риваемом случае связаны $N+1$ – мерным нормальным законом распределения. Задача о преобразовании функций распределения в линейной системе, когда на входе ее действует случайный процесс, отличный от нормального, чрезвычайно трудная.

В нашем случае на входе линейной системы (например, устройства, осуществляющего задержку на время τ) действует случайный процесс, представляющий собой сумму амплитудно-модулированного сигнала со случайной фазой $S(t)$ и помехи типа белый шум $\xi(t)$.

Интересующее нас количество информации $I(y,x)$, содержащейся в случайном процессе на выходе линейного инерционного устройства, которое осуществляет задержку на время τ, относительно исходного полезного сигнала с учетом погрешности, вносимой помехой типа белый шум, а также погрешности преобразования, составит

$$I(y,x)=\left[1+\frac{\sigma^2}{2S^2(1-0{,}945Q\alpha\tau)^2}\right]e^{\frac{S^2(1-0{,}945Q\alpha\tau)^2}{4\sigma^2}}\times$$
$$\times\left\{\frac{0{,}02\sqrt{\sigma^3}}{\sqrt{S^3(1-0{,}945Q\alpha\tau)^3}}D_{-\frac{1}{2}}\left[\frac{S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}{\sigma}\right]\times\right.$$
$$\times\left[0{,}5+7{,}5\ln\frac{3{,}96S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}{\sigma^{2/3}}\right]+63\cdot10^{-4}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}}D_{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}{\sigma}\right]\times$$
$$\times\left[-1-0{,}188\frac{\sigma^2}{S^2(1-0{,}945Q\alpha\tau)}-0{,}375\times\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\sigma^2}{S^2(1-0{,}945Q\alpha\tau)}\ln\frac{3{,}96S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}{\sigma^{2/3}}\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}\ln\sqrt{2\pi e\sigma}.$$

Аналогичное количество информации $I(y,x)$ на выходе линейного инерционного устройства, осуществляющего задержку на время τ, в случае помехи типа узкополосный нормальный случайный процесс составит (инженерный метод)

$$I(y,x)=e^{-\frac{S^2(1-0{,}945Q\alpha\tau)^2}{4\sigma^2}}\left\{D_{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{S}{\sigma}\right)\left[0{,}35-\times\right.\right.$$
$$\times\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}}\left(\ln\sqrt{2\pi S\sigma^2}-0{,}125\right)+$$
$$\left.+0{,}18\frac{\sqrt{S^3(1-0{,}945Q\alpha\tau)^3}}{\sqrt{\sigma^3}}\right]-D_{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{S}{\sigma}\right)\times$$
$$\times0{,}53\frac{\sqrt{S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}}{\sqrt{\sigma}}+0{,}66D_{-\frac{7}{2}}\left(-\frac{S}{\sigma}\right)\times$$
$$\left.\times\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{S(1-0{,}945Q\alpha\tau)}}\right\}-\ln\left(\frac{e\sigma}{\sqrt{2}}\right)-\frac{c}{2}.$$

В результате проведенного исследования определены зависимости ряда информационных характеристик от условий работы (соотношения уровней сигнала и помехи) и характеристик самих устройств. Полученные зависимости позволяют выявить устройства информационных систем, преобразование сигнала которыми сопровождается наибольшей потерей информации. Среди линейных такими устройствами являются фильтры и устройства, осуществляющие задержку во времени.

Поступила в редколлегию 30.04.99

Рецензент: д-р техн. наук Евдокимов А.Г.

Егорова Ирина Николаевна, канд. техн. наук, доцент кафедры КЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: информационные системы. Увлечения: музыка, спорт. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-94.

УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФУЗИИ С ПОМОЩЬЮ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

БАСМАНОВ А.Е.

Рассматривается вопрос об установлении соответствия между диффузионными и марковскими процессами с непрерывным временем и конечным числом состояний. Показывается, что любой диффузионный процесс может быть сколь угодно точно представлен марковским, близким ему в смысле предельных свойств.

При исследовании диффузионных процессов в жидкостях и газах часто возникает задача о существовании стационарного распределения для диффузанта и сходимости к нему. Ее анализ упрощается при замене непрерывного процесса дискретным [2]. Точность такого приближения можно повысить, рассматривая время непрерывным. Тогда в качестве модели диффузии удобно выбрать марковский процесс.

Рассмотрим диффузионный процесс $\xi(t)$, заданный на отрезке $[r_1,r_2]$, $-\infty\le r_1<r_2\le\infty$, плотность распределения вероятностей $\varphi(t,x)$ которого удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(t,x)\varphi(t,x)\right],\qquad(1)$$

где $\sigma^2(t,x)$ – коэффициент диффузии. Здесь мы без потери общности полагаем коэффициент сноса равным нулю, так как соответствующим преобразованием координат [2] любой диффузионный процесс может быть приведен к виду (1).

Если коэффициент диффузии не зависит от времени $\sigma^2(t,x)=\sigma^2(x)$ и $\int_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{\sigma^2(x)}<\infty$, то при $t\to\infty$ распределения вероятностей диффузионного процесса, он стремится к стационарному распределению:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma^2(x)}\Bigg/\int_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{\sigma^2(x)}.$$

Разобьем отрезок $[r_1,r_2]$ на частичные полуинтервалы $[a_j,a_{j+1})$, $j=0,1,\dots,n$, $a_0=r_1$, $a_n=r_2$. Будем рассматривать их как состояния марковского процесса с непрерывным временем, полагая, что процесс находится в состоянии j, если диффундирующая частица принадлежит полуинтервалу $[a_{j-1}, a_j)$. Вероятность того, что в момент времени t процесс находится в состоянии j, есть

$$p_j(t) = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t,x)dx .$$

Выпишем инфинитезимальную матрицу рассматриваемого марковского процесса. По определению диффузионного процесса

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x,s+\Delta t, dy) = o(\Delta t),$$

следовательно, вероятность перехода между не соседними состояниями за малый промежуток времени Δt $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$. Тогда интенсивность перехода из i в j равна

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = 0,\ |i-j|>1 .$$

Таким образом, инфинитезимальная матрица $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ представляет собой трехдиагональную матрицу, у которой в каждой строке элементы, не лежащие на главной диагонали, равны между собой в силу равенства нулю коэффициента сноса:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & & \ldots & \ldots \\ \lambda_2/2 & -\lambda_2 & \lambda_2/2 & \ldots & \ldots \\ & \lambda_3/2 & -\lambda_3 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -\lambda_n \end{bmatrix}.$$

Неизвестные параметры λ_i выберем так, чтобы полученный марковский процесс имел стационарное распределение $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$, где p_i^* определяются через стационарное распределение диффузионного процесса: $p_i^* = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(x)dx$. Это означает, что вектор $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$ должен быть нулевым собственным вектором для инфинитезимальной матрицы Λ^T:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* \lambda_{ij} = 0,\ j = 1,2,\ldots,n . \qquad (2)$$

Решая систему (2) относительно элементов инфинитезимальной матрицы, находим их с точностью до постоянного множителя:

$\lambda_1 = \beta$, $\lambda_2 = 2\beta p_1^*/p_2^*$, $\lambda_3 = 2\beta p_1^*/p_3^*$, $\lambda_n = 2\beta p_1^*/p_n^*$, где β — произвольная положительная константа. Ее величина влияет на скорость сходимости процесса к стационарному распределению, т.е. представляет собой масштаб по оси времени t. Действительно, пусть $p(t)$ — решение уравнения $\frac{dp}{dt} = p\Lambda$, $p_\beta(t)$ — решение уравнения $\frac{dp}{dt} = p(\beta\Lambda)$, тогда $p_\beta(t) = p(\beta t)$.

Определим неизвестный параметр β так, чтобы скорость сходимости у марковского процесса была той же, что и у соответствующего диффузионного процесса. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение вероятностей равномерно:

$$p_1(0) = p_2(0) = \ldots = p_n(0) = \frac{1}{n}$$

для марковского процесса и

$$\varphi(0,x) = \frac{1}{r_2 - r_1}$$

для диффузионного процесса.

Рассмотрим $\int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t,x)dx$ — вероятность нахождения диффундирующей частицы в полуинтервале $[a_{j-1}, a_j)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t,x)dx = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(x)\varphi(t,x)\right)dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma^2(x)\varphi(t,x)\right)\Big|_{a_{j-1}}^{a_j} .$$

При t=0 имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t,x)dx \Bigg|_{t=0} = \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x) \Bigg|_{a_{j-1}}^{a_j} . \qquad (3)$$

Это мгновенная скорость изменения вероятности состояния j в момент времени t. Кроме того, из дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_{ij},\ j=1,2,\ldots,n.$$

При t=0: $p_j(t) = \frac{1}{n}$,

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij},\ j=1,2,\ldots,n. \qquad (4)$$

Из соотношений (3),(4) можем найти параметр β:

$$\frac{1}{r_2 - r_1} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x) \Bigg|_{a_{j-1}}^{a_j} = \beta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} .$$

Поскольку коэффициент β может различаться в зависимости от рассматриваемого состояния j, то его можно брать, например, исходя из минимума суммы квадратов отклонения

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{r_2 - r_1} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x) \Bigg|_{a_{j-1}}^{a_j} - \beta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \right)^2 \to \min_\beta .$$

Увеличивая число состояний процесса, мы можем добиться сколь угодно точного представления диффузионного процесса марковским.

Полученные результаты непосредственно обобщаются на неоднородные процессы, когда коэффициент диффузии $\sigma^2(x,t)$ является также и функцией времени. В этом случае мы проводим указанные выше рассуждения для каждого момента времени t и получаем коэффициент $\beta(t)$ и инфинитезимальную матрицу неоднородного марковского процесса $\Lambda(t)$, зависящую от времени.

Таким образом, по заданному диффузионному процессу мы можем построить марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний, близкий ему в смысле эргодических свойств. Это позволяет применить к диффузионным процессам теорему о сходимости к стационарному распределению [1]. Предлагаемый подход позволяет использовать марковские процессы для моделирования диффузионных процессов и их анализа.

Литература: 1. *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972. 288 с. 2. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1973. 496 с.

Поступила в редколлегию 23.04.99

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Басманов Алексей Евгеньевич, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ. Научные интересы: вычислительная математика. Увлечения: шахматы. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14.