

**Абрамов Ю.А., Тарасенко А.А**  
*Университет гражданской защиты Украины*

## **ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТА ДВИЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕСЕЧЕННОЙ МЕСТНОСТИ**

*Предложен метод получения оптимального маршрута на сетевом графе, дискретно аппроксимирующего свойства пересеченной местности в условиях бездорожья. Модель допускает наличие ограничений в виде запретных зон и направлений предельно допустимых углов склона и осуществляет минимизацию желаемой целевой функции*

*Method of reception of the best path on net graph, which discrete approximating properties of rough terrain in condition of the bad roads is offered. Model allows restrictions in the manner of forbidden zones and directions of maximal angles. It allows minimize the arbitrary goal function*

Постановка проблемы. Проведение оперативных аварийно-спасательных, эвакуационных и (или) локализационных мероприятий, направленных на уменьшение последствий природных и природно-техногенных чрезвычайных ситуаций (ЧС) (ландшафтных пожаров, разливов нефтепродуктов, аварий на трубопроводах, обрывов линий электропередач, авто-, авиа- и железнодорожных катастроф), требует решения задачи оптимальной маршрутизации в условиях бездорожья и пересеченной местности при отсутствии сети дорог.

Анализ существующих решений. Оптимизация маршрута по сети дорог является решенной задачей, широко используемой в современных навигационных системах. В тоже время, эта задача существенно отличается от задачи прокладки оптимального маршрута в условиях бездорожья, поскольку последняя предполагает ряд ограничений, не имеющих место в первом случае.

Использование методов вариационного исчисления [1] при решении поставленной проблемы сопряжено со значительными математическими трудностями, что обуславливает выбор дискретных методов теории графов [2] и исследования операций [3] в качестве альтернативы континуальным методам.

Постановка задачи и ее решение. В условиях наличия ограничений на характер перемещения необходимо найти оптимальный (по одному из предлагаемых критериев) маршрут движения.

На прямоугольной картографируемой области  $\Omega$  введем квадратную решетку  $S \times Q$ . В этом случае массивы  $\{x_s\}_{s=0..S}$  и  $\{y_q\}_{q=0..Q}$  определяют абсциссы и ординаты линий – границ ячеек, обозначаемых как  $\Omega_{sq}$ . На каждой из элементарных областей  $\Omega_{sq}$  введем бикубические сплайны

$$Z_{sq}(x, y) = \sum_{u=1}^4 \sum_{v=1}^4 a_{uv}^{sq} (x - x_s)^{v-1} (y - y_q)^{u-1}, \quad (1)$$

описывающие поверхность рельефа, коэффициенты  $a_{uv}^{sq}$  которых получены из условий гладкой сшивки  $Z_{sq}(x, y)$  с соседними сплайнами [4].

Суммируя данные сплайны в виде

$$Z(x, y) = \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{q=0}^{Q-1} Z_{sq}(x, y) (\eta(x - x_s) - \eta(x - x_{s+1})) (\eta(y - y_q) - \eta(y - y_{q+1})), \quad (2)$$

где  $\eta(x), \eta(y)$  - функции Хэвисайда, получим [5] всюду аналитическую модель поверхности рельефа.

Введем на  $\Omega$  области запрета  $\Omega_i, i=1..I$  такие, что  $\Omega_i \subset \Omega; \Omega_i \bigcup_{i \neq j} \Omega_j = \emptyset \quad \forall i, j=1..I$ , заданные своими границами [6]. В

качестве областей запрета могут выступать природные участки, непроходимые для конкретного вида транспортного средства (ТС) (определяемые его тактико-техническими характеристиками (ТТХ)), – заболоченные либо лесистые участки, водоемы и т.д. Кроме того, это могут быть участки, определяемые директивно в виде расчетных областей достижимости защищаемых объектов «заботы» [7] поражающими факторами ЧС.

Кроме того, возможность прокладки маршрута лимитируется

характером рельефа местности – его крутизной. Очевидно, что ТС способно двигаться лишь в тех азимутальных направлениях, крутизна вдоль которых не превышает определенный уровень. На рис. 1 проиллюстрированы значения угла склона

$$\alpha(x; y; \varphi) = \arctg(Z'_x(x; y)\cos\varphi + Z'_y(x; y)\sin\varphi; 1) \quad (3)$$

в направлении движения север-юг ( $\varphi = -\pi/2$ ) и запад-восток ( $\varphi = 0$ ) для реального рельефа.

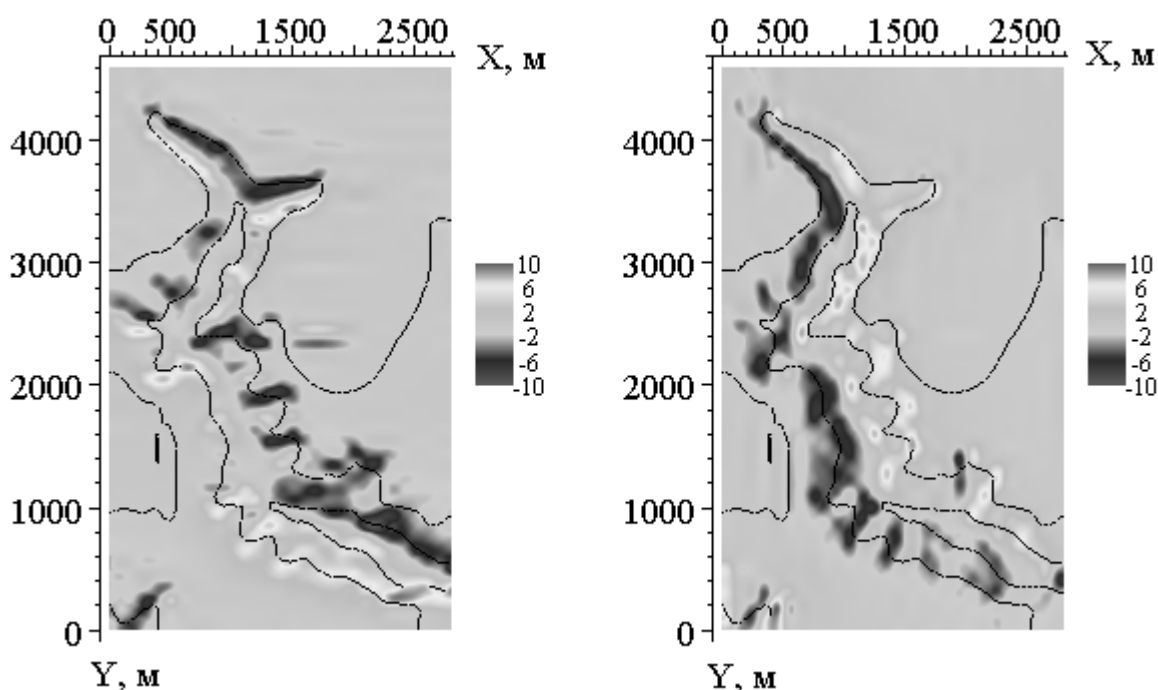


Рис. 1 - Значения угла склона (градусы) при движении в направлениях север-юг и запад-восток

Введем на рассматриваемой области ортогональную квадратную сетку с шагом  $\Delta$  (сетка также может быть трех- и шестиугольной). Узлы сетки образуют вершины сетевого графа, а ребра представляют собой его дуги с приписываемым им весами, физический смысл и значения которых определяются видом минимизируемого функционала. Так, например, одним из вариантов интерпретации веса  $W_k$   $k$ -ого ребра может быть время движения вдоль него транспортного средства, функционально зависящее от

угла склона в направлении движения  $\varphi$

$$W_k = f(\alpha(x_k; y_k; \varphi_k)), \quad (4)$$

где  $(x_k; y_k)$  - голова  $k$ -ого ребра.

В такой постановке минимизация функционала

$$\sum_k W_k \rightarrow \min \quad (5)$$

представляет собой решение задачи наискорейшего прибытия ТС из точки старта  $S$  в точку финиша  $F$ .

Необходимо найти маршрут движения  $L = \{L_m\}$ , где  $m = 1 \dots M$  - множество номеров вершин (или дуг) сетевого графа входящих в маршрут, который обеспечивал бы выполнение условия (5).

Формализация системы ограничений в этом случае выглядит следующим образом:

1.  $L_m \subset \Omega \quad \forall m$  - нахождение маршрута внутри картографируемой области;
2.  $L_m \not\subset \Omega_i \quad \forall m, i$  - непрохождение маршрута через области запрета;
3.  $\alpha_m \leq \alpha_{up} \quad \forall m$  - запрет на движение ТС вверх по склону, угол которого превышает предельно допустимый  $\alpha_{up}$ ;
4.  $\alpha_m \geq \alpha_{down} \quad \forall m$  - запрет на движение ТС вниз по склону, угол которого меньше предельно допустимого  $\alpha_{down}$  ( $\alpha_{down} < 0$ );
5.  $\alpha_m \leq |\alpha_{side}| \quad \forall m$  - запрет на движение ТС перпендикулярно склону, если угол склона превышает предельно допустимый  $\alpha_{side}$ .

Последние три ограничения связаны с безопасностью ТС (его устойчивостью на поверхности рельефа), при этом значения предельно допустимых углов определяются ТТХ транспортного средства (мощностью, местоположением центра масс, общим техническим состоянием) и свойствами грунта вдоль маршрута.

Невыполнение хотя бы одного ограничения 3-5 для  $m$ -ого ребра

равнозначно присвоению его весу  $W_m$  значения бесконечности.

Отметим, что в общем случае  $\alpha_{up} \neq \alpha_{down}$  и, как правило,  $|\alpha_{side}| < \min(\alpha_{up}; -\alpha_{down})$ , что приводит к неравенству значений веса от узла к соседнему и наоборот. Таким образом, вводимый сетевой граф является направленным [2].

Ограничение 2 означает, что узлы сетевого графа, попавшие в какую-либо из областей  $\Omega_i$  изолируются, т.е. весу ребер, соединяющих данный узел со всеми соседними и наоборот присваивается значение  $\infty$ . Ребра с бесконечным весом из графа удаляются. На рис. 2. приведен пример небольшого участка области  $\Omega$  с указанием возможных направлений движения при наличии области запрета и превышении предельно допустимых углов.

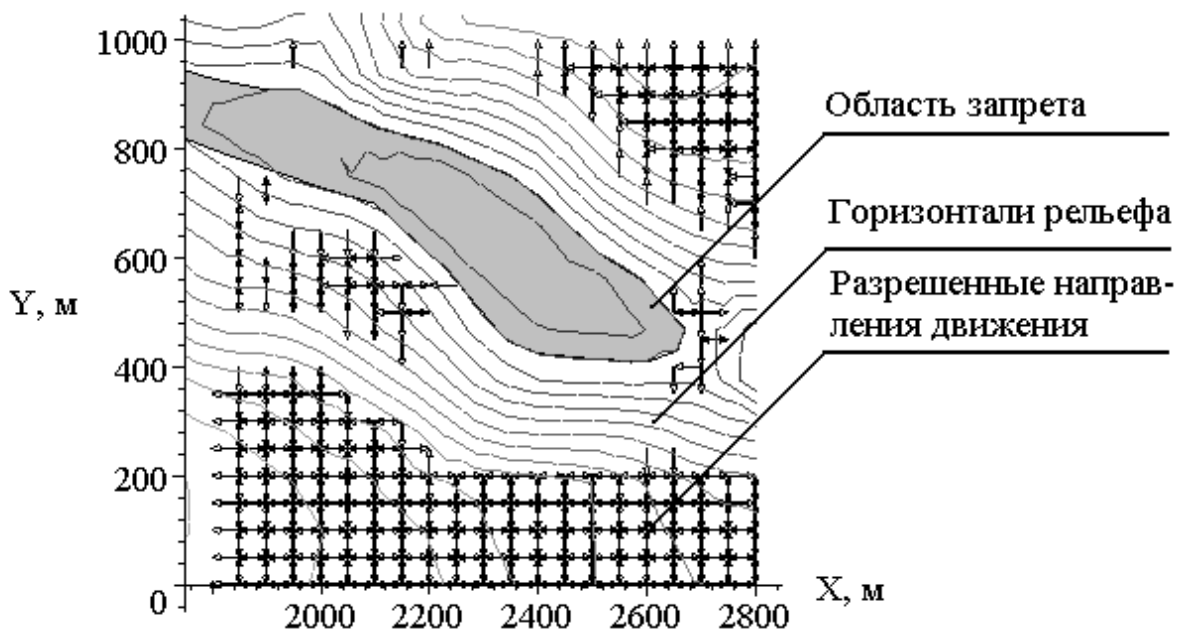


Рис. 2 - Участок области  $\Omega$  с разрешенными ортогональными направлениями движения ( $\Delta = 50\text{ м}$ )

Рис. 2 является дискретным аналогом «среза» значений углов склона, изображенных на рис 1.

Узлы сетевого графа образуют кластер и в такой формулировке задача может трактоваться в терминах теории перколяции [8]. Топологические характеристики перколяционного кластера, (такие как связность, скелет), определяют саму возможность построения маршрута в условиях выполнения ограничения 1.

Нахождение оптимального маршрута из заданной точки старта в точку финиша осуществим, используя алгоритм Дэйкстра [3,9]. Приемлемое по быстрдействию количество узлов сетевого графа  $\approx 2 \cdot 10^4$ , что, для примеров, иллюстрированных на рис. 3-4, соответствует  $\Delta = 25$  м.

На рис. 3 представлен пример программной 3-d реализации решения задачи нахождения оптимального маршрута из заданной точки S в точку F.

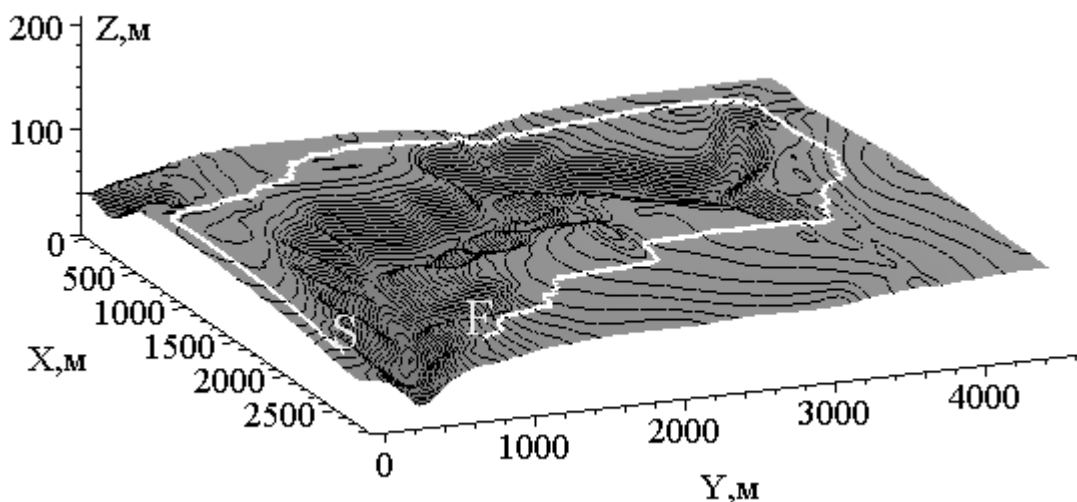


Рис. 3 - Пример построения оптимального маршрута на поверхности рельефа при лимитирующем значении ограничений 3-5

На рис. 4 показан оптимальный маршрут при больших значениях предельных углов, когда определяющую роль играет наличие области запрета.

Осуществленная программная реализация предложенной модели позволяет, придавая весу  $W_k$  желаемый смысл, минимизировать другие

целевые функции (например – длину маршрута по поверхности рельефа, суммарный перепад высот вдоль маршрута и т.д.)

Отметим, что в силу дискретизации картографируемой области сетевым графом, полученный оптимальный маршрут представляет собой приближенное решение, которое стремится к точному при  $\Delta \rightarrow 0$ .

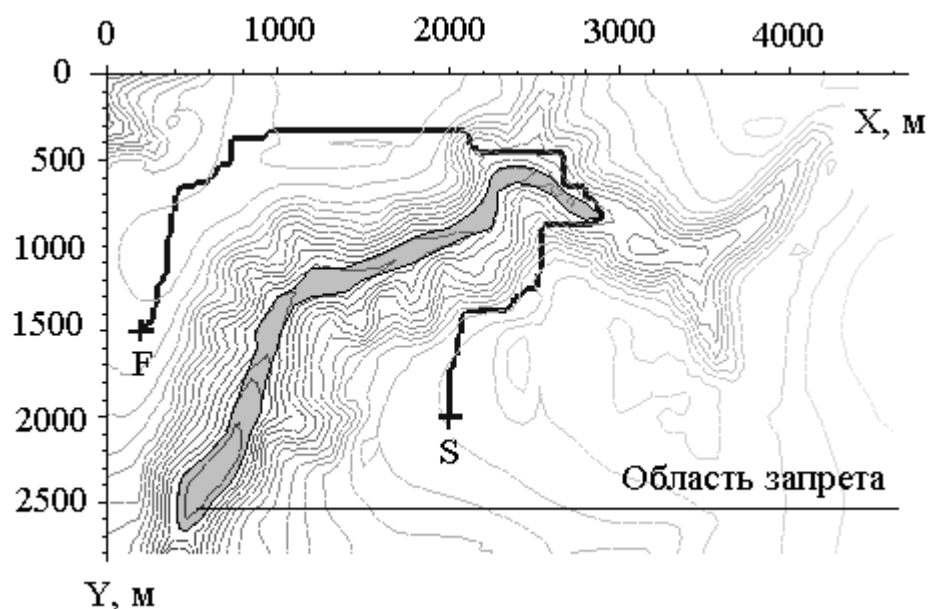


Рис. 4 - Пример построения оптимального маршрута при доминировании ограничения 2

Выводы. Получена модель оптимального маршрута в условиях бездорожья при наличии ограничений на характер перемещения, допускающая различные критерии оптимальности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: И-во физ-мат литературы, 1961. - 227 с.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. – 832 с.

3. Хэмди А. Таха. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
5. Абрамов Ю.А., Тарасенко А.А. Синтез аналитической модели поверхности по линиям уровня // Проблемы надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. Вип. 6. – Харків: УЦЗУ, 2007.- С. 11-22.
6. Тарасенко О.А. Математичне моделювання вихідних параметрів областей надзвичайних ситуацій // Проблемы надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. Вип. 8. - Харків: УЦЗУ, 2008. - С. 185-193.
7. Методика визначення ризиків та їх прийнятних рівнів для декларування безпеки об'єктів підвищеної небезпеки. К.: Основа, 2003. – 192 с.
8. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: Теория, приложения, алгоритмы. М.: РХД, - 2001. – 429 с.
9. Дьяконов В. Maple 7. Учебный курс. Санкт-Петербург: Питер, 2002. – 672 с.