде матриця $\boldsymbol{C}$, елементи якої обчислюються так: $\boldsymbol{C_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} \pm \boldsymbol{b_{ij}}$, де $\boldsymbol{i} = \overline{1, \boldsymbol{n}}$; $\boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{m}}$.

Властивості цієї операції:

1. $A + B = B + A$ (*комутативність*),

2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (*асоціативність*),

Приклад. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти $A+B$.

Розв'язання. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5+(-1) & 3+0 & 2+1 \\ 0+2 & -1+1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Приклад. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Знайти $A-B$.

Розв'язання. $A-B=\begin{pmatrix}5-(-1) & 3-0 & 2-1\\ 0-2 & -1-1 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

1.2.2 Добуток матриць.

Добутком двох матриць $A=(a_{ij})_{mn}$ і $B=(b_{ij})_{nl}$ називається матриця $C=AB=(c_{ij})_{ml}$, елементи якої знаходяться за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ .$$

З означення випливає, що добуток двох матриць існує тільки в тому разі, коли кількість стовпців матриці A, що є першим множником, дорівнює кількості рядків матриці B, що є другим множником.

Будь-який елемент c_{ij} дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів $i-$го рядка матриці A та $j-$го стовпця матриці B. *Матриця-добуток* має стільки рядків, скільки їх у першого множника, і стільки стовпців, скільки їх у другого множника. З означення добутку двох матриць випливає, що *множення матриць* у загальному випадку, *не задовольняє комутативний закон,* тобто:

$$AB\neq BA \qquad \text{(}\textit{антикомутативність}\text{)}.$$

Дійсно, по-перше, може трапитися, що добуток AB існує, а добуток BA обчислити неможливо (кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, а кількість стовпців матриці B та рядків матриці A не будуть рівними), або навпаки, і по-друге, якщо навіть існують обидва ці добутки, то в загальному випадку вони не будуть дорівнювати один одному.

Через некомутативність множення матриць потрібно ретельно слідкувати за порядком множників. У зв'язку з цим існують терміни: “помножимо A справа на B”, що означає добуток AB і, навпаки, “помножимо A зліва на B”, що означає добуток BA.

У будь-якому випадку, якщо A і B квадратні матриці одного порядку, їх завжди можна перемножити одна на одну, тобто добутки AB і BA для квадратних матриць існують будь-коли, але їхній результат буде залежати від порядку співмножників. У тих виняткових випадках, коли $AB = BA$, матриці A і B називають *комутативними* або *переставними*. Різниця добутків AB та BA позначається $[AB]$ і називається *комутатором матриць*, тобто: $[AB] = AB - BA$.

У загальному випадку операція множення матриць не задовольняє комутативний закон, за винятком випадку, коли один із множників є одинична або нульова матриці, але два останніх закони алгебри – асоціативний та дистрибутивний, залишаються в силі й при множенні матриць, тобто **основні властивості** операції множення мають вигляд:

1. $EA = AE = A$ (*комутативність* (якщо добутки EA та AE існують)),
2. $(\lambda A)B = \lambda(AB)$ (*асоціативність відносно числа*),
3. $(A+B)C = (AC)+(BC)$ (*дистрибутивність*),
4. $C(A+B) = CA + CA$ (*дистрибутивність*),
5. $(AB)C = A(BC)$ (*асоціативність відносно матриці*).

Таким чином, операція множення матриць має ряд властивостей (1-5), які має також множення звичайних дійсних чисел, але відрізняється відсутністю комутативності Однак є ще одна цікава відмінність, а саме: існують ненульові матриці, добуток яких дорівнює нулю. Для дійсних чисел, як відомо, рівність $ab = 0$ означає, що або a, або b, або і a і b одночасно дорівнюють нулю.

Приклад. Розглянемо ненульові матриці:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Їх добуток

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O.$$

Легко переконатися, що A і B не комутують і добуток

$$BA=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -12\\ 3 & -6\end{pmatrix}\neq O.$$

Розглянуті операції над матрицями (додавання, множення), можна також виконувати не тільки з дійсними числами, але й з іншими математичними об'єктами.

Нехай задана матриця розміру $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{m}$ - строка, $\boldsymbol{n}$ - стовпець.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} & \dots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} & \dots & \boldsymbol{a}_{2\boldsymbol{n}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}1} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}2} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}3} & \dots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{mn}}\end{pmatrix}$$

Якщо в матриці $\boldsymbol{A}$ рядки записати стовпцями із збереженням їх порядку, то одержана матриця називається транспонованою і позначається $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$, а вказана операція перетворення матриці $\boldsymbol{A}$ називається транспонуванням матриці $\boldsymbol{A}$.

Наприклад, якщо вихідна матриця

$$A=\begin{pmatrix}м & а & т & и\\ м & и & л & а\\ р & а & м & у\end{pmatrix}, \text{ то транспонована } \quad A^T=\begin{pmatrix}м & м & р\\ а & и & а\\ т & л & м\\ и & а & у\end{pmatrix}.$$

Розмір вихідної матриці 3×4 ($\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$), транспонованої 4×3 ($n\times m$).

Добутком матриці $\boldsymbol{A}$ на число $\boldsymbol{k}$ називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці $\boldsymbol{A}$ на число $\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{kA}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{ka}_{11} & \boldsymbol{ka}_{12} & \boldsymbol{ka}_{13} & \dots & \boldsymbol{ka}_{1\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{ka}_{21} & \boldsymbol{ka}_{22} & \boldsymbol{ka}_{23} & \dots & \boldsymbol{ka}_{2\boldsymbol{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{ka}_{\boldsymbol{m}1} & \boldsymbol{ka}_{\boldsymbol{m}2} & \boldsymbol{ka}_{\boldsymbol{m}3} & \dots & \boldsymbol{ka}_{\boldsymbol{mn}} \end{pmatrix}$$

Повторимо ще раз: множення матриць відбувається за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

<u>Запам’ятайте:</u> для знаходження добутку $A\cdot B$ матриць $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ необхідно, щоб кількість стовпців матриці $\boldsymbol{A}$ (першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці $\boldsymbol{B}$ (другого множника).

Не забуваємо основні властивості операції множення.

Приклад. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти $C=A\cdot B$.

Розв’язання. $C=\begin{pmatrix} 2\cdot1+(-1)2 & 2\cdot0+(-1)3 & 2(-1)+(-1)5 \\ 3\cdot1+2\cdot2 & 3\cdot0+2\cdot3 & 3(-1)+2\cdot5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

При множенні матриці розміром $m\times n$ на матрицю розміру $n\times p$ отримаємо матрицю розміру $m\times p$. Множення матриць не підкоряється комутативному закону (може бути навіть так, що AB існує, а BA - ні). Лише для квадратних матриць $A\cdot B = B\cdot A$.

Приклад. Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

Розв'язання.

$$A\cdot B=\underset{1\,x\,\underline{4}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}}\cdot\underset{\underline{4}\,x\,2}{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}}=\left[A_{1\,x\,\underline{4}}\ \underset{\substack{4=4\\ \text{множити можна}}}{\overset{\cdot}{\Downarrow}}\ B_{\underline{4}\,x\,2}=C_{1\,x\,2}\right]=\underset{1\,x\,2}{\begin{pmatrix}1 & 40\end{pmatrix}}$$

$$B\cdot A=\underset{4\,x\,2}{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}}\cdot\underset{1\,x\,4}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}}\cdot=\left[B_{4\,x\,\underline{2}}\ \underset{\substack{2\neq 1\\ \text{множити неможна}}}{\overset{\cdot}{\Downarrow}}\ A_{\underline{1}\,x\,4}\right].$$

Відповідь: A · B=(1   40), B ·A = не існує.

Добуток матриць взагалі не має властивості комутативності, тобто $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. Якщо $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, то матриці $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ комутують.

Приклад. Нехай $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$. Знайти $\boldsymbol{AB}$ та $\boldsymbol{BA}$ та порівняти добутки.

Розв'язання. $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot3+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot2\\ 4\cdot(-2)+5\cdot3+6\cdot1 & 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3 & 4\cdot2+5\cdot1+6\cdot2\\ 2\cdot(-2)+1\cdot3+4\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot2+4\cdot3 & 2\cdot2+1\cdot1+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14 & 10\\ 13 & 32 & 25\\ 3 & 16 & 13\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+4+4 & -4+5+2 & -6+6+8\\ 3+8+2 & 6+10+1 & 9+12+4\\ 1+12+4 & 2+15+2 & 3+18+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 3 & 8\\ 13 & 17 & 25\\ 17 & 19 & 29\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 10 \\ 13 & 32 & 25 \\ 3 & 16 & 13 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 13 & 17 & 25 \\ 17 & 19 & 29 \end{pmatrix}$, отже $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

1.2.3. Обернена матриця

Матриця $\boldsymbol{A}^{-1}$ називається оберненою матрицею до матриці $\boldsymbol{A}$, якщо виконуються рівності: $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, тобто матриці $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{A}^{-1}$ комутують і їх добуток є одинична матриця.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

$$\boldsymbol{A} \to \det \boldsymbol{A} \begin{cases} = 0 \ \textbf{\textit{обернена матриця не існує}} \\ \neq 0 \to \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \to \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{S} \end{cases} .$$

$\boldsymbol{S}$ - матриця, складена з алгебраїчних доповнень до кожного елемента.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Спочатку впевнимось, що матриця $\boldsymbol{A}$ має обернену $\boldsymbol{A}^{-1}$.

В алгебрі матриць доведено, що матриця $\boldsymbol{A}$ має обернену матрицю $\boldsymbol{A}^{-1}$ при виконанні двох умов:

1) матриця $\boldsymbol{A}$ квадратна;

2) визначник $|\boldsymbol{A}|$ матриці $\boldsymbol{A}$ не дорівнює нулю.

Дана матриця $\boldsymbol{A}$ має три рядки та три стовпця, тому вона квадратна порядку 3. Її визначник:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{A}_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-3) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 42(15+8) - 3(-3-4) =$$

$$= 6 - 46 + 21 = -19 \neq 0.$$

Отже, матриця $\boldsymbol{A}$ має обернену $\boldsymbol{A}^{-1}$, яку знайдемо за формулою

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{31} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{32} \\ \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

У даному випадку алгебраїчними доповненнями до елементів матриці будуть:

$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6$; $\boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -23$; $\boldsymbol{A}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$; $\boldsymbol{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7$;

$\boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$; $\boldsymbol{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$; $\boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$ $\boldsymbol{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$;

$\boldsymbol{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$.

Відповідь: $\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ -23 & 11 & -5 \\ -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Задана матриця $\boldsymbol{A}$ квадратна порядку 3, її визначник:

$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 7\cdot 3 + 2\cdot 7\cdot 3 - 3\cdot 5\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 10 - 7\cdot 7\cdot 1 = 0$.

Отже, ця матриця оберненої не має.

Зауваження. Якщо матриця $\boldsymbol{A}$ квадратна другого порядку

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{pmatrix}$, визначник якої $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, то обернену до неї матрицю $\boldsymbol{A}^{-1}$ можна знайти за формулою

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{22} & -\boldsymbol{a}_{12} \\ -\boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{11} \end{pmatrix},$$

тобто треба елементи головної діагоналі матриці $\boldsymbol{A}$ поміняти місцями, елементи неголовної діагоналі помножити на (-1) і одержану матрицю помножити на $\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Задана квадратна матриця другого порядку, її визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 1 = 8 \neq 0$, тому для знаходження $\boldsymbol{A}^{-1}$ можна застосувати формулу $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{22} & -\boldsymbol{a}_{12} \\ -\boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{11} \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Визначники.

Поняття визначника бере свій початок від німецького математика В. Лейбниця (1646-1716), який прийшов до нього при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Ця ідея була повідомлена в листі французькому математику Г. Лопіталю (1661-1704) у 1693 р., але лист був надрукований лише в 1850 р. У 1750 р. визначники були заново винайдені швейцарським математиком Г. Крамером (1704-1752).

Слово детермінант походить від латинського determino *– "обмежувати", "визначати" й буквальний його зміст – "визначник". Термін вперше зустрічається в роботах К. Гаусса (1777-1855) у 1801 р. У сучасному його значенні цей термін запровадив французький математик О. Коші (1789-1857) у 1815 р.*

Визначником $\boldsymbol{n}$-го порядку квадратної числової матриці $\boldsymbol{A}$ порядку $\boldsymbol{n}$ називають число, яке складається з елементів матриці $\boldsymbol{A}$ за певним правилом, і позначають $\det \boldsymbol{A}$, або $|\boldsymbol{A}|$.

Якщо матриця A – матриця першого порядку, тобто $A = (a_{11})$, то ***визначником 1-го порядку*** називається число: $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

Визначником 2-го порядку (для матриці $\boldsymbol{A}$ другого порядку) називається число: $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_{11} \cdot \boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{21} \cdot \boldsymbol{a}_{12}$.

Визначником 3-го порядку (для матриці $\boldsymbol{A}$ третього порядку) називається число:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{31} + \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{32}\boldsymbol{a}_{13} - \boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{13} - .$$
$$- \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{33} - \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{32}\boldsymbol{a}_{23} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{A}_{13}$$

Перед тим, як дати означення для довільного визначника n-го порядку, зробимо деякі висновки відносно визначників 1-го, 2-го і 3-го порядків. Кожен з них є алгебраїчною сумою всіляких добутків елементів матриці, взятих поодинці з кожного рядка і стовпця. Крім того, половина членів цієї суми береться зі знаком плюс, половина – зі знаком мінус.

Вираз для визначника 2-го порядку можна переписати у вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (\pm)\, a_{1S_1} a_{2S_2} ,$$

де знаку плюс відповідає пара (S_1, S_2), рівна (1, 2), а знаку мінус – (2, 1).

Аналогічно можна переписати і формулу для визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (\pm)\, a_{1S_1} a_{2S_2} a_{3S_3} ,$$

де знаку плюс відповідає трійка (S_1, S_2, S_3), рівна відповідно (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2); а знаку мінус – (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3).

Природно назвати *визначником* $n-$*го порядку* число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm)\, a_{1S_1} a_{2S_2} \dots a_{nS_n}.$$

Для встановлення правила вибору знака необхідно ввести поняття *перестановки.*

Розглянемо n різних натуральних чисел S_1, S_2, ... , S_n.

Перестановками називаються всілякі комбінації (S_1, S_2, ... , S_n), які відрізняються одна від однієї тільки порядком розміщення цих чисел. Наприклад, (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) і (3, 2, 1) – перестановки чисел 1, 2 і 3. Відзначимо, що число перестановок n чисел дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

***Визначник $n-$го порядку** є алгебраїчна сума всіляких добутків елементів матриці, взятих поодинці з кожного рядка і стовпця.* Знак кожного добутку визначається парністю перестановки з номерів стовпців.

Перед тим як сформулювати теорему, що дає можливість ефективно обчислювати визначник, а також дуже корисна для доведення деяких властивостей визначників, необхідно залучити декілька нових термінів.

Нехай $\det A$ визначник $n-$го порядку. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij}, називається визначник $(n-1)-$го порядку, який утворюється з $\det A$ після викреслювання $i-$го рядка і $j-$го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij}, елемента a_{ij} називається добуток

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Очевидно, що A_{ij}, як і M_{ij}, не залежать від елемента a_{ij}, і відрізняються лише знаком.

Наприклад, для елементів матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 a_{12} = -a_{12},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 a_{11} = a_{11}.$$

За допомогою знайдених алгебраїчних доповнень визначник матриці A можна записати у вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

або: $$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22},$$

тобто визначник є сума попарних добутків елементів 1-го (2-го) рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Очевидно, що те саме справедливе і для стовпців.

Неважко переконатися, що аналогічні формули існують і для визначника 3-го порядку. Наприклад:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ або } \det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

тобто $\det A$ розкладається на суму попарних добутків за елементами 1-го рядка або 2-стовпця.

Теорема. Визначник довільного порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення, тобто:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \text{ або } \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

Таким чином, обчислення визначника $n-$го порядку зводиться до обчислення алгебраїчних доповнень A_{ij}, тобто n визначників $(n-1)-$го порядку, а їх обчислення – до обчислення визначників $(n-2)-$го порядку тощо.

Повторимо: визначником $\boldsymbol{n}$-го порядку квадратної числової матриці $\boldsymbol{A}$ порядку $\boldsymbol{n}$ називають число, яке складається з елементів матриці $\boldsymbol{A}$ за певним правилом, і позначають $\det \boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}|$ або $\Delta(\boldsymbol{A})$:

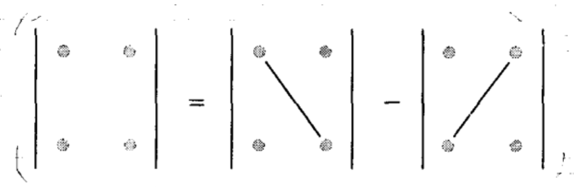
1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_{11} \cdot \boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{21} \cdot \boldsymbol{a}_{12}$ (визначник другого порядку);

Приклад. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$;

Розв'язання: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22$.

Відповідь: 22.

Відзначимо, що добуток елементів головної діагоналі входить у вираз зі знаком плюс, а добуток елементів другої діагоналі – зі знаком мінус. Це правило можна пояснити такою схемою:



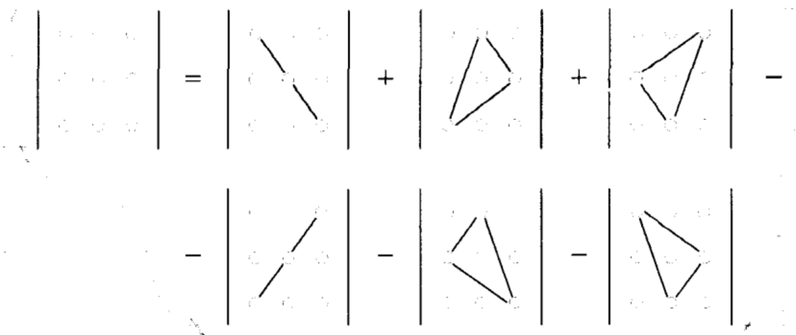
$$2)\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{31} + \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{32}\boldsymbol{a}_{13} - \boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{13} -$$

$$- \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{33} - \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{32}\boldsymbol{a}_{23} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{A}_{13}$$

(визначник третього порядку).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Цю формулу легко запам’ятати за допомогою мнемонічного правила (*правила трикутника*):



Приклад. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв’язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 0 + (-3)\cdot 3\cdot(-5) + 1\cdot 6\cdot 0 - (-5)\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot(-3)\cdot 0 - 3\cdot 6\cdot 2 = 9$$

Відповідь: 9.

Приклад. Обчислити визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою, визначник довільного порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення, тобто: $\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ або $\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, маємо:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=$$

$$=4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}=4(-10+56)-3(15+35)+(-24+10)=92$$

Розглянемо приклад знаходження алгебраїчних доповнень використовуючи формулу: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Приклад. Знайти алгебраїчне доповнення до елементів $\boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{a}_{12}$ та $\boldsymbol{a}_{13}$ визначника $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ та обчислити визначник, розв'язати за елементами 1-го рядка.

Розв'язання. Алгебраїчні доповнення до елементів $\boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{a}_{12}$ та $\boldsymbol{a}_{13}$ позначимо $\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{12}$ та $\boldsymbol{A}_{13}$ відповідно: $\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\boldsymbol{M}_{11}=\boldsymbol{M}_{11}$; $\boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\boldsymbol{M}_{12}=-\boldsymbol{M}_{12}$; $\boldsymbol{A}_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\boldsymbol{M}_{13}=\boldsymbol{M}_{13}$.

Мінори $\boldsymbol{M}_{11}$, $\boldsymbol{M}_{12}$ та $\boldsymbol{M}_{13}$ знайдемо так: $\boldsymbol{M}_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=14$; $\boldsymbol{M}_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=10$; $\boldsymbol{M}_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=13$.

Шукані алгебраїчні доповнення $\boldsymbol{A}_{11}=14$, $\boldsymbol{A}_{12}=-10$, $\boldsymbol{A}_{13}=13$.

Визначник $\Delta = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{A}_{13} = 2\cdot 14 + 3\cdot 10 + 13 = 71$.

Відповідь: 71.

2.1 Основні властивості визначників

1. *Визначник інваріантний відносно транспонування*, тобто

$$\det A = \det A^T .$$

Враховуючи означення транспонування, дану властивість можна сформулювати ще й так: *визначник не змінює свого значення, якщо його рядки стають стовпцями з тими ж номерами.*

2. *Спільний множник елементів будь-якого рядка або стовпця можна виносити за знак визначника.*

$$\det(\lambda A) = \lambda \det A .$$

Із цієї властивості випливає: *щоб помножити визначник на довільний множник, достатньо помножити на нього елементи одного будь-якого рядка або одного будь-якого стовпця.*

3. *Якщо кожний елемент будъ-якого рядка або стовпця є сума двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких елементами відповідного рядка або стовпця є перші доданки, у другому − другі доданки.*

Припустимо, що $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. Тоді:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(b_{ij} + c_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}A_{ij} = \det A_1 + \det A_2 .$$

4. *Якщо поміняти місцями два будъ-яких рядки або стовпці, то визначник змінює знак на протилежний.*

5. *Визначник, в якого два однакових рядки або стовпці, дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай $\det A$ саме такий визначник. Тоді, згідно з властивістю 4, після того як поміняємо місцями рівні рядки, одержимо:

$$\det A = -\det A, \text{ звідки } \det A = 0 .$$

6. *Визначник дорівнює нулю, якщо елементи будь-якого рядка або стовпця дорівнюють нулю.*

Це твердження безпосередньо випливає, якщо розкласти визначник саме за нульовим рядком або стовпцем.

7. *Визначник не зміниться, якщо до елементів будъ-якого його рядка або стовпця додати числа, які пропорційні елементам будъ-якого іншого рядка або стовпця.*

8. *Сума добутків елементів будъ-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення елементів будъ-якого іншого рядка або стовпця дорівнює нулю.*

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} .$$

Теорема про множення визначників.

Теорема. *Визначник добутку двох матриць дорівнює добутків визначників цих матриць,* тобто:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Слід зазначити, що на відміну від добутку, *визначник суми двох матрицъ не дорівнює сумі двох визначників цих матрицъ,* тобто:

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

3.1 Правило Крамера.

Якщо основний визначник ΔA неоднорідної системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta A}$, $k = \overline{1, 3}$, де Δ_k - допоміжний визначник, який одержується з основного визначника ΔA шляхом заміни його k-го стовпця стовпцем вільних членів системи.

Приклад. Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}.$$

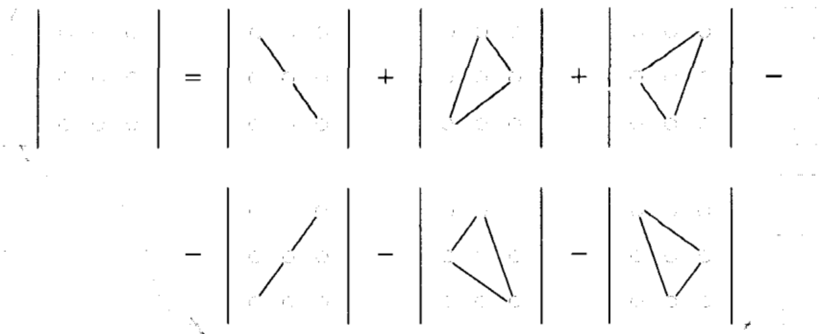
Розв'язання. Задана неоднорідна система 3-х лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. Основний визначник цієї системи:

$$\Delta \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 - 2 + 28 = 31 \neq 0 \,.$$

Тому, згідно з правилом Крамера, задана система має єдиний розв’язок.

Знайдемо допоміжні множники (за правилом трикутника):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \,.$$



$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -8 & -3 & 4 \\ -13 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 104 - 40 - 195 + 48 + 8 = -93.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -13 & -3 \end{vmatrix} = 24 - 32 - 130 + 160 - 12 + 52 = 62 \,.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -8 \\ 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 39 + 64 - 4 - 24 - 52 + 8 = 31 \,.$$

Тепер за формулами знайдемо:

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta \boldsymbol{A}} = -\frac{93}{31} = -3 \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta \boldsymbol{A}} = \frac{62}{31} = 2 \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta \boldsymbol{A}} = \frac{31}{31} = 1.$$

Відповідь: розв’язком системи буде $(-3;\ 2;\ 1)$.

Формули Крамера мають ту ваду, що їх не можна застосовувати для систем з прямокутною матрицею і в тих випадках, коли матриця системи вироджена. Окрім того, із зростанням числа невідомих об'єм обчислень швидко зростає, і це робить метод неприйнятним

3.2 Матричний метод.

Запишемо СЛАР у матричному вигляді:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}}.$$

Алгоритм розв'язання СЛАР матричним методом

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Rightarrow \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}.$$

де $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад. Маємо матрицю СЛАР: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Визначник цієї матриці $\Delta\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 1 + 2 = 6$.

Для запису оберненої матриці $\boldsymbol{A}^{-1}$ знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $\boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$; $\boldsymbol{A}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\boldsymbol{A}_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $\boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$; $\boldsymbol{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $\boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$;

$\boldsymbol{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$; $\boldsymbol{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

Отже, $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -3 & -3 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Знайдемо розв'язок заданої системи

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -3 & -3 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot(-1)+2\cdot2\\ -3\cdot1+(-3)\cdot(-1)+3\cdot2\\ 1\cdot1+(-3)\cdot(-1)+1\cdot2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(1;1;1)$.

Приклад. Розглянемо систему:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

$\Delta=-5$. Знайдемо обернену матрицю системи. $A_{11}=-1$, $A_{12}=-1$, $A_{13}=2$, $A_{21}=-5$, $A_{22}=5$, $A_{23}=5$, $A_{31}=2$, $A_{32}=-3$, $A_{33}=-4$. Тоді

$$S_A=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 2\\ -1 & 5 & -3\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix} \text{ і } A^{-1}=-\frac{1}{5}S_A.$$

Рішення системи (стовпець невідомих) набуває вигляду:

$$X=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -5 & 2\\ -1 & 5 & -3\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\ 0\\ -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

Тобто маємо відповідь: $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=2$.

3.3 Метод Гаусса (метод послідовного вилучення змінних)

Метод Гаусса полягає у приведенні системи до спрощеного вигляду, з якого отримуємо вичерпну інформацію щодо рішень системи. Це досягається за рахунок послідовного застосування так званих "елементарних перетворень", при чому на кожному кроці цих перетворень отримуємо систему, еквівалентну вихідній. Іншими словами суть методу полягає у послідовному виключенні невідомих та зведенню матриці системи рівнянь до трикутного вигляду.

Елементарними перетвореннями системи називаються такі перетворення:

1. Множення будь-якого рівняння на ненульове число.
2. Додавання до одного рівняння іншого.
3. Переставлення рівнянь.

Поряд з цим ми можемо, якщо треба, переставляти стовпці рівняння, які містять змінні.

Розглянемо метод Гаусса на прикладах.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x} - 4\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 1 \\ \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} = 3 \\ 3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z} = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання. Спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння системи, щоб елемент $\boldsymbol{a}_{11}$ основної матриці дорівнював 1.

Одержимо: $\begin{cases} \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} = 3 \\ 2\boldsymbol{x} - 4\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 1 \\ 3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z} = 2 \end{cases}.$

Тепер перше рівняння помножимо на (-2) і додамо до другого (щоб одержати $\boldsymbol{a}_{21} = 0$), а потім помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до третього рівняння (щоб одержати $\boldsymbol{a}_{31} = 0$). Тоді будемо мати систему
$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} = 3 \\ \qquad -5\boldsymbol{z} = -5 \\ \quad 5\boldsymbol{y} - 7\boldsymbol{z} = -7 \end{cases}.$$

Тепер друге рівняння поділимо на (-5), третє рівняння поділимо на 5 і поміняємо їх місцями. Одержимо систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ y-\frac{7}{5}z=-\frac{7}{5} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-4\cdot 1+2y \\ y=\frac{7}{5}\cdot 1-\frac{7}{5} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

Відповідь: система має єдиний розв’язок $(-1;\ 0;\ 1)$.

Зауваження. Елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. Розв’язування попереднього прикладу таким способом виглядає так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Приклад. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3, \\ 2x_1+x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

Розв’язання. Утворимо так звану розширену матрицю системи, з якою і будемо працювати. Для цього до матриці системи допишемо за рискою справа стовпець вільних членів:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Зробимо елементарні перетворення розширеної матриці, які приводять до рівносильної системи. Помножимо перший рядок на –2, а потім на –3 і додамо відповідно до другого і третього рядків. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \end{array}\right).$$

Метою перетворення було отримання нулів під одиницею з лівого верхнього кута. Далі поділимо друге рівняння на –4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -3/2 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \end{array}\right).$$

Тепер помножимо друге рівняння на 5 і додамо до третього:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -3/2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{array}\right).$$

Нарешті поділимо третій рядок на $\frac{5}{4}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Останній запис означає, що ми прийшли до системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - \frac{3}{4}x_3 = -\frac{3}{2} \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Звідси, рухаючись знизу вгору, маємо $x_3 = 2$; $x_2 - \frac{3}{4} \cdot 2 = -\frac{3}{2}$, тобто $x_2 = 0$; $x_1 + 2 \cdot 0 - 2 = -3$, тобто $x_1 = -1$;

Відповідь: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$.

Приклад. Таким само способом, як і вище наведений, розв’яжемо систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Розв’язання.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 4 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -5/2 & 2 & -7/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 6/5 \\ 0 & -5/2 & 2 & -7/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Далі маємо послідовно: $-x_3 = \frac{1}{2}$; $x_3 = -\frac{1}{2}$; $x_2 - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5}$; $x_2 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$;

$\boldsymbol{x}_2 = 1$; $x_1 + \frac{1}{2} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$; $x_1 + 1 = \frac{3}{2}$; $x_1 = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$; $x_3 = -\frac{1}{2}$.

В обох прикладах елементарні перетворення приводили матриці систем до трикутного вигляду, а системи мали єдине рішення. В загальному випадку, якщо лінійна система сумісна, то вона або має єдине рішення, або, якщо рішень більше, ніж одне, то нескінченну їх множину.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$.

Розв’язання

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система звелась до вигляду, де лишилося два рівняння. В цих рівняннях змінну $\boldsymbol{x}_3$ можна вибрати вільною і через неї виразити решту:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4 - 3x_3, \\ \qquad x_2 = -9 - 2x_3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = 14 + x_3, \\ x_2 = -9 - 2x_3. \end{cases}.$$

При цьому змінній x_3 можна надавати будь-якого значення. Зокрема, якщо наприклад, $x_3 = 0$, тоді $x_2 = -9$ і $x_1 = 14$, і трійка чисел 14; -9; 0 є рішенням системи. Якщо ж, наприклад $x_3 = -5$, тоді $x_2 = -9 + 10 = 1$ і $x_1 = 14 - 5 = 9$, і рішення системи таке: $x_1 = 9$, $x_2 = 1$, $x_3 = -5$ і т.д.

Може статися і так, що усі три рівняння системи пропорційні. Тоді їх можна, підбираючи потрібний множник, зробити однаковими. То ж два з них зайві, і система зводиться до одного рівняння з трьома змінними. Тоді розв'язки мають таку структуру – дві змінних обираються незалежними (наприклад, x_2, x_3), а третя виражається з рівняння через них. Як і в попередньому випадку, система матиме нескінченну множину рішень, але в останньому випадку структура цієї множини, так би мовити, дещо «багатша».

Приклад. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 11x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Таким чином, задана система рівнозначна до такої системи:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad\qquad\quad 0 = 5. \end{cases}$$

Отримана система несумісна, оскільки її останнє рівняння суперечне. З цього випливає, що задана система також є несумісною.

Наприкінці зазначимо, що без будь-яких принципових змін наведені результати переносяться на системи з більшим числом змінних.

3.4 Ранг матриці

Поняття ранг матриці запровадив англійський математик Д. Сільвестр (1814-1897) близько 1850 р. Термін ранг пізніше ввів швецький математик Ф. Фробеніус (1849-1917) від німецького “rang” – “степінь”, “розряд”. Означення рангу детермінанта й позначення ***rang*** *було запроваджено швецьким математиком Л. Кронекером (1823-1891) у 1880 р.*

Рангом матриці A **називається найвищий порядок мінора матриці** A **не рівного нулю.**

Оскільки мінор – це визначник, то це означення формулюється ще й так: ***рангом матриці*** A ***називається найвищий порядок відмінного від нуля визначника, який можна побудувати з елементів даної матриці.***

Ранг матриці – це число, і позначають його $rangA$ або $r(A)$. Очевидно, що $rangA \le \min(m,n)$.

Якщо ранг прямокутної матриці $m \cdot n$ має найбільше можливе значення (тобто $\min(m,n)$), то дана матриця називається *невиродженою* або *неособливою*; в противному випадку матриця називається *виродженою* або *особливою*.

В окремому випадку для квадратної матриці порядку n можна побудувати тільки один визначник $n-$порядку, тобто $\det A$. Таким чином, якщо для квадратної матриці $\det A = 0$, то матриця A – вироджена (особлива), якщо ж $\det A \ne 0$, то вона невироджена (неособлива).

Приклади.

Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ має найвищий можливий ранг, оскільки

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (5-11) = 30 \ne 0 .$$

Це невироджена матриця.

Розглянемо матрицю

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 6\\ 2 & 3 & -2 & -4\\ 5 & 8 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

З її елементів вказаним вище способом можна скласти чотири визначники третього порядку, викреслюючи почергово один з її стовпців. Видно, що всі вони дорівнюють нулю:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & -2\\ 5 & 8 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 5 & 3\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & 5 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & -4\\ 5 & 8 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & 5 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & 6\\ 2 & -2 & -4\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 3 & 2\\ 2 & -2 & -4\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}2 & 5 & 6\\ 3 & -2 & -4\\ 8 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 3 & 2\\ 3 & -2 & -4\\ 5 & 3 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Серед визначників другого порядку є відмінні від нуля, наприклад:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

Таким чином ранг даної матриці дорівнює двом. Це вироджена матриця.

Розглянемо матрицю:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $rangA\geq 1$, оскільки серед 9 мінорів 1-го порядку є мінори, наприклад, $M_1=a_{11}=1$, що не рівні нулю.

З елементів матриці A можна утворити 9 мінорів 2-го порядку:

$$M_2^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\quad M_2^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix},\quad M_2^{(3)}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix},$$

$$M_2^{(4)}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix},\quad M_2^{(5)}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\quad M_2^{(6)}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix},$$

$$M_2^{(7)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\quad M_2^{(8)}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix},\quad M_2^{(9)}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix},$$

Очевидно, що $rangA \geq 2$, оскільки є не нульові мінори 2-го порядку, наприклад, $M_2^{(1)}=1\neq 0$.

Мінор 3-го порядку

$$M_3=\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

тобто $rangA=2$. Матриця вироджена.

З усіх наведених прикладів, незалежно від напрямку відшукання рангу матриці, видно, що кількість мінорів, які треба розглядати, може бути великою.

3.5 Питання і вправи до самоконтролю

1. Дати означення матриці та її розміру. Які існують різновиди матриць?
2. Які елементи утворюють головну та неголовну діагоналі матриці?
3. За якими правилами матрицю помножують на дійсне число, знаходять алгебраїчну суму матриць, добуток матриць?
4. Чи завжди добуток матриця має властивість комутативності?
5. За якими правилами обчислюють визначники 2-го та 3-го порядків?
6. Як визначають і знаходять мінор та алгебраїчне доповнення елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ матриці $\boldsymbol{A}$?
7. Сформулюйте властивості визначників.
8. Як визначають та позначають обернену матрицю до матриці $\boldsymbol{A}$?
9. При яких умовах існує обернена матриця?
10. Який ви знаєте спосіб знаходження оберненої матриці?

1.Задані матриці: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&4&-5\\-2&0&3\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\0&4&-1\\1&0&3\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$.

Знайти: 1) розмір кожної з цих матриць. 2) матрицю $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$. 3) обчислити $\boldsymbol{D}^2-\boldsymbol{H}^2$ та $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{H})(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H})$ і показати, що $\boldsymbol{D}^2-\boldsymbol{H}^2\neq(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{H})(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H})$.

2.Записати наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі:

1) $\begin{cases}2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=7\\ \boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=8\end{cases}$; 2) $\begin{cases}3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=4\\ 4\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}=7\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=8\\ 2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}=13\\ 3\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z}=5\end{cases}$; 4) $\begin{cases}2\boldsymbol{x}_1-3\boldsymbol{x}_2+4\boldsymbol{x}_3=5\\ 3\boldsymbol{x}_3+5\boldsymbol{x}_4-\boldsymbol{x}_3=7\\ \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_3+2\boldsymbol{x}_4\end{cases}$; 5) $\begin{cases}2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=3\\ 3\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}=7\\ 5\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}=9\end{cases}$.

3.Знайти добуток матриці $\boldsymbol{AB}$ або $\boldsymbol{BA}$: 1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&3&-2\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$. 2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&-4&-1\end{pmatrix}$. 3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\3&-1&2\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\\0&1\end{pmatrix}$.

4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&4&1\\-2&0&3&-1\\1&3&4&2\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\\4&-2\\-2&5\end{pmatrix}$.

5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&-1\\4&-5&2\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$. 6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$.

4.Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

5.Знайти обернену матрицю до заданої матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

6.За правилом Крамера розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 9 \\ 4\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 4 \\ \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{z} = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 = -1 \\ \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = -1 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = -3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 3 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = 1 \\ 4\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 4 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 2 \\ 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 1 \\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = -6 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} -\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = 4 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 13 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_3 = 7 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 3\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{y} = 12 \\ 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = -4 \\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z} = 5 \end{cases}$.

7. Розв'язати систему рівнянь $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ матричним методом:

1) $A=\begin{pmatrix}5&2&3\\1&3&4\\2&-1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-5\\-6\\-5\end{pmatrix}$. 2) $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\1&5&0\\6&-2&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}7\\-4\\14\end{pmatrix}$.

3) $A=\begin{pmatrix}4&-2&-3\\1&2&-2\\3&5&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6\\-1\\7\end{pmatrix}$. 4) $A=\begin{pmatrix}3&5&-2\\2&2&-3\\1&-3&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\2&-4&3\\1&2&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$. 6) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$.

7. Розв’язати систему рівнянь методом Гауса:

1) $\begin{cases}2\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=2\\3\boldsymbol{x}_1+4\boldsymbol{x}_2=-1\\2\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3=0\end{cases}$; 2) $\begin{cases}4\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2-2\boldsymbol{x}_3=1\\6\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2-3\boldsymbol{x}_3=-1\\3\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_3=1\end{cases}$; 3) $\begin{cases}4\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=3\\3\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=4\\2\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2+3\boldsymbol{x}_3=10\end{cases}$;

4) $\begin{cases}3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}=-2\\4\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=-6\\3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}=8\end{cases}$; 5) $\begin{cases}2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=5\\3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}=1\\4\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=-1\end{cases}$; 6) $\begin{cases}2\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3=1\\\boldsymbol{x}_1-3\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3=4\\3\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3=3\end{cases}$.

ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Скалярні та векторні величини. Лінійні операції з векторами

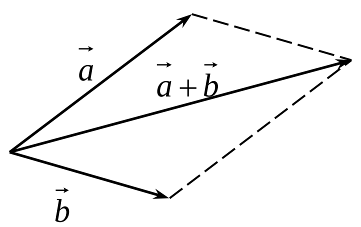
Вектор – це спрямований відрізок. Його можна задавати (як на площині, так і у просторі), задаючи початкову і кінцеву точки: $\overline{AB}$. Вектори будемо здебільшого позначати малими латинськими буквами: $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ ...

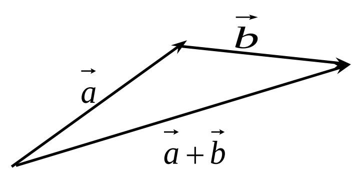
Вводиться нульовий вектор, який позначається $\overline{0}$, як такий, початок і кінець котрого співпадають.

Довжиною вектора називається довжина відрізка, який подає цей вектор. Замість терміна “довжина” можна також говорити “модуль вектора”, або “абсолютна величина вектора”. Позначення: $|\overline{a}|$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю.

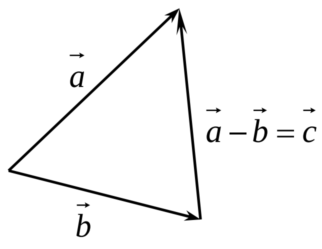
Напрям вектора це напрям прямої, на якій він лежить, при чому обирається той з двох напрямів, який відповідає порядку запису за початковою і кінцевою точками: $\overline{AB}$: від A до B. Нульовому вектору ніякого напряму не приписуємо.

Сумою двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, який є діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах. Звичайно, складання векторів задовольняє усім звичним властивостям.





Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, якщо $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



Розглянемо тепер множення вектора на число α. Добуток $\alpha\overline{a}$ визначається як вектор, довжина якого дорівнює $|\alpha||\overline{a}|$. Щодо напряму вектора $\alpha\overline{a}$, то він співпадає з напрямком $\overline{a}$, якщо α - додатне, а якщо від'ємне, то напрямок буде протилежним.

Протилежним до вектора $\overline{a}$ будемо називати вектор - $1\cdot\overline{a}$ і позначати - $\overline{a}$. Його довжина дорівнює довжині $\overline{a}$, а напрям протилежний.

Тепер визначимо різницю $\overline{a}-\overline{b}$, як $\overline{a}+(-\overline{b})$. Складання та множення на число будь-яких об'єктів називається лінійними операціями. Зрозуміло, що лінійні операції з векторами пов'язані дистрибутивними законами.

$$\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}, \qquad (\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a} \tag{1}$$

Переходимо до координатного подання векторів. Нехай у просторі є дві точки A і B, які задані своїми координатами $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Тоді координатами вектора $\overline{AB}$ називається трійка чисел: x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 і пишемо:

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;\; y_2-y_1;\; z_2-z_1) \tag{2}$$

З'ясуємо геометричний зміст ситуації. З виразу (2) випливає, що для того, щоб отримати координати будь-якого вектора, треба розглянути вектор, який йому дорівнює, але має своїм початком точку $(0;\,0;\,0)$. Тоді його координатами будуть координати кінцевої точки.

Звідси випливає, що рівні вектори мають рівні координати і, звичайно, навпаки. Зокрема у нульового вектора усі координати нульові.

Координатний метод буде для нас найважливішим.

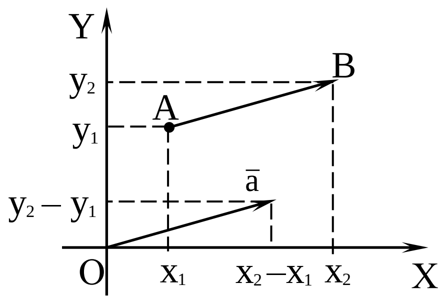
Нехай $\overline{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\overline{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тоді лінійні операції набувають вигляду:

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$$

$$\alpha\overline{a} = (\alpha x_1;\ \alpha y_1;\ \alpha z_1) \tag{3}$$

Тобто, при складанні векторів відповідні координати складаються; при множенні вектора на число кожна координати множиться на це число.

Нехай вектор задається початковою $A(x_1; y_1)$ і кінцевою $B(x_2; y_2)$ точками. **Координатами вектора** $\overrightarrow{AB}$ називаються числа $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$. Очевидно, що ці числа є координатами кінця вектора $\vec{a}$, що виходить з початку координат і має вигляд: $\vec{a} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$



У просторі вектор має три координати:

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

<u>*Наприклад.*</u> $\overline{a} = (-1;\ 2;\ 4)$, $\overline{b}(3;\ 0;\ 1)$. Необхідно знайти вектор $3\overline{a} - 2\overline{b}$.

<u>*Маємо:*</u> $3\overline{a} - 2\overline{b} = (-3;\ 6;\ 12) + (-6;\ 0;\ -2) = (-9;\ 6;\ 10)$.

Зауваження. Якщо розглядати вектора на площині, то усі результати залишаються незмінними, тільки запис такого вектора матиме дві координати.

Два ненульові вектори називаються <u>колінеарними</u>, якщо вони лежать на одній прямій. Для колінеарних векторів досить очевидним є результат: якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні, то існує число λ, таке що $\overline{a} = \lambda \overline{b}$. Це означає, що колінеарні вектори мають пропорційні координати.

<u>*Наприклад.*</u> Для векторів $\overline{a} = (2;\ \alpha;\ -1)$ і $\overline{b}(1;\ -1;\ \beta)$ підібрати числа α і β так, щоб вони були колінеарні.

<u>*Маємо*</u>: $\overline{a} = \lambda \overline{b}$. $(2;\ \alpha;\ -1) = (\lambda;\ -\lambda;\ \lambda\beta)$. Звідки $\lambda = 2$.

Тоді $\lambda = -2$, а $\lambda\beta = -1$ і $\beta = -\dfrac{1}{2}$, тобто $\overline{a} = (2;\ -2;\ -1)$ і $\overline{b}\left(1;\ -1;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

Якщо два ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ на площині неколінеарні, то будь-який вектор $\overline{c}$ на площині можна "розкласти" по них, тобто існують числа λ і μ такі що

$$\overline{c} = \lambda \overline{a} + \mu \overline{b} \tag{4}$$

При цьому числа λ і μ визначаються єдиним чином.

Якщо ввести на площині прямокутну систему координат і позначити звичайним чином одиничні вектори осей відповідно через $\overline{i}$ і $\overline{j}$, то координатний запис будь-якого вектора $\overline{p} = (x_0;\ y_0)$ означає розклад цього вектора, у відповідності з (4), за неколінеарними векторами $\overline{i}$ і $\overline{j}$.

$$\overline{p} = x_0 \overline{i} + y_0 \overline{j} \tag{5}$$

Взагалі, усяка пара ненульових неколінеарних векторів на площині утворює <u>базис</u>. Найбільш важливий і зручний є базис векторів $\overline{i}$ і $\overline{j}$.

Трійка векторів у просторі називається компланарною, якщо вони паралельні якійсь площині. Якщо початки цих векторів співпадають, то вони мають лежати у цій площині. Усяка трійка некомпаланарних векторів утворює в просторі базис. Найбільш простий і важливий базис – трійка одиничних векторів, спрямованих вздовж координатних осей:

$$\bar{i} = (1;\ 0;\ 0);\ \ \bar{j} = (0;\ 1;\ 0);\ \ \bar{k} = (0;\ 0;\ 1).$$

Аналогічно розкладу (4), у просторі має місце розклад довільного вектора $\bar{r}$ за базисом $\bar{m},\ \bar{n},\ \bar{p}$:

$$\bar{r} = \alpha\bar{m} + \beta\,\bar{n} + \gamma\,\bar{p} \tag{6}$$

Розклад за базисом $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ дає просто координати вектора, тобто запис $\bar{r} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\,\bar{k}$ рівнозначен запису $\bar{r} = (\alpha;\ \beta;\ \gamma)$.

Наприклад. Переконаємось, що вектори $\bar{m} = (0;\ 1;\ 1)$, $\bar{n} = (1;\ 0;\ 1)$ і $\bar{p} = (1;\ 1;\ 0)$ утворюють базис і розкладемо за цим базисом вектор $\bar{r} = (1;\ -2;\ 3)$.

Маємо: Вектори $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ утворюють базис, бо вони лежать відповідно у площинах $yz,\ xz$ і xy і тому не можуть лежати в одній площині. Далі за формулою (6) маємо:

$$(1;\ -2;\ 3) = \alpha(0;\ 1;\ 1) + \beta(1;\ 0;\ 1) + \gamma(1;\ 1;\ 0)$$

$$(1;\ -2;\ 3) = (\beta + \gamma;\ \alpha + \gamma;\ \alpha + \beta)$$

Якщо вектори рівні, то рівні відповідні координати. Це дає нам лінійну систему відносно невідомих $\alpha,\ \beta,\ \gamma$: $\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha + \gamma = -2 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$

Для розв’язання цієї системи складемо усі три рівняння:

маємо: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2$ або $\alpha + \beta + \gamma = 1$;

Віднімаючи від цього рівняння по черзі кожне з рівнянь системи, отримаємо $\gamma = 1 - 3 = -2;\ \beta = 3;\ \alpha = 0$.

Таким чином потрібний розклад має вид $\overline{r} = 0 \cdot \overline{m} + 3\overline{n} - 2\overline{p} = 3\overline{n} - 2\overline{p}$.

Розглянемо поняття <u>лінійної незалежності</u>. Система векторів $\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, ..., \overline{\ell}_n$ називається лінійно незалежною, якщо з рівності $\alpha_1\overline{\ell}_1 + \alpha_2\overline{\ell}_2 + ... + \alpha_n\overline{\ell}_n = 0$ випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Ліва частина рівності називається лінійною комбінацією векторів $\overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2, ..., \overline{\ell}_n$.

Таким чином <u>лінійна незалежність системи означає</u>, що з лінійних комбінацій системи нулю може дорівнювати тільки комбінація з нульовими коефіцієнтами. В протилежному випадку система називається лінійно залежною. У випадку лінійної залежності один з векторів системи можна виразити через решту.

На площині поняття лінійної незалежності співпадає з неколінеарністю, а у просторі – некомпланарністю. Інакше кажучи, поняття лінійно незалежної системи і базису співпадають.

<u>Скалярний добуток</u>. Скалярним добутком векторів $\overline{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\overline{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ називається число $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, тобто

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{7}$$

Зокрема скалярним квадратом вектора $\overline{a}$ називається $\overline{a}\overline{a} = \overline{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$. Оскільки, очевидно, довжина вектора дорівнює:

$$|\,\overline{a}\,| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{8}$$

то скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини: $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$.

Легко перевірити, що скалярний добуток підкоряється дистрибутивному закону: $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$.

Головною геометричною властивістю скалярного добутку є твердження наступної теореми: скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними

$$\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi \qquad (9)$$

Звідси випливає, що скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю. І навпаки, якщо скалярний добуток ненульових векторів дає нуль, то вектори перпендикулярні.

<u>*Приклад.*</u> Маємо координати трьох точок у просторі:

$$A(0;\ 2;\ -3),\ B(-1;\ 1;\ 1),\ C(2;\ -2;\ -1):$$

1. Перевіримо, чи утворюють ці три точки трикутник.

Маємо: $\overline{AB}=(-1;\ -1;\ 4)$, $\overline{AC}=(2;\ -4;\ 2)$. Оскільки $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ неколінеарні, то точки A, B, C утворюють трикутник.

2. Знайдемо довжину сторони AB: $|\overline{AB}|=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

3. Знайдемо довжину медіани сторони BC. Оскільки

$\overline{m}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})=\frac{1}{2}(1;\ -5;\ 6)$, то $m=\sqrt{\overline{m}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+25+36}=\frac{1}{2}\sqrt{62}$.

4. У припущенні, що $ABCD$ - вершини паралелограма, знайдемо координати вершини D. Маємо: $D(x;\ y;\ z)$. За властивістю паралелограма $\overline{AB}=\overline{DC}$, або в координатах:

$$(-1;\ -1;\ 4)=(2-x;\ -2-y;\ -1-z).$$

$$2-x=-1,\ -2-y=-1,\ -1-z=4;\ x=5,\ y=-1,\ z=-5.$$

Четверта вершина паралелограма $D(3;\ -1;\ -5)$.

5. Знайдемо кут $< ABC$. Маємо: $\overline{BA} = (1;\ 1;\ -4)$ $\overline{BC} = (3;\ -3;\ -2)$.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\left|\overline{BC}\right|} = \frac{3-3+8}{\sqrt{18}\sqrt{22}} = \frac{8}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}} = \frac{4}{3\sqrt{11}}.$$

<u>*Приклад.*</u> $A(-1;\ 2;\ 4),\quad B(3;\ 6;\ 8),\quad C(1;\ 6;\ -3)$. Знайти кут φ.

Маємо: $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}$, тому знаходимо:

1) $\overline{AB} = (4;\ 4;\ 4)$;
2) $\overline{AC} = (2;\ 4;\ -7)$;
3) $|\overline{AB}| = \sqrt{16+16+16} = 6{,}93$;
4) $|\overline{AC}| = \sqrt{4+16+49} = 8{,}31$;
5) $\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right) = 8+16+(-28) = -4$:

Отримуємо: $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \dfrac{-4}{6{,}9\cdot 8{,}3} = -0{,}07$

<u>*Приклад.*</u> $A(-3;\ 4;\ -2),\quad B(0;\ 4;\ 2),\quad C(3;\ 3;\ -4)$. Знайти кут φ.

$\overline{AB} = (3;\ 0;\ 4)$

$\overline{AC} = (6;\ -1;\ -2)$

$|\overline{AB}| = \sqrt{9+0+16} = 5$

$|\overline{AC}| = \sqrt{36+1+4} = 6{,}4$

$\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right) = 18+0+(-8) = 10$

Отримуємо: $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \dfrac{10}{5\cdot 6{,}4} = 0{,}31$

Векторний добуток. Розглянемо операцію, в результаті якої з векторів знову ж таки утворюються вектори.

Нехай є два ветори $\overline{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\overline{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тоді векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ визначається так:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{10}$$

При цьому детермінант, що стоїть у правій частині рівності (1) зручно розкривати за першим рядком:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

Таким чином векторний добуток векторів це вектор. З'ясуємо деякі його властивості, спираючись, зокрема, на властивості детермінантів.

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$. Це випливає з того, що у відповідних детермінантах просто переставлені другий і третій рядки.

2. $\overline{a} \times \overline{b} = 0$, у випадку коли ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні. Як видно, колінеарні вектори мають пропорційні координати, а детермінант з пропорційними рядками дорівнює нулю.

1. Векторний добуток підкоряється дистрибутивному закону: $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$.

Велике значення має геометрична властивість векторного добутку а саме: векторний добуток є вектор, для якого:

1) його довжина дорівнює площі паралелограма, побудованого на множниках, тобто:

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right| \left|\overline{b}\right| \sin\varphi \tag{11}$$

де φ - кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

2) він перпендикулярний площині векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, при чому з двох можливих напрямів обирається той, при котрому обертання від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ за меншим кутом буде відбуватися, при спостеріганні з його кінця, проти часової стрілки (можна також користуватися моделлю бурава).

Зазначимо, що векторний добуток зручно використовувати у випадках, коли треба отримати якийсь вектор, перпендикулярний площині векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ (усі такі вектори колінеарні і тому мають пропорційні координати).

<u>*Приклад.*</u> Знайти $\bar{a}\times\bar{b}$, якщо $\bar{a}=(1;\ -1;\ 3)$, $\bar{b}=(2;\ 0;\ -1)$.

Маємо:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\bar{k}=\bar{i}+7\bar{j}+2\bar{k}=(1;\ 7;\ 2)$$

.

1. Знайти $\bar{a}\times\bar{b}$, якщо $\bar{a}=(1;\ -1;\ 3)$, $\bar{b}=(2;\ 0;\ -1)$.

Маємо: $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\bar{k}=\bar{i}+7\bar{j}+2\bar{k}=(1;\ 7;\ 2)$.

2. Для трьох точок $A(1;\ -1;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ 1)$ і $C(3;\ 2;\ -2)$.

Знайти: 1) площу трикутника ABC. 2) довжину висоти CD.

Розв'язання. 1) $\overline{AB}=(1;\ 1;\ 0)$, $\overline{AC}=(2;\ 3;\ -3)$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\bar{k}=-3\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}.$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}.$$

За геометричною властивістю векторного добутку, площа паралелограма зі сторонами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ є $\sqrt{19}$. Площа ж трикутника ABC вдвічі менша, тобто $S=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

2) за формулою площі трикутника $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, В нашому випадку $S = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Далі $AB = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$. Тому $CD = \frac{2S}{AB} = \frac{\sqrt{19}}{2} = \sqrt{\frac{19}{2}}$.

Відзначимо також своєрідну двоїстість векторного і скалярного добутків, а саме: скалярний добуток дорівнює нулю для перпендикулярних векторів, а векторний добуток у цьому випадку набуває за довжиною найбільшого значення. І навпаки, скалярний добуток колінеарних векторів за модулем максимальний, а векторний в цьому випадку – нульовий.

Мішаний добуток. Мішаний добуток трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ визначається як послідовне виконання спочатку векторного множення, а потім – скалярного, тобто: $(\overline{a} \times \overline{b})\overline{c}$. В результаті отримуємо число. З властивостей векторного і скалярного добутку випливає правило обчислення мішаного добутку у координатах, яке є ключовим:

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{12}$$

де $\overline{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\overline{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\overline{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3)$.

З цього **маємо наступні властивості**:

1. При переставленні двох множників мішаний добуток змінює знак:

$$(\overline{a} \times \overline{b})\overline{c} = -(\overline{b} \times \overline{a})\overline{c} = -(\overline{c} \times \overline{b})\overline{a} = -(\overline{a} \times \overline{c})\overline{b}$$

2. При циклічному (круговому) переставленні множників мішаний добуток не міняється:

$$(\overline{a} \times \overline{b})\overline{c} = (\overline{c} \times \overline{a})\overline{b} = (\overline{b} \times \overline{c})\overline{a} \qquad (13).$$

3. З рівності (13)випливає що у запису мішаного добутку “хрестик” можна ставити як між першими двома множниками, так і між другим і третім, результати рівні:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}).$$

Тому “хрестик” і дужки при запису мішаного добутку можна відкидати і писати просто $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

4. Геометрична властивість. Мішаний добуток з точністю до знаку дорівнює об’єму паралелепіпеду, побудованого на множниках.

5. Мішаний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли вектори компланарні. Цей факт рівнозначний тому, що детермінант у рівності (12) дорівнює нулю.

1. *__Наприклад.__* З’ясуємо, чи лежать чотири точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 0;\ 1)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$ і $D(3;\ -1;\ 0)$ в одній площині.

Напишемо вектори $\overline{AB} = (1;\ -2;\ -2)$, $\overline{AC} = (-2;\ 0;\ -2)$ і $\overline{AD} = (2;\ -3;\ -3)$. Очевидно, що питання про те, чи лежать точки A, B, C, D в одній площині, рівнозначно питанню, чи компланарні вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$.

Застосуємо властивість 5:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 20 - 12 = 2.$$

Таким чином вектори некомпланарні і відповідно точки не лежать в одній площині.

Приклад. Чотири точки $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 2)$, $C(5;\ 1;\ 1)$ і $D(0;\ -1;\ 3)$ є вершинами піраміди. Необхідно:

1) Знайти об’єм цієї піраміди.
2) Знайти довжину висоти піраміди, яка виходить з вершини C.

Розв’язання.

1) $\overline{AB}=(1;\ -1;\ 3)$, $\overline{AC}=(3;\ 0;\ 2)$, $\overline{AD}=(-2;\ -2;\ 4)$. Знайдемо спочатку $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 2\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & -2\end{vmatrix}=4+16+3(-6)=2.$$

Оскільки очевидно, об’єм нашої піраміди дорівнює одній шостій об’єму паралелепіпеда, то

$$V_{nip}=\frac{1}{6}\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\frac{1}{3}.$$

2)Знайдемо спочатку площу трикутника ABD:

$$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|.$$

$$\overline{AB}\times\overline{AD}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 3\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -2\end{vmatrix}\bar{k}=2\bar{i}+10\bar{j}-4\bar{k}=(2;\ 10;\ -4).$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|=\sqrt{4+100+16}=\sqrt{120}=2\sqrt{30}.$$

Далі: $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{30}=\sqrt{30}$. $V_{nip}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}H$. $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{30}H$.

Звідки $H=\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

2.2. Приклади розв'язку задач

Приклад 1. Визначити лінійну залежність або незалежність системи векторів $\vec{a}_1 = (-1;\ -2;\ -3)$; $\vec{a}_2 = (7;\ 8;\ 9)$; $\vec{a}_3 = (-4;\ 5;\ 6)$ та системи векторів $\vec{b}_1 = (3;\ -2;\ 4;\ 1)$; $\vec{b}_2 = (-1;\ 2;\ -1;\ 2)$; $\vec{b}_3 = (1;\ 2;\ 2;\ 5)$.

Розв'язання. Спочатку розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Знайдемо ранг матриці, складеної з координат цих векторів:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці $|\boldsymbol{A}| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 72$ не дорівнює нулю, тому $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = 3$ і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежні, так як в системі векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ число лінійно незалежних векторів дорівнює рангу матриці, яка складена з координат цих векторів.

Тепер розглянемо систему векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Матриця $\boldsymbol{B}$, складена з координат цих векторів, має вигляд:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 2 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Мінор 3-го порядку $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ матриці $\boldsymbol{B}$ дорівнює нулю, тому $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}) = 2$ так як для матриці $\boldsymbol{B}$ не дорівнюють нулю мінори 2-го порядку. Тому вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ лінійно залежні.

Відповідь: вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ лінійно залежні.

Приклад 2. Довести, що вектори $\vec{a}_1=(5;\,4;\,3)$, $\vec{a}_2=(-3;\,-1;\,2)$ та $\vec{a}_3=(-3;\,1;\,3)$ утворюють базис в 3-х вимірному просторі, та розкласти вектор $\vec{d}=(12;\,9;\,10)$ за цим базисом.

Розв'язання. Базисом n-вимірного простору E_n називають будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору.

Довільний вектор $\vec{d}$ n-вимірного простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базиса $\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\ldots,\,\vec{a}_n$ так:

$$\vec{d}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\ldots+x_n\vec{a}_n$$

Числа $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ називаються координатами вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\ldots,\,\vec{a}_n$.

Кожен із заданих векторів $\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\vec{a}_3$ має три координати, тому належить тривимірному простору E_3. Матриця, складена з координат цих векторів $A=\begin{pmatrix}5&4&3\\-3&-1&2\\-3&1&3\end{pmatrix}$ має визначник $|A|=5\begin{vmatrix}-1&2\\1&3\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-3&2\\-3&3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3&-1\\-3&1\end{vmatrix}=-31\neq 0$ тому вектори $\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\vec{a}_3$ лінійно незалежні. Згідно з означенням базиса, ці вектори утворюють базис в E_3.

Вектор $\vec{d}$ також має три координати, тобто належить E_3. Тому його можна представити у вигляді

$$\begin{pmatrix}12\\9\\10\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Вектори рівні, тому їх відповідні координати рівні. Тому з останньої рівності отримаємо:

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = 12 \\ 4\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 9 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 10 \end{cases}.$$

Матричним методом можна знайти розв'язок цієї системи

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{31}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -9 & 24 & -17 \\ 11 & -19 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{31}\begin{pmatrix} -93 \\ -62 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо розклад $\vec{\boldsymbol{d}}$ за базисом

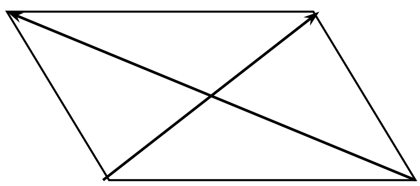
$$\vec{\boldsymbol{d}} = 3\vec{\boldsymbol{a}}_1 + 2\vec{\boldsymbol{a}}_2 - \vec{\boldsymbol{a}}_3$$

Координатами вектора $\vec{\boldsymbol{d}}$ у базисі $\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3$ будуть $(3;\ 2;\ -1)$.

Відповідь: $\vec{\boldsymbol{d}} = (3;\ 2;\ -1)$.

Приклад 3. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{\boldsymbol{a}} = (2;\ 1;\ 0)$ та $\vec{\boldsymbol{b}} = (0;\ -2;\ 1)$.

Розв'язання. За умовою задачі паралелограм побудовано на векторах



Нехай позначимо паралелограм $\boldsymbol{ABCD}$ (де вектори $\vec{\boldsymbol{a}}$ та $\vec{\boldsymbol{b}}$ - довільні):

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{BC}},\ \vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\ -\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{BD}} = \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}.$$

Отже, діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (довільних) будуть вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ та $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$. Знайдемо координати цих векторів для заданих векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = (2+0;\ 1+(-2);\ 0+1) = (2;\ -1;\ 1),$$
$$\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b} = (2-0;\ 1-(-2);\ 0-1) = (2;\ 3;\ -1).$$

Знайдемо косинус шуканого кута між діагоналями, який позначимо φ,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{4-4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = 0.$$

З рівності $\cos\varphi = 0$ випливає, що $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто ці вектори взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 4. Задані координати вершин піраміди $A_1(4;\ 2;\ 5)$, $A_2(0;\ 7;\ 2)$, $A_3(0;\ 2;\ 7)$, $A_4(1;\ 5;\ 0)$. Знайти: 1) довжину ребра A_1A_2, 2) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4; 3) площу грані $A_1A_2A_3$; 4) об'єм піраміди.

Розв'язання. Будемо розглядати ребра A_1A_2, A_2A_3 та A_1A_4 як вектори:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (0-4;\ 7-2;\ 2-5) = (-4;\ 5;\ -3),$$
$$\overrightarrow{A_1A_3} = (0-4;\ 2-2;\ 7-5) = (-4;\ 0;\ 2),$$
$$\overrightarrow{A_1A_4} = (1-4;\ 5-2;\ 0-5) = (3;\ 3;\ 5).$$

1. Обчислимо довжину ребра A_1A_2 за формулою

$$A_1A_2 = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,.$$

2. Знайдемо косинус кута φ між ребрами $\boldsymbol{A_1A_2}$ та $\boldsymbol{A_1A_4}$ за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_4}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_4}}\right|} = \frac{(-4)\cdot(-3) + 5\cdot 3 + (-3)\cdot(-5)}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{9+9+25}} = \frac{42}{5\sqrt{86}}\,.$$

3. Площу грані $\boldsymbol{A_1A_2A_3}$ знайдемо як половину модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_3}}$:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_3}}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ -4 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + (12+8)^2 + 30^2} = \frac{1}{2}\sqrt{900} = 15 \text{ (кв.од.).}$$

4. Об’єм піраміди $\boldsymbol{A_1A_2A_3A_4}$ знайдемо за допомогою мішаного добутку векторів $\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_3}}$ та $\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_4}}$:

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_3}} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_4}}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|70| = \frac{35}{3} \text{ (куб.од.).}$$

2.3 Питання і вправи до самоконтролю

1. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?
2. Чи можуть два вектори, які мають рівні модулі, бути не рівними? Якщо так, то чим вони відрізняються?
3. Як виразити координати вектора через координати точок його початку та кінця?

4. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів. Його властивості та механічний зміст.

5. Як виразити скалярний добуток векторів через координати векторів – множників?

6. Чому дорівнює скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні і однаково напрямлені;

2) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ протилежні;

3) $\vec{a} \perp \vec{b}$;

4) $\vec{a} = \vec{b}$.

7. Напишіть формулу для обчислення кута між двома векторами.

8. Напишіть формулу для обчислення модуля вектора.

9. Сформулюйте означення векторного добутку двох векторів. Його властивості та механічний (фізичний) зміст.

10. Напишіть формулу векторного добутку векторів, які задані координатами (проекціями).

11. Сформулюйте означення мішаного добутку трьох векторів, його геометричний зміст та властивості.

12. Напишіть формулу мішаного добутку векторів, які задані координатами (проекціями)?

13. Чому дорівнює об'єм паралелепіпеда та піраміди?

14. Знайти координати векторів $2\vec{a} + 5\vec{b}$ та $2\vec{b} - \vec{a}$, якщо $\vec{a} = (2; -4; 2)$, $\vec{b} = (-3; 2; -1)$.

15. Задані точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$. Знайти $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

16. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = (2; -1; 3)$ та $\vec{b} = (-6; 3; -9)$.

17. У просторі дано три точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(2; 2; 2)$ та $M_3(4; 3; 5)$. Обчислити площу трикутника $M_1M_2M_3$.

18. Чи компланарні вектори $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 3)$, $\vec{c} = (1; 9; -11)$?

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Різні види рівнянь прямої на площині. Рівняння прямої з заданими нормальним вектором і точкою. Загальне рівняння прямої. Основна теорема про пряму на площині. Відстань від точки до прямої. Рівняння прямої, заданої напрямним вектором і точкою. Параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Взаємне розташування точок і прямих на площині.

Рівняння поверхні. Різні види рівнянь площини. Рівняння площини з заданою точкою і нормальним вектором, у векторному вигляді. Загальне рівняння площини. Основна теорема про площину у просторі. Взаємне розташування двох площин. Умови паралельності та перпендикулярності. Перетин трьох площин. Завдання лінії у просторі. Різні види рівнянь прямої у просторі. Векторне рівняння прямої. Параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої, заданої напрямним вектором і точкою. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Пряма, як лінія перетину двох площин. Взаємне розташування точки, прямої та площини у просторі.

Канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи. Рівняння кривої 2-го порядку в полярній системі координат. Поняття рівняння поверхні. Поверхні другого порядку. Канонічні рівняння. Дослідження поверхонь другого порядку методом перерізів.

Основні поняття, методи та формули аналітичної геометрії широко `застосовуються в багатьох навчальних дисциплінах. Найчастіше використовуються рівняння прямої та кривих ліній на площині, рівняння площини та прямої в просторі та їх графіки.

При складанні рівнянь прямої і площини будемо використовувати апарат векторної алгебри.

Рівняння прямої у різних формах дуже часто використовуються, тому для більш глибоко їх засвоєння доцільно усі поняття, позначення та формули систематизувати, наприклад, таким чином, як у таблиці 3.1.

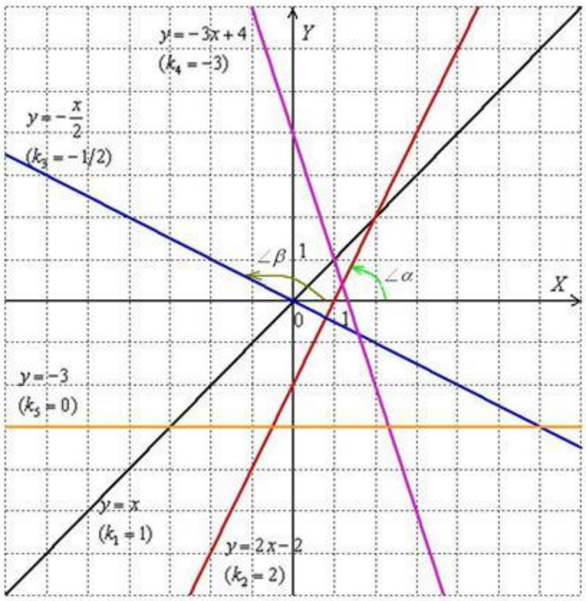
3.1 Пряма на площині

Як відомо, лінії, які визначаються рівнянням першого степеня в декартових координатах, називаються лініями першого порядку. Це означає, що кожна пряма є лінією першого порядку, і навпаки, кожна лінія першого порядку є прямою.

Тобто, **рівнянням деякої прямої на площині змінних x, y є рівняння:**

$$Ax + By + C = 0.$$

Представимо ряд прямих на площині, які мають відповідні рівняння та кутові коефіцієнти.

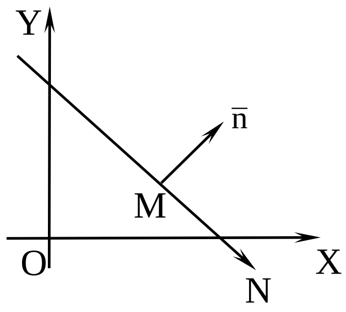


Застосування векторів дає можливість поглянути на задачі, пов'язані з прямою, більш загально.

Задамо якийсь вектор $\overline{n} = (A;\ B)$ на площині і вимагатимемо, щоб пряма була перпендикулярною цьому вектору. Ясно, що цій умові задовольняє сімейство паралельних між собою прямих. Тепер ще зафіксуємо точку $M(x_0;\ y_0)$. Тоді з цього сімейства через точку M буде проходити тільки одна пряма.

Вектор $\overline{n}$ у відношенні до прямої називається **нормаллю**.

Напишемо рівняння прямої за даними точкою M і нормаллю $\overline{n}$.



Візьмемо на прямій якусь іншу точку $\boldsymbol{N}$ з координатами $N(x;\ y)$. Побудуємо вектор $\overline{MN}$: $\overline{MN} = (x - x_0;\ y - y_0)$.

За умовою вектори $\overline{MN}$ і $\overline{n}$ перпендикулярні, тож їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\overline{n} \cdot \overline{MN} = 0$; $(A;\ B)(x - x_0;\ y - y_0) = 0$. Це приводить нас до рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (3.1)$$

Це **рівняння прямої за даними вектором нормалі і точкою**.

Неважко побачити, що якщо в (3.1) розкрити дужки, то отримаємо лінійне рівняння, де коефіцієнти за змінних x, y відповідно дорівнюють A і B. Тож, якщо пряма задається лінійним рівнянням, то коефіцієнти за змінних – координати нормалі. Зазначимо, що при множенні вектора на число напрям вектора може змінитися хіба що на протилежний, тобто вектор стає колінеарним попередньому. Тому нормаль визначається з точністю до колінеарності.

Приклад. Скласти рівняння прямої, якщо відомий її нормальний вектор $\overline{n}(2;\ 3)$, а точка, що до неї належить, має координати $M(-1;\ 3)$.

Розв’язання. Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно даному вектору $\overline{n} = (A;\ B)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

$$2(x - (-1)) + 3(y - 3) = 0.$$

$$2x + 3y + 2 - 9 = 0.$$

$$2x + 3y - 7 = 0.$$

Приклад. Встановити, до якої координатної осі є перпендикулярною пряма $3x+6=0$.

Розв'язання: $3x+6=0$, звідки $x=-2$. Ця пряма є перпендикулярною до осі OX (рис. 3.2).

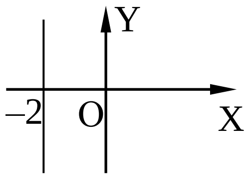


Рис.3.2

Рівняння прямої "у відрізках".

Нехай у рівнянні $Ax+By+C=0$ жоден з коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю, та відповідна пряма, яка визначається цим рівнянням, не проходить через початок координат та не паралельна жодній з координатних осей.

У такому випадку вона відсікає на координатних осях відповідні відрізки $OM \neq 0$ на осі OX, та $ON \neq 0$ на осі OY (рис.3.3).

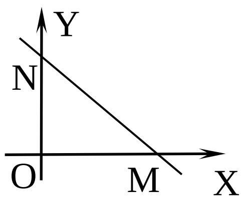


Рис.3.3

Запишемо рівняння прямої у вигляді: $Ax+By=-C$ та поділимо його на $-C$. Маємо:

$$\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1 \text{ або}$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Вводимо позначення $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Останнє рівняння запишеться у вигляді:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Це й буде **рівняння прямої “у відрізках”.**

У цьому рівнянні числа a і b мають простий сенс. Знайдемо точку перетину M прямої з віссю OX, рівняння якої $y = 0$. Підставляючи $y = 0$ в рівняння прямої “у відрізках”, знайдемо $x = a$. Тобто a є величиною відрізка $\overline{OM}$, який відтинає пряма на осі OX. Аналогічно можна встановити, що b є величиною відрізка $\overline{ON}$, який відтинає пряма на осі OY.

Приклад. Записати рівняння прямої $-3x + 7y - 21 = 0$ “у відрізках” та побудувати цю пряму.

Розв’язання. Поділивши усі числа рівняння $-3x + 7y = 21$ на 21, отримаємо $\frac{x}{-7} + \frac{y}{3} = 1$ – рівняння прямої у відрізках. Тут $a = -7$, $b = 3$.

Відклавши на координатних осях відповідні відрізки, побудуємо пряму (рис. 3.4).

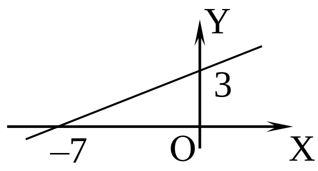


Рис.3.4

Кутовий коефіцієнт прямої

Нехай на площині задано прямокутну декартову систему координат та деяку пряму (рис.3.5).

Нехай α – кут, на який треба повернути вісь OX, щоб надати їй один з напрямів прямої, тобто, щоб вона співпадала з даною прямою. Цьому куту припишемо знак плюс або мінус, залежно від того, чи буде поворот додатним чи від’ємним. Кут нахилу α називається кутом нахилу до осі *OX*. Очевидно, що кут нахилу прямої до осі може мати нескінченну кількість значень, які відрізняються одне від одного на величину $\pm\pi n$.

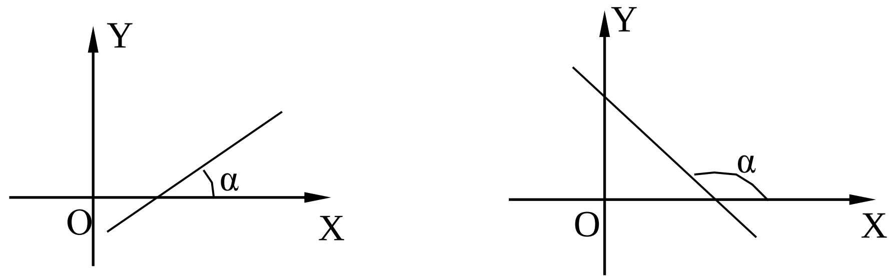


Рис.3.5

Тому за величину кута нахилу прямої до осі OX зазвичай беруть найменше додатне значення кута α, а у випадку, коли пряма є паралельною до осі *OX*, вважають її кут нахилу до осі OX таким, що дорівнює нулю.

Усі значення кута нахилу до осі OX мають один і той самий тангенс

$$tg(\alpha \pm \pi n) = tg\alpha .$$

Тангенс кута нахилу прямої до осі OX називається її **кутовим коефіцієнтом:**

$$k = tg\alpha .$$

Якщо $\alpha = 0$, то $k = 0$, тобто пряма, що є паралельною до осі *OX*, має кутовий коефіцієнт, який дорівнює нулю.

Якщо пряма вертикальна, то всі її точки, незалежно від ординати, мають абсцису $x = x_0$, і рівняння прямої має вигляд: $x = x_0$.

Уявімо, що пряма a не перпендикулярна до осі OX і нехай $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$ – її дві точки (рис.3.6). Тоді її кутовий коефіцієнт, очевидно, може бути обчислений за формулою:

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

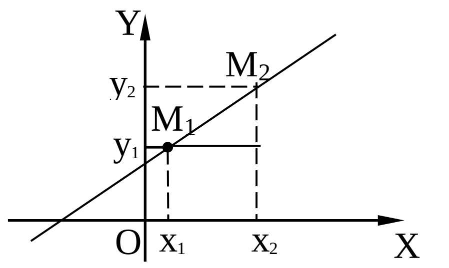


Рис.3.6

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Усяка невертикальна пряма, яка має рівняння вигляду:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (3.2)$$

в якому коефіцієнт $B \neq 0$, а інші коефіцієнти можуть бути якими завгодно, може бути поданою як лінійна функція $y = kx + b$. Розв'язавши рівняння (3.2) відносно y, перепишемо його у вигляді: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Якщо взяти за $k = -\frac{A}{B}$, а за $b = -\frac{C}{B}$, тоді рівняння матиме вигляд:

$$y = kx + b. \qquad (3.3)$$

Рівняння (3.3) має назву **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.**

Дослідимо геометричний зміст числа b. При $x = 0$, $y = b$. З цього випливає, що b є величиною відрізка, який відтинає пряма на осі *OY*.

Кут між двома прямими

Розглянемо дві прямі. Нехай φ – кут між ними, $0 \leq \varphi < \pi$ (рис.3.7). Нехай також прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$. Позначимо через α_1 і α_2 кути нахилу цих прямих до осі OX. Тоді з рисунка 1.22 ясно, що $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

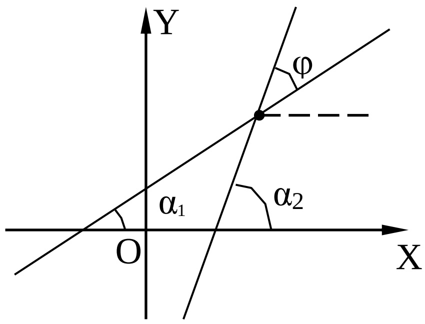


Рис.3.7

Нехай $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, тобто прямі не перпендикулярні. Тоді $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$. Враховуючи, що $tg\alpha_2 = k_2$, а $tg\alpha_1 = k_1$, будемо мати:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Приклад. Знайти кут між двома прямими $y = 2x - 3$ та $y = -3x + 2$.

Розв'язання. $k_1 = 2$, $k_2 = -3$. $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{-3 - 2}{1 - 6} = 1$. $\varphi = 45^0$.

Канонічне рівняння прямої.

У розглянутій задачі вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ спрямований вздовж прямої. Такий вектор називається **напрямним вектором**. Як і нормаль, напрямний вектор визначається з точністю до колінеарності. Позначимо його $\bar{q}$, а його координати $x_2 - x_1 = \ell$, $y_2 - y_1 = m$. Тоді рівняння прямої через дві точки набуває вигляду:

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m}, \tag{3.4}$$

де $\bar{q}(\ell;\, m)$ – напрямний вектор прямої, а $M_1(x_1;\ y_1)$ – точка, що до неї належить. Це рівняння має назву **канонічного рівняння прямої.**

Параметричне рівняння прямої.

Від канонічного рівняння прямої можна легко перейти до параметричного, якщо ввести параметр t.

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{\ell}=t, \\ \dfrac{y-y_1}{m}=t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_1=\ell t, \\ y-y_1=mt, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ell t+x_1, \\ y=mt+y_1. \end{cases}$$ – параметричне рівняння прямої.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(1;-2)$ та $M_2(0;2)$.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \qquad \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-(-2)}{2-(-2)},$$

$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{4}$ – канонічне рівняння; $\bar{q}(-1;\,4)$ – напрямний вектор прямої.

ЗАУВАЖЕННЯ. Від канонічного рівняння легко можна перейти до загального рівняння прямої.

Відстань від точки до прямої.

Знайдемо відстань d від точки $A(x_0;\,y_0;\,z_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ (рис.3.8).

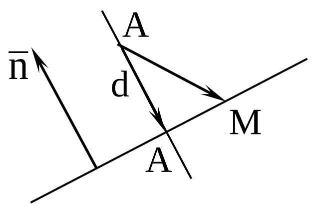


Рис.3.8

Очевидно, що **відстанню *d*** від **точки *A* до прямої** буде модуль вектора $\overline{AA_0}$, де A_0 – проекція точки ***A*** на пряму. Також відомо, що $\overline{AA_0}$ є колінеарним до нормалі $\bar{n}$ прямої.

Якщо взяти будь–яку точку *M*, яка належить до прямої, то відстань d буде модулем проекції вектора $\overline{AM}$ на вісь вектора $\bar{n}$:

$$d=\left|Пр_{\overline{n}}\,\overline{AM}\right|=\frac{\left|\overline{AM}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{n}\right|}.$$

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(2;\,1)$ до прямої, що проходить через точки $M_1(-6;\,2)$ і $M_2(-2;\,-1)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2: $\frac{x-(-6)}{-2-(-6)}=\frac{y-2}{-1-2}$; $\frac{x+6}{4}=\frac{y-2}{-3}$, або $3x+4y+10=0$, $\overline{n}(3;\,4)$.

Знайдемо точку $\boldsymbol{M}$, яка належить до прямої, наприклад $M\left(0;\,-\frac{5}{2}\right)$. Тоді $\overline{M_0M}=\left(-2;\,-\frac{7}{2}\right)$.

За попередньою формулою обчислимо необхідну відстань

$$d=\left|Пр_{\overline{n}}\,\overline{M_0M}\right|=\frac{\left|\overline{M_0M}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{n}\right|}=\frac{\left|(-2)\cdot 3+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 4\right|}{\sqrt{9+16}}=4.$$

Для зручності при рішенні задач наведемо дві таблиці: Таблиця 3.1 − Рівняння площини у просторі та Таблиця 3.2 – Рівняння прямої у просторі

Таблиця 3.1 − Рівняння площини у просторі

№	Вигляд рівняння	Його назва	Основні позначення
1	2	3	4
1	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=$	Рівняння площини, що проходить через задану точку M_0 перпендикулярно заданому вектору $\vec{n}$	(x, y, z)-координати довільної точки M площини; (x_0, y_0, z_0)- кордина-ти заданої точки M_0, що лежить в площині; (A, B, C)- координа-ти вектора $\vec{n}$ (нор-маль до площини)
2	$Ax+By+Cz+D=0$	Загальне рівняння площини	(x, y, z) координати точки M, що лежить в площині $\vec{n}=(A, B, C)$- нормаль до площини.
3	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Рівняння площини у відрізках	(x, y, z)-координати довільної точки M, що лежить в площині; a, b, c - відрізки, які площина відтинає на осях Ox, Oy та Oz відповідно.
4	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$	Рівняння площини, що проходить через три точки	$(x_1; y_1; z_1)(x_2; y_2; z_2)$ $(x_3; y_3; z_3)$-кординати трьох точок, що належать площині
5	Кут між площинами: $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+(}$	Площини задані загальним рівнянням	$\vec{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ $\vec{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ - нормалі до площини
6	Умова перпендикулярності площин: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$		
7	Умова паралельності площин: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$		
8	Відстань від заданої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	Площина задана загальним рівнянням	$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - зада-на точка $\vec{n}=(A, B, C)$ - нор-маль до площини.

Таблиця 3.2 − Рівняння прямої у просторі

№ п /з	Вигляд рівняння	Його назва	Основні позначення
1	2	3	4
1	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	Пряма як перетин двох площин	Коефіцієнти 1-го рівняння A_1, B_1, C_1 не пропорційні коефіцієнтам A_2, B_2, C_2 другого рівняння
2	$\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$	Канонічні рівняння прямої	$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$- задана точка на прямій; $M(x,\ y,\ z)$ - довільна точка на прямій; $\vec{S}(\ell,\ m,\ p)$ - напрямний вектор прямої.
3	$\begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+pt \end{cases}$	Параметричні рівнян-ня прямої	Параметр $t\in(-\infty;\ \infty)$
4	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ та $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ - дві задані точки на прямій $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=$ $=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$
5	Кут між двома прямими $\cos\varphi=\dfrac{\ell_1\ell_2+m_1m_2+p_1p_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+p_1^2}\sqrt{\ell_2^2+m_2^2+p_2^2}}$	Прямі задані канонічними рівняннями	$\vec{S}_1=(\ell_1,\ m_1,\ p_1)$та $\vec{S}_2=(\ell_2,\ m_2,\ p_2)$ - напрямні вектори прямої
6	Умова перпендикулярності прямих: $\ell_1\ell_2+m_1m_2+p_1p_2=0$		
7	Умова паралельності прямих: $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$		
8	Кут між прямою та площиною $\sin\varphi=\dfrac{\lvert A\cdot\ell+B\cdot m+C\cdot p\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{\ell^2+m^2+p^2}}$	Площина задана загальним рівнянням, пряма - канонічним	$\vec{n}=(A,\ B,\ C)$ - нормаль до площини. $\vec{S}(\ell,\ m,\ p)$ - напрямний вектор прямої.

3.2 Приклади розв'язку задач

Розглянемо деякі приклади, при розв'язуванні яких використовують різні форми рівнянь прямої та площини в просторі.

Приклад 1. Задані точки $\boldsymbol{M}_0(4;\,6;\,1)$, $\boldsymbol{M}_1(1;\,0;\,-2)$, $\boldsymbol{M}_2(4;\,-2;\,4)$. Треба:

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку $\boldsymbol{M}_0$ перпендикулярно відрізку $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2$;

б) Одержане рівняння звести до загального вигляду;

в) Побудувати цю площину в системі $\boldsymbol{Oxyz}$ координат.

Розв'язання: а) спочатку знайдемо координати вектора нормалі $\vec{\boldsymbol{n}}$: Підставивши координати вектора $\vec{\boldsymbol{n}}$ та точки $\boldsymbol{M}_0$ у рівняння $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)=0$, де $\boldsymbol{A},\,\boldsymbol{B},\,\boldsymbol{C}$ - координати вектора $\vec{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{z}_0$ - координати точки $\boldsymbol{M}_0$, одержимо $3(\boldsymbol{x}-4)-2(\boldsymbol{y}-6)+6(\boldsymbol{z}-1)=0$ - це рівняння площини, що проходить через задану точку $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{x}_0,\,\boldsymbol{y}_0,\,\boldsymbol{z}_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\vec{\boldsymbol{n}}=(\boldsymbol{A},\,\boldsymbol{B},\,\boldsymbol{C})$.

б) В одержаному рівнянні розкриємо дужки, тоді $3\boldsymbol{x}-12-2\boldsymbol{y}+12+6\boldsymbol{z}-6=0 \;\Rightarrow\; 3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+6\boldsymbol{z}-6=0$ - загальне рівняння площини

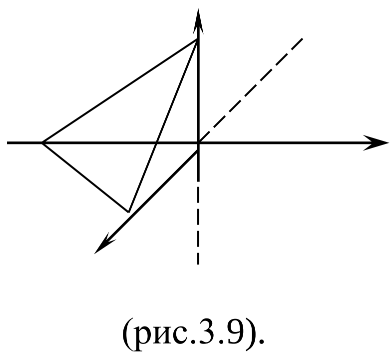
в) Для побудови площини в просторі знайдемо точки перетину площини з осями координат, тоді побудуємо площину по 3-х точках:

при $\boldsymbol{x}=0,\ \boldsymbol{y}=0$ маємо $6\boldsymbol{z}-6=0 \Rightarrow \boldsymbol{z}=1$

при $\boldsymbol{x}=0,\ \boldsymbol{z}=0$ маємо $-2\boldsymbol{y}-6=0 \Rightarrow \boldsymbol{y}=-3$

при $\boldsymbol{y}=0,\ \boldsymbol{z}=0$ маємо $3\boldsymbol{x}-6=0 \Rightarrow \boldsymbol{x}=2$.

Побудуємо в системі координат ці три точки (рис.3.9).



(рис.3.9).

Задана рівнянням площина проходить через точки $\boldsymbol{M}_1(0;\,0;\,1)$, $\boldsymbol{M}_2(2;\,0;\,0)$, $\boldsymbol{M}_3(0;\,-3;\,0)$.

Приклад 2. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $\boldsymbol{M}_1(3;\,-5;\,2)$ та $\boldsymbol{M}_2(1;\,-1;\,-4)$.

Розв'язання: За формулою $\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1}=\dfrac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1}=\dfrac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{z}_1}$ (рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $\boldsymbol{M}_1$ та $\boldsymbol{M}_2$) маємо:

$\dfrac{\boldsymbol{x}-3}{1-3}=\dfrac{\boldsymbol{y}+5}{-1+5}=\dfrac{\boldsymbol{z}-2}{-4-2}\Rightarrow\dfrac{\boldsymbol{x}-3}{-2}=\dfrac{\boldsymbol{y}+5}{4}=\dfrac{\boldsymbol{z}-2}{-6}$ або $\dfrac{\boldsymbol{x}-3}{1}=\dfrac{\boldsymbol{y}+5}{-2}=\dfrac{\boldsymbol{z}-2}{3}$ - це канонічні рівняння прямої.

Для одержання параметричних рівнянь цієї прямої використовуємо формули $\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\ell\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{m}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0+\boldsymbol{p}\boldsymbol{t}\end{cases}$ (параметричні рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{x}_0,\,\boldsymbol{y}_0,\,\boldsymbol{z}_0)$ паралельно вектору $\vec{\boldsymbol{S}}(\ell,\,\boldsymbol{m},\,\boldsymbol{p})$), тоді $\begin{cases}\boldsymbol{x}=3+\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{y}=-5-2\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{z}=2+3\boldsymbol{t}\end{cases}$, параметр $\boldsymbol{t}\in(-\infty;\,\infty)$.

Відповідь: $\dfrac{\boldsymbol{x}-3}{1}=\dfrac{\boldsymbol{y}+5}{-2}=\dfrac{\boldsymbol{z}-2}{3}$, $\begin{cases}\boldsymbol{x}=3+\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{y}=-5-2\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{z}=2+3\boldsymbol{t}\end{cases}$.

Приклад 3. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{\boldsymbol{x}-2}{1}=\dfrac{\boldsymbol{y}-3}{1}=\dfrac{\boldsymbol{z}-4}{2}$ та площини $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-6=0$.

Розв'язання: Шукані координати точки перетину $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{z})$ повинні задовольняти рівнянням прямої та площини.

Параметричними рівняннями заданої прямої будуть $\begin{cases}\boldsymbol{x}=2+\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{y}=3+\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{z}=4+2\boldsymbol{t}\end{cases}$

Підставимо ці $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ та $\boldsymbol{z}$ в рівняння площини:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0 \Rightarrow t=-1$$

Підставивши знайдене t в параметричні рівняння, одержимо координати точки перетину прямої і площини: $\begin{cases} x=2-1=1 \\ y=3-1=2 \\ z=4+2\cdot(-1)=2 \end{cases}$.

Отже, точкою перетину буде $M(1;\ 2;\ 2)$.

Відповідь: $M(1;\ 2;\ 2)$.

Приклад 4. Мємо координати вершин піраміди: $A_1(4;\ 2;\ 5)$, $A_2(0;\ 7;\ 2)$, $A_3(0;\ 2;\ 7)$, $A_4(1;\ 5;\ 0)$. Знайти: 1) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

2) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$; 3) рівняння ребра A_1A_2;

4) рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Розв'язання: 1) складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$ за формулою

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

Розкладаючи визначник, одержимо $10x+20y+20z-180=0$ або $x+2y+2z-18=0$

2) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ знайдемо, відповідно, за допомогою формули

$$\sin\varphi=\frac{A_4(x_4-x_1)+B(y_4-y_1)+C(z_4-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{(x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2+(z_4-z_1)^2}}=$$

$$=\frac{|1\cdot(-3)+2\cdot 3+2\cdot(-5)|}{\sqrt{1+2^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}}=\frac{7}{3\sqrt{43}}.$$

3) рівняння ребра A_1A_2 (прямої A_1A_2) запишемо як рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x-4}{-4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-5}{-3}.$$

4) рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 запишемо:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{2}$$

(нормаль до площини $A_1A_2A_3$ $\vec{n}=(1;\ 2;\ 2)$ є напрямний вектор шуканої прямої).

Приклад 5. Написати рівняння прямої, яка з'єднує середини відрізків AB і CD, де $A(-2;1)$, $B(0;3)$, $C(1;1)$, $D(-1;5)$.

Розв'язання. Знайдемо середини цих відрізків:

$M_1=\left(\frac{-2+0}{2};\ \frac{1+3}{2}\right)=(-1;\ 2)$, $M_2=\left(\frac{1-1}{2};\ \frac{1+5}{2}\right)=(0;\ 3)$.

Далі за формулою $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ маємо: $\frac{y-1}{3-2}=\frac{x+1}{0+1}$, або $\frac{y-1}{1}=\frac{x+1}{1}$.

Якщо привести це рівняння до вигляду рівняння з нахилом, то буде $y-1=x+1$, звідки $y=x+2$.

3.3 Питання і вправи до самоконтролю

1. Записати параметричні, канонічні та загальне рівняння прямої на площині.

2. Визначити, які з точок $M_1(3;1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(-3;\ 3)$, $M_5(3;\ -1)$, $M_6(-2;\ 1)$ належать прямій $2x-3y-3=0$ і які не належать їй.

3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-1;\ 3)$.

а) паралельно прямій $x-5y+z=0$.

б) перпендикулярно до прямої $3x-y+4=0$.

4. Знайти точки перетину прямої $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=12$ з осями координат, записати рівняння цієї прямої у відрізках та побудувати її.

5. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $\boldsymbol{M}_0(2;\,-3)$:

а) паралельно осі $\boldsymbol{Ox}$;

б) паралельно осі $\boldsymbol{Oy}$;

в) перпендикулярно до прямої $\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-7=0$.

6. Довести, що пряма $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+2=0$ паралельна прямим

а) $6\boldsymbol{x}-9\boldsymbol{y}+5=0$; б) $\boldsymbol{y}=\frac{2}{3}\boldsymbol{x}$; в) $\frac{\boldsymbol{x}+1}{5}=\frac{\boldsymbol{y}-3}{2}$

та перпендикулярна прямим а) $3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-5=0$; б) $\boldsymbol{y}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{x}+6$; в) $\frac{\boldsymbol{x}-2}{2}=\frac{\boldsymbol{y}+1}{-3}$.

7. Знайти відстань між паралельними прямими $\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+6=0$ та $2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+7=0$.

8. Знайти кут між прямими $5\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+7=0$ та $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+1=0$.

9. Визначити, при яких $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ прямі $\boldsymbol{ax}-2\boldsymbol{y}-1=0$ та $6\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}=0$

а) мають одну спільну точку;

б) паралельні;

в) співпадають.

10. Скласти рівняння висот трикутника з вершинами $\boldsymbol{A}(0;\,-1)$, $\boldsymbol{B}(1;\,-3)$ та $\boldsymbol{C}(-5;\,2)$.

11. Записати рівняння площини: загальне; яка проходить через задану точку; яка проходить через три заданих точки, у відрізках на осях координат.

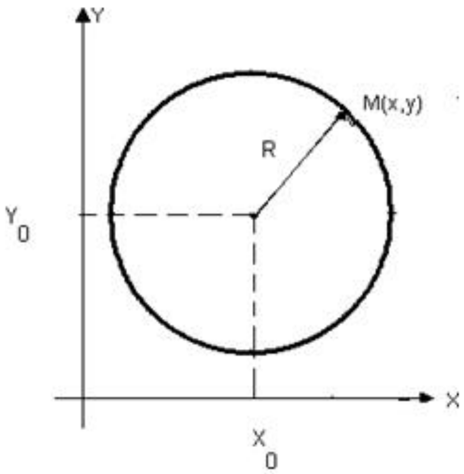
12. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $\boldsymbol{M}_1(4;\,6;\,1)$, $\boldsymbol{M}_2(1;\,0;\,-2)$, $\boldsymbol{M}_3(4;\,-2;\,4)$, привести його до загального вигляду. Побудувати цю площину.

13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $\boldsymbol{M}_0(2;\,1;\,-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{\boldsymbol{n}}=(1;\,-2;\,3)$.

3.4 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Найпростішою кривою другого порядку є коло. Зі школи відомо рівняння кола з радіусом R, яке має центр в точці $M(x_0;\, y_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \tag{3.5}$$



Або $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$. Підносячи останню рівність до квадрату, одержимо рівносильне рівняння:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Маємо рівняння кола із центром у точці C(x_0, y_0) радіуса R, або канонічне рівняння кола.

Якщо $x_0=y_0=0$, одержуємо рівняння кола з центром у початку координат

$$x^2+y^2=R^2.$$

Рис.3.10

<u>Узагальненням кола є еліпс.</u> Взагалі, криві другого порядку бувають таких типів: еліпси, гіперболи і параболи. Розглянемо їх послідовно.

Еліпс – це стиснуте коло. Канонічне рівняння еліпса задамо формулою

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3.6}$$

Нехай $a \ge b$. Тоді a називається великою піввіссю еліпса, а b - малою. З рівняння (3.6) очевидно, що еліпс має осі координат своїми осями симетрії, а початок координат – його центр симетрії. Степінь “стислості” еліпса відносно кола залежить від відношення $\frac{a}{b}$. Чим ближче це відношення до одиниці, тим ближче форма еліпса до кола.

Маємо точки перетину еліпса з осями координат:

$$x = \pm a\,, \quad y = \pm b$$

З цього ми вже можемо грубо уявити форму еліпса. Маючи на увазі подальше уточнення цієї форми, зобразимо еліпс:

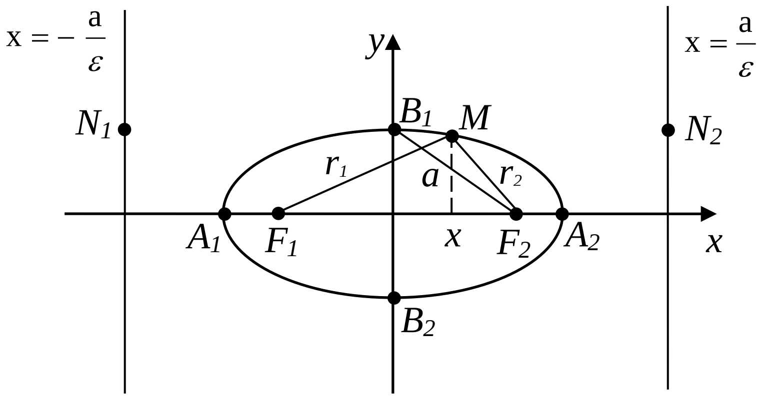


Рис.3.11

Основна геометрична властивість полягає в тому, що в середині еліпса є пара точок $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ $(c < a)$ така, що сума відстаней кожної точки на еліпсі до цих двох точок стала величина. Ці точки називаються фокусами еліпса. З малюнка видно, що ця стала дорівнює $2a$. З цього в свою чергу виводимо співвідношення

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Для характеристики форми еліпса замість відношення $\frac{b}{a}$ за звичай використовують відношення $\frac{c}{a} = \varepsilon$, яке називають ексцентриситетом еліпса. Чим ближче до нуля ексцентриситет, тим ближче до кола еліпс.

ОЗНАЧЕННЯ. Ексцентриситетом еліпса називається величина ε, яка дорівнює відношенню половини фокусної відстані до довжини більшої півосі.

$$\varepsilon = \frac{c}{a},\ 0 \le \varepsilon < 1.$$

Ексцентриситет еліпса ε вказує на витягнутість еліпса відносно осі. Якщо $\varepsilon = 0$, то ми отримаємо коло.

Нехай a – більша піввісь еліпса. **Директрисами** еліпса називається пара прямих, які перпендикулярні більшій півосі еліпса і мають рівняння $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Директриси розташовані лівіше лівої вершини та правіше правої (рис.3.11). Для довільної точки еліпса $M\left(x, y\right)$ має місце властивість:

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon,\ \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

де r_1, r_2 – відстані від точки M до лівого і правого фокусів;
d_1, d_2 – відстані від точки M до лівої та правої директрис.

Приклад. Дано еліпс $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Треба знайти: 1) його півосі, 2) фокуси, 3) ексцентриситет.

Розв'язання.

1) ділячи на 225, отримаємо $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; звідси $a = 5,\ b = 3$.

2) $c^2 = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4$. $F_1(4; 0)$, $F_2(-4; 0)$.

3) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Приклад. Скласти рівняння еліпса, якщо точка $M\left(-2\sqrt{5};\ 2\right)$ лежить на ньому, а мала піввісь $b = 3$.

Розв'язання. Оскільки точка M лежить на еліпсі, її координати мають задовольняти рівнянню еліпса: $\frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{a^2} + \frac{2^2}{3^2} = 1$ або $\frac{20}{a^2} + \frac{4}{9} = 1$.

Звідси $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{36}$, $a=6$ і рівняння еліпса: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

Гіпербола.

Гіперболою (рис. 3.12) називають геометричне місце точок, різність відстаней від яких до двох даних точок є величиною сталою. Ці дві обрані точки називаються **фокусами гіперболи**.

Аналогічно до еліпса введемо наступні позначення:

$2a$ – різність відстаней;

$2c$ – відстань між фокусами.

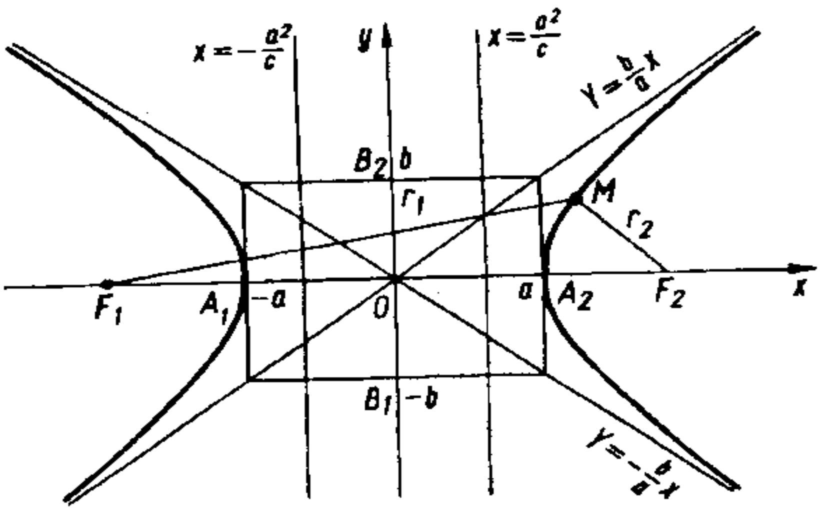


Рис.3.12

Візьмемо довільну точку $M\left(x,y\right)$, що належить гіперболі.

$$F_1M-F_2M=\pm 2a.$$

Знак "+" буде у випадку, коли $F_1M>FM_2$, і "–", якщо $F_1M<FM_2$.

$$\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}-\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Підносимо до квадрата обидві частини рівняння:

$$x^2+2xc+c^2+y^2=x^2-2xc+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

$$\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}=x\frac{c}{a}-a$$

$$x^2-2xc+c^2+y^2=x^2\frac{c^2}{a^2}-2xc+a^2$$

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2.$$

Позначимо $b^2=-a^2+c^2$. Тоді рівняння буде мати вигляд:

$$-x^2\frac{b^2}{a^2}+y^2=-b^2$$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – **канонічне рівняння гіперболи**.

Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ називають **вершинами** гіперболи,

точки $B_1(0,-b)$, $B(0,b)$ – **уявними вершинами** гіперболи.

$A_1A_2=2a$ – дійсна вісь гіперболи;

$B_1B_2=2b$ – уявна вісь гіперболи.

Гіпербола має похилі асимптоти (прямі, до яких гілки гіперболи наближаються нескінченно близько, але не торкаються їх), що задаються рівняннями: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Ексцентриситетом гіперболи називається величина ε, яка дорівнює відношенню половини фокусної відстані до дійсної півосі: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$.

Ексцентриситет характеризує "розгорнутість" гілок гіперболи вздовж дійсної осі.

Директрисами гіперболи називається пара прямих, що є перпендикулярними дійсній осі та мають рівняння $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Оскільки $\varepsilon > 1$, то директриси розташовані лівіше правої та правіше лівої вершини. Як і для еліпса, для будь–якої точки $M(x, y)$ гіперболи виконано рівність $\frac{r}{d} = \varepsilon$, де r – відстань від $M(x, y)$ до фокуса; d – відстань від $M(x, y)$ до відповідної директриси.

Приклад. Скласти рівняння гіперболи якщо відстань між фокусами $2c = 20$, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Розв'язання.

Оскільки рівняння асимптот гіперболи має вигляд $y = \pm\frac{b}{a}x$, то з другої умови маємо $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, або $b = \frac{4}{3}a$.

Далі: $c^2 = a^2 + b^2$, або $100 = a^2 + \frac{16}{9}a^2$.

Звідки: $\frac{25}{9}a^2 = 100$ і $a^2 = 36$, $a = 6$. Тоді маємо: $b = \frac{4}{3}$, $a = 8$.

Таким чином потрібне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Парабола

Параболою (рис. 3.13) називається геометричне місце точок, розташованих на однаковій відстані від даної точки та даної прямої.

Точка, про яку йдеться у визначенні, називається **фокусом параболи**, а пряма – **директрисою**.

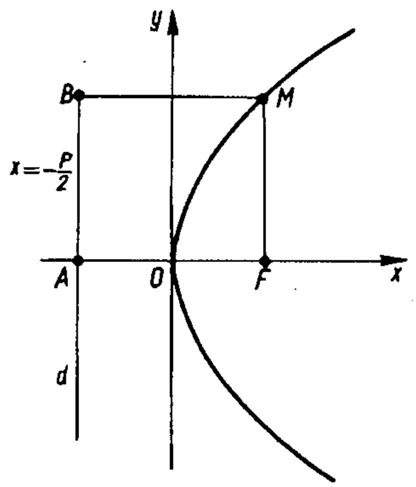


Рис. 3.13

Точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – це фокус параболи, а пряма $x=-\frac{p}{2}$ – директриса, де

p – відстань між директрисою та фокусом параболи;

r – відстань від фокуса до довільної точки $M(x,y)$, що належить гіперболі;

d – відстань від директриси до точки $M(x,y)$.

Згідно з визначенням гіперболи, $r=d$.

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Підносимо до квадрата обидві частини рівняння:

$$x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4}.$$

Скорочуючи, дістанемо канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px,$$

де p – параметр параболи, $p > 0$.

Графік параболи, симетричний відносно осі OX, розташований справа від осі OY. Точка $(0,0)$ називається *вершиною* параболи.

Ексцентриситет параболи завжди дорівнює одиниці: $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Приклад. Скласти рівняння (канонічне) параболи, якщо відомо, що вона проходить через точку $M(9;\ 6)$.

Розв'язання.

За умовою координати точки M мають задовольняти рівнянню $y^2 = 2px$:

$$36 = 2p9, \quad \text{або} \quad 2p = 4$$

і рівняння параболи набуває вигляду

$$y^2 = 4x.$$

Загальне рівняння кривої другого порядку на площині

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3.7)$$

Для того, щоб визначити тип кривої, необхідно обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Залежно від знака визначника, криві класифікуються наступним чином.

1) $AC - B^2 > 0$ – крива еліптичного типу;

2) $AC - B^2 = 0$ – крива параболічного типу;

3) $AC - B^2 < 0$ – крива гіперболічного типу.

Така класифікація пов'язана з тим, що шляхом паралельного переносу та повороту системи координат із рівняння (3.7) можна отримати рівняння відповідного типу (еліпс, параболу або гіперболу).

Наприкінці відмітимо так звані “фокальні” властивості еліпса, гіперболи і параболи:

- **<u>для еліпса</u>**: промені світла, виходячи з одного з фокусів після дзеркального відбиття від еліпса потрапляють до другого фокуса.

- **<u>для гіперболи</u>**: промені світла, що виходять з одного фокуса, після дзеркального відбиття від гіперболи спрямовані так, ніби вони виходять з другого фокуса.

- **<u>для параболи</u>**: промені світла, що виходять з фокуса, після дзеркального відбиття від параболи йдуть паралельно осі параболи (прожектор).

Приклад. Визначити лінію, рівняння якої $2\boldsymbol{x}^2 - 8\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2 + 6\boldsymbol{x} + 1 = 0$, та побудувати її .

Розв’язання: Спочатку об’єднаємо члени рівняння, які містять x та y окремо, тоді одержимо: $\left(2\boldsymbol{x}^2 - 8\boldsymbol{x}\right) + \left(\boldsymbol{y}^2 + 6\boldsymbol{y}\right) + 1 = 0$

Рівняння не зміниться, якщо ми у першій дужці додамо та віднімемо 8, а в другій дужці 9. Тоді матимемо: $\left(2\boldsymbol{x}^2 - 8\boldsymbol{x} + 8 - 8\right) + \left(\boldsymbol{y}^2 + 6\boldsymbol{y} + 9 - 9\right) + 1 = 0$

Виділимо повні квадрати:

$$2(\boldsymbol{x} - 2)^2 + (\boldsymbol{y} + 3)^2 - 8 - 9 + 1 = 0; \quad 2(\boldsymbol{x} - 2)^2 + (\boldsymbol{y} + 3)^2 = 16;$$

$$\frac{(\boldsymbol{x} - 2)^2}{8} + \frac{(\boldsymbol{y} + 3)^2}{16} = 1$$

Позначимо $\begin{cases} \boldsymbol{x} - 2 = \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y} + 3 = \boldsymbol{y}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + 2 \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' - 3 \end{cases}$

Якщо ми побудуємо нову систему координат $\boldsymbol{x'O'y'}$, початок якої у точці $\boldsymbol{O'}(2;\,-3)$ а осі $\boldsymbol{O'x'}$ та $\boldsymbol{O'y'}$ паралельні осям старої системи $\boldsymbol{Ox}$ та $\boldsymbol{Oy}$, тоді у новий системі $\boldsymbol{x'O'y'}$ координат маємо рівняння

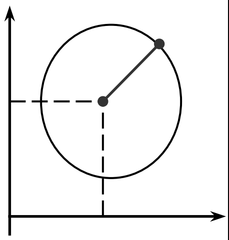
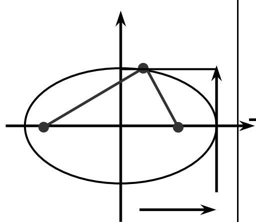
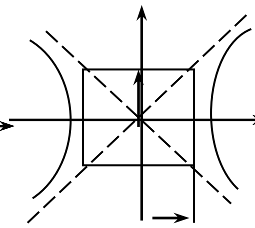
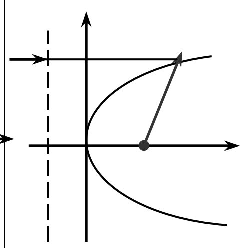
$$\frac{(\boldsymbol{x'})^2}{8}+\frac{(\boldsymbol{y'})^2}{16}=1.$$

Це є канонічне рівняння еліпса з півосями $\boldsymbol{a}=2\sqrt{2}$, $\boldsymbol{b}=4$.

Отже, задане рівняння є рівнянням еліпса.

Після вивчення властивостей кривих доцільно заповнити наступну таблицю.

Таблиця 3.3 − Криві другого порядку

Крива / Властивості	Коло	Єліпс	Гіпербола	Парабола
Означення	$\vert CM\vert=R$	$r_1+r_2=2a$	$\vert r_1+r_2\vert=2a$	$\boldsymbol{r}=\delta$
Канонічне рівняння	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
Зображення				
Фокус	$F(a;b)$	$F_1(-c;\,0)$ $F_2(c;\,0)$	$F_1(-c;\,0)$ $F_2(c;\,0)$	$F\left(\frac{P}{2};0\right)$
Зв'язок між a,b,c		$a^2-b^2=c^2$	$a^2+b^2=c^2$	
Ексцентри-ситет	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$	$\varepsilon=1$
Асімптота			$y=\pm\frac{b}{a}x$	

Приклад 1. Визначити лінію, рівняння якої $2\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2+6\boldsymbol{x}+1=0$, та побудувати її .

Розв'язання: Спочатку об'єднаємо члени рівняння, які містять х та у окремо, тоді одержимо: $\left(2\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}\right)+\left(\boldsymbol{y}^2+6\boldsymbol{y}\right)+1=0$

Рівняння не зміниться, якщо ми у першій дужці додамо та віднімемо 8, а в другій дужці 9. Тоді матимемо: $\left(2\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+8-8\right)+\left(\boldsymbol{y}^2+6\boldsymbol{y}+9-9\right)+1=0$

Виділимо повні квадрати:

$2(\boldsymbol{x}-2)^2+(\boldsymbol{y}+3)^2-8-9+1=0;\quad 2(\boldsymbol{x}-2)^2+(\boldsymbol{y}+3)^2=16;$

$$\frac{(\boldsymbol{x}-2)^2}{8}+\frac{(\boldsymbol{y}+3)^2}{16}=1$$

Позначимо $\begin{cases}\boldsymbol{x}-2=\boldsymbol{x}'\\ \boldsymbol{y}+3=\boldsymbol{y}'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+2\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'-3\end{cases}$

Якщо ми побудуємо нову систему координат $\boldsymbol{x'O'y'}$, початок якої у точці $\boldsymbol{O}'(2;-3)$ а осі $\boldsymbol{O'x'}$ та $\boldsymbol{O'y'}$ паралельні осям старої системи $\boldsymbol{Ox}$ та $\boldsymbol{Oy}$, тоді у новий системі $\boldsymbol{x'O'y'}$ координат маємо рівняння

$$\frac{(\boldsymbol{x}')^2}{8}+\frac{(\boldsymbol{y}')^2}{16}=1.$$

Це є канонічне рівняння еліпса з півосями $\boldsymbol{a}=2\sqrt{2}$, $\boldsymbol{b}=4$. Отже, задане рівняння є рівнянням еліпса.

3.5 Питання і вправи до самоконтролю

1. Записати канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи.
2. Записати рівняння кривої другого порядку у полярній системі координат.
3. Записати канонічні рівняння сфери, еліпсоїда, гіперболоїда однополого та двополого, параболоїда еліптичного та гіперболічного.

4. Яке існує правило одержання рівняння поверхні обертання навколо однієї з координатних осей?

5. Скласти канонічне рівняння еліпса з фокусами на осі $\boldsymbol{Ox}$, якщо:

а) півосі еліпса дорівнюють 5 та 2;

б) відстань між фокусами дорівнює 6, а більша вісь 10;

в) еліпс проходить через точки $\boldsymbol{M}_1\left(\frac{5}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ та $\boldsymbol{M}_2\left(-2;\ \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

6. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо відомо:

а) парабола розташована у правій півплощині симетрично відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ і її параметр $\boldsymbol{p}=3$.

б) парабола розташована у лівій півплощині симетрично відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ і її параметр $\boldsymbol{p}=0.5$.

в) парабола розташована у верхній півплощині симетрично відносно осі $\boldsymbol{Oy}$ і її параметр $\boldsymbol{p}=\frac{1}{4}$. Побудувати ці параболи, їх фокуси та директриси.

7. Визначити координати вершин, фокусів, а також побудувати гіперболу:

а) $9\boldsymbol{x}^2-16\boldsymbol{y}^2+144=0$;

б) $\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{y}^2-16=0$.

Навчальне видання

Говаленков Сергій Валентинович
Тарасенко Олександр Андрійович

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ. ЧАСТИНА 1.

Сектор редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
61023 м. Харків, вул. Чернишевська, 94.