

ОЦІНКА ІНТЕНСИВНОСТІ ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ ШАРУВАТОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ

О. Попов^{1,2,3} , С. Скурятівський^{1,4} , В. Ковач^{1,2} , Є. Рибка⁵ , Г. Гришуляк⁶ , Л. Марцева⁷ 

¹ Центр інформаційно-аналітичного та технічного забезпечення моніторингу об'єктів атомної енергетики,
НАН України, просп. Акад. Палладіна, 34а, Київ, 03142, Україна,

² Міжрегіональна Академія управління персоналом, вул. Фрометівська, 2, Київ, 03039, Україна,

³ Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова, НАН України,
вул. Олега Мудрака, 15, Київ, 03164, Україна,

⁴ Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна, НАН України, вул. Б. Хмельницького, 63г, Київ, 01054, Україна,
e-mail: skurserg@gmail.com

⁵ Національний університет цивільного захисту України, вул. Чернишевська, 94, Харків, 61023, Україна,

⁶ Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, 76019, Україна,

⁷ Державний університет "Житомирська політехніка", Житомир, вул. Чуднівська, 103, 10005, Україна

(Отримано 03 червня 2024 р.; в остаточному вигляді — 10 вересня 2024 р.; прийнято до друку — 11 вересня 2024 р.;
опубліковано онлайн — 18 листопада 2024 р.)

Моніторинг природних та штучних гамма-полів став не лише незамінним допоміжним засобом у пошуках корисних копалин чи геофізичних дослідженнях, але і як окремий засіб для оцінки стану навколишнього середовища під час аварій, пошуку високорадіоактивних джерел випромінювання, організації антитерористичних заходів. На сьогодні найактивніше розвивається дистанційний спосіб моніторингу гамма-полів, включно насамперед з використанням безпілотних літальних апаратів. Більшість задач моніторингу гамма-полів можна розв'язувати ефективніше із залученням відповідного математичного супроводу задачі. Зокрема, задача про оцінку інтенсивності гамма-випромінювання забруднених ґрунтів вимагає правильного врахування процесів, що впливають на формування потоку гамма-квантів, включно з процесами загасання. Використовуючи експоненційний закон загасання гамма-променів у середовищі та їх геометричне розходження, розглянуто задачу про інтенсивність гамма-поля шаруватого ґрунтового масиву. У праці отримано аналітичний вираз для опису інтенсивності поля двошарового ґрунту залежно від густини, товщин та масових коефіцієнтів загасання прошарків, а також висоти детектора над поверхнею ґрунту. З'ясовано особливості поведінки функції інтенсивності поля для різних комбінацій залягання прошарків та для великих значень висоти над поверхнею ґрунту. Алгоритм обчислення інтенсивності гамма-поля узагальнено на випадок скінченної кількості прошарків. Отримані результати можуть становити інтерес для побудови розв'язків обернених задач, що виникають під час дистанційного детектування гамма-полів забруднених територій за допомогою безпілотних літальних апаратів.

Ключові слова: гамма випромінювання, загасання гамма-поля в шаруватому матеріалі, моделювання інтенсивності потоку гамма квантів.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.28.4801>

ВСТУП

Методи гамма-спектрометрії виявилися вкрай корисними для дослідження штучної та природної радіоактивності навколишнього середовища. Гамма-спектрометрію здебільшого використовують для виявлення високо- радіоактивних джерел або загального відображення радіоактивного поля [1–3]. На сьогодні добре відомо про досвід успішного застосування методів гамма-спектрометрії в галузях пошуку корисних копалин, медицини, моніторингу навколишнього середовища, сільського господарства, антитерористичного захисту, оцінки наслідків радіоактивного забруднення тощо. Залежно від мети та умов досліджень використовують стаціонарно встановлені детектори або розміщені на пересувних засобах (наземні рухомі платформи, безпілотні літальні апарати (БПЛА), літаки тощо). Як би не проводили дослідження, стаціонарно чи за допомогою рухомого носія детектора, в обох випадках виникає низка схожих супровідних задач. Зокрема, постає проблема оцінки гамма-поля,

утвореного джерелами, що розподілені на поверхні [1–4] та у верхніх шарах ґрунту. Один із способів ефективного розв'язання цієї проблеми ґрунтується на використанні розв'язків оберненої задачі про кількість гамма-квантів, що реєструє детектор [3, 5].

Своєю чергою, зазначена задача містить оцінку інтенсивності гамма-випромінювання I (або потоку гамма-квантів), яка визначається таким багатомірним інтегралом [1, 2, 4–9]:

$$I = \frac{A\varepsilon q}{4\pi} \iiint_V e^{-\mu_a \rho_a r_a - \mu_g \rho_g r_g} \frac{1}{r^2} dV, \quad (1)$$

де A та ε — площа поверхні та ефективність детектора, q — активність джерел гамма-квантів, r — відстань від точки спостереження до джерела випромінювання, r_a , r_g — відстані, які проходять гамма-промені в повітрі та ґрунті, μ_a , μ_g — масові коефіцієнти загасання гамма-променів у повітрі та ґрунті, ρ_a , ρ_g — густини повітря та ґрунту, V — ділянка інтегрування, яка відповідає об'єму ґрунту з розподіленими джерелами гамма-випромінювання.



Відомо кілька способів вибору об'єму інтегрування з урахуванням різних допоміжних тверджень. Зокрема, ділянка V може збігатися з напівпростором [1, 7] чи призмою з необмеженим вертикальним виміром [8], що приводить до невластивих інтегралів. У разі використання коліматорів під час детектування гамма-квантів і з урахуванням загасання випромінювання під час проходження через середовища, не увесь об'єм ґрунту впливає на показники детекторів, що робить обмеження ділянки V цілком виправданим [6, 9].

У цьому дослідженні розглянемо аналітичне обчислення величини I , коли ділянка V обирається на основі гіпотези роботи [9]. Відповідно до гіпотези, ділянка інтегрування V відповідає об'єму ґрунту, який обмежений землею поверхнею та ізоповерхнею. Ізоповерхня складається з точок, для яких міра загасання гамма-променів, що з них виходять і досягають точки спостереження, — стала величина. Міра загасання є алгебраїчною сумою мір загасання гамма-променів у кожному з прошарків. На додаток до досліджень роботи [9], ґрунт розглянуто як сукупність паралельних однорідних прошарків різної товщини, що точніше описує структуру радіоактивного матеріалу та може бути використано в обернених задачах [5]. У роботі виведено аналітичний вираз для I для двошарового ґрунту, за допомогою якого аналізується залежність I від висоти детектора над поверхнею ґрунту, а також сформульовано алгоритм узагальнення залежності I для більшої кількості ґрунтових прошарків.

І. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Отже, розглянуто ґрунтовий шаруватий масив, який складається з K плоскопаралельних прошарків товщини h_i та густини ρ_g^i , $i = 1, \dots, K$. Кожний прошарок характеризується коефіцієнтом загасання гамма-променів μ_g^i . Метою досліджень є обчислення інтенсивності гамма-квантів на відстані h від поверхні землі з урахуванням, що коефіцієнт загасання гамма-променів у повітрі μ_a . Для розв'язання цієї задачі використаємо підхід, розроблений у праці [9] для одношарового ґрунту, в якій модифіковано алгоритм оцінки інтенсивності гамма-випромінювання. Згідно з методом, об'єм ґрунту обмежено поверхнею, на якій виконується умова про те, що загальне загасання всіх гамма-променів у ґрунті та повітрі однакове, тобто не залежить від кута θ . На основі такого припущення можна ефективно обчислити інтеграл аналітично. Зокрема, для одношарового ґрунту, як показано в [9], Supplementary data, маємо,

$$I = \frac{A\varepsilon q}{2\mu_g\rho_g} \left[E_2(\mu_a\rho_a h) - \cos\theta_1 E_2\left(\frac{\mu_a\rho_a h}{\cos\theta_1}\right) - e^{-\mu_a\rho_a h - \mu_g\rho_g d} (1 - \cos\theta_1) \right], \quad (2)$$

де $E_2(x) = x \int_x^\infty e^{-t} t^{-2} dt$ — інтегрально-показникова функція 2-го роду ($E_2(0) = 1$, $E_2(\infty) = 0$), $\cos\theta_1$ — косинус найбільшого кута, під яким видно ділянку інте-

грування з точки спостереження. Зазначимо, що коли ділянка інтегрування збігається з напівнескінченим простором, то з (2) випливає ($\theta_1 \rightarrow \pi/2$, $d \rightarrow \infty$)

$$I_\infty = \frac{A\varepsilon q}{2\mu_g\rho_g} E_2(\mu_a\rho_a h). \quad (3)$$

Надалі розглянемо узагальнення формули (2) на випадок двошарового ґрунту, використовуючи схему обчислення, зображену на рис. 1.

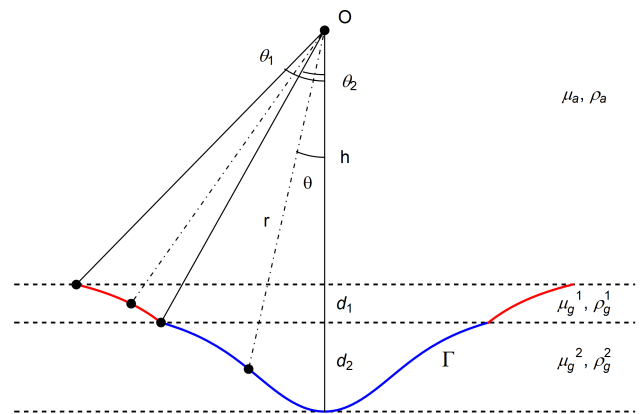


Рис. 1. Схема ділянки інтегрування для інтеграла (1) у випадку двошарового ґрунту

Fig. 1. The diagram of the integration domain for integral (1) in the case of a two-layered soil

ІІ. ПОБУДОВА АНАЛІТИЧНИХ ВИРАЗІВ ДЛЯ ІНТЕНСИВНОСТІ ГАММА ВИПРОМІНЮВАННЯ

Нехай двошаровий ґрунт характеризується такими параметрами: d_j — товщини j -го прошарку; ρ_g^j — густина матеріалу j -го прошарку; μ_g^j — коефіцієнт загасання відповідного прошарку; $j = 1, 2$. З огляду на вираз підінтегральної функції в (1), задачу обчислення інтеграла, без втрати загальності, розглядаємо у сферичній системі координат, що передбачає симетричну ділянку інтегрування. Тоді вираз (1) записуємо в такій формі:

$$I = \frac{A\varepsilon q}{4\pi} \iiint_V e^{-\mu_a\rho_a r_a - \mu_g^1\rho_g^1 r_g^1 - \mu_g^2\rho_g^2 r_g^2} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Очевидно, що інтегрування по φ здійснюється від 0 до 2π , по r — від поверхні ґрунту до межі ділянки Γ : $r = f(\theta)$.

Обчислення показують, що отриманий інтеграл можна спростити, замінивши $u = \cos \theta$ та записавши остаточний результат у формі кратного інтеграла

$$\begin{aligned} \frac{2I}{A\varepsilon q} = & \int_{\cos \theta_2}^1 du \int_{h/u}^{R_{\max}^2} \exp \left\{ -\mu_a \rho_a \frac{h}{u} - \mu_g^1 \rho_g^1 \frac{d_1}{u} - \mu_g^2 \rho_g^2 \left(r - \frac{h}{u} - \frac{d_1}{u} \right) \right\} dr \\ & + \int_{\cos \theta_1}^{\cos \theta_2} du \int_{h/u}^{R_{\max}^1} \exp \left\{ -\mu_a \rho_a \frac{h}{u} - \mu_g^1 \rho_g^1 \left(r - \frac{h}{u} \right) \right\} dr, \end{aligned} \quad (4)$$

де $R_{\max}^{1,2}(u)$ — межі інтегрування, які визначаються способом задання межі Γ .

Аналітичний вираз межі ділянки Γ залежить від того, у якому прошарку вона проходить. З рис. 1 випливає, що за $|\theta| \leq \theta_2$ межа ділянки інтегрування визначається з умови

$$\begin{aligned} \mu_a \rho_a r_a + \mu_g^1 \rho_g^1 r_g^1 + \mu_g^2 \rho_g^2 r_g^2 \\ = \mu_a \rho_a h + \mu_g^1 \rho_g^1 d_1 + \mu_g^2 \rho_g^2 d_2, \end{aligned} \quad (5)$$

де величини

$$r_a = \frac{h}{\cos \theta}, \quad r_g^1 = \frac{d_1}{\cos \theta}, \quad r_g^2 = r - r_g^1 - r_a.$$

Співвідношення (5) дає змогу обчислити шуканий вираз для межі інтегрування $r = f(\theta)$ у цьому інтервалі:

$$\begin{aligned} r = & \frac{\mu_a \rho_a}{\mu_g^2 \rho_g^2} h + \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_g^j \rho_g^j}{\mu_g^2 \rho_g^2} d_j \\ & - \frac{h}{\cos \theta} \left(\frac{\mu_a \rho_a}{\mu_g^2 \rho_g^2} - 1 + \frac{d_1}{h} \left\{ \frac{\mu_g^1 \rho_g^1}{\mu_g^2 \rho_g^2} - 1 \right\} \right) \equiv R_{\max}^2. \end{aligned}$$

Значення кута θ_2 обчислюємо з умови, що $r_g^2 = 0$. Отримаємо

$$\cos \theta_2 = \frac{\mu_a \rho_a h + \mu_g^1 \rho_g^1 d_1}{\mu_a \rho_a h + \sum_{j=1}^2 \mu_g^j \rho_g^j d_j}.$$

Аналогічно, для визначення аналітичного виразу для межі в прошарку 1, коли $\theta_2 < |\theta| < \theta_1$, використаємо умову

$$\mu_a \rho_a r_a + \mu_g^1 \rho_g^1 r_g^1 = \mu_a \rho_a h + \mu_g^1 \rho_g^1 d_1 + \mu_g^2 \rho_g^2 d_2, \quad (6)$$

де

$$r_a = \frac{h}{\cos \theta}, \quad r_g^1 = r - r_a.$$

Тоді вираз для межі інтегрування

$$r = \frac{\mu_a \rho_a}{\mu_g^1 \rho_g^1} h + \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_g^j \rho_g^j}{\mu_g^1 \rho_g^1} d_j - \frac{h}{\cos \theta} \left(\frac{\mu_a \rho_a}{\mu_g^1 \rho_g^1} - 1 \right) \equiv R_{\max}^1,$$

а кут θ_1 визначаємо зі співвідношення (коли $r_g^1 = 0$ або $r = h / \cos \theta_1$)

$$\cos \theta_1 = \frac{\mu_a \rho_a h}{\mu_a \rho_a h + \sum_{j=1}^2 \mu_g^j \rho_g^j d_j}.$$

На рис. 1 видно, що крива Γ втрачає гладкість на межі прошарків, однак зі зменшенням відмінності між прошарками коли $\mu_g^1 \rho_g^1 \rightarrow \mu_g^2 \rho_g^2$, гладкість зростає.

Коментар. Зазначимо, що подібні міркування легко провести для N прошарків. Зокрема, вираз для опису межі в n -му шарі такий:

$$\begin{aligned} r = & \frac{\mu_a \rho_a}{\mu_g^n \rho_g^n} h + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_g^j \rho_g^j}{\mu_g^n \rho_g^n} d_j \\ & - \frac{h}{\cos \theta} \left(\frac{\mu_a \rho_a}{\mu_g^n \rho_g^n} - 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_j}{h} \left\{ \frac{\mu_g^j \rho_g^j}{\mu_g^n \rho_g^n} - 1 \right\} \right), \end{aligned}$$

$$n = 1, \dots, N.$$

При цьому кут θ змінюється в інтервалі $\theta_{n+1} < |\theta| < \theta_n$ ($n = 1, \dots, N$, $\theta_{N+1} = 0$), де значення θ_n визначається з припущення, що $r = (r_a + \sum_{j=1}^{n-1} d_j) / \cos \theta_n$. Тоді в підсумку елементарних перетворень отримаємо

$$\cos \theta_n = \frac{\mu_a \rho_a h + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_g^j \rho_g^j d_j}{\mu_a \rho_a h + \sum_{j=1}^N \mu_g^j \rho_g^j d_j}.$$

Надалі, інтегруючи по r , інтеграл (4) для двошарового ґрунту за допомогою узагальненої функції $E_2(x)$ зводимо до остаточного вигляду

$$I = \frac{A\varepsilon q}{2} \left[\frac{\cos \theta_2}{\mu_g^1 \rho_g^1} E_2 \left(\frac{\mu_a \rho_a h}{\cos \theta_2} \right) - \frac{\cos \theta_1}{\mu_g^1 \rho_g^1} E_2 \left(\frac{\mu_a \rho_a h}{\cos \theta_1} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_g^2 \rho_g^2} E_2 (\mu_a \rho_a h + d_1 \{\mu_g^1 \rho_g^1 - \mu_g^2 \rho_g^2\}) - \frac{\cos \theta_2}{\mu_g^2 \rho_g^2} E_2 \left(\frac{\mu_a \rho_a h + d_1 \{\mu_g^1 \rho_g^1 - \mu_g^2 \rho_g^2\}}{\cos \theta_2} \right) \right. \\ \left. - \exp \left(-\mu_a \rho_a h - \sum_{j=1}^2 \mu_g^j \rho_g^j d_j \right) \frac{d_1 + d_2}{\mu_a \rho_a h + \sum_{j=1}^2 \mu_g^j \rho_g^j d_j} \right]. \quad (7)$$

Легко перекоонатися, що за $\mu_g^1 \rho_g^1 = \mu_g^2 \rho_g^2$ та $d_1 + d_2 = d$ формула (7) переходить у співвідношення (2).

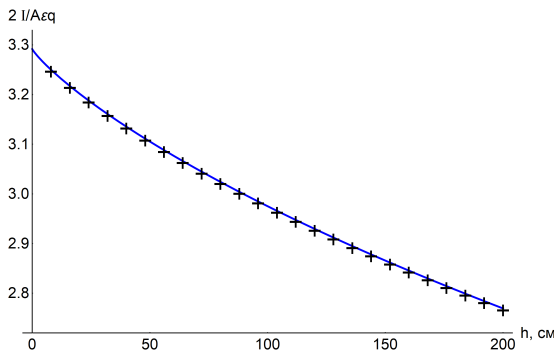


Рис. 2. Порівняння обчислення інтеграла (4) числовим способом (позначки “+”) та аналітично за формулою (7) (суцільна лінія). Значення параметрів відповідають указаним до рис. 3а

Fig. 2. Comparison of the calculation of integral (4) numerically (marks “+”) and analytically according to formula (7) (solid curve). The parameter values correspond to those indicated in Fig. 3a

Надалі теоретичні результати доповнимо числовим моделюванням вище отриманих залежностей за фіксованих значень параметрів. Для цього використаємо

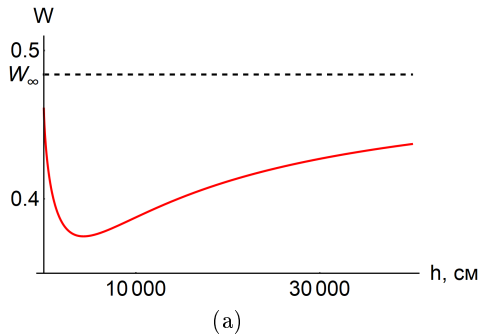


Рис. 3. Графіки функції $W(h)$, заданої виразом (8), якщо (а): $\mu_g^1 \rho_g^1 = 0.17 \text{ см}^{-1}$, $\mu_g^2 \rho_g^2 = 0.13 \text{ см}^{-1}$, $W_\infty = 0.483$ та (б): $\mu_g^1 \rho_g^1 = 0.13 \text{ см}^{-1}$, $\mu_g^2 \rho_g^2 = 0.17 \text{ см}^{-1}$, $W_\infty = 2.094$. В обох випадках товщини прошарків $d_1 = 20 \text{ см}$ та $d_2 = 60 \text{ см}$

Fig. 3. The graphs of function $W(h)$, defined by expression (8), at (a): $\mu_g^1 \rho_g^1 = 0.17 \text{ см}^{-1}$, $\mu_g^2 \rho_g^2 = 0.13 \text{ см}^{-1}$, $W_\infty = 0.483$ and (b): $\mu_g^1 \rho_g^1 = 0.13 \text{ см}^{-1}$, $\mu_g^2 \rho_g^2 = 0.17 \text{ см}^{-1}$, $W_\infty = 2.094$. In both cases, the thickness of the layers is $d_1 = 20 \text{ см}$ and $d_2 = 60 \text{ см}$

мо пакет прикладних програм *Mathematica*, який добре зарекомендував себе під час розв’язання прикладних задач [10]. Зазначений пакет, зокрема, містить вбудовану функцію `Gamma[a,x]` для обчислення гамма-функції $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$, що дає змогу зручно описати функцію $E_2(x) = \text{Gamma}[-1, x] \cdot x$.

III. ЗАЛЕЖНІСТЬ ІНТЕНСИВНОСТІ ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ ВІД ВИСОТИ

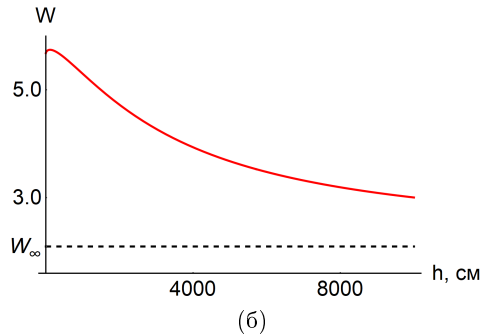
Для зменшення кількості параметрів у дослідженнях розглянемо відносні величини для інтегралів. Зокрема, аналізуватимемо величину

$$W = \frac{I}{I_\infty}, \quad (8)$$

де I визначається виразом (7), I_∞ — виразом (3), у якому використовуємо середнє значення коефіцієнта загасання

$$\mu_g \rho_g = \frac{\mu_g^1 \rho_g^1 d_1 + \mu_g^2 \rho_g^2 d_2}{d_1 + d_2}.$$

По суті, величина W залежить лише від характеристик прошарків та повітря.



Зафіксуємо значення параметрів, які відповідають типовим значенням природних середовищ. Як відомо, [11–13], значення масових коефіцієнтів загасання залежать від енергії гамма-випромінювання. Загалом, із зростанням енергії випромінювання коефіцієнт зменшується [13]. Схожу тенденцію спостерігаємо і для густини, тобто коефіцієнт загасання більший для щільніших матеріалів. Отже, використаємо дані статті [11] та розглянемо масові коефіцієнти загасання матеріалів за енергії $E = 0.2764$ MeV. Зокрема,

$$\begin{aligned}\mu_g^1 &= 0.108 \text{ см}^2/\text{г}; & \rho_g^1 &= 1.21 \text{ г/см}^3 \text{ (ґрунт суходолу);} \\ \mu_g^2 &= 0.111 \text{ см}^2/\text{г}; & \rho_g^2 &= 1.55 \text{ г/см}^3 \text{ (пісок).}\end{aligned}\quad (9)$$

Водночас, відповідно до даних таблиці [14], значення масового коефіцієнта загасання в повітрі $\mu_a = 0.1062 \text{ см}^2/\text{г}$, лінійний коефіцієнт загасання $\mu_a \rho_a = 0.000137317 \approx 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ за близької енергії $E = 0.3$ MeV.

Отже, розглянуто ґрунтовий масив, який складається з ґрунту суходолу (шар 1, товщина $d_1 = 20$ см) та піску (шар 2, товщина $d_2 = 60$ см), так що $\mu_g^1 \rho_g^1 > \mu_g^2 \rho_g^2$. Графік залежності $W(h)$ показано на рис. 3,а. Помітно, що графік має точку мінімуму та наближається до горизонтальної асимптоти знизу за великих h . Як це видно з рис. 3,а та згідно з доведеною в Додатку А Лемою 1, функція $W < 1$. Звідси випливає, що оцінка інтенсивності випромінювання за формулою (7) для шаруватого ґрунту менша, ніж

для напіобмеженого ґрунту. Якщо поміняти місцями залягання шарів, тобто шар 1 — пісок (щільніший матеріал, товщина $d_1 = 20$ см), шар 2 — ґрунт суходолу (менш щільний, товщина $d_2 = 60$ см), то отримаємо графік $W(h)$, який зображено на рис. 3,б. На цьому графіку максимум за малих h і графік прямує до горизонтальної асимптоти. Тут $W > 1$, що свідчить про вищу оцінку за формулою (7), порівнюючи з формулою (3).

Коментар. Стосовно другого випадку, коли $\mu_g^1 \rho_g^1 < \mu_g^2 \rho_g^2$, зазначимо таке: графік $W(h)$ рисунка 3,б типовий для цього випадку і має вигляд кривої з одним локальним максимумом, що лежить вище від своєї горизонтальної асимптоти; за малих значень різниці $\mu_g^2 \rho_g^2 - \mu_g^1 \rho_g^1$ може виконуватися протилежна нерівність $W(h) < 1$ (за фіксованих значень параметрів, використаних у роботі, $\mu_g^2 \rho_g^2 - \mu_g^1 \rho_g^1 \sim 10^{-5}$); аналітичне обґрунтування нерівностей $W(h) < 1$ та $W(h) > 1$ (на кшталт виконаного в Додатку А) є непростю задачею з математичного погляду, яка поки що остаточно не розв'язана, але певних успіхів можна досягти, аналізуючи поведінку асимптоти W_∞ , обчисленої нижче.

Графіки функції (8), зображені на рис. 3, свідчать про наявність горизонтальної асимптоти $W = W_\infty = \text{const}$ при $h \rightarrow \infty$. Для обчислення W_∞ застосуємо правило Лопітала та властивості спеціальної функції $E_2(x)$. Зокрема, використаємо відому асимптотичну оцінку функції $E_2(x) \sim e^{-x}/x$, справедливу для великих x . Виконуючи трудомісткі, але нескладні перетворення, отримаємо остаточний вираз:

$$\begin{aligned}W_\infty = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{I}{I_\infty} &= \left(-e^{-d_1 \mu_g^1 \rho_g^1 - d_2 \mu_g^2 \rho_g^2} + \frac{e^{d_1 \mu_g^1 \rho_g^1} - 1}{\mu_g^1 \rho_g^1 (d_1 + d_2)} e^{-d_1 \mu_g^1 \rho_g^1 - d_2 \mu_g^2 \rho_g^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{d_2 \mu_g^2 \rho_g^2} - 1}{\mu_g^2 \rho_g^2 (d_1 + d_2)} e^{d_1 (\mu_g^2 \rho_g^2 - \mu_g^1 \rho_g^1) - d_2 \mu_g^2 \rho_g^2} \right) \sum_{j=1}^2 \mu_g^j \rho_g^j d_j.\end{aligned}\quad (10)$$

Вихід функції на асимптоту означає однаковий характер асимптотик величин I та I_∞ та врешті-решт їхню пропорційність за достатньо великих h . У такому разі це свідчить про слабкий вплив шаруватості ґрунту на обчислення величини I .

IV. ВИСНОВКИ

Отже, у роботі отримано аналітичний вираз для оцінки інтенсивності гамма-випромінювання, що проходить через двошаровий ґрунтовий масив. Правильність виведення формули перевіряється порівнянням обчислень за формулою (7) та числовим способом засобами системи *Mathematica*. Також проаналізовано залежність інтенсивності гамма-випромінювання від висоти детектора над поверхнею землі. Зокрема, по-

казано, що шаруватість ґрунту є досить відчутною на малих висотах, і тоді обчислення за формулою (7) суттєво відрізняються від результатів застосування формули для напівнескінченного ґрунту. У числових обрахунках використано параметри природних матеріалів, як-от ґрунт суходолу та пісок, та виявлено вплив різних комбінацій залягання шарів на розподіл й асимптотику величини I .

Ці дослідження узагальнюються на випадок скінченної кількості шарів. Очевидно, що зростання кількості прошарків ускладнює обчислення, однак ці обчислення досить алгоритмічні.

Зазначимо, що отримані результати можуть бути корисними для задач моніторингу природних та штучних гамма-полів, під час пошуків корисних копалин чи геофізичних досліджень, для оцінки стану навколишнього середовища [15] під час аварій, пошуку ви-

сокорадіоактивних джерел випромінювання, виявлення прихованих чи втрачених радіоактивних матеріалів. Зокрема, відомо приклади [9] використання таких

досліджень під час дистанційного способу моніторингу гамма-полів забруднених територій за допомогою БпЛА.

Додаток А: Оцінка функції W

Доведемо таку лему:

Лема 1 Якщо $\mu_g^1 \rho_g^1 > \mu_g^2 \rho_g^2$, тоді визначена виразом (8) функція $W(h) < 1$ при всіх додатних h .

Доведення. Нагадаємо, що функція $E_2(x)$ є спадною за $x > 0$, тож якщо $x_1 > x_2$, тоді $E_2(x_1) < E_2(x_2)$. Отже, у виразі (7) оцінимо наступні величини

$$E_2\left(\frac{\mu_a \rho_a h}{\cos \theta_2}\right) < E_2(\mu_a \rho_a h), \quad E_2\left(\frac{\mu_a \rho_a h}{\cos \theta_1}\right) < E_2(\mu_a \rho_a h),$$

оскільки $\cos \theta_2 < 1$ та $\cos \theta_1 < 1$.

До того ж, коли $\mu_g^1 \rho_g^1 > \mu_g^2 \rho_g^2$,

$$E_2(\mu_a \rho_a h + d_1 \{\mu_g^1 \rho_g^1 - \mu_g^2 \rho_g^2\}) < E_2(\mu_a \rho_a h).$$

Тоді оцінка для функції (8) матиме вигляд

$$W < \frac{\mu_g^1 \rho_g^1 d_1 + \mu_g^2 \rho_g^2 d_2}{\mu_a \rho_a h + \sum_{j=1}^2 \mu_g^j \rho_g^j d_j} \left(1 - \exp \left(-\mu_a \rho_a h - \sum_{j=1}^2 \mu_g^j \rho_g^j d_j \right) \right) < \frac{\mu_g^1 \rho_g^1 d_1 + \mu_g^2 \rho_g^2 d_2}{\mu_a \rho_a h + \mu_g^1 \rho_g^1 d_1 + \mu_g^2 \rho_g^2 d_2} < 1,$$

що й потрібно було довести. Зазначимо також, що за фіксованих значень параметрів графік функції $W(h)$ для такого випадку зображено на рис. 3,а.

-
- [1] R. M. Kogan, I. M. Nazarov, Sh. D. Fridman, *Gamma Spectrometry of Natural Environments and Formations: Theory of the Method Applications to Geology and Geophysics* (Israel Program For Scientific Translations, Jerusalem, 1971).
 - [2] Y. A. Izrael, E. D. Stukin, *The Gamma Emission of Radioactive Fallout* (Israel Program For Scientific Translations, Jerusalem, 1970).
 - [3] Yu. Zabulonov, O. Popov, S. Skurativskyi, I. Hromova, A. Zaporozhets, in: *Systems, Decision and Control in Energy IV. Studies in Systems, Decision and Control, 456*, edited by O. Popov, A. Zaporozhets (Springer, Cham, 2023), p. 173; https://doi.org/10.1007/978-3-031-22500-0_11.
 - [4] R. L. Grasty, K. L. Kosanke, R. S. Foote, *Geophysics* **44**, 1447 (1979); <https://doi.org/10.1190/1.1441017>.
 - [5] O. Popov et al., in: *Preceedings of the 5th International Conference on Sustainable Futures: Environmental, Technological, Social and Economic Matters, (Section: Nuclear Safety and Environmental Protection)*, 21–24 May 2024, Kryvyi Rih, Ukraine; <https://icsf.ccjournals.eu/2024/index5.html>.
 - [6] J. S. Duval Jr., B. Cook, J. A. S. Adams, *J. Geophys. Res.* **76**, 8466 (1971); <https://doi.org/10.1029/JB076i035p08466>.
 - [7] R. B. Clark, J. S. Duval Jr., J. A. S. Adams, *J. Geophys. Res.* **77**, 3021 (1972); <https://doi.org/10.1029/JB077i017p03021>.
 - [8] P. J. Gunn, *Geophysics* **43**, 133 (1978); <https://doi.org/10.1190/1.1440816>.
 - [9] S. van der Veeke et al., *J. Environ. Radioact.* **231**, 106545, (2021); <https://doi.org/10.1016/j.jenvrad.2021.106545>.
 - [10] C. Mączka, S. Skurativskyi, V. Vladimirov, *Study of Linear and Nonlinear Models with “Mathematica”* (World Scientific, Singapore, 2023); <https://doi.org/10.1142/13139>.
 - [11] M. N. Alam et al., *Appl. Radiat. Isot.* **54**, 973 (2001); [https://doi.org/10.1016/S0969-8043\(00\)00354-7](https://doi.org/10.1016/S0969-8043(00)00354-7).
 - [12] M. E. Medhat, *Ann. Nucl. Energy* **36**, 849 (2009); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2009.02.006>.
 - [13] J. C. Costa, J. A. R. Borges, L. F. Pires, R. C. J. Arthur, O. O. S. Bacchi, *Ann. Nucl. Energy* **64**, 206 (2014); <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2013.10.006>.
 - [14] The Risk Assessment Information System; https://rais.ornl.gov/tools/Lin_Coefficients.pdf
 - [15] A. G. Tkachuk, M. S. Hrynevych, T. A. Vakaliuk, O. A. Chernysh, M. G. Medvediev, *J. Edge Comp.* **2**, 163 (2023); <https://doi.org/10.55056/jec.633>.

EVALUATION OF GAMMA-RAY INTENSITY OF LAYERED GROUND

O. Popov^{1,2,3}, S. Skurativskiy^{1,4}, V. Kovach^{1,2}, E. Rybka⁵, H. Hrytsuliak⁶, L. Martseva⁷¹*Center for Information-analytical and Technical Support of Nuclear Power Facilities Monitoring of the NAS of Ukraine, 34a, Palladin Ave., Kyiv, UA-03142, Ukraine*²*Interregional Academy of Personnel Management, 2, Frometivska St., Kyiv, UA-03039, Ukraine*³*G. E. Pukhov Institute for Modeling in Energy Engineering of NAS of Ukraine, 15, Oleh Mudrak St., Kyiv, UA-03164, Ukraine,*⁴*Subbotin Institute of Geophysics of the NAS of Ukraine, 63h, Bohdan Khmelnytskyi St., Kyiv, UA-01054, Ukraine,*⁵*National University of Civil Defence of Ukraine, Chernyshevska St., 94, Ukraine, UA-61023, Kharkiv*⁶*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 15, Karpatska St., Ivano-Frankivsk, UA-76019, Ukraine,*⁷*Zhytomyr Polytechnic State University, 103, Chudnivska St., Zhytomyr, UA-10005, Ukraine*

The monitoring of natural and artificial gamma fields has become an indispensable auxiliary tool not only in the search for minerals or geophysical research but also as a standalone method for assessing environmental conditions during accidents, locating highly radioactive sources, and implementing anti-terrorist measures. Nowadays, the most actively developing method of monitoring gamma fields is the remote method, primarily involving the use of remotely piloted vehicles.

Most problems of gamma field monitoring can be solved more effectively by incorporating appropriate mathematical support. In particular, accurately estimating the intensity of gamma radiation of contaminated soils requires proper consideration of the processes affecting the formation of gamma quanta flow, including attenuation processes. Using the exponential law of gamma ray attenuation in a medium and their geometric divergence, we investigate the problem of gamma field intensity in a layered soil massif. In our research, we derived an analytical expression for describing the field intensity of a two-layer soil depending on the density, thicknesses, and mass attenuation coefficients of the layers, as well as the height of the detector above the soil surface. We identified unique characteristics in the behavior of the field intensity function for different layer configurations and at considerable heights above the soil surface. The algorithm for calculating the intensity of the gamma field is generalized for scenarios involving a finite number of layers. The results obtained could be valuable for developing solutions to inverse problems that arise during remote detection of gamma fields in contaminated areas using, for example, unmanned aerial vehicles.

Key words: gamma radiation, gamma field attenuation in a layered material, modeling of the intensity of gamma quanta flow.