УДК 519.21

ОЦЕНКА МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО ЕГО ФРАГМЕНТАМ

БАСМАНОВ А.Е.

Рассмотрены неоднородные марковские процессы и предложен подход к построению оценки стохастической матрицы процесса по стохастическим матрицам его фрагментов. Такая оценка может быть найдена как решение задачи минимизации. Указанный подход применим и в случае, когда наблюдения фрагментов проведены в различные моменты времени.

1. Построение задачи минимизации

Одним из вариантов моделирования сложных физических и экономических систем являются марковские процессы. В [1] предложен подход к восстановлению показателей всей системы по характеристикам ее подсистем. Сформулированные условия такого синтеза и вычислительная процедура опираются на точные значения переходных вероятностей фрагментов (характеристик подсистем). Однако в реальных задачах эти значения, полученные из опытных данных, могут содержать ошибки. Рассмотрим случай, когда условие 1 теоремы о необходимых и достаточных условиях синтеза [1] (условие согласования) не выполняется, а условия 2, 3 выполнены. Это может быть в том случае, когда во фрагменты $P^{I_1}, P^{I_2}, \dots, P^{I_m}$ были внесены ошибки, например, погрешности измерений. Будем искать такую матрицу P, которая бы минимально отклонялась от своих фрагментов.

Найдем k-ю строку матрицы P. В дальнейшем будем опускать индекс строки k и обозначать $x_j = p_{kj}$ – искомые элементы k-й строки матрицы P; $p_j^{I_i} = p_{kj}^{I_i}$ – заданные элементы k-й строки фрагмента P^{I_i}.

Введём множество $B_{kj} = \{i : k, j \in I_i, 1 \le i \le m\}$. Оно содержит номера тех множеств I_i, которые включают в себя индексы k, j одновременно. Заметим, что условие 2 теоремы эквивалентно тому, что $B_{kj} \ne \varnothing$ для любых k, j О I_S.

Если бы условие согласования выполнялось, элементы k-й строки i-го фрагмента были бы пропорциональны соответствующим элементам k-й строки исходной матрицы:

$$x_j = \beta_i p_j^{I_i}, \quad i \in B_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots n.$$

Будем искать такие x_j, сумма квадратов отклонений которых от величин $\beta_i p_j^{I_i}$ была бы минимальной. Это приводит к задаче минимизации:

$$y(x,\beta) = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i} \left(x_j - \beta_i p_j^{I_i} \right)^2 \to \min_{x,\beta}; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1; \quad (2)$$

$$\sum_{j \in I_i} x_j = \beta_i, \quad i \in B_{kj}; \quad (3)$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, \dots n. \quad (4)$$

Это задача квадратичного программирования. Она имеет единственное решение, которое всегда можем найти. Целевая функция (1) при ограничениях (2)-(3) имеет единственный и притом глобальный минимум. Функция (1) неотрицательна при любом значении x_j. Очевидно, что в случае, когда условие согласования выполнено, решение задачи минимизации x^* будет совпадать с решением x^{**}, найденным по методу, приведенному в доказательстве теоремы. Действительно, x^{**} обращает целевую функцию (8) в 0, являющийся, в силу свойств целевой функции, глобальным минимумом.

Для нахождения оптимального решения задачи квадратичного программирования будем применять дифференциальный алгоритм [2, 3], представляющий, по существу, модификацию метода покоординатного спуска.

Пусть x_q – зависимая переменная, а x_r – независимые (r = 1, 2, ... q-1, q+1, ... n). Тогда из (2) имеем $x_q = 1 - \sum_{r \ne q} x_r$.

Запишем частные производные от минимизируемой функции y (x, b) по независимым переменным x_r, рассматривая их как производные сложной функции y (x, x_q (x), b (x)), где x = (x_1, ... x_{q-1}, x_{q+1}, ... x_n) – вектор независимых переменных. При этом учтём, что

$$¶x_q/¶x_r = -1; \quad \partial\beta_i / \partial x_r = \begin{cases} 1, & i \in B_{kr} \\ 0, & i \notin B_{kr} \end{cases}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \delta y / \delta x_r &= \partial y / \partial x_r + \sum_{i=1}^{m} (\partial y / \partial \beta_i)(\partial \beta_i / \partial x_r) + \\ &+ (\partial y / \partial x_q)(\partial x_q / \partial x_r) = \\ &= \partial y / \partial x_r + \sum_{i \in B_{kr}} \partial y / \partial \beta_i - \partial y / \partial x_q, \quad r \ne q. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично можем получить соотношение для второй производной:

$$\begin{aligned} \delta^2 y / \delta x_r^2 &= 2|B_{kr}| - 2 \sum_{i \in B_{kr}} \left[2 p_r^{I_i} - \sum_{j \in I_i} \left(p_j^{I_i} \right)^2 \right] + \\ &+ 4 \sum_{i \in B_{kr}} p_q^{I_i} + 2|B_{kq}|, \quad r \ne q. \end{aligned} \quad (6)$$

В [2] показано, что необходимым условием минимума для задачи (1)-(4) является равенство нулю условных производных по положительным независимым переменным (5) и неотрицательность условных производных (6) по нулевым независимым переменным (условие Куна-Такера):

$dy/dx_r = 0$, если $x_r > 0$,

dy/dx_r і 0, если $x_r = 0$, $r \ne q$.

Кроме того, ввиду выпуклости целевой функции и области ограничений для всякого допустимого решения необходимые условия будут также и достаточными. Это означает, что если выполнено условие Куна-Такера и $x_q \ge 0$, полученное решение x является оптимальным.

Дифференциальный алгоритм относится к итерационным методам и состоит в том, что на k-м шаге изменяется только одна из независимых переменных:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)},$$

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}, \qquad j \neq r, \;\; j \neq q$$

Значение $\Delta x_r^{(k)}$ выбирается из анализа условий Куна-Такера. Нарушение этих условий в точке $x^{(k)}$ может произойти по двум причинам:

1) если $(\delta y / \delta x_r)^{(k)} > 0$, то

$$\Delta x_r^{(k)} = \max\{-x_r;\, -(\delta y / \delta x_r)^{(k)} / (\delta^2 y / \delta x_r^2)^{(k)}\};$$

2) если $(\delta y / \delta x_r)^{(k)} < 0$, то

$$\Delta x_r^{(k)} = \min\{x_q;\, -(\delta y / \delta x_r)^{(k)} / (\delta^2 y / \delta x_r^2)^{(k)}\}.$$

Вычисляем новые значения независимой и зависимой переменных:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)},$$

$$x_q^{(k+1)} = x_q^{(k)} - \Delta x_r^{(k)}.$$

Если значение $x_r^{(k)}$ выбиралось из соображений обращения независимой переменной x_r или условной производной по ней в нуль, система зависимых и независимых переменных остаётся прежней, в противном случае независимая переменная x_r и зависимая x_q меняются ролями. После этого переходим к (k+1) итерации. Алгоритм завершается, если условия Куна-Такера выполнены либо после некоторого наперёд заданного числа итераций (в [2] приведены примеры, когда применение данного алгоритма приводит к последовательности точек $x^{(k)}$, приближающейся к оптимальному решению x^*, но не достигающей его). Как правило, условия Куна-Такера оказываются выполненными через конечное число шагов. Достоинством метода является и то, что все точки последовательности $x^{(k)}$ принадлежат области допустимых решений.

2. Наблюдения фрагментов в различные моменты времени

Пусть имеются наблюдения фрагментов в различные моменты времени:

$$p^{I_1}(t_1), p^{I_2}(t_2), \ldots, p^{I_m}(t_m).$$

Для нахождения синтезируемой матрицы в момент времени t, близкий к рассматриваемым, можно воспользоваться решением задачи минимизации (как для устранения ошибок измерения). Сформулируем эту задачу так, чтобы вес каждого фрагмента был тем больше, чем ближе момент его измерения t_k к моменту прогнозирования t. Для этого в задачу ì èí èì èçàöèè ââåäåì êî ýô ôèöèåí ò $a(t-t_i)$:

$$y(x,\beta) = \sum_{i \in B_k} \sum_{j \in I_i} \left(x_j - a(t-t_i)\beta_i p_j^{I_i}\right)^2 \to \min_{x,\beta},$$

где $\sum_{i \in B_k} a(t-t_i) = 1$, $a(s)$ – четная неотрицательная функция, достигающая максимума при $s = 0$ и монотонно убывающая на интервале $(0, \infty)$.

Это позволяет учесть те ситуации, когда t совпадает с одним из моментов t_1, t_2, ... t_m. Более того, можно говорить об оценке синтезируемой матрицы на отрезке времени $[t_{min}, t_{max}]$, где $t_{min} = \min\{t_1, \ldots t_m\}$, $t_{max} = \max\{t_1, \ldots t_m\}$. Такой подход допускает наличие ошибок измерений и не требует на этот случай никакой модификации.

Литература: 1. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Синтез стохастической матрицы по системе её фрагментов. 1997. 8с. Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97, № 76-Уі 97. 2. *Евдокимов А.Г.* Минимизация функций и её приложения к задачам автоматизированного управления инженерными сетями. Х.: Вища шк., 1985. 288 с. 3. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Фёдоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 382 с.

Поступила в редколлегию 25.03.98

Басманов Алексей Евгеньевич, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ. Научные интересы: вычислительная математика. Адрес: 310166, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (0572) 40-93-36, (0572) 97-23-77.

УДК 519.21

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

РОДЗИНСКИЙ А.А.

Изучены условия, которым должна удовлетворять матрица согласования при “стыковке” марковских процессов с различным числом состояний. Сформулированы и решены задачи о фокусировке таких процессов. Полученные результаты могут быть использованы в радиоэлектронике, экономике, экологии и медицине.

1. Неоднородный марковский процесс

При рассмотрении многих прикладных задач часто приходится иметь дело с такими системами, эволюция которых может быть описана с помощью соответствующим образом подобранного марковского процесса с изменяющимся числом состояний. В работе изучаются такие процессы. Для понимания сущности этого вопроса обсудим сначала теорему из [1], которая будет использоваться в данной работе. Рассмотрим неоднородный марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний. Предположим, что инфинитезимальная матрица $\Lambda(s)$ процесса непрерывна в некоторой левой полуокрестности W точки t_0.

Теорема. Пусть $\Lambda(s)$ удовлетворяет условиям:

а) существует такой её столбец j_0, что все элементы удовлетворяют условию

$$\left| \int_{s_0}^{t_0} \lambda_{ij_0}(s) ds \right| = \infty, \;\; s_0 \in \Omega \tag{1}$$

и порядки роста всех элементов j_0-го столбца одинаковы. Последнее означает, что для всех i, j= =1,