ДЕРЖАВНА СЛУЖБА З НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ІНСТИТУТ ПОЖЕЖНОЇ БЕЗПЕКИ ІМЕНІ ГЕРОЇВ ЧОРНОБИЛЯ

Кафедра вищої математики та інформаційних технологій

К.В. Григоренко, С.О. Касярум, І.П. Частоколенко

Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Навчальний посібник

Черкаси 2024

Викладено елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: матриця, визначник, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вектори, пряма, площина, криві та поверхні другого порядку. Теоретичний матеріал ілюструється численними прикладами, що спрямовані на практичне застосування теорії, яка вивчається.

Призначено для курсантів та студентів інженерно-технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Необхідна умова успішного вирішення фахівцем інженерних завдань дослідницького напрямку — високий рівень володіння методиками математичного моделювання досліджуваних процесів, аналізу одержаної моделі, постановка, планування експерименту та математичної обробки результатів. Ознайомлення студентів та курсантів з математичним апаратом, який дає змогу вирішити ці завдання, і є метою курсу вищої математики.

Даний методичний посібник — це короткий виклад першої частини курсу вищої математики, що охоплює елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Мета вивчення цієї частини курсу — опанувати методи аналізу процесів, математичні моделі яких описуються системами лінійних алгебраїчних рівнянь (наприклад, стаціонарні процеси в електричних колах, задачі оптимізації, економічні задачі тощо), а також ознайомитися з основними поняттями геометрії (лінії, поверхні та їх рівняння, записані у різних системах координат). Така інформація важлива для успішного оволодіння як подальшими частинами курсу вищої математики, так і іншими фундаментальними дисциплінами (теоретичною механікою, інженерною графікою, теоретичними основами електротехніки тощо) та спеціальними курсами.

Зрозуміло, даний посібник не може замінити основних підручників, де курс викладено детально і в повному обсязі, проте сподіваємося, з його допомогою курсанти та студенти зможуть краще виділити головні положення курсу, враховуючи спеціалізацію.

Розділ 1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

§ 1. Основні означення

Означення. Матрицею називається прямокутна таблиця чисел (дійсних або комплексних). Горизонтальні ряди чисел називаються *рядками*, вертикальні — стовпцями. Рядки нумеруються згори вниз, стовпці — зліва направо. Числа, що утворюють матрицю, називаються її елементами. Елементи матриці позначають малими латинськими буквами з подвійними індексами. Так, a_{ks} — елемент, який міститься в k-му рядку, s-му стовпці. Самі матриці позначають великими латинськими буквами:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця має m рядків і n стовпців, то говорять, що вона має розмір $m \times n$.

Приклад . Матрицю A розміру 3×4 можна подати у вигляді

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Означення. Матриця, яка складається з одного стовпця, називається матрицею-стовпцем.

Означення. Матриця, яка складається з одного рядка, називається матрицею-рядком.

Означення. Матриця називається нульовою, якщо її елементи дорівнюють нулю.

Означення. Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однаковий розмір і в них рівні між собою однаково розміщені елементи.

Означення. Матриця називається квадратною, коли число її рядків дорівнює числу її стовпців. Якщо квадратна матриця має n стовпців, то говорять, що матриця має порядок n.

Означення. Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, розміщені поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Приклад . Матриця A є діагональною

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Означення. Діагональна матриця називається одиничною, якщо всі її елементи, розміщені на головній діагоналі, дорівнюють одиниці.

Означення. Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі її елементи, розміщені під головною діагоналлю або над нею, дорівнюють нулю.

Приклад. Розглянемо дві матриці

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матриця A_1 називається верхньою трикутною, а матриця A_2 — нижньою трикутною.

Означення. Елементи з двома однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn} утворюють головну діагональ матриці. Якщо $a_{ij}=a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

§ 2. Лінійні операції над матрицями

Додавання матриць

Операцію додавання матриць можна виконувати тільки для матриць однакових розмірів.

Означення. *Сумою матриць одного й того самого порядку* $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=A+B$; $C=(c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць *A і B*: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Приклад. Знайти суму матриці $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ та матриці $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Матриці мають розмір 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю

$$C=\begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць

Означення. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця *C*, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці *A* на α, $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Приклад. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha=-2$;

Знайти $C=\alpha A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Властивості для суми матриць і добутку матриць на число:

1) $A+B=B+A$;
2) $\alpha A=A\alpha$;
3) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
4) $(\alpha+\beta)A= \ =\alpha A+\beta A$,
5) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

Означення. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ розміру $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\ .$$

Кожний елемент матриці С утворюється як сума добутків відповідних елементів i-го рядка матриці А на відповідні елементи j-го стовпця матриці В, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m\times n$.
З означення випливає, що добуток матриць некомутативний: $AB\neq BA$.

§ 3. Транспонування матриць

Означення . Матриця, яку дістають із даної, замінюючи кожний її рядок стовпцем із тим самим номером, називається матрицею, транспонованою до даної, і позначається A^T, тобто

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення . Операція знаходження матриці, транспонованої до даної, називається транспонуванням матриці.

Властивості транспонування матриць

1. $\left(A^T\right)^T = A$

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$

4. $(AB)^T = B^T A^T$

§ 4. Приклади

Приклад 1. Знайти $A+3B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Розв’язання.

$$3B = 3\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix};$$

A+3B=$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+0 & 4-6 & 3+3 \\ 1+9 & -2+3 & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Приклад 2. Знайти $A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв’язання: Добуток $A\cdot B$ можна утворити, оскільки матриця A має розмір 2×4, а матриця B — розмір 4×3. Матриця $C = A\cdot B$ матиме розмір 2×3. Щоб знайти C_{11}, утворимо алгебраїчну суму добутків елементів першого рядка матриці A на елементи першого стовпця матриці B: $C_{11} = 5\cdot(-2)+0\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot(-1) = -11$

Аналогічно:

$C_{12} = 5\cdot 2+0\cdot 3+3\cdot 0+(-1)(-1) = 11,$

$C_{13} = 5\cdot 0+0\cdot 1+3(-2)+(-1)(-2) = -4;$

$C_{21} = (-1)(-2)+2\cdot 0+1\cdot 1+4\cdot 4 = 19,$

$C_{22} = (-1)2+2\cdot 3+1\cdot 0+4(-1) = 0,$

$C_{23} = (-1)0+2\cdot 1+1(-2)+4(-2) = -8.$

Отже, $C = A\cdot B = \begin{pmatrix} -11 & 11 & -4 \\ 19 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Утворити $A\cdot B$ — неможливо.

Приклад 3. Знайти $A+A^T$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Розв'язання.

$$A^T=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix};\ A+A^T=\begin{pmatrix}4+4 & 3-1 & 2+1\\ -1+3 & 2+2 & -2+3\\ 1+2 & 3-2 & -1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

§ 5. Запитання для самоконтролю

Закінчте вирази:

а) Матрицею називається …

б) Матриця називається діагональною, якщо …

в) Матриця називається одиничною, якщо …

г) Для того щоб одержати суму матриць, треба …

д) Для того щоб помножити матрицю на число, треба …

е) Множення матриць виконується за таким правилом: …

§ 6. Задачі для самостійного опрацювання

Знайти добутки матриць

1. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -2\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 8\\ 4 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$

Обчислити вирази:

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3.$

7. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^5.$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}^4.$

9. Знайти значення полінома $3A^2 - 2A - 5$ від матриці

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$

10. Знайти значення полінома $A^3 - 7A^2 + 13A - E$ від матриці

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

11. Чи справедливі для матриць рівності

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

Для нижченаведених матриць A знайти всі матриці B, для яких виконується рівність AB = BA.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$

Розділ 2. ВИЗНАЧНИКИ

§ 1. Визначники. Правила їх обчислення.

Розглянемо спочатку системи рівнянь, в яких кількість невідомих і кількість рівнянь рівні між собою, тобто $m = n$. Нехай, наприклад, $n = m = 2$, тоді маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.\end{cases}$$

Означення. Визначником другого порядку називається вираз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-(-1)\cdot 4=10.$$

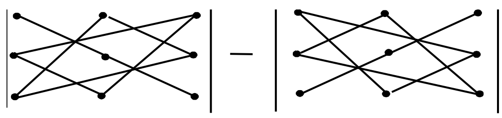
Якщо $n = m = 3$, то маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.\end{cases}$$

Означення. Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему а) *(правило трикутників):*



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів $a_{11}\quad a_{22}\quad a_{33}$, розміщених на головній діагоналі визначника, і добутки елементів $a_{13}\quad a_{21}\quad a_{32}$ і $a_{12}\quad a_{23}\quad a_{31}$, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів $a_{13}\quad a_{22}\quad a_{31}$, розміщених на сторонній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — $a_{11}\quad a_{23}\quad a_{32}$ і $a_{12}\quad a_{21}\quad a_{33}$.

Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку (*правило Саррюса*)— *правило дописування стовпців*.

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

§ 2. Властивості визначника

Властивість 1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

Властивість 2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Властивість 4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число С, то й визначник помножиться на С.

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

Властивість 6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Властивість 7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

Властивість 8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число.

§ 3. Алгебраїчні доповнення і мінори

Нехай визначник має *n* рядків і *n* стовпців. Мінором k-го порядку k [1; n–1] називається визначник, утворений з елементів, розміщених на перетині будь-яких k рядків і k стовпців визначника. Зрозуміло, що мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

Приклад. Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \dots ,\ M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Мінори M_2^1, M_2^2, M_2^3 другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого, другого рядків; першого, другого стовпців; третього, четвертого рядків; першого, третього стовпців; другого, четвертого рядків; третього, четвертого стовпців. Мінор M_3^1 третього порядку утворюється з елементів, розміщених на перетині другого, третього, четвертого рядків і першого, третього, четвертого стовпців.

Верхній індекс означає нумерацію мінорів; нижній індекс — порядок мінора.

Означення. Доповняльним мінором для мінора k-го порядку називається такий мінор, який лишається у визначнику після викреслювання тих k рядків і тих k стовпців, на перетині яких містяться елементи, що утворили мінор k-го порядку.

Нехай мінор k-го порядку утворено з елементів, розміщених на перетині i1, i2, ..., ik рядків і j1, j2, ..., jk стовпців.

Означення. Алгебраїчним доповненням до мінора k-го порядку є доповняльний мінор (n–k)-го порядку, узятий зі знаком $(-1)^{S_m}$, де $S_m = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k$. Якщо сума S_m номерів рядків і стовпців парна, то береться знак «+», якщо непарна — то знак «–».

Далі важливу роль відіграватиме алгебраїчне доповнення до мінора першого порядку. Нехай a_{ij} — будь-який елемент-мінор першого порядку у визначнику n-го порядку, тоді $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{n-1}$ буде алгебраїчним доповненням до мінора a_{ij}. Тут M_{n-1}— доповняльний мінор (n–1)-го порядку, утворений викреслюванням i-рядка і j-стовпця в початковому визначнику n-го порядку.

§ 4. Приклади

Приклад 1. Знайти визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1;$

б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab\,;$

в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\sin\alpha - \sin\beta\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \log_a b = 0$.

Приклад 2. Знайти визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 3 + 5\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 4 - 5\cdot 1\cdot 3 = 40$;

б) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc + x^3 + x^3 - bx^2 - ax^2 - cx^2 = = 2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc$;

в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta -$

$-\sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha)$.

Приклад 3. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -14 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -6 & -14 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 0 & -100 & 39 \\ 0 & -35 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} -100 & 39 \\ -35 & 12 \end{vmatrix} = -165.$$

Приклад 4. Обчислити визначник за правилом трикутників.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + (-4)\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 2 -$

$-(-4)\cdot 1\cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5$.

Приклад 5. Обчислити визначник за правилом Саррюса.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&2&-4\\1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&2&-4\\1&2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\3&2\\1&2\end{matrix}\Bigg|=1\cdot2\cdot0+0(-4)\cdot1+(-2)\cdot3\cdot2-$$

$$-(-2)\cdot2\cdot1-1\cdot(-4)\cdot2-0\cdot3\cdot0=-12+4+8=0.$$

Приклад 6. Утворити доповняльний мінор другого порядку.

Для визначника Δ запишемо мінор другого порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2&3&4\\5&0&2&8\\-1&1&1&2\\3&4&0&1\end{vmatrix}; \qquad M_2^1=\begin{vmatrix}-2&4\\1&2\end{vmatrix}.$$

Цей мінор утворено з елементів, які містяться на перетині першого і третього рядків та другого і четвертого стовпців. Викреслимо ці рядки та стовпці з визначника Δ дістанемо $M_2^1=\begin{vmatrix}-2&4\\1&2\end{vmatrix}$ — мінор, доповняльний до мінора другого порядку M_2^1:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cancel{1}&\cancel{-2}&\cancel{3}&\cancel{4}\\5&\cancel{0}&2&\cancel{8}\\\cancel{-1}&\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{2}\\3&\cancel{4}&0&\cancel{1}\end{vmatrix}.$$

§ 5. Запитання для самоконтролю

Закінчте вирази:

1. Визначник другого порядку обчислюється за формулою …
2. Визначник третього порядку обчислюється за формулою …
3. Мінором k-го порядку називається …
4. Алгебраїчним доповненням називається …
5. Визначник дорівнює нулю, якщо …
6. Для того щоб помножити визначник на число, треба …
7. Визначник не зміниться, якщо …
8. Визначник n-го порядку дорівнює …

§ 6. Задачі для самостійного опрацювання

Обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$..

6. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

13. Розклавши визначник за рядком або стовпцем, що складається лише з букв, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

Розділ 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.

§ 1. Основні означення

Предметом розгляду лінійної алгебри для курсантів є насамперед теорія систем лінійних рівнянь, які в загальному вигляді можна подати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Означення. Подана система називається системою m лінійних рівнянь з n невідомими (змінними), де x_1, x_2, x_3, ..., x_n — невідомі; a_{ij} $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ —

коефіцієнти системи рівнянь; $b_i \left(i=\overline{1,m}\right)$ — вільні члени, або праві частини системи рівнянь. Якщо всі $b_i = 0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, то система лінійних рівнянь називається однорідною.

Означення. Розв’язком системи рівнянь є множина таких чисел $k_1, \ k_2, \ k_3, \ ...., k_n$, у результаті підставляння яких замість відповідних невідомих $x_1, \ x_2, \ x_3, \ ...., x_n$ у кожне з рівнянь системи останні перетворюються на правильні числові рівності.

Означення. Якщо система рівнянь не має жодного розв’язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв’язок — *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв’язок, і *невизначеною*, якщо розв’язків більш як один.

§ 2. Обернена матриця

Означення. Матриця A^{-1}називається оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці А, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Нехай дано квадратну матрицю А. Доведемо, що коли $\Delta(A) \neq 0$, існує обернена матриця A^{-1}. Розглянемо матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Утворимо добутки AB і BA.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

За правилом множення матриць елементи матриці С знаходимо за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}.$$

Якщо i = j, то згідно з формулою маємо: $c_{ii} = \Delta(A)$, тобто знаходимо значення визначника матриці А;

якщо $i \neq j,$ то вираз $c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$ є сумою добутків елементів і-го рядка визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають j-му рядку цього самого визначника. За властивістю визначників така алгебраїчна сума дорівнює нулю. Отже, $c_{ij} = 0,$ якщо $i \neq j$. Матриця С набирає вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{pmatrix}.$$

Щоб ця матриця стала одиничною, треба помножити її на $\frac{1}{\Delta(A)}$.

$$E = \frac{1}{\Delta(A)} C = A \frac{1}{\Delta(A)} B = AA^{-1}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

§ 3. Матричний метод розвязування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему n рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Означення. Основною матрицею системи називається матриця з коефіцієнтів при невідомих:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Означення . Матриця, яку здобувають з основної внаслідок дописування стовпця вільних членів, називається *розширеною* матрицею:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & ... & ... & .... & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Якщо матриця А не вироджена, то існує обернена матриця A^{-1}.

Введемо матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Тоді система лінійних рівнянь запишеться в матричній формі:

AX=B

Помножимо це рівняння на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

це і є розв'язком системи лінійних рівнянь в матричному вигляді.

Приклад. Знайдемо матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Обчислимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайдемо матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

Запишемо алгебраїчні доповнення всіх елементів визначника:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, згідно з формули для оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

дістанемо результат: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

§ 4. Правило Крамера

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Теорема. Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ— головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи ;

Δ_j — визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -4 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -11 \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо й обчислимо спочатку головний визначник цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27.$$

Отже, головний визначник системи системи рівнянь відмінний від нуля. За правилом Крамера така система має єдиний розв'язок. Знайдемо його. Для цього утворимо і обчислимо ще чотири визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -5 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -11 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -11 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -11 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -11 \\ 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

За правилом Крамера маємо розв'язки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2; \; x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{27} = 0.$$

Отже, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$ — єдиний розв'язок.

§ 5. Метод Гаусса

Найбільш простим і раціональним методом розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод послідовних виключень (метод Гаусса).

Ідея метода Гаусса полягає у зведенні системи рівнянь до одного рівняння.

Для цього досить з будь-якого рівняння системи виразити будь-яке невідоме через інші й підставити його значення до усіх рівнянь, що залишилися. Отримаємо систему, що має на одне невідоме менше та щонайменше на одне рівняння менше. При цьому ті рівняння, шо мають вигляд 0=0, слід відкинути.

З новою системою робимо те ж саме доти, доки не прийдемо до одного рівняння з одним або кількома невідомими або не отримаємо рівняння вигляду $0 = b(b \neq 0)$. В останньому випадку система є *несумісною*.

Якщо внаслідок виключення невідомих одержимо одне рівняння з одним невідомим, то знайдемо його значення, а потім, підставляючи послідовно значення знайдених невідомих у вирази для виключених невідомих, знайдемо усі інші невідомі.

Ясно, що у цьому випадку отримаємо єдиний розв'язок і, отже, система є *сумісною визначеною.*

Якщо ж унаслідок виключення отримаємо одне рівняння з декількома невідомими, то у той же спосіб зможемо лише виразити деякі невідомі через решту. У цьому випадку система має нескінченну кількість розв'язків, отже, є сумісною невизначеною. При цьому для отримання визначеного розв'язку необхідно частині невідомих надати довільні значення, а потім з їх допомогою знайти значення решти невідомих.

Обов'язково слід зробити перевірку правильності розв'язку. Для цього необхідно підставити розв'язок у ліві частини всіх рівнянь системи. Якщо при цьому значення лівих частин дорівнює правим, то систему розв'язано вірно, у протилежному випадку слід розв'язувати систему заново повністю.

При розв'язуванні систем з цілими коефіцієнтами треба пам'ятати, що у цьому випадку систему можна звести до одного рівняння, оперуючи лише з цілими числами. Для цього досить на кожному кроці зробити який-небуль коефіцієнт системи рівним одиниці, комбінуючи рівняння системи.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - & 3x_2 + & 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + & 4x_2 - & 3x_3 = 7 \\ 6x_1 - & 5x_2 + & 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} 5x_1 - & 3x_2 + & 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + & 4x_2 - & 3x_3 = 7 \\ 6x_1 - & 5x_2 + & 2x_3 = -2 \end{cases} \qquad II\ рівн. = II\ рівн. + I\ рівн.$$

$$\begin{cases} 5x_1 - & 3x_2 + & 4x_3 = 3 \\ 7x_1 + & x_2 - & x_3 = 7 \\ 6x_1 - & 5x_2 + & 2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 10 - 7x_1 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 - & 3(10 - 7x_1 - x_3) + & 4x_3 = & 3 \\ 6x_1 - & 5(10 - 7x_1 - x_3) + & 2x_3 = & -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - & 30 + 21x_1 + 3x_3 + & 4x_3 = & 3 \\ 6x_1 - & 50 + 35x_1 + 5x_3 + & 2x_3 = & -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26x_1 + & 7x_3 = & 33 \\ 41x_1 + & 7x_3 = & 48 \end{cases} II\ рівн. = II\ рівн. - I\ рівн.$$

$$\begin{cases} 26x_1 + & 7x_3 = & 33 \\ 15x_1 & = & 15 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26 \cdot 1 + & 7x_3 = & 33 \\ & 7x_3 = & 7 \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$$

$x_2 = 10 - 7 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow x_2 = 2/$

$Перевірка$:

$5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 3,$

$2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7,$

$6 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -2$

Оскільки значення лівих частин рівнянь системи при знайдених значеннях невідомих дорівнюють правим частинам, то систему розв'язано вірно.

На практиці часто розв'язування системи виконують у табличній формі, виписуючи лише коефіцієнти та праві частини системи. Покажемо це на попередьому прикладі.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 7 \\ 6 & -5 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad I = I \div 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & 4 & -3 & 7 \\ 6 & -5 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad II = II - I \cdot 2, III = III - II \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{26}{5} & \frac{3}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & -17 & -11 & -23 \end{array}\right) \quad II = II \div \frac{26}{5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{26} & \frac{29}{26} \\ 0 & -17 & -11 & -23 \end{array}\right) \quad II = II + II \cdot 17$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{26} & \frac{29}{26} \\ 0 & 0 & -\frac{105}{26} & -\frac{105}{26} \end{array}\right)$$

Остання таблиця зображує систему

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 = \frac{7}{5} \\ x_2 - \frac{23}{26}x_3 = \frac{29}{26} \\ -\frac{105}{26}x_3 = -\frac{105}{26} \end{cases}$$

Зверніть увагу на оформлення розв’язків системи в обох випадках, що дозволяють обійтись мінімумом пояснень і мають більше наочності.

Одна з переваг метода Гаусса над іншими полягає в тому, що за цим методом можна розв’язувати як однорідні, так і неоднорідні системи з будь-яким співвідношенням числа невідомих і кількості рівнянь.

Треба запам’ятати, що при розв’язуванні систем з багатозначними коефіцієнтами, коли доводиться робити округлення й, зокрема, при розв'язуванні систем на ЕОМ для зменшення помилок округлення використовується метод головних елементів, який відрізняється від наведеної схеми розв'язування лише тим, що на кожному кроці виключається невідоме з найбільшим за модулем коефіцієнтом.

§ 6. Приклади

Приклад 1. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо:

$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=15-10=5$. $\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці А. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

В результаті добутку прямої та оберненої матриць отримали одиничну матрицю.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці.

$$\begin{cases}3x_1-x_2=1\\ -2x_1+x_2+x_3=-1\\ 2x_2-x_2+4x_3=-4\end{cases}$$

Розв'язання. Запишем систему в матричному вигляді $AX=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}.$$

Для матриці А обернену ми побудували в попередньому прикладі, тому маємо:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\\ 2-\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\\ 0-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1$ — розв'язок системи.

Приклад 3. Розв'язати матричне рівняння $AX=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Щоб побудувати A^{-1}, знайдемо $\Delta(A)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=1$. Оскільки $A_{11}=3$, $A_{12}=-4$, $A_{21}=-2$, $A_{22}=3$, маємо: $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$. За формулою $X=A^{-1}B$ визначаємо $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 11\\ 13 & -13\end{pmatrix}$. Отже, шукана матриця $X=\begin{pmatrix}-9 & 11\\ 13 & -13\end{pmatrix}$.

§ 7. Запитання для самоконтролю

1. Яка матриця має назву оберненої до заданої матриці та як її позначають?
2. Які матриці мають обернену?
3. Яка матриця зветься приєднаною до заданої матриці?
4. Як записати систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими у матричній формі?
5. Як записати розв'язок системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими у матричній формі?
6. Розв'язок яких систем можна записувати у матричній формі?
7. Чи раціонально знаходити розв'язок системи за допомогою оберненої матриці? Обгрунтуйте.
8. Які алгебраїчні рівняння мають назву лінійних і чому?
9. Що зветься системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
10. Яке співвідношення між кількістю невідомих та кількістю рівнянь може бути у системах лінійних алгебраїчних рівнянь?
11. Як позначають коефіцієнти такої системи?
12. У якому рівнянні та який коефіцієнт позначають a_{25}, a_{33}, a_{ik}, b_4?
13. Яка система зветься однорідною, неоднорідною?
14. Що зветься розв'язком системи?
15. Які системи звуться сумісними, несумісними?
16. Які системи називаються визначеними, невизначеними?
17. Як звести систему лінійних алгебраїчних рівнянь до одного рівняння?
18. У чому полягає ідея методу Гаусса?
19. На скільки може зменшитись кількість рівнянь системи після виключення однієї невідомої і чому?
20. Як визначають несумісність системи у методі Гаусса?
21. Як визначають визначеність, невинначеність системи у методі Гаусса?
22. Як перевірити правильність розв'язування системи?
23. При якому співвідношенні між кількістю рівнянь і кількістю невідомих

системи лінійних алгебраїчних рівнянь її можна розв'язати за методом Гаусса?

24. При якому співвідношенні між кількістю рівнянь і кількістю невідомих система може бути визначеною, невизначеною?
25. При якому співвідношенні між кількістю рівнянь і кількістю невідомих система не може бути визначеною?
26. В чому полягає метод головних елементів? Які його переваги?
27. Як знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь згідно з правилом Крамера?
28. Чи раціонально розв'язувати систему за правилом Крамера? Обгрунтуйте.
29. Який з методів є більш загальним: метод Гаусса чи правило Крамера? Обгрунтуйте.
30. Як виявити згідно з правилом Крамера, чи є система сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?

§ 8. Задачі для самостійного опрацювання

Розв'язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1; \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = ad; \\ bx_1 + cx_2 = bd. \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax_1 + 4x_2 = 2; \\ 9x_1 + ax_2 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2ax_1 - 23x_2 + 29x_3 = 4; \\ 7x_1 + ax_2 + 4x_3 = 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5. \end{cases}$

Знайти обернені до таких матриць:

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 13. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв’язати матричні рівняння:

18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

21. $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Звести до матричного вигляду системи рівнянь і розв’язати методом оберненої матриці:

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_2 + 4x_3 = -6; \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$

Розділ 4. ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

§ 1. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m \times n$ і введемо ще одне важливе поняття.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Означення. *Рангом* матриці A розміром $m \times n$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці. Зрозуміло, що $rangA = r \le \min(m, n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n.

Означення. Розглянемо також поняття обвідного мінора k-го порядку. Це буде такий мінор $(k+1)$-го порядку, який повністю містить у собі мінор k-го порядку.

Обчислюючи ранг матриці, потрібно переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено відмінний від нуля мінор M k-го порядку, то достатньо обчислити лише мінори $(k+1)$-го порядку, що обводять мінор M. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. Якщо серед них знайдеться такий, що відмінний від нуля, то далі для нього будуються обвідні мінори $(k+2)$-го порядку і т. д.

Означення. *Елементарними* перетвореннями матриці А називаються такі її перетворення:

- заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;
- множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;
- додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Теорема. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Далі матриці, які мають рівні ранги, називатимемо еквівалентними матрицями. Еквівалентні матриці об'єднуватимемо знаком «~» («тильда»).

Приклад. Знайти ранг матриці А методом обвідних мінорів, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Мінор другого порядку, який міститься в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Проте матриця А має й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Далі запишемо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх існує лише два:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Обидва вони дорівнюють нулю, а це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

Приклад. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо спочатку елементарні перетворення матриці.

Поміняємо місцями перший і другий стовпці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

За аналогією до того, як під час обчислення визначників утворювали нулі в рядках або стовпцях, утворимо нулі в першому стовпці. З цією метою всі елементи першого рядка спочатку помножимо на –4 і додамо до другого рядка, потім — на –1 і додамо до третього рядка і нарешті помножимо на 2 і додамо до четвертого рядка. У результаті дістанемо матрицю, яку записано другою. Помноживши тепер елементи першого стовпця послідовно на –2, –1, –3 і виконавши відповідне додавання, дістанемо останню матрицю в ланцюжку перетворень.

Помноживши другий рядок здобутої матриці на $-\frac{1}{9}$, третій — на $-\frac{1}{5}$, четвертий — на $-\frac{1}{3}$, дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо знову елементарні перетворення візьмемо другий рядок і другий стовпець матриці.

З остаточного вигляду матриці після виконання елементарних перетворень випливає, що її ранг дорівнює 2, оскільки єдиний мінор другого порядку не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Решта мінорів вищого порядку дорівнюють нулю.

§ 2. Теорема Кронекера—Капеллі

У загальному випадку перш ніж розв'язати систему рівнянь, важливо знати, чи існують її розв'язки, тобто чи буде вона сумісною. Щоб відповісти на це запитання, розглянемо дві матриці: головну матрицю A, складену з коефіцієнтів при невідомих системи рівнянь і розширену матрицю $\overline{A}$, утворену приєднанням до матриці A стовпця вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера—Капеллі. Для того щоб система рівнянь була сумісною (мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A}$:

$$rang(A)=rang(\overline{A})=r.$$

З теореми випливає, що в матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих, неодмінно існує мінор r-го порядку, відмінний від нуля, оскільки ранг цієї матриці дорівнює r.

Нехай, наприклад, це мінор, який складено з коефіцієнтів при перших r невідомих. Залишимо доданки з цими невідомими в лівій частині рівняння, а решту доданків перенесемо у праву частину. Усі рівняння системи після r-го відкинемо. Тоді система рівнянь набере вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n \end{cases}$$

Невідомі змінні $x_1, \ x_2, \dots, \ x_r$ називаються головними невідомими (змінними), а $x_{r+1}, \ x_{r+2}, \dots, \ x_n$ — вільними невідомими (змінними).

Головний визначник системи рівнянь (мінор r-го порядку) відмінний від нуля. За правилом Крамера така система рівнянь має єдиний розв'язок відносно головних невідомих $x_1, \ x_2, \dots, \ x_r$. Зрозуміло, що кожне з головних невідомих можна подати через вільні невідомі. Якщо вільним невідомим не надано конкретних числових значень, маємо так званий загальний розв'язок системи рівнянь . Надавши вільним невідомим деяких числових значень, дістанемо частинний розв'язок цієї системи. Зрозуміло, що частинних розв'язків системи в цьому разі безліч. Така система є сумісною, але невизначеною.

З теореми Кронекера—Капеллі випливає, що система рівнянь завжди сумісна: $rangA = rang\overline{A}$. Тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ завжди існує. Розглянемо матрицю А, складену з коефіцієнтів при невідомих. Нехай її ранг дорівнює r. Якщо r = n, то система має єдиний розв'язок, і він тривіальний. Якщо r < n, то система має також розв'язки, відмінні від тривіальних.

Отже, можна сформулювати твердження: система однорідних лінійних рівнянь має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\Delta(A) = 0$.

Нехай ранг матриці системи рівнянь r < n. Це означає, що матриця А має мінор r-го порядку, відмінний від нуля. Відповідно до загальної теорії систему рівнянь можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Розглянемо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \cdots & c_{1n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & & & \\ c_{n-r,r+1} & c_{n-r,r+2} & \cdots & c_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Узявши елементи і-го $(1 \le i \le n-r)$ рядка цього визначника за вільні невідомі і підставивши ці значення в систему , дістанемо n – r розв'язків системи рівнянь у вигляді $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}, c_{ir+1}, c_{ir+2}, \ldots, c_{in}$, i = 1, 2,..., n – r. Така система розв'язків однорідної системи рівнянь називається ***фундаментальною системою розв'язків***.

§ 3. Приклади

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Знайдемо ранги матриць A і $\overline{A}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Ліворуч від вертикальної риски маємо головну матрицю А. Вилучивши риску, дістанемо розширену матрицю $\overline{A}$. Такий запис запис дає змогу одночасно обчислювати ранги обох матриць за допомогою елементарних перетворень. З останнього перетворення випливає, що ранг матриці А дорівнює 2. Ранг матриці $\overline{A}$ дорівнює 3. Тобто $rang(A) \neq rang(\overline{A})$. За теоремою Кронекера—Капеллі така система не має розв'язків (несумісна).

Приклад 2. Розв'язати за допомогою теореми Кронекера—Капеллі систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останнього перетворення випливає, що $rang(A) = rang(\overline{A}) = 2$. Початкова система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}.$$

Серед мінорів другого порядку, складених з елементів матриці коефіцієнтів при невідомих, існує хоча б один відмінний від нуля. У нашому випадку їх кілька. Якщо відмінний від нуля мінор виберемо з коефіцієнтів при двох невідомих, то таким чином ми переведемо ці невідомі в розряд основних. Нехай, наприклад, це невідомі x_1, x_2. Тоді, перенісши решту невідомих у праву частину системи рівнянь, дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{cases}.$$

Головний визначник цієї системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Знайдемо Δ_1 і Δ_2.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

За правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{4} + \frac{7x_3}{4} + \frac{7x_4}{4}.$$

Останні рівності визначають загальний розв'язок системи рівнянь. Щоб дістати частинні розв'язки, достатньо надати вільним невідомим x3, x4, x5 деяких числових значень. Наприклад, якщо $x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0$ то маємо розв'язок $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)$;

якщо $x_3 = 2, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = -2$ то маємо відповідно розв'язок (3, 5, 2, 1, –2) і т. д. Таких частинних розв'язків у даному разі можна побудувати нескінченну кількість.

Останню систему рівнянь можна розв'язати і методом оберненої матриці, побудувавши обернену для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Справді, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, а тому:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5 \\ -\frac{1}{4} + \frac{7x_3}{4} + \frac{7x_4}{4} \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши відповідні елементи матриць, дістанемо попередній результат.

Приклад 3. Знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо ранг матриці А:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rang(A) = 2$. Залишаємо в системі останні два рівняння і переносимо доданки з вільними невідомими в праву частину системи:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \\ x_1 + 3x_2 = 5x_3 + 9x_4 - x_5. \end{cases}$$

Знаходимо загальний розв'язок: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 & -5 \\ 5x_3 + 9x_4 - x_5 & 3 \end{vmatrix} = 19x_3 + 3x_4 - 4x_5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \\ 1 & 5x_3 + 9x_4 - x_5 \end{vmatrix} = 7x_3 - 25x_4 + 4x_5;$$

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5,\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5.$$

Щоб знайти фундаментальну систему розв'язків, потрібно вибрати довільний відмінний від нуля визначник. Надамо йому найпростішого вигляду: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Беручи рядки цього визначника як значення вільних невідомих, дістанемо три розв'язки, які утворюють фундаментальну систему розв'язків:

$$\left(\frac{19}{8},\ \frac{7}{8},\ 1,\ 0,\ 0\right);\ \left(\frac{3}{8},\ \frac{-25}{8},\ 0,\ 1,\ 0\right);\ \left(\frac{-1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 1\right).$$

§ 4. Задачі для самостійного опрацювання

1. Знайти ранг матриць методом обвідних мінорів:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Дослідити залежно від значення λ ранг матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриць методом елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

Знайти загальні розв’язки і фундаментальні системи розв’язків таких систем рівнянь:

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0; \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0; \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

Розділ 5. ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

§ 1. Рівність векторів. Лінійні операції над векторами.

Величини, значення яких можуть бути відображені додатніми чи від'ємними числами (“скалярами”), називаються скалярними (маса, температура, робота і т.д.); величини, значення яких визначаються як числом так і напрямом в просторі, називаються векторними (сила, швидкість, прискорення, напруженість електричного та магнітного полів і т.д.).

Означення. Вектором називається напрямлений відрізок. Позначати вектори будемо $\vec{a}, \vec{b}$, ... Якщо, скажімо, точка А — початок вектора, а точка В — його кінець, то маємо $\overrightarrow{AB}$.

Означення. Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається нульовим вектором.

Вектор вважається *заданим*, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Означення. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються *рівними*, коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.

З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають вільними.

Нехай у просторі задано деяку вісь l і вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки А і В площини, перпендикулярно до осі l (рис. 1.). Позначимо точки перетину цих площин з віссю l відповідно і B'.

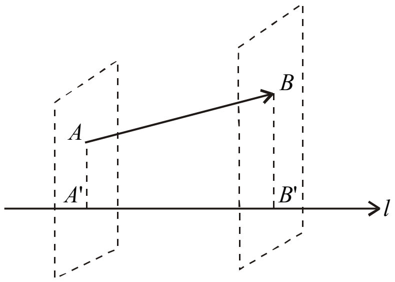


Рис. 1.

Означення. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\overrightarrow{A'B'}$ на осі l. Слід зазначити, що $A'B' = |\overrightarrow{A'B'}|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ збігається з напрямом l і $A'B' = -|\overrightarrow{A'B'}|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ протилежний напряму l.

Позначається проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l — $np_l\overrightarrow{AB}$. З рис.1. випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$np_l\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\varphi$ де φ — кут між вектором і віссю.

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку А(x_1, y_1, z_1) і кінця В (x_2, y_2, z_2) вектора $\overrightarrow{AB}$, то проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

Ox: $a_x = x_2 - x_1$, Oy: $a_y = y_2 - y_1$, Oz: $a_z = z_2 - z_1$.

Довжина вектора подається формулою:

$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

У подальшому називатимемо їх напрямними косинусами вектора $\vec{a}$. Піднісши кожну з формул до квадрата і скориставшись $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$, дістанемо:

cos2α + cos2β + cos2γ = 1.

Означення. Нехай вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями Ox, Oy, Oz і $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (рис. 2). Такі вектори надалі називатимемо *одиничними* векторами осей системи координат. Тоді вектор $\vec{a}$ можна розкласти на суму векторів, паралельним ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.}$

Скаляри a_x, a_y, a_z називаються прямокутними декартовими координатами вектора $\vec{a}$ в системі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$ в такій *координатній формі* зображують будь-який вектор $\vec{a}$.

У координатній формі вектори складають, віднімають й множать на скаляр як многочлени.

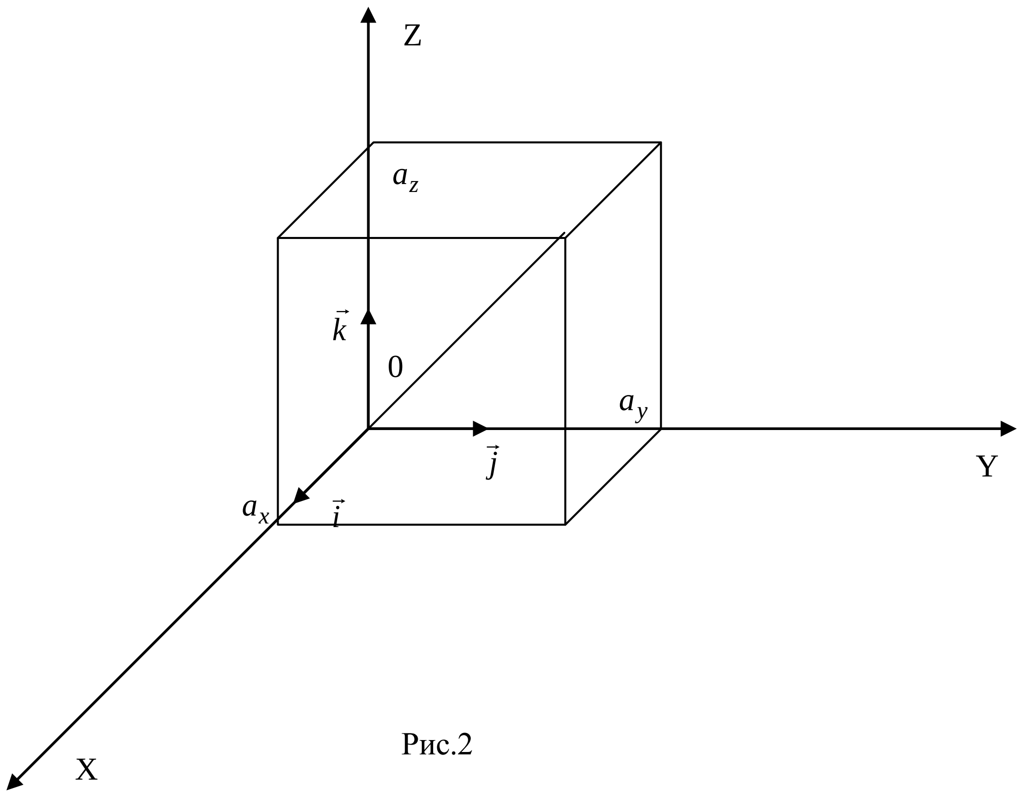


Рис.2

Дії з векторами виконуються за правилами:

1. Додавання:

$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\right)$.

2. Множення вектора на число $\alpha \in R$:

$\alpha\vec{a}=\left(\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z\right)$.

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
3. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$.
4. $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.
5. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

§ 2. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

1. *Відстань між двома точками.*

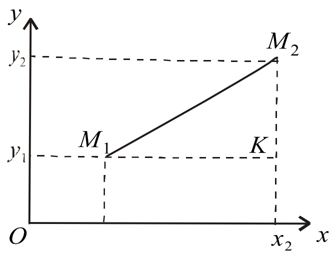


Рис. 3.

Нехай задано дві точки M_1 (x_1, y_1) і M_2 (x_2, y_2) (рис. 3.).

$|M_1K|=|x_2-x_1|, |M_2K|=|y_2-y_1|$.

Трикутник M_1M_2K — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$|M_1M_2|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

2. *Поділ відрізка у заданому відношенні.*

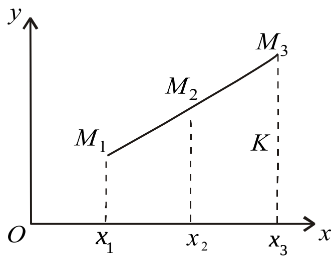


Рис. 4.

Число λ — називається відношенням, в якому точка M ділить відрізок M_1M_2 (рис. 4.), якщо $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$.

Нехай задано λ і координати точок $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, треба знайти координати точки M (x, y).

З рис. 4. і теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

$$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda .$$

Оскільки числа $x - x_1$ і $x_2 - x$ одного й того самого знака (при $x_1 < x_2$ вони додатні, а при $x_1 > x_2$ — від'ємні), то $\left|\frac{x - x_1}{x_2 - x}\right| = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Отже, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$.

Звідси:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогічно до попереднього дістанемо формулу для знаходження координати y

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Наслідок. Якщо точка M (x, y) — середина відрізка M_1 M_2, то $\lambda = 1$ і формули набирають вигляду:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. *Площа трикутника.*

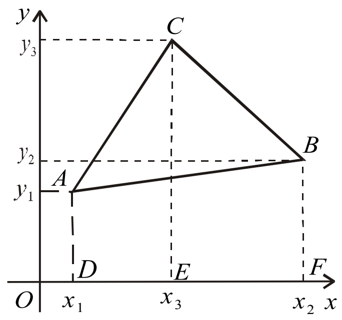


Рис. 5.

Нехай задано координати вершин деякого трикутника A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) (рис. 5.).

Знайдемо площу цього трикутника. З рисунка бачимо, що площу трикутника ABC можна знайти як $S_{\Delta ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}$. У правій частині формули стоять площі відповідних трапецій, які подаються формулами:

$$S_{ADEC} = |DE|\frac{|AD|+|CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2};$$

$$S_{BCEF} = |EF|\frac{|EC|-|BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = |DF|\frac{|AD|+|BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}.$$

Підставивши знайдені площі у вираз для площі трикутника, дістанемо:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)\right|.$$

Записавши останній вираз у вигляді визначника, дістанемо остаточну формулу:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$$

§3. Скалярний, векторний і змішаний добуток векторів

Означення. *Скалярним добутком* двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.Отже:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, де φ — кут між векторами. Використовуючи формулу проекції вектора, можна також записати:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,пр_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\,пр_{\vec{a}}\vec{b}$.

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

4. $(\vec{a}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2;\sqrt{(\vec{a})^2}=|\vec{a}|$.

5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ якщо $\vec{a}\perp\vec{b},$ і навпаки, $\vec{a}\perp\vec{b},$ якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0$.

Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ тоді, використовуючи властивості скалярного добутку, умови $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},$ маємо:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$

З рівності випливає, що:

1. *Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є виконання умови $a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z = 0$.

2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) довжина вектора $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
3. $\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

Знайдемо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$ або

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

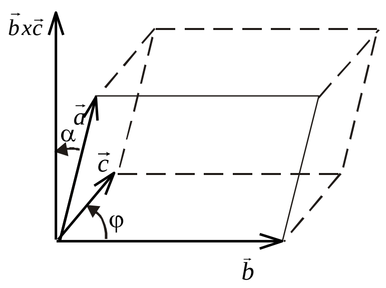


Рис. 6

Геометричний зміст змішаного добутку

Для цього побудуємо на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис. 6).

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ (рис. 6). Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ $s=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$.

Висота дорівнює $\left|\vec{a}\right|\cos\alpha$. Отже, остаточно маємо: $V=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha\cdot\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\sin\varphi=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\alpha=\left|\vec{a}\left(\vec{b}\times c\right)\right|$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Сформулюємо *умову компланарності* трьох векторів $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}$.

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$.

Ураховуючи формули знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$,

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

§ 4. Приклади

Приклад 1. Дано три точки A (1, 1, 1), B (2, 2, 1) і C (2, 1, 2). Знайти кут φ = ∠ BAC.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{AB}=(1,\ 1,\ 0)$, $\vec{AC}=(1,\ 0,\ 1)$. Згідно з формулою маємо: $\cos\varphi=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

$\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1}{2}$, отже, φ = 60°.

Приклад 2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ = (5, 2, 7), $\vec{b}$ = (1, 2, 4) як на сторонах.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Знайдемо $|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 8^2} = 2\sqrt{74}$ кв. од.

Приклад 3. У просторі задано чотири точки A (1, 1, 1), B (4, 4, 4), C (3, 5, 5), D (2, 4, 7). Знайти об'єм піраміди ABCD.

Розв'язання. З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди ABCD дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$\overrightarrow{AB}$ = (3, 3, 3), $\overrightarrow{AC}$ = (2, 4, 4), $\overrightarrow{AD}$ = (1, 3, 6);

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ куб. од.}$$

Приклад 4. Дано трикутник A (4, 1), B (7, 5), C (– 4, 7). Знайти площу трикутника, вершини якого містяться в точках перетину бісектрис трикутника зі сторонами (рис. 7).

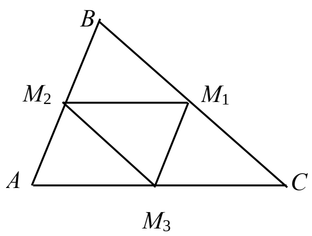


Рис. 7

Розв'язання. Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Знайдемо довжину відрізків AB, BC і AC за формулами:

$$AB=\sqrt{(4-7)^2+(1-5)^2}=5,\ BC=\sqrt{(7+4)^2+(5+7)^2}=15,\ AC=\sqrt{(4+4)^2+(1-7)^2}=10.$$

Знайдемо відношення, в яких основи бісектрис точки M_1, M_2, M_3 (рис. 7) поділяють відповідні відрізки:

$$\frac{|BM_1|}{|M_1C|}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2};\quad \frac{|AM_2|}{|M_2B|}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{3};\quad \frac{|AM_3|}{|M_3C|}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}.$$

Знайдемо відповідно координати точок M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3).

$$x_1=\frac{7-4\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{10}{3};\quad y_1=\frac{5+7\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{17}{3};\quad M_1\left(\frac{10}{3};\ \frac{17}{3}\right);$$

$$x_2=\frac{4+7\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{26}{5};\quad y_2=\frac{1+5\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{13}{5};\quad M_2\left(\frac{26}{5};\ \frac{13}{5}\right);$$

$$x_3=\frac{4-4\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=2;\quad y_3=\frac{1+7\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{2};\quad M_3\left(2;\ \frac{5}{2}\right).$$

Площу трикутника M_1 M_2 M_3 обчислимо за формулою для площі трикутника:

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{26}{5}-\frac{10}{3} & 2-\frac{10}{3}\\ \frac{13}{2}-\frac{17}{3} & \frac{5}{2}-\frac{17}{3}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{28}{15} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{46}{15} & -\frac{19}{6}\end{matrix}\right\|=50\ \text{кв. од.}$$

§ 5. Запитання для самоконтролю

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються рівними?
3. Лінійні операції над векторами.
4. Лінійно незалежні і лінійно залежні вектори.
5. Означення і властивості скалярного добутку векторів.
6. Вираз скалярного добутку через координати.
7. Довжина вектора і кут між векторами.
8. Умова перпендикулярності векторів.
9. Означення і властивості векторного добутку двох векторів.
10. Вираз векторного добутку через координати.

11. Змішаний добуток трьох векторів та його основні властивості.

12. Вираз змішаного добутку через координати.

§ 6. Задачі для самостійного опрацювання

1. Визначити відстань точки А (12, –3, 4) від початку координат і від осей координат.

2. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{g}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{g}$, коли відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{g}| = 3$, $(pg) = -\frac{\pi}{4}$.

3. Обчислити довжину вектора $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями.

4. Знайти $3\vec{m}^2 - 2(\vec{m}\vec{n}) + 4\vec{n}^2$, якщо $|m| = \frac{1}{3}$; $|\vec{n}| = b$; $\widehat{(mn)} = \frac{\pi}{3}$.

5. Знайти $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = 2\vec{m} - 4\vec{n}$; $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ $\widehat{(mn)} = \frac{\pi}{2}$.

6. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s}$, $\vec{g}$, якщо $\vec{a} = \vec{s} + 3\vec{g}$; $\vec{b} = 5\vec{s} - 4\vec{g}$ — взаємно перпендикулярні.

7. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 10\vec{m} - 2\vec{n}$ на напрям вектора $b = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ одиничні орти.

8. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$; $\vec{в} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 5$; $|n| = 1$ і $(mn) = 30^\circ$.

9. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $b = \vec{j} + \vec{k}$.

10. Обчисліть проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.

11. Обчислити об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

12. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{i} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, якщо його основа побудована на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

13. Дано вершини трикутника A (3, 2); B (–1, –1); C (11, –6). Знайти довжини його сторін і точку перетину медіан.

14. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3;-2),\ N(1;6),\ P(-4;2).$

15. Дано три вершини паралелограма $A(4;2), B(5;7), C(-3;4).$ Знайти четверту вершину D, яка протилежна вершині B.

16. Відрізок між точками A (3; 2); B (15; 6) поділити на п’ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.

17. Обчислити периметр і площу трикутника, якщо A (–2; 1); B (2, – 2); C (8, 6).

18. Дано трикутник A (4; 1), B (7, 5), C (– 4, 7). Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC.

Розділ 6. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

§ 1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай задано деяку пряму (рис. 8), знайдемо її рівняння.

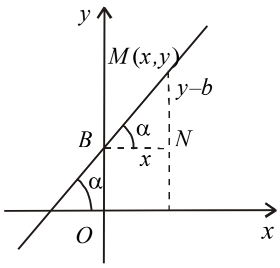


Рис. 8

Точка M (x, y) лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\frac{NM}{BN} = \mathrm{tg}\alpha .$$

Позначимо tg $\alpha = k$ і назвемо цю величину кутовим коефіцієнтом прямої лінії. Тоді, враховуючи, що $NM = y - b$, $BN = x$, маємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* $y = kx + b$.

§ 2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку

Нехай деяка точка M_1 (x_1, y_1) належить заданій прямій, тоді $y_1 = kx_1 + b$. Знайдемо з цього рівняння значення *b* і, підставивши його в рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, дістанемо:

$y - y_1 = k(x - x_1)$ — рівняння прямої, що проходить через задану точку M_1 (x_1, y_1).

§ 3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай ще одна точка M_2 (x_2, y_2) також належить заданій прямій, тоді з означення лінії маємо:

$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$.

Знайдемо значення k з останнього співвідношення і, підставивши його в рівняння прямої, що проходить через задану точку дістанемо: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Останнє рівняння називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.*

§ 4. Загальне рівняння прямої

У прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y.

$Ax + By + C = 0$, і навпаки, рівняння при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

Рівняння $Ax + By + C = 0$ називається *загальним рівнянням прямої лінії.*

Дослідимо це рівняння.

1. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ і останнє визначає пряму, що проходить через початок системи координат, бо точка O (0, 0) лежить на цій прямій.

2. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A} = a$, де a — довжина відрізка, що його пряма відтинає на осі Ox, а сама вона розміщена паралельно осі Oy, якщо C = 0, то x = 0 маємо рівняння самої осі Oy.

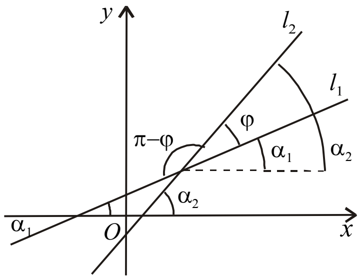
3. $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, тоді $By + C = 0$, або $y = -\frac{C}{B} = b$, де b — довжина відрізка, що відтинає пряма на осі Ox, при c = 0 маємо y = 0 — рівняння осі Ox.

§ 5. Кут між двома прямими

Розглянемо дві прямі l_1: $y = k_1x + b_1$ і l_2: $y = k_2 x + b_2$.

Означення. Кутом між прямим l_1 і l_2 називається такий кут φ, поворот на який від першої прямої до другої відносно точки їх перетину до суміщення цих прямих відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Зауважимо, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1. Пригадуючи, що tg $\alpha_1 = k_1$; tg $\alpha_2 = k_2$, а також, що виконується очевидне співвідношення між кутами $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 9), маємо: $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2\alpha_1} = \mathrm{tg} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$.



(рис. 9)

Якщо кут φ — це кут між l_1 і l_2, то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \varphi$.

§ 6. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

З формули для кута між двома прямими легко дістати умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

1) Якщо $l_1 \parallel l_2$, кут φ між ними дорівнює нулю — маємо: $\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$.

2) Якщо $l_1 \perp l_2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2} + \alpha_1$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1}.$$

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$

§ 7. Відстань від точки до прямої

Нехай задано деяку точку M_0 (x_0, y_0) і пряму l: Ax + By + C = 0. Пересвідчимось, що M_0 не лежить на прямій, $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$, тоді відстань від точки M_0 (x_0, y_0) до прямої Ax + By + C = 0 можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

§ 8. Рівняння прямої у відрізках

Розглянемо пряму, що перетинає обидві координатні осі і не проходить через початок координат.

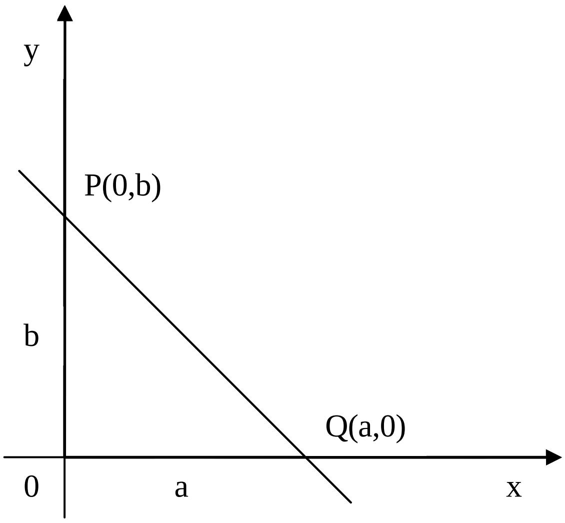


Рис.10

Її положення можна визначити, якщо задати величини відрізків *a*,*b*, які відтинає пряма відповідно на осях Ox та Oy. Знайдемо рівняння цієї прямої. Для цього скористаємося загальним рівнянням прямої Ax + By + C = 0 . Знайдемо коефіцієнти A, B, C, тобто виразимо їх через *a*,*b*. Оскільки точка Q лежить на прямій, то її координати задовольняють загальне рівняння прямої, тобто

$$Aa + C = 0 \Rightarrow \frac{A}{C} = -\frac{1}{a} \quad (1)$$

Аналогічно координати точки P задовольняють теж загальне рівняння прямої:

$$Bb + C = 0 \Rightarrow \frac{B}{C} = -\frac{1}{b} \quad (2)$$

Розділимо рівняння Ax + By + C = 0 на C:

$\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1=0$, в дане рівняння підставимо значення виразів (1) та (2), маємо:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$— утворене рівняння є *рівнянням прямої у відрізках*.

§ 9. Приклади

Приклад 1. Пряму задано рівнянням 3x – 5y + 15 = 0. Перевірити, які з точок А (– 2, 3), В (0, 3), С (5, 6), належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

Розв’язання. Для перевірки того, чи лежать точки А, В, С на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

А: $3(-2)-5\cdot3+15\neq0$, В: $3\cdot0-3\cdot5+15=0$, С: $3\cdot5-5\cdot6+15=0$.

Таким чином, точка А не лежить на прямій, а точки В і С лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при у: $\frac{3}{5}x-y+3=0$, а далі запишемо його у вигляді $y=\frac{3}{5}x+3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$\frac{3x}{15}-\frac{15y}{15}+1=0$, або $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$, дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Приклад 2. Дано дві вершини трикутника А (2, – 3), В (5, 1), рівняння сторони ВС: x + 2y – 7 = 0 і медіани АМ: 5x – y – 13 = 0. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини С, обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині А.

Розв’язання. Нехай вершина трикутника С (x_1, y_1). Тоді точка з координатами $x_2=\frac{5+x_1}{2}, y_2=\frac{1+y_1}{2}$ лежить на медіані, тобто виконується рівність $5\left(\frac{5+x_1}{2}\right)-\frac{1+y_1}{2}-13=0$. Крім того, точка С лежить на прямій ВС. Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат (x_1, y_1):

$$\begin{cases}5x_1-y_1-2=0\\ x_1+2y_1-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=3\end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих AB і AC, використовуючи рівняння прямої, що проходить через одну точку, маємо:

$$AB:\ \frac{y+3}{1+3}=\frac{x-2}{5-2}\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{17}{3};\quad AC:\ \frac{y+3}{3+3}=\frac{x-2}{1-2}\Rightarrow y=-6x+9.$$

Висота проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB. Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{4}$. Використаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом знайдемо рівняння висоти:

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-1)\Rightarrow 3x+4y-15=0.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки C(1, 3) до прямої AB.

$$h=\frac{|4\cdot 1-3\cdot 3-17|}{\sqrt{16+9}}=\frac{22}{5}=4{,}4.$$

Щоб обчислити кут A, скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими:

$$\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-6-\frac{4}{3}}{1-6\cdot\frac{4}{3}}=\frac{22}{21};\ \hat{A}=\operatorname{arctg}\frac{22}{21}.$$

Приклад 3. Паралельні прямі проходять відповідно через точки O(0, 0) і M(1, 3). Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$.

Розв'язання. Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому згідно з (2.15) рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді $y=kx, y-3=k(x-1)$ Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад$(1,k)$. Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:

$$\sqrt{5}=\frac{|k-k-k+3|}{\sqrt{1+k^2}},$$

звідки знайдемо $k_1=-2, k_2=-\frac{1}{2}$ Рівняння прямих: $y=-2x; 2x+y-5=0$ або $y=\frac{1}{2}x;\ x-2y+5=0$

Приклад 4. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x+7y-6=0 i 5x-5y+1=0$ Розв'язання. Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай М(х, у) — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$$\frac{|x+7y-6|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|5x-5y+1|}{\sqrt{25+25}}.$$

Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x+7y-6=5x-5y$ *і* $x+7y-6=-5x+5y+1$або, після перетворень: $4x-12y+7=0, 6x+2y-5=0$

§ 10. Запитання для самоконтролю

1. Загальне рівняння прямої.
2. Як знайти кут між прямими? Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки; рівняння прямої у відрізках і рівняння прямої, що проходить через задану точку.
4. Як знайти відстань від точки до прямої?

§ 11. Задачі для самостійного опрацювання

1. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо у = 3х + 5 — рівняння гіпотенузи, А (4, – 1) — вершина прямого кута.

2. Дано вершини трикутника А (4; 6), В (– 4; 0), С (– 1; – 4). Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини С; в) бісектриси кута В; г) висоти, опущеної з вершини А.

3. Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7}; -\frac{3}{28}\right)$, $B(4,\ 3)$, $C(2,\ -1)$. Обчислити довжини його висот.

4. На осі абсцис знайти точку, яка міститься на відстані a від прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

5. З точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

6. Дано дві вершини трикутника A (– 6; 2), B (2; – 2) і H (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю Ox удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x-3y+4=0$.

8. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника y = 3; x – y + 4 = 0. Скласти рівняння основи, якщо вона проходить через початок системи координат.

9. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо A(2; – 4) — його вершина, M(5; 2) — точка перетину діагоналей.

10. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо A(3; 5), B(6; 1) — його вершини, M(4; 0) — точка перетину медіан.

11. Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок AB, A(– 3; 2), B(5; – 2) навпіл і утворює з відрізком AB кут, удвічі більший, ніж із віссю Ox.

12. Через точку A(5; 2) провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

13. Знайти дотичні до кола $x^2+y^2=29$, що проходить через точку A(7; –3).

14. У трикутнику A(1; 2), B(3; 7), C(5; – 13) обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини A.

15. Знайти рівняння прямої, паралельної прямій 12x + 5y – 52 = 0, що міститься від неї на відстані 2 лін. од.

16. Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими $4x-6y=3,\ 2x-3y=-7$.

17. Знайти точку, симетричну точці A(– 2; – 9) відносно прямої $2x+5y=38$.

18. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма x – y = 1, x – 2y = 0, M(3; – 1) — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.

Розділ 7. ПЛОЩИНА

§ 1. Загальне рівняння площини

Нехай задано прямокутну систему координат Oxyz, площину α, вектор $\vec{N} \perp \alpha$, який має координати $\vec{N} = (A,\ B,\ C)$, і точку $M_0(x_0, y_{0,}\ z_0)$, яка належить площині (рис. 11). Точка М (x, y, z) — довільна точка площини. Ця точка належить площині лише в тому разі, коли вектори $\overrightarrow{M_0 M}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні. Умова перпендикулярності векторів $\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{N} = 0$.

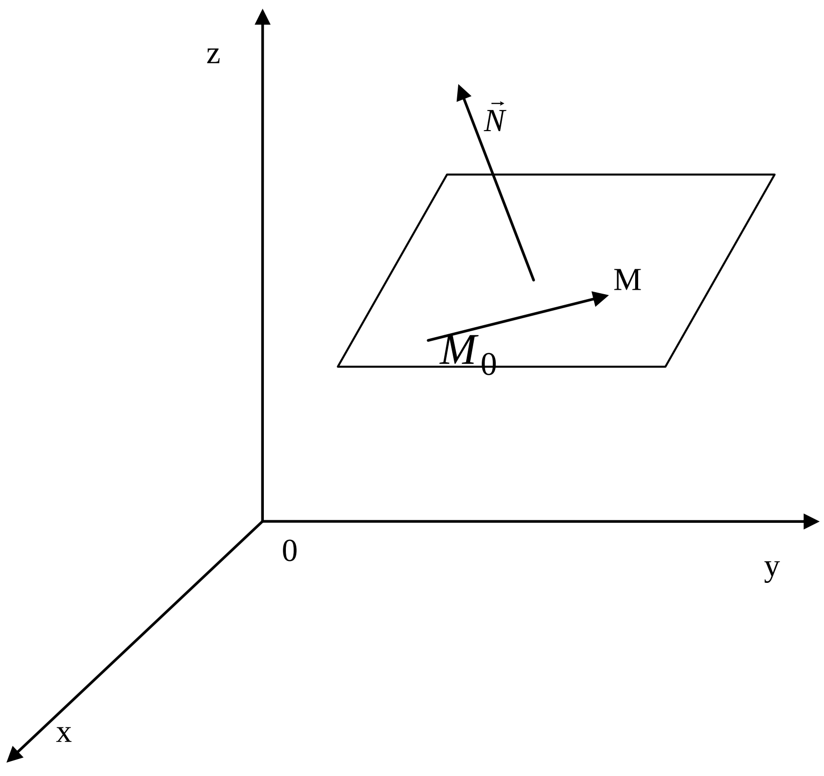


рис.11

Останній вираз можна розглядати як векторне рівняння площини. Координати вектора $\overline{M_0 M}$ дорівнюють відповідно x – x_0, y – y_0, z – z_0. Записавши вираз

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$ у розгорнутому вигляді, дістанемо рівняння площини, що проходить через задану точку:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$

Розкривши дужки в формулі і позначивши $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, дістанемо загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0.$

§ 2. Дослідження загального рівняння площини

Розглянемо тепер, як розміщена площина α відносно системи координат Oxyz залежно від значень коефіцієнтів у рівнянні загального рівняння площини.

1. Нехай D = 0. У цьому випадку рівняння набирає вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Точка O (0, 0, 0) задовольняє це рівняння, тобто належить площині. Це означає, що площина проходить через початок системи координат.

2. Нехай один із коефіцієнтів при змінних дорівнює нулю. Припустимо C = 0, A ≠ 0, B ≠ 0, D ≠ 0. Тоді рівняння набирає вигляду $Ax + By + D = 0$. Нормальний вектор $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ перпендикулярний до осі Oz, оскільки його проекція на цю вісь дорівнює нулю. Отже, площина α паралельна цій осі. Якщо ще і D = 0, то площина $Ax + By = 0$ містить вісь Oz, тому що паралельна їй і проходить через початок системи координат. Аналогічно можна розглянути випадки A = 0, B ≠ 0, C ≠ 0 і A ≠ 0, B = 0, C ≠ 0.

3. Розглянемо тепер випадок, коли два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю. Нехай A = B = 0, C ≠ 0, D ≠ 0. Тоді площина Cz + D = 0 згідно з попереднім паралельна відразу осям Ox і Oy, а це означає, що вона паралельна площині Oxy і, як наслідок, перпендикулярна до осі Oz. Якщо додатково і D = 0, то z = 0 — рівняння координатної площини Oxy. Аналогічно можна розглянути випадки A ≠ 0, B = C = 0 і B ≠ 0, A = C = 0.

§ 3. Рівняння площини в відрізках

Розглянемо загальне рівняння площини Ax + By+ Cz + D = 0, коли всі його коефіцієнти і вільний член відмінні від нуля. Поділимо обидві частини рівняння на $D \neq 0$ і запишемо його у вигляді

$$\frac{x}{D/A}+\frac{y}{D/A}+\frac{z}{D/C}+1=0$$

Позначимо $\frac{D}{A}=-a;\ \frac{D}{B}=-b;\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}=-c.$ Тоді:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad \text{(a)}$$

Рівняння площини у вигляді (а) називається рівнянням у відрізках.

Знайдемо точки перетину площини з координатними осями:

на осі абсцис y = z = 0, тоді x = a,

на осі ординат x = z =0, тоді y = b,

на осі аплікат x = y = 0, тоді z = c.

Таким чином, площина, задана рівнянням у відрізках выдтинає на координатних осях відповідно відрізки a, b і c.

Якщо потрібно побудувати площину, задану рівнянням, то зручно це рівняння записати у відрізках на осях. Тоді по точках M_1 (a, 0, 0), M_2 (0, b, 0) і M_3 (0, 0, c) легко побудувати площину.

§ 4. Рівняння площини, що проходить через три дані точки

Нехай дано три точки M_1 (x_1 y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), M_3(x_3,y_3,z_3), що не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину, яка проходить через них. Знайдемо рівняння цієї площини.

Візьмемо довільну точку простору M (x, y, z) (рис.12) і побудуємо вектори:

$$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1).$$

Точка M (x, y, z) належить шуканій площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, і \; \vec{c}$ лежать у цій площині, тобто коли вони компланарні.

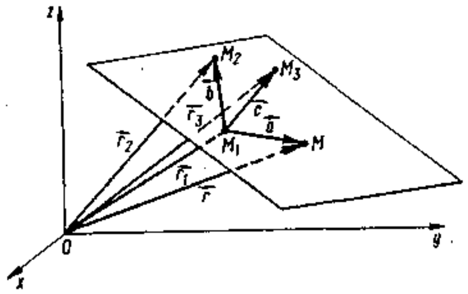


Рис.12

Отже, мішаний добуток цих векторів повинен дорівнювати нулю:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

Запишемо цей добуток через координати векторів, які перемножаються.

Маємо:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_3 \end{vmatrix} \quad (c)$$

Рівняння (с) називається рівнянням площини, що проходить через три дані точки, у координатній формі.

§ 5. Рівняння площини, що проходить через дану точку паралельно двом даним векторам

Нехай задано точку M_0 (x_0, y_0, z_0) і два неколінеарних (не паралельних) вектори a і e. Ці умови геометрично однозначно визначають площину, що проходить через задану точку паралельно заданим векторам. Знайдемо рівняння площини.

Рівняння площини, що проходить через точку M_0, грунтуючись на загальному рівняння площини, запишемо у вигляді;

A(x – x_0) + B(y – y_0) + C(z – z_0) =0, де $\vec{n}$ = (A, B, C) — вектор, перпендикулярний до даної площини, або нормальний вектор площини .

За умовою площина паралельна векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отже, нормальний вектор площини можна виразити через векторний добуток даних векторів $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Якщо позначити радіуси-вектори точок M і M_0 відповідно через $\vec{r}$ *і* $\vec{r}_0$, то рівняння A(x – x_0) + B(y – y_0) + C(z – z_0) =0 можна записати у вигляді $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$,звідки $\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0)$,але $\vec{n} \perp \vec{a}$ і $\vec{n} \perp \vec{b}$. Отже, вектори $\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}$ і $\vec{b}$ лежать в одній площині, тобто;

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ (к)

Вираз (к) є векторною формою рівняння площини, що проходить через дану точку паралельно двом даним векторам.

Рівняння заданої площини у координатній формі має вигляд :

$$a_y b_z - a_z b_y \left(x - x_0\right) + (a_z b_x - a_x b_z)(y - y_0) + \left(a_x b_y - a_y b_z\right)(z - z_0) = 0$$

§ 6. Кут між площинами, відстань від точки до площини

Розглянемо дві площини α і β, які задано відповідно рівняннями

α: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$,

β: $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

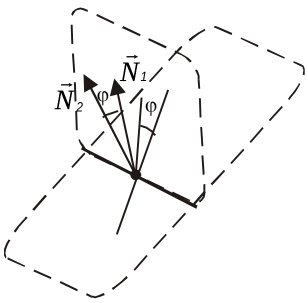


Рис. 13

Двогранний кут φ між площинами α і β дорівнюватиме куту між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, перпендикулярними до цих площин (рис. 13), тому $\cos\varphi = \dfrac{\vec{N}_1 \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \left|\vec{N}_2\right|}$.

Якщо площини взаємно перпендикулярні, то $\cos\varphi = 0$ і, розкривши скалярний добуток у формулі дістанемо *умову перпендикулярності двох площин*:

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Якщо площини α і β паралельні між собою, то їхні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ — колінеарні, а отже, відповідні координати пропорційні, і ми маємо *умову паралельності двох площин:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

За аналогією з формулою знаходження відстані від точки до прямої на площині можна записати формулу знаходження *відстані від точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до площини* $Ax + By + Cz + D = 0$. Вона набирає вигляду $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

§ 7. Запитання для самоконтролю

1. Площина, кут між двома площинами, відстань від точки до площини.
2. Пряма у просторі, різні форми рівняння прямої у просторі.
3. Пряма і площина, їх взаємне розміщення, точка перетину прямої і площини, кут між прямою і площиною

§ 8. Приклади

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M_1 (1, – 1, 0),M_2 (2, 1, – 3), M_3 (– 1, 0, 1).

Розв’язання. Запишемо рівняння площин, які проходять, скажімо, через точку M_1.

$A(x-1) + B(y+1) + Cz = 0$.

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ лежать у шуканій площині, тому їх векторний добуток буде перпендикулярним до шуканої площини. Координати векторного добутку вважатимемо координатами вектора:

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Таким чином, A = 5; B = 5; C = 5 і шукане рівняння набирає вигляду 5 (x – 1) + 5 (y + 1) + 5 z = 0, або після перетворення, x + y + z = 0.

Приклад 2. Записати рівняння площин, що проходять: 1) паралельно площині Oxz і через точку (2, – 5, 3); 2) через вісь Oz і точку (–3, 1, – 2); 3) паралельно осі Ox і через точки (4, 0, – 2) і (5, 1, 7).

Розв'язання. 1) Рівняння шуканої площини By + D = 0 або $y = -\frac{D}{B}$. Точка (2, – 5, 3) лежить у площині, тобто задовольняє останнє рівняння: $-5 = -\frac{D}{B}$; остаточно маємо: y = – 5, або y + 5 = 0.

2) Рівняння шуканої площини Ax + By = 0 або $x + \frac{B}{A}y = 0$.

Підставимо координати точки (–3, 1, –2) у це рівняння $-3 + \frac{B}{A} = 0,\ \frac{B}{A} = 3$. Остаточно рівняння шуканої площини набирає вигляду x + 3y = 0.

3) Рівняння площини, паралельної осі Ox, має вигляд: By + Cz + D = 0. Підставляючи в нього почергово координати точок (4, 0, – 2) і (5, 1, 7), дістаємо систему

$$\begin{cases} -2C + D = 0 \\ B + 7C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = 2 \\ \frac{B}{C} + \frac{D}{C} = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = 2 \\ \frac{B}{C} = -9 \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння має вигляд 9y – z – 2 = 0.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки (0, 0, 1) і (3, 0, 0) і утворює кут $\frac{\pi}{3}$ з площиною Oxy.

Розв'язання. Запишемо рівняння шуканої площини у загальному вигляді: Ax + By + Cz + D = 0, рівняння площини Oxy – z = 0, її нормальний вектор $\vec{N}_1 = (0,0,1)$. Підставляючи координати точок, що лежать у шуканій площині дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C+D=0 \\ 3A+D=0 \\ \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C}=-1 \\ \dfrac{A}{C}=-\dfrac{1}{3} \\ \left(\dfrac{A}{C}\right)^2+\left(\dfrac{B}{C}\right)^2+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C}=-1 \\ \dfrac{A}{C}=-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{B}{C}=\dfrac{\pm\sqrt{26}}{3} \end{cases}$$

Підставимо в рівняння знайдені значення і після перетворень рівняння шуканої площини подамо у вигляді $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$.

Приклад 4. Через точку М (– 5, 16, 12) провести дві площини: одна з них проходить через вісь Ох, друга — через вісь Оу. Знайти кут між цими площинами.

Розв’язання. Рівняння площини, що проходить через вісь Ox: $B_1y + C_1z = 0$, що проходить через вісь Oy: $A_2x + C_2z = 0$. З умови проходження їх через точку М маємо: 3y – 4z = 0 і 12x + 5z = 0.

З формули дістаємо:

$$\cos\varphi = \frac{-20}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{144+25}} = -\frac{4}{13}, \quad \varphi = \pi - \arccos\frac{4}{13}.$$

§ 9. Задачі для самостійного опрацювання

1. Записати рівняння площини, паралельної площині Оху, що проходить через точку (2, – 5, 3).

2. Скласти рівняння площини, якщо відстань її від трьох точок А (6, 1, – 1), В (0, 5, 4) і С (5, 2, 0) дорівнює відповідно 1, 2, 0.

3. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від двох площин:
x + 4y – 3z – 2 = 0 і 5x + z + 8 = 0.

4. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

5. Дано дві точки А(1; 3; – 2), В(7; – 4; 4). Записати рівняння площини, що проходить через точку В перпендикулярно до $\overrightarrow{AB}$ і знайти її відстань від точки А.

6. Через вісь Oz провести площину, що утворює кут 60° з площиною $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$.

7. На відстані трьох одиниць від площини $3x-6y-2z+14=0$ провести паралельну їй площину.

8. Через точку (2, – 5, 3) провести пряму, паралельну прямій $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$

Розділ 8. ПРЯМА В ПРОСТОРІ

§ 1. Канонічне рівняння прямої у просторі

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — не колінеарні. Система називається *загальним рівнянням прямої*. Дістанемо ще деякі форми рівняння прямої.

Канонічне рівняння прямої. Нехай у системі координат Oxyz задано пряму l і ненульовий вектор $\vec{s}$, колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор $\vec{s} = (m,\ n,\ p)$. Тоді довільна точка M (x, y, z) лежатиме на прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (f)$$

Рівняння (*f*) називається канонічним рівнянням прямої у просторі.

§ 2. Параметричне рівняння прямої у просторі

У рівнянні прямої (*f*) позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Звідси дістаємо:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Параметричне рівняння прямої в просторі.

§ 3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай дві точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$ у рівнянні (*f*), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

§ 4. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих, кут між двома прямими

Для знаходження кута між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{і}\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

З останньої формули випливає *умова перпендикулярності* двох прямих

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

а умову *паралельності двох прямих* дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

§ 5. Відстань від точки до прямої

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

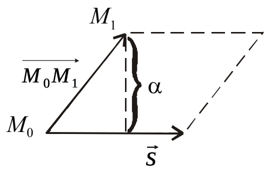


Рис. 14

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$ (рис. 14). Відомо площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Доходимо висновку, що шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

§ 6. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax+By+\ Cz+D=0$ у просторі.

Якщо $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$, то *пряма перпендикулярна* до площини,

а коли $Am+Bn+Cp=0$, *пряма паралельна* площині.

Нехай $Am+Bn+Cp\neq 0$. Знайдемо *координати точки перетину площини і прямої*.

Перейдемо до канонічного рівняння прямої $x=x_0+mt,\ \ y=y_0+nt,\ \ z=z_0+pt$

і підставимо значення x, y, z у рівняння площини:

$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0.$

Звідси, використовуючи умову непаралельності, знайдемо значення параметра

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Координати точки перетину:

$$x = x_0 + mt^*, \quad y = y_0 + nt^*, \quad z = z_0 + pt^*.$$

§ 7. Кут між площиною і прямою.

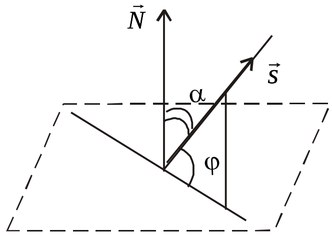


Рис. 15

Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину (рис. 15). Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ — перпендикулярний до площини, а кут α, який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90°. Тобто α + φ = 90°.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|}.$$

Якщо $\alpha < 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos(90 - \varphi) = \sin\varphi$, а якщо $\alpha > 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos(90 - \varphi) = -\sin\varphi$, у будь-якому разі $\sin\varphi = |\cos\alpha|$. Отже, $\sin\varphi = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.

§ 8. Запитання для самоконтролю

1. Площина, кут між двома площинами, відстань від точки до площини.

2. Пряма у просторі, різні форми рівняння прямої у просторі.

3. Пряма і площина, їх взаємне розміщення, точка перетину прямої і площини, кут між прямою і площиною.

§ 9. Приклади

Приклад 1. Знайти канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Розв’язавши систему рівнянь, знайдемо: x = 10z – 9; y = 19 – 17z. Покладаючи $z_0 = 1$, дістаємо $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Точка A (1, 2, 1) належить шуканій прямій. За формулою обчислюємо компоненти напрямного вектора m = – 10, n = 17, p = – 1. Отже, рівняння шуканої прямої має вигляд: $\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-2}{-1}$.

Приклад 2. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

Розв’язання. Знайдемо напрямний вектор шуканої прямої. Оскільки пряма лежить у площині Oxz, її напрямний вектор перпендикулярний до осі Oy, тобто $\vec{s} = (m,\ 0,\ p)$. З умови перпендикулярності маєм 3m + p = 0, отже, m = 1, p = – 3. Шукане рівняння має вигляд: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$.

Приклад 3. Знайти проекцію точки A (4, –3, 1) на площину x + 2y – z – 3 = 0.

Розв’язання. Знайдемо рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A на площину. Вектор $\vec{N} = (1,\ 2,\ -1)$ перпендикулярний до площини, тому його можна взяти за напрямний вектор перпендикуляра. Маємо рівняння перпендикуляра: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Знайдемо тепер точку перетину цього перпендикуляра з площиною. Перейдемо до параметричного рівняння

x = 4 + t; y = – 3 + 2t; z = 1 – t і підставимо в рівняння площини:

$$4 + t + 2(-3 + 2t) - (1 - t) - 3 = 0.$$

Отже, $t^* = 1$. Підставляємо знайдене значення t* в параметричне рівняння й дістаємо координати проекції (5, – 1, 0).

Приклад 4. Знайти відстань точки M (7, 9, 7) до прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

Для знаходження відстані скористаємось формулою. Точка А (2, 1, 0) лежить на даній прямій; $\overrightarrow{AM} = (5,8,7)$. Далі маємо:

$$\overrightarrow{AM} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 18\vec{j} - 17\vec{k}; \quad \left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{s}\right| = \sqrt{638}.$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{29} \; d = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \sqrt{22}.$$

Приклад 5. Обчислити відстань між прямими

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \text{ і } \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

Розв'язання. Відстань між двома прямими обчислимо як відстань від першої з прямих до площини, яка паралельна цій прямій і проходить через другу пряму. Нехай $Ax + By + Cz + D = 0$ — шукана площина, дістаємо:

$$\begin{cases} 4A - B - 7C + D = 0 \\ 8A - 3B + 3C = 0 \\ 4A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -4 \\ C = -12 \\ D = -100. \end{cases}$$

Рівняння площини має вигляд 3x – 4y – 12z – 100 = 0. Відстань від точки (– 3, 6, 3) до площини знайдемо за відомою формулою:

$$d = \frac{|3(-3) - 4 \cdot 6 - 12 \cdot 3 - 100|}{\sqrt{9+16+144}} = 13.$$

Приклад 6. Знайти умову перетину двох прямих у просторі.

Розв'язання. Нехай рівняння прямих задано в канонічній формі

$$\frac{x+x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x+x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Розв'язання. Прямі будуть перетинатися тоді і тільки тоді, коли вони лежать в одній площині і непаралельні. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1 = (m_1,\ n_1,\ p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2,\ n_2,\ p_2)$. Умовою того, що прямі лежать у одній площині, є компланарність цих векторів. Умова перетину двох прямих у просторі:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

§ 10. Задачі для самостійного опрацювання

1. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки А(2; 3; 1) на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

2. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ і $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

3. Чи лежить пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на площині 4x + 3y – z + 8 = 0.

4. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-3}$ на площину x – y + 3z + 8 = 0.

5. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки (3, 2, 6).

6. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, що не перетинаються $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

7. Записати рівняння площини, що проходить через точку А(3; 1; – 2) і через пряму $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

8. Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки А(– 3; 2; 5) на площини $4x+y-3z+13=0$ та x – 2y + z – 11 = 0.

9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку А(4; – 3; 1) і паралельна прямим: $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ і $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$.

10. Через точку А(1; 0; 7) паралельно площині $2x-y+2z=15$ провести пряму так, щоб вона перетинала пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{1}$.

11. Знайти точку, симетричну точці А(4; 3; 10) відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Розділ 9. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§ 1.Еліпс.

Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величина стала й така, що дорівнює 2а і більша, ніж відстань між фокусами, називається еліпсом.

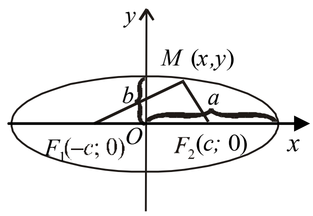


Рис. 16

На рис. 16 зображено F_1 (–с, 0), F_2 (с, 0) — фокуси еліпса, М (х, у) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1|+|MF_2|=2a,$ причому 2с < 2а $\Rightarrow$

а > с.

Тоді $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ —– канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння еліпса.

Якщо х = 0, у = ± b, тобто точки (0, b) і (0, – b) є точками перетину еліпса з віссю Оу. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При у = 0, х = ± а і відповідно (а, 0); (– а; 0) є точками перетину еліпса з віссю Ох. Відрізок завдовжки а — велика піввісь еліпса. З парності виразу рівняння еліпса за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ох і Оу. На рис. 16 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$; за означенням с < а і ε∈[0, 1).

Оскільки $\varepsilon^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$, то $\dfrac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

З останньої рівності випливає *геометричний зміст ексцентриситету*, який полягає в тому, що він характеризує ступінь витягнутості еліпса. Так, при $\varepsilon=0\Rightarrow a=b$

маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ох.

§ 2.Гіпербола.

Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює 2а і менша за відстань між фокусами, називається гіперболою.

Скористаємось рис. 17, з якого бачимо, що точки F_1 (– c, 0) і F_2 (c, 0) — фокуси гіперболи, точка М (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left\|MF_1\right| - \left|MF_2\right\| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = c^2 - a^2$.

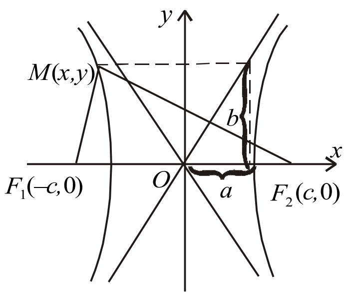


Рис. 17

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Оу. При у = 0; х = ± а і точки (–а, 0); (а, 0) — точки перетину з віссю Ох. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm\frac{b}{a}x$, які далі називатимемо асимптотами гіперболи. Враховуючи симетрію відносно осей Ох і Оу, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 17.

Відрізки завдовжки *b* і *a* називають відповідно уявною і дійсною осями гіперболи.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але с > а і ε >1. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ох.

Дві прямі, рівняння яких $x=-\frac{a}{\varepsilon}$; $x=\frac{a}{\varepsilon}$, називаються директрисами еліпса і гіперболи. Для еліпса $0\le\varepsilon<1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon}>a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Оу і проходять зовні еліпса. Для гіперболи ε > 1 і відношення $\frac{a}{\varepsilon}<a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Оу і лежать між вітками гіперболи.

§ 3. Парабола.

Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою, є парабола.

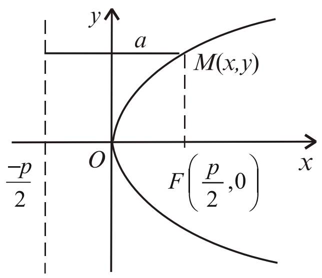


Рис. 18

За означенням $r = d$, отже (див. рис. 18):

$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$, або $y^2 = 2px$ — канонічне рівняння параболи, коли ε = 1. Парабола симетрична осі Ох, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 18.

§ 4. Коло

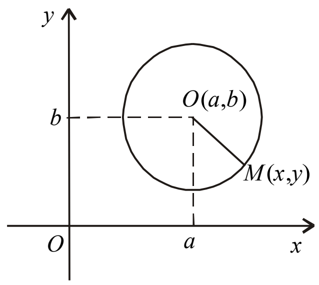


Рис. 19

До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається колом (рис. 19).

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається колом. За означенням ОМ = R або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

§ 5. Приклади

Приклад 1. Дано еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$, через точку А (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

Розв’язання. Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння прямої через кутовий коефіцієнт: (y – 1) = k (x – 1). Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку А. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв’язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ y-1=k(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+9k^2)x^2+18k(1-k)x+9(1-k)^2-36=0 \\ y=kx+1-k. \end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом (x_1, y_1), (x_2, y_2) мають задовольняти рівності: $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ і $\frac{y_1+y_2}{2}=1$. З теореми Вієта і останньої умови маємо: $\frac{18(k-1)k}{4+9k^2}=2$ звідки $k=\frac{-4}{9}$. Шукане рівняння хорди набирає вигляду $y-1=-\frac{4}{9}(x-1)$ або 4x + 9y – 13 = 0.

Приклад 2. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку А (6; 9), якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;

2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2};\ x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;

3) ексцентриситет дорівнює ε = 2, а уявна піввісь b = 3;

4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$.

Розв'язання.

1) Координати фокусів F_1 (– с; 0); F_2 (с; 0), тому з умови 2с = 8; с = 4, відстань між директрисами $6=\frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon=\frac{a}{c}$ маємо: а = 12, b = c – a = 4. Остаточно $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то a = b. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ маємо $\varepsilon=\sqrt{2}$ і a = 6; b = 6. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ звідки $a=\sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) Точка А належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$, або $b=\frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\ \ a^2=\frac{171}{25},\ \ b^2=19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1$

Приклад 3. Знайти умову, за якої пряма y = kx + b дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язання. Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Виключаючи *x* із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Воно має єдиний розв’язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p(p - 2bk) = 0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

Приклад 4. Записати рівняння лінії центрів двох кіл $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

Розв’язання. Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25$, або $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$,

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 36$, або $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

Отже, координати центра першого кола C_1 (3; – 4), а другого — C_2 (– 1; 6). Скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві точки, знайдемо інше рівняння:

$$\frac{y+4}{6+4} = \frac{x-3}{-1-3}.$$

$5x + 2y - 7 = 0$ — шукане рівняння центрів кіл.

§ 6. Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення кола, еліпса, гіперболи та параболи. Запишіть їх канонічні рівняння. Який зміст мають величини, що входять в ці рівняння?
2. Що є полярною системою координат? Як здійснюється перехід від полярної системи координат до декартової і навпаки?

§ 7. Задачі для самостійного опрацювання

1. Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2-8x+6y+21=0$.

2. Записати рівняння дотичних, проведених із початку системи координат до кола $x^2+y^2-10x-4y+25=0$.

3. На еліпсі $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

4. Еліпс проходить через точку $P\left(3,\frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої 4x + 5y – 25 = 0. Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.

5. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами A(7; 7), B(0; 8), C(– 2; 4).

6. Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7), що дотикається до прямої $5x-12y=24$.

7. В еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписано правильний трикутник так, що одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайти координати двох інших вершин.

8. Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ у точці (2; – 3).

9. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2+8y^2=45$, відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

10. Гіпербола дотикається до прямої $x-y=2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

11. До параболи $y^2=12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x+y-7=0$.

12. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої:

а) ексцентриситет $\varepsilon=2$.

б) відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

13. Записати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ у точці (5, – 4).

14. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2 = 64x$ до прямої $4x+3y+46=0.$

15. Визначити типи таких кривих:

а) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0,$

б) $3x^2+2xy+3y^2+4x+4y-4=0,$

в) $x^2+4xy+3y^2+2x-2y=0,$

г) $x^2+4xy+4y^2+2x-2y-1=0,$

д) $9x^2-6xy+y^2-6x+2y=0.$

Розділ 10. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§ 1. Еліпсоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ називається *еліпсоїдом.*

Для встановлення геометричного образу рівняння скористаємось перерізами, паралельними площині Oxy. Кожен з наших перерізів визначається площиною $z=h$, де h — будь-яке число, а лінія, яка утворюється в перерізі, визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

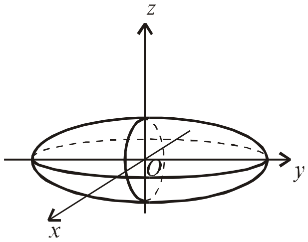


Рис.20

Дослідимо цю систему залежно від h. Якщо $|h|$ > c, то, оскільки c > 0, дістаємо $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$. У такому разі система рівнянь визначає уявний еліпс, тобто точок перетину еліпсоїда з площиною $z=h$ не існує. Якщо $h=\pm c$, то лінія перетину вироджується в точки (0; 0; –c), (0, 0, –c), тобто площини $z=\pm c$ дотикаються до еліпсоїда. Нарешті, якщо $|h|<c$, то досліджувану систему рівняння можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=h. \end{cases}$$

Перше рівняння визначає еліпс, півосі якого змінюються залежно від h. При $h=0$ у перетині еліпсоїда площиною $z=0$ маємо найбільший еліпс.

Таким чином, проведений аналіз дозволяє зобразити геометричний образ еліпсоїда як замкненої овальної поверхні (рис. 20).

§ 2.Однопорожнинний гіперболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ називається *однопорожнинним гіперболоїдом*.

Для встановлення геометричного образу цієї поверхні зробимо перерізи її координатними площинами $Oxy(y=0)$ і $Oxy(x=0)$. Дістанемо дві системи

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \\ y=0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1, \\ x=0, \end{cases}$$

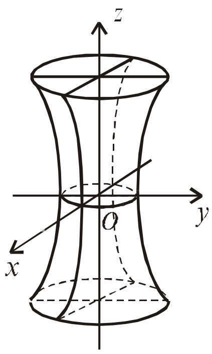


Рис. 21

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи.

При перетині гіперболоїда площиною $z = h$ дістанемо лінії, що визначають еліпси

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h = 0$, маємо найменший еліпс при перетині гіперболоїда площиною $z = 0$, якщо h необмежено зростає, то півосі еліпса зростають до нескінченності. Однопорожнинний гіперболоїд зображено на рис. 21.

§ 3. Двопорожнинний гіперболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

називається двопорожнинним гіперболоїдом.

При перерізі його координатними площинами Oxz і Oyz дістанемо рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0, \end{cases}$$

з яких випливає, що в перерізі маємо гіперболи.

Розглянемо перерізи гіперболоїда площинами $z = h,$ дослідивши систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h, \end{cases}$$

Аналіз цих рівнянь показує, що при $|h| < c$ лінії перетину немає, при $|h| = c$ площина дотикається до гіперболоїда, при $|h| > c$ лінією перетину буде еліпс. Вигляд поверхні зображено на рис. 22.

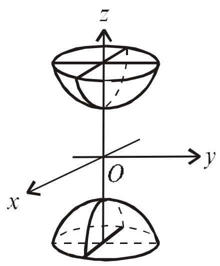


Рис. 22

§ 4. Еліптичний параболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = 2z,$ де $p > 0,\ q = 0,$ називається еліптичним параболоїдом.

При перетині еліптичного параболоїда координатними площинами Oxz і Oyz дістанемо лінії, що записуються рівняннями

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases},$$

з яких випливає, що ці лінії — параболи.

При перерізах параболоїда площинами $z = h$ маємо:

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h, \end{cases}$ що відповідає еліпсам при $h > 0.$ Еліптичний параболоїд зображено на рис. 23.

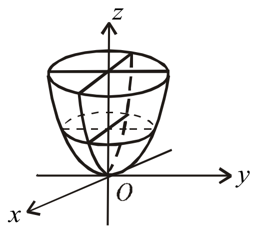


Рис.23

§ 5. Гіперболічний параболоїд.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат визначається рівнянням

$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z,$ де $p>0,\ q=0,$ називається гіперболічним параболоїдом.

Встановимо геометричний вигляд поверхні. У перетині параболоїда координатною площиною Oxz маємо $x^2=2pz;\ y=0,$ тобто в перетині дістаємо параболу. Її вітки спрямовані вгору, вона симетрична відносно осі Oz. У перетині параболоїда площинами $y=h$ також утворюються параболи $x^2=2p\left(z+\frac{h^2}{2q}\right),\ y=h.$

Якщо січні площини мають рівняння $x=h$, то маємо $y^2=2p\left(z+\frac{h^2}{2q}\right),\ x=h$ і вітки парабол перетину площини з параболоїдом спрямовані вниз, а їхні вершини розміщені на параболах $x^2=2pz.$

Розглянемо, нарешті, перетини параболоїда площинами $z=h$. Нехай маємо

$\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1;\ z=h.$

Із цих рівнянь випливає, що при $h>0$ у перетині дістанемо гіперболи, що перетинають площину Oxz, а при $h<0$ — гіперболи, що перетинають площину Oyz. З аналізу ліній перетину гіперболічного параболоїда відповідними площинами випливає, що він має вигляд, зображений на рис. 24.

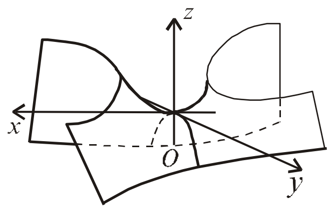


Рис. 24

§ 6. Конус другого порядку.

Означення. Поверхня, яка в прямокутній системі координат описується рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$ називається конусом другого порядку.

У перетині поверхні площинами $x=0$ і $y=0$ одержуємо пари прямих, які є твірними конічної поверхні.

Якщо розглянути перетини поверхні площинами $z=h$, то маєм $\frac{x^2}{a^2\frac{h^2}{c^2}}+\frac{y^2}{b^2\frac{h^2}{c^2}}=1;\ z=h,$ тобто еліпси.

Аналіз перетинів дає змогу побудувати поверхню, зображену на рис. 25.

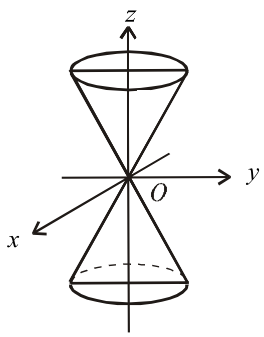


Рис.25

§ 7. Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення поверхні обертання. Як здобути рівняння поверхні обертання?
2. Дайте означення еліпсоїда, одно порожнинного гіперболоїда, двопорожнинного гіперболоїда, еліптичного параболоїда, гіперболічного

параболоїда. Запишіть їх канонічні рівняння. Який зміст мають величини, що входять у ці рівняння?

3. Дайте означення конічної поверхні, вершини та напрямної конуса. Як скласти рівняння конічної поверхні?

§ 8. Приклади

Приклад 1. Знайти проекцію на площину Oxy, $z=0$ лінію перетину еліпсоїда $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ і площини $x+4z-4=0.$

Розв'язання. Для розв'язування задачі виключимо z з рівняння еліпсоїда за допомогою рівняння площини, одержимо $x^2+2y^2-4x=0$ або $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ Звідки випливає, що проекцією буде еліпс.

Приклад 2. Знайти прямі, що проходять через точку А(6; 2; 8) і лежать на поверхні $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$

Розв'язання. Запишемо рівняння гіперболоїда у вигляді $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{16}=1-\frac{y^2}{4}$ і розкладемо ліву і праву частини на множники $\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1-\frac{y}{2}\right)$, тоді на гіперболоїді лежать прямі, загальне рівняння яких можна записати у вигляді

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{z}{4}=k\left(1+\frac{y}{2}\right)\\ k\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=\left(1-\frac{y}{2}\right)\end{cases} \text{ і } \begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{z}{4}=e\left(1-\frac{y}{2}\right)\\ e\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=\left(1+\frac{y}{2}\right)\end{cases},$$

тут k,e — деякі параметри, при зміні яких дістаємо множину твірних. Пересвідчившись, що точка А лежить на гіперболоїді, з двох множин прямих виберемо ті, що проходять через цю точку. Для цього підставимо координати точки в рівняння прямих. Дістанемо, $k=2, e$ — не визначено. Отже, маємо

$\begin{cases}4x-12y+3z=24\\ 4x+3y-3z=6\end{cases}$ або $\frac{x-6}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-8}{20}$ рівняння шуканої прямої.

§ 9. Задачі для самостійного опрацювання

1. Дано однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ Знайти лінії його перетину з координатними площинами і площинами, паралельними, що проходять на відстані 2 од. по обидва боки координатних площин.

2. Знайти точки перетину поверхонь з прямими

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1;$ $\quad\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2};$

2) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1;$ $\quad x-3=y-1=\frac{z-6}{3};$

3) $4z=x^2-4y^2;$ $\quad\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}.$

3. Обчислити довжину діаметра поверхні $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=1$ що проходить через точку $\left(4;-\frac{8}{9};\frac{8}{3}\right)$.

4. На параболоїді $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ знайти прямолінійні твірні, паралельні площині $3x+2y-4z=0$

5. Записати рівняння площини, що дотикається до поверхні $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$у точці (– 6; 2; 6).

6. Знайти площину, що дотикається до конуса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2=0$ в точці (4; – 6; 4).

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика (частина 1) : підручник / В.Д. Акіньшин [та ін.]. – Черкаси: ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2015. – 227 с.
2. Григоренко, К.В. Вища математика : навч. посіб. / К.В. Григоренко, С.О. Касярум, І.П. Частоколенко. – Черкаси : ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2017. – 92 с.
3. Шкіль, М.І. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : підручник / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – Київ : Вища школа, 1984. – 391 с.