УДК 351.861

Соболь О.М., канд. техн. наук, докторант

Академія цивільного захисту України

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ РОЗБИВАННЯ, ХАРАКТЕРНИХ ДЛЯ ПРОЕКТУВАННЯ ТЕРИТОРІАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ НАСЕЛЕННЯ І ТЕРИТОРІЙ

(представлено д-ром техн. наук Комяк В.М.)

В роботі розглянуто основні задачі геометричного проектування, які відносяться до класу задач розбивання точкової множини на підмножини і є характерними для підсистем Єдиної державної системи цивільного захисту населення і територій. Наведено математичну модель та метод їх розв'язання.

Постановка проблеми. В останні десятиріччя в усьому світі спостерігається неперервне збільшення кількості техногенних та природних надзвичайних ситуацій, які призводять до збільшення соціальних та економічних збитків. Велику роль в Україні у забезпеченні природної та техногенної безпеки відіграє Єдина державна система цивільного захисту населення і територій (ЄСЦЗ), причому більшість підсистем ЄСЦЗ являють собою територіально розподілені системи. В зв'язку з цим, визначення оптимальних районів обслуговування для різноманітних служб територіально розподілених підсистем ЄСЦЗ, що впливає на час прибуття підрозділів вказаних служб до місця виникнення надзвичайної події, призводить до зменшення соціальних та економічних збитків, тобто є актуальною проблемою сьогодення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі [1], відповідно до цілей, принципів та завдань цивільного захисту [2], було виконано декомпозицію ЄСЦЗ на основні підсистеми. В роботі [3] формалізовано глобальний критерій ефективності функціонування ЄСЦЗ та її підсистем, формалізовано взаємозв'язки між підсистемами. В роботі [4] наведено основні задачі геометричного проектування, що характерні для підсистем ЄСЦЗ:

1. Задача раціонального розбивання області на підобласті обслуговування пунктами зв'язку.
2. Задача раціонального розбивання області на підобласті ефективного функціонування постів моніторингу.
3. Задача раціонального розбивання області на підобласті ефективного функціонування захисних споруд.

4. Задача раціонального розбивання області на підобласті обслуговування медичними закладами.

5. Задача раціонального розбивання області на підобласті обслуговування підрозділами служби цивільного захисту.

6. Задача раціонального розміщення потенційно небезпечних об'єктів.

7. Задача раціонального вибору території під забудову.

Очевидно, що більшість з наведених задач відноситься до класу задач розбивання точкової множини на підмножини з урахуванням певних обмежень. Методи та алгоритми розбивання множини на підмножини з урахуванням обмежень у вигляді рівностей та нерівностей наведено в роботі [5], але дані методи не враховують всю специфіку задач, що характерні для сфери цивільного захисту.

Постановка завдання та його вирішення. Здійснимо змістовну постановку задачі розбивання множини на підмножини з урахуванням обмежень у вигляді рівностей та нерівностей.

Нехай задана деяка множина S_0 у просторі R^2, яка у загальному випадку є неопуклою та багатозв'язною і являє собою φ - об'єкт [6]. Необхідно розбити задану множину (рис. 1) на мінімальну кількість підмножин S_i, $i=1,\ldots,n$, таким чином, щоб функція мети досягала свого екстремального значення, підмножини не перетиналися, виконувалися додаткові умови розбивання (обмеження) у вигляді рівностей та нерівностей, та будь яка точка множини S_0 належала певній підмножині S_i.

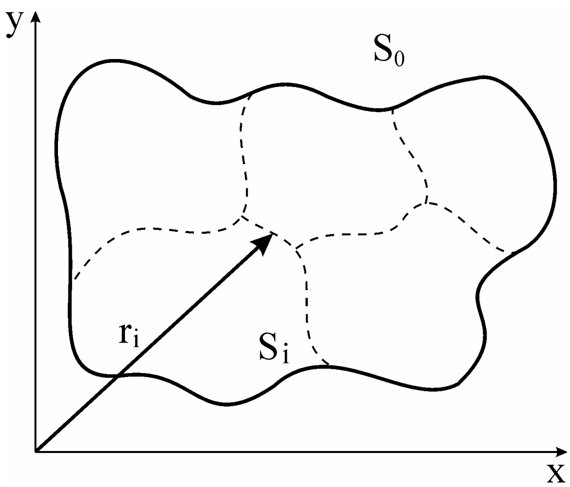

Рис. 1 – Задача розбивання множини на підмножини

Математична модель цієї задачі має наступний вигляд:

$$\min_{x \in W} F(x),\ n \to \min; \tag{1}$$

де W:

$$\xi_{\Sigma_1}^{0}\left(\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}, \{m_0, m_1, \ldots, m_n\}\right) = S^{\Sigma_1} - S^{\Sigma_1 0} = 0, \tag{2}$$

$$S^{\Sigma_1} = S\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \bigcap cS_0\right), \tag{3}$$

$$S^{\Sigma_1 0} = 0, \tag{4}$$

$$\xi_{\Sigma_2}^{0}\left(\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}, \{m_0, m_1, \ldots, m_n\}\right) = S^{\Sigma_2} - S^{\Sigma_2 0} = 0, \tag{5}$$

$$S^{\Sigma_2} = S\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \bigcap S_0\right), \tag{6}$$

$$S^{\Sigma_2 0} = S^0, \tag{7}$$

$$\xi_{ik}^{0}\left(\{s_i, s_k\}, \{m_i, m_k\}\right) = S^{ik} - S^{ik0} = 0, \tag{8}$$

$$S^{ik} = S\left(S_i \bigcap S_k\right), \tag{9}$$

$$S^{ik0} = 0, \tag{10}$$

$$\xi_i^j\left(s_i, m_i\right) = S^i - S^{ij} = 0\left(> 0, \geq 0, \neq 0, \leq 0, < 0\right), \tag{11}$$

де $i, k = 1, \ldots, n;$ $i \neq k$; $j = 1, \ldots, q$; S^i - площа певної точкової множини; $S(.)$ - функція обчислення площі точкової множини; cS_0 - доповнення множини S_0 до простору R^2; $\{s_i\}$ - сукупність просторових форм підмножин розбивання; $\{m_i\}$ - сукупність метричних характеристик підмножин розбивання.

Необхідно відзначити, що обмеження (2)÷(4) являють собою умову належності підмножин множині розбивання, обмеження (5)÷(7) – умову розбивання всієї множини, обмеження (8)÷(10) – умову взаємного неперетину підмножин розбивання, обмеження (11) та (12) – додаткову умову розбивання, що пов'язана з розповсюдженням на заданій множині q певних характеристик (наприклад, щільність населення і т. ін.), причому S^{ij} - задана площа для i - тої підмножини, що відповідає j - тій характеристиці. Область припустимих рішень у загальному випадку є обмеженою та неперервною.

Розглянемо метод розв'язання задачі (1)÷(12).

Вибір того чи іншого методу розв'язання задачі оптимізації, перш за все, залежить від типу цільової функції $F(x)$ (гладка або негладка, лінійна або нелінійна, функція однієї або кількох змінних) та обмежень (у вигляді рівностей або нерівностей, являють собою гладкі або негладкі функції, лінійні або нелінійні) [7]. В даній роботі розглянемо випадок, коли цільова функція є нелінійною. Обмеження задачі мають вигляд рівностей та нерівностей і являють собою лінійні та нелінійні функції:

$$Q(x) = 0, \tag{12}$$

$$C(x) \geq 0. \tag{13}$$

Необхідні та достатні умови мінімуму цільової функції для такого випадку наведено в [7].

Нехай цільова функція являє собою суму максимальних діаметрів відповідних підмножин розбивання. Така цільова функція має практичне застосування при проектуванні територіально розподілених систем, що є підсистемами ЄСЦЗ. Очевидно, що час прибуття підрозділів тієї чи іншої підсистеми цивільного захисту до місця виникнення надзвичайної події є пов'язаним саме із просторовою формою та метричними характеристиками підмножини обслуговування. Тому мінімізація вказаної цільової функції призводить до зменшення часу прибуття підрозділів і, відповідно, до зменшення соціальних та економічних втрат у разі виникнення надзвичайної події.

Враховуючи вищевикладене, математичну модель задачі можна переписати наступним чином:

$$\min_{x \in W} F(x), \tag{14}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i, \tag{15}$$

де W :

$$Q(x)=0, \tag{16}$$

$$C(x)\geq 0. \tag{17}$$

Тут D_i - максимальний діаметр i - ї підмножини.

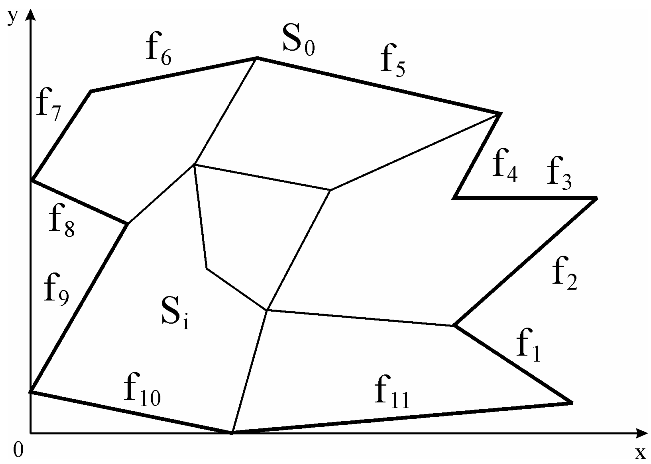

Рис. 2 – Множина розбивання

Значна кількість методів мінімізації цільової функції є пов’язаною з визначенням початкового наближення до локального мінімуму x^*. Для визначення початкового наближення в задачах розбивання точкової множини на підмножини будемо застосовувати так зване «дерево наближень». Розглянемо побудову цього «дерева».

Нехай множина розбивання наведена на рис. 2. Тоді «дерево наближень» матиме наступний вигляд:

$$S_1: \begin{array}{l} f_1,\ldots,f_{11,}(f_1,f_2),\ldots,(f_{11},f_1),\ldots,(f_{11},f_1,\ldots,f_{10}) \\ f_1,\ldots,f_{11,}(f_1,f_2),\ldots,(f_{11},f_1),\ldots,(f_{11},f_1,\ldots,f_{10}) \end{array}$$

$$S_2: \begin{array}{l} f_1',\ldots,f_l',\left(f_1',f_2'\right),\ldots,\left(f_l',f_1'\right),\ldots,\left(f_l',f_1',\ldots,f_{l-1}'\right) \\ f_1',\ldots,f_l',\left(f_1',f_2'\right),\ldots,\left(f_l',f_1'\right),\ldots,\left(f_l',f_1',\ldots,f_{l-1}'\right) \end{array}$$

$$\vdots$$

$$S_0' = S_0 \setminus S_1, \ldots$$

Принцип побудови наступний: на першій парі рівнів «дерева» (для підмножини S_1) записано відповідні сторони та комбінації сторін множини S_0, що розбивається. Наступна пара рівнів «дерева» для підмножини S_2 формується в залежності від того, які елементи обрані на попередніх рівнях «дерева», тобто в залежності від побудованої підмножини S_1. На рівнях «дерева», що відповідають підмножині S_2, записано сторони та комбінації сторін «поточної» множини розбивання $S_0^{'} = S_0 \setminus S_1$. Процес побудови «дерева наближень» продовжується до тих пір, доки не будуть виконані всі обмеження задачі. Таким чином, отримуємо динамічне «дерево наближень».

Після повного перебору певної пари рівнів «дерева наближень», що відповідають підмножині S_i, розглядаються рівні для підмножини S_{i-1}. На цих рівнях обираються певні елементи і знов будуються рівні «дерева» для підмножини S_i. Процес перебору рівнів «дерева наближень» закінчується тоді, коли здійснено повний перебір першої і наступних пар рівнів.

Для відтинання безперспективних «гілок» використовуються правила відтинання.

Процес побудови початкового наближення ґрунтується на наступних властивостях:

Властивість 1. Кожна підмножина має одну «внутрішню» вершину, тобто вершину, що належить «поточній» множині розбивання.

Властивість 2. Для визначення «внутрішньої» вершини P (рис. 3) використовується наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_i = 0; \\ r_i^1 - r_i^2 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

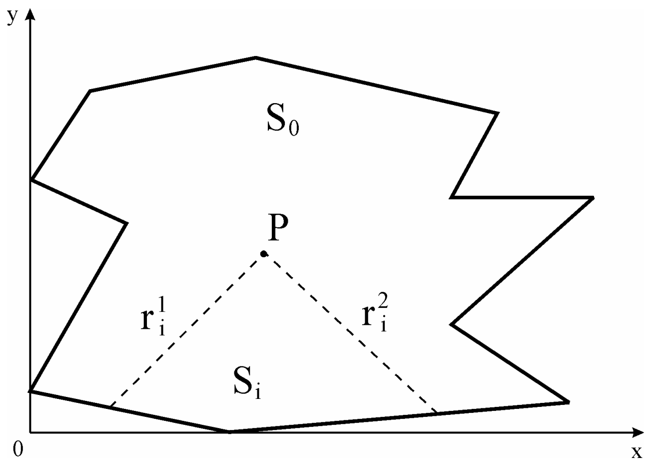

Рис. 3 – Побудова «внутрішньої» вершини

Отже, отримавши певне початкове наближення до x^*, необхідно записати модифіковану цільову функцію, тобто звести поставлену задачу до задачі (послідовності задач) безумовної мінімізації. У якості модифікованої цільової функції можна, наприклад, використовувати комбінацію абсолютної штрафної функції [7]

$$P_A(x,\rho) = F(x) + \rho \sum \left| Q(x) \right|, \tag{19}$$

та бар'єрної функції [7]

$$B(x,r) = F(x) - r \sum \ln\left(C(x)\right). \tag{20}$$

Тут ρ - параметр штрафу, r - параметр бар'єру.

Необхідно відзначити, що перші похідні від $P_A(x,\rho)$ мають розриви у будь-якій точці, де хоча б одна з функцій $Q(x)$ обертається у нуль, але ця функція є добре обумовленою. Також слід зауважити, що для пошуку x^* необмежено збільшувати ρ не потрібно: існує кінцеве порогове значення $\overline{\rho}$, таке, що x^* буде точкою безумовного мінімуму $P_A(x,\rho)$ при любому $\rho > \overline{\rho}$. Але якщо серед обмежень задачі є обмеження у вигляді нерівностей, то для них функція (20) є непристосованою. Тому для таких обмежень записуються бар'єрні функції, наприклад, у вигляді (21). Логарифмічну бар'єрну функцію (21) побудовано так, що добавки до цільової функції $F(x)$ являють собою «бар'єри», що утримують процедуру мінімізації від порушення обмежень задачі.

Отже, для пошуку x^* необхідно розв'язувати послідовність задач безумовної мінімізації модифікованої цільової функції одним з відомих методів, наприклад, методом Ньютона або квазіньютонівськими методами.

Таким чином, в результаті повного перебору рівнів «дерева наближень» отримуємо не тільки всю можливу множину наближень, але й множину локальних мінімумів цільової функції. Із множини локальних мінімумів цільової функції визначаємо розв'язок поставленої задачі.

Висновки. В даній роботі розглянуто задачі геометричного проектування, що відносяться до класу задач розбивання точкової множини на підмножини і є характерними для підсистем ЄСЦЗ. Наведені математична модель та метод розв'язання вищевказаних задач дозволять розробити ефективне алгоритмічне та програмне забезпечення для вирішення поставлених задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. В.О. Росоха, В.М. Комяк, О.М. Соболь. Єдина державна система цивільного захисту населення і територій як складна динамічна система відкритого типу / Науковий вісник будівництва №30. – Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ. – 2005. – Т. 2 – С. 252-255.
2. Закон України від 24.06.2004 р. №1859-IV "Про правові засади цивільного захисту".
3. В.М. Комяк, А.Г. Коссе, О.М. Соболь. Глобальний критерій ефективності діяльності органів управління та підрозділів служби цивільного захисту / Проблемы пожарной безопасности. – Харьков: Фолио. – 2005. – Вып. 18 – С. 87-92.
4. В.М. Комяк, О.М. Соболь. Єдина державна система цивільного захисту населення і територій та задачі геометричного моделювання, що характерні для її підсистем / Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ. – 2005. - Вип. 11. – С. 25-30.
5. Е.М. Киселева. Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения. – Днепропетровск: ДГУ, 1982. – 108 с.
6. Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наукова думка, 1986. – 268 с.
7. Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.