УДК 621.3

Тарасенко А.А
Университет гражданской защиты Украины

МОДЕЛЬ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КРОМКИ ЛАНДШАФТНОГО ПОЖАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ РЕЛЬЕФА

На основе геометрических построений и зависимости скорости распространения кромки пожара от угла склона получена математическая модель скорости кромки по поверхности рельефа в произвольном азимутальном направлении. Предложенная модель может быть использована при построении модели динамики контура ландшафтного пожара

Постановка проблемы. Одним из условий эффективной борьбы с природными пожарами является получение прогноза динамики контура пожара. Данная задача может быть разрешена при условии создания математических моделей зависимости скорости распространения кромки от влияющих природных факторов. К числе последних относится рельеф местности. Известно [1], что крутизна склона существенно влияет на скорость распространения пожара.

Анализ существующих решений. Проводимые экспериментальные [1-3] исследования влияния крутизны склона на скорость V_r распространения пожара рассматривают только распространение кромки по плоскости в направлении максимальной крутизны при различных значениях величины уклона α_{max} (реже – в противоположном направлении). При этом не осуществлялись замеры скорости $V_r(\alpha_{max}, \varphi)$ распространения в произвольном азимутальном направлении φ.

Математические модели скорости в произвольном азимутальном направлении предложены в [4-5]. Модель [4] демонстрирует наличие разрыва в скорости тыльной кромки при угле склона $\alpha = 25^o$, а модель [5] несовпадение направлений вектора скорости фронта и максимального склона, что противоречит существующим наблюдениям [1].

Постановка задачи и ее решение. Для моделирования процесса распространения кромки пожара по поверхности рельефа, необходимо знание зависимости величины коэффициента влияния склона от азимутального угла φ. Знание одномерной экспериментальной зависимости $K_r(\alpha_{max})$ позволяет построить двумерную модель зависимости скорости распространения кромки ландшафтного пожара от угла склона α и азимутального угла φ (отсчитываемого от направления наибольшей крутизны по часовой стрелке и изменяющегося в пределах от $-\pi$ до π) в виде

$$V_r(\alpha(\alpha_{max}, \varphi)) = V_{r0} \cdot K_r(\alpha(\alpha_{max}, \varphi)), \qquad (1)$$

где $V_{r0} = V_r(0)$ - значение скорости распространения в условиях равнины.

Безразмерный коэффициент $K_r(\alpha(\alpha_{max},\varphi))$ представляет собой годограф вектора скорости кромки пожара в точке поверхности рельефа, характеризуемой локальным значением крутизны склона α в направлении φ.

Пусть задана поверхность рельефа в виде $Z(x,y)$. Используем модель точечного источника [6], когда каждую точку контура можно рассматривать как элементарный источник (очаг) распространения огня. Годограф вектора скорости распространения кромки пожара является функцией параметров поверхности рельефа.

Поверхность рельефа $Z(x,y)$ в каждой точке (x,y) характеризуется двумя параметрами – экспозицией $\beta(x,y)$ и крутизной склона $\alpha(\varphi,x,y)$, отмеряемой от горизонтальной плоскости в азимутальном направлении φ, которое в свою очередь отмеряется от направления максимальной крутизны и изменяется в пределах $-\pi \le \varphi < \pi$. Согласно данному определению максимальная крутизна склона $\alpha_{max}(x,y) = \alpha(0,x,y)$. Величину максимальной крутизны склона в точке (x,y) найдем как

$$\alpha_{max}(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\sqrt{\frac{[\partial Z(x,y)/\partial x]^2 + [\partial Z(x,y)/\partial y]^2}{[\partial Z(x,y)/\partial x]^2 + [\partial Z(x,y)/\partial y]^2 + 1}}\right). \quad (2)$$

Крутизна в произвольном азимутальном направлении φ будет определена ниже.

В точке $O'(x_0;y_0)$, принадлежащей контуру пожара и лежащей на поверхности $Z(x,y)$, проведем касательную плоскость $S(x,y)$ к поверхности рельефа $Z(x,y)$

$$S(x,y) = \left.\frac{\partial Z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0) + \left.\frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0) - \big(Z(x,y) - Z(x_0,y_0)\big). \quad (3)$$

Угол, который образует плоскость $S(x,y)$ с плоскостью XOY обозначим как α_{max}.

Введем обозначения $\left.\dfrac{\partial Z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = Z_x$; $\left.\dfrac{\partial Z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = Z_y$.

В точке $(x_0;y_0)$ можно построить ортонормированный базис $[\vec{n};\vec{b};\vec{\tau}]$ (рис. 1), где

- нормированный вектор $\vec{n}$ внешней нормали имеет координаты

$$\vec{n} = \left[\frac{-Z_x}{\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+1}};\quad \frac{-Z_y}{\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+1}};\quad \frac{1}{\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+1}}\right]; \quad (4)$$

- нормированный вектор бинормали $\vec{b}$, лежащий в плоскости $S(x,y)$, введем так, чтобы он всегда был направлен в сторону максимальной крутизны склона α_{max}. Тогда $\vec{b}$ неявно зависит от α_{max}.

$$\vec{b}(\alpha_{max}) = \left(\frac{Z_x}{B}; \frac{Z_y}{B}; \frac{S(x_0 + Z_x; y_0 + Z_y) - S(x_0; y_0)}{B} \right), \qquad (5)$$

где

$$B = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + \left[S\left(x_0 + Z_x; y_0 + Z_y\right) - S\left(x_0; y_0\right)\right]^2}. \qquad (6)$$

Подставляя в (5)-(6) выражение (3), после сокращения получим

$$\vec{b}(\alpha_{max}) = \left[\frac{Z_x}{\tilde{Z}}; \quad \frac{Z_y}{\tilde{Z}}; \quad \frac{Z_x^2 + Z_y^2}{\tilde{Z}} \right]. \qquad (7)$$

где $\tilde{Z} = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + \left(Z_x^2 + Z_y^2\right)^2}$. Заметим, что вектор бинормали $\vec{b}$ направлен под углом α_{max} к плоскости XOY.

- нормированный вектор $\vec{\tau}$ касательной, также лежащий в плоскости $S(x,y)$, введем как векторное произведение $\vec{\tau} = \left[\vec{n} \times \vec{b}\right]$. Тогда

$$\vec{\tau} = \left[\frac{-Z_y\sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + 1}}{\sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + \left(Z_x^2 + Z_y^2\right)^2}}; \quad \frac{Z_x\sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + 1}}{\sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + \left(Z_x^2 + Z_y^2\right)^2}}; \quad 0 \right]. \qquad (8)$$

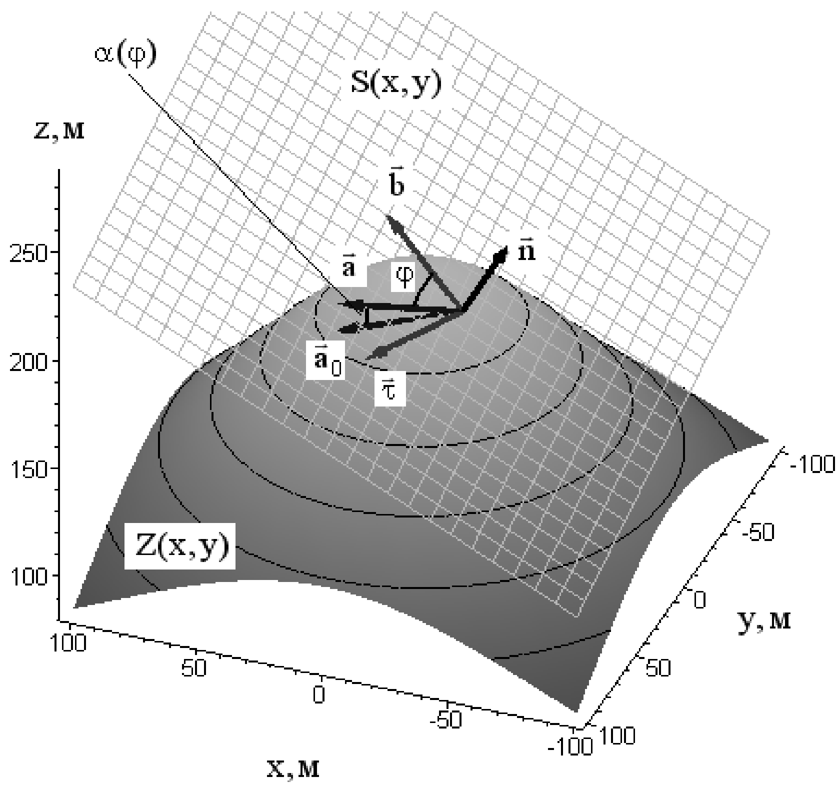

Рис. 1 - Взаиморасположение векторов

В этом случае, произвольный единичный вектор $\vec{a}(x,y,z)$, лежащий в плоскости $S(x,y)$ и образующий угол φ с ортом $\vec{b}$, можно разложить в базисе $(bO'\tau)$ в виде

$$\vec{a}(\alpha_{max};\varphi)=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}=\vec{b}(\alpha_{max})\cos\varphi+\vec{\tau}\sin\varphi=\begin{bmatrix} \dfrac{Z_x\cos\varphi-Z_y\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+1}\sin\varphi}{\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+\left(Z_x^2+Z_y^2\right)^2}} \\ \dfrac{Z_y\cos\varphi+Z_x\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+1}\sin\varphi}{\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+\left(Z_x^2+Z_y^2\right)^2}} \\ \dfrac{\left(Z_x^2+Z_y^2\right)\cos\varphi}{\sqrt{Z_x^2+Z_y^2+\left(Z_x^2+Z_y^2\right)^2}} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Угол α, который образует $\vec{a}(\varphi)$ со своей проекцией $\vec{a}_0(a_x;a_y;0)$ на плоскость XOY (рис. 1), равен

$$\alpha(\alpha_{max};\varphi)=\begin{cases} -\arccos A, -\pi\le\varphi<-\pi/2; \\ \arccos A,\ -\pi/2\le\varphi<\pi/2; \\ -\arccos A,\quad \pi/2\le\varphi<\pi, \end{cases} \text{ где } \quad A=\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\left(Z_x^2+Z_y^2\right)+1}{Z_x^2+Z_y^2+1}}. \quad (10)$$

Отметим, что угол α определяется не только значением φ, но в виду зависимости (10) еще и наклоном касательной плоскости, т.е. значением α_{max}. Очевидно, что угол $\alpha(\alpha_{max};\varphi)$ будет изменяться в пределах $-\alpha_{max}\le\alpha(\varphi)\le\alpha_{max}$.

Угол $\alpha(\alpha_{max};\varphi)$ есть ни что иное, как угол склона в направлении φ. Поэтому для этого угла введем известное [7] выражение для коэффициента скорости $K_r(\alpha)=[1-\sin\alpha]^{-2}$, $-45^o\le\alpha\le45^o$, получив зависимость $K_r(\alpha(\alpha_{max};\varphi))$

$$K_r(\alpha(\alpha_{max};\varphi))=[1-\sin\alpha(\alpha_{max};\varphi)]^{-2}. \quad (11)$$

Безразмерный вектор скорости $\vec{v}_r$, направленный вдоль вектора $\vec{a}(\alpha_{max};\varphi)$, заданный выражением (9), имеет координаты

$$\vec{v}_r(\alpha_{max};\varphi)=K_r(\alpha(\alpha_{max};\varphi))\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Данный вектор имеет нормировку такую, что $v_r(\alpha_{max};-\pi/2)=v_r(\alpha_{max};\pi/2)=1\ \forall\,\alpha\big|\ -45^o\le\alpha_{max}\le45^o$.

Пример (12) при разных значениях φ проиллюстрирован на рис. 2.

Параметрически заданная линия

$$l_r(\alpha_{max};\varphi) = \begin{cases} v_{rx}(\alpha_{max};\varphi); \\ v_{ry}(\alpha_{max};\varphi); \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v_{rz}(\alpha_{max};\varphi); \end{cases} \tag{13}$$

которую описывает конец вектора $\vec{v}_r$, есть годограф вектора скорости (рис.2).

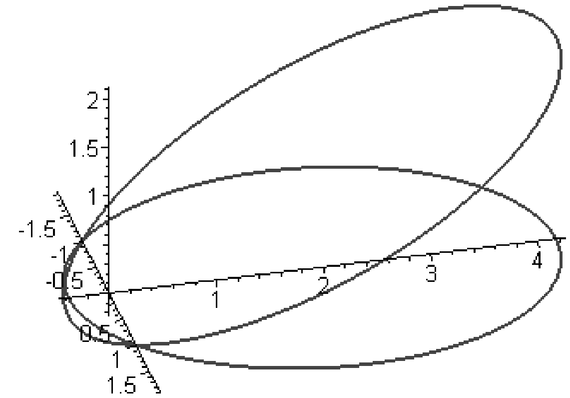

Рис. 2 - Иллюстрация линии годографа $l_r(\varphi)$ вектора $\vec{v}_r$ и проекции годографа $l_{r0}(\varphi)$ при $\alpha_{max} = \mathrm{arctg}(1/2)$

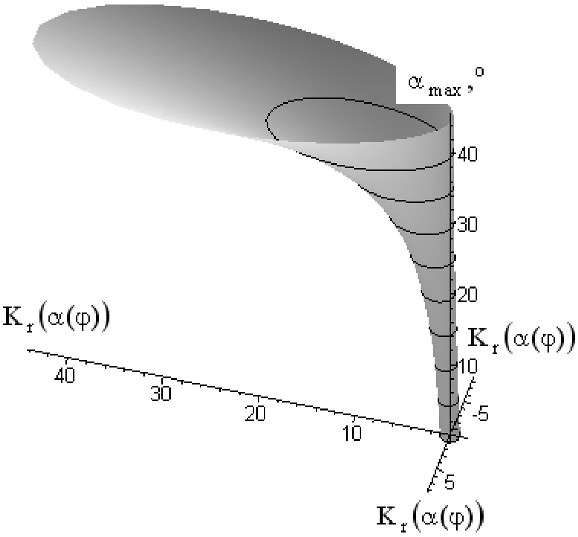

Рис. 3 - График в цилиндрических координатах годографа скорости распространения кромки в зависимости от α_{max} и φ

Соответственно, проекция этого вектора на плоскость XOY

$$l_{r0}(\alpha_{max};\varphi) = \begin{cases} v_{rx}(\alpha_{max};\varphi); \\ v_{ry}(\alpha_{max};\varphi); \end{cases} \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{14}$$

описывает проекцию годографа (рис. 2).

Откладывая в качестве полярного радиуса значение $K_r(\alpha(\varphi))$, по оси аппликат – значение максимального α_m склона в данной точке, а в качестве полярного угла – азимутальный угол φ, получим поверхность годографа вектора скорости в цилиндрических координатах (рис. 3), которая позволяет наглядно проиллюстрировать зависимость (13).

Знание зависимости скорости распространения пожара от угла склона и азимутального угла позволяет построить т.н. единичный контур L выгорания – контур пожара, развивающегося из точечного очага за единицу времени $\Delta t = 1$

$$L(x_0;y_0;\alpha_{max};\varphi) = \begin{cases} x_0 + \Delta t \cdot V_{r0} \cdot v_{rx}(\alpha_{max};\varphi); \\ y_0 + \Delta t \cdot V_{r0} \cdot v_{ry}(\alpha_{max};\varphi); \\ Z(x_0 + \Delta t \cdot V_{r0} \cdot v_{rx}(\alpha_{max};\varphi);\ y_0 + \Delta t \cdot V_{r0} \cdot v_{ry}(\alpha_{max};\varphi)). \end{cases} \tag{15}$$

На рис. 4 показан пример построения единичного контура выгорания

(15) на поверхности рельефа $Z(x, y)$ и его проекций на касательную плоскость $S(x, y)$ и плоскость XOY.

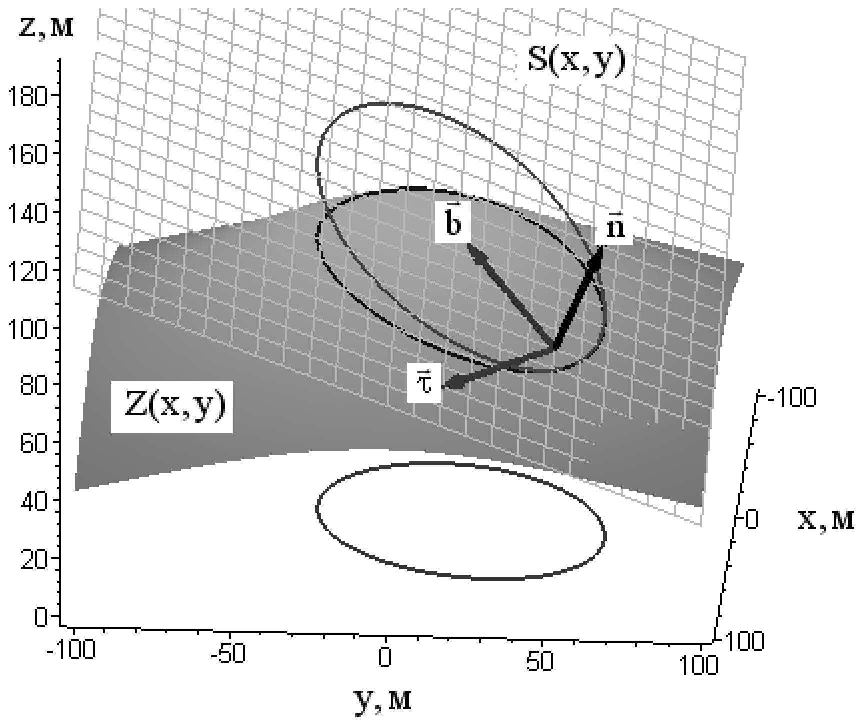

Рис. 4 - Пример построения единичного контура выгорания на поверхности рельефа и его проекции

Выводы. Получена математическая модель зависимости азимутальной скорости кромки пожара по поверхности рельефа от параметров склона.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Софронов М.А.. Лесные пожары в горах Южной Сибири. Москва: Наука. 1967 г. 150 с.
2. Дыгало А.Н. Экспериментальная модель для скорости распространения фронта низового лесного пожара // Проблемы пожарной безопасности. Сб. науч. тр. – Харьков: АПБУ, 2002. – Вып. 12. – С. 91 – 93.
3. Bianchini G. and other. “Wildland Fire Risk Maps using S^2F^2M”. JCS&T. Vol. 5, № 4, pp.244-249. 2005.
4. Покровский Р.Л. Раннее обнаружение очагов ландшафтных пожаров и прогноз динамики их распространения: Дис… канд. техн. наук: 21.06.02. – Харьков, 2002. – 221 с.
5. Кузик А.Д., Карабин О.О. Моделювання процесу поширення лісової пожежі в умовах гірської місцевості. Пожежна безпека. Зб. наук. пр. Вип. 6, Львів: СПОЛОМ, 2005. С. 49-53.
6. Доррер Г.А. Математические модели динамики лесных пожаров. – М.: Лесная промышленность, 1979. – 161 с.

7. Телицын Г.П. О распространении горения в лесу // Горение и пожары в лесу. Красноярск: НИИ леса и древесины, 1973. - С. 164-176.