УДК 614. 84

Ю.А. Абрамов, д-р техн. наук, профессор, УГЗ Украины
А.А. Тарасенко, к-т техн. наук, УГЗ Украины

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТИ РЕЛЬЕФА

Задача получения модели поверхности рельефа на основании линий уровня может иметь только приближенное решение. Предложены оценки степени рассогласования между исходной поверхностью и ее аппроксимацией

Постановка проблемы. На скорость распространения ландшафтного пожара в значительной мере влияет крутизна склона [1], поэтому при построении модели прогноза динамики контура необходимо иметь в распоряжении вид поверхности рельефа $z(x,y)$. Очевидно, что ни традиционные, ни электронные карты не содержат такой информации. В распоряжении чаще всего имеются карты линий уровня. Задача получения модели поверхности рельефа на основании линий уровня может иметь только приближенное решение. В связи с этим необходимо оценить точность такого приближения.

Анализ последних исследований и публикаций. Построение аппроксимирующей поверхности рельефа чаще всего сводится к линейной триангуляции [2-3]. Получение гладкой поверхности по регулярной сетке значений аппликат предложено в [4]. Точность предложеных методов не исследована.

В тоже время возможен синтез модели гладкой поверхности по линиям уровня, степень точности такого построения также неизвестна.

Постановка задачи и ее решение. Целью работы является оценка точности интерполяционной модели поверхности рельефа, построенной по линиям уровня.

При описании поверхности рельефа в качестве исходных данных можно использовать векторизированные карты линий уровня.

Алгоритм аппроксимации предполагает введение на картографируемой области Ω регулярной сетки со сплайн-интерполяцией вдоль линий сетки и повторной сплайн-интерполяцией на узлах сетки. Полученные функции вдоль каждой из сторон ячейки интерполируются методом Кунса [4]. В результате получаем кусочную бикубическую сплайн-интерполяцию двух переменных $S(x,y)$. Очевидно, что как любая аппроксимация данная модель является приближением, т.к. отсутствует полное совпадение исходных линий уровня и линий уровня аппроксимирующей поверхности. Поэтому необходимо оценить точность полученной аппроксимации. Это можно сделать с помощью модельной поверхности, уравнение которой известно.

Рассмотрим модельную поверхность (которую можно интерпретировать как поверхность рельефа) в виде

$$Z(x,y)=\sum_{j=1}^{K}\frac{A_j x+B_j y}{C_j(x-x_{0_j})^2+D_j(y-y_{0_j})^2+E_j}, \qquad (1)$$

где $A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, K$ - некоторые константы, а x_{0_j} и y_{0_j} $\in \Omega$. Пример поверхности (1) показан на рис. 1.

Найдем для данной поверхности ее интерполяцию $S(x;y)$, проделав процедуры интерполяции на ее линиях уровня (рис. 2).

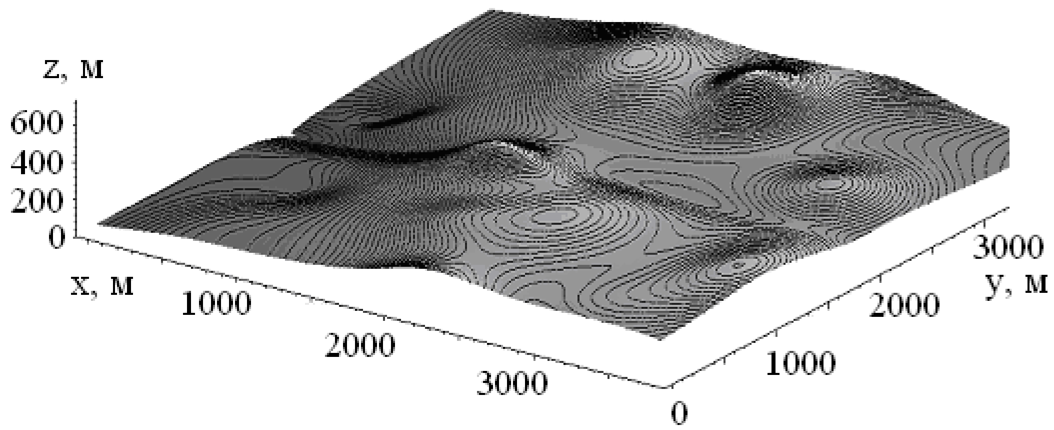

Рис. 1. Пример модельной поверхности

Сравнение линий уровня поверхности (1) и ее аппроксимации (рис. 2) показывает тем большее несовпадение, чем меньше плотность линий уровня, т.е на равнинных участках. На рис. 2 показаны линии уровня, полученные через каждые $h=10$ м (соответствующие масштабу 1:25000) и регулярной квадратной сетке со стороной $H=100$ м.

Количественной оценкой точности является разность $\Delta Z(x,y)=S(x,y)-Z(x,y)$ (рис. 3).

Отметим также, что относительная погрешность $|\Delta Z_m(x,y)|/Z_m(x,y)$ не может быть использована при оценке точности в силу возможности равенства нулю знаменателя.

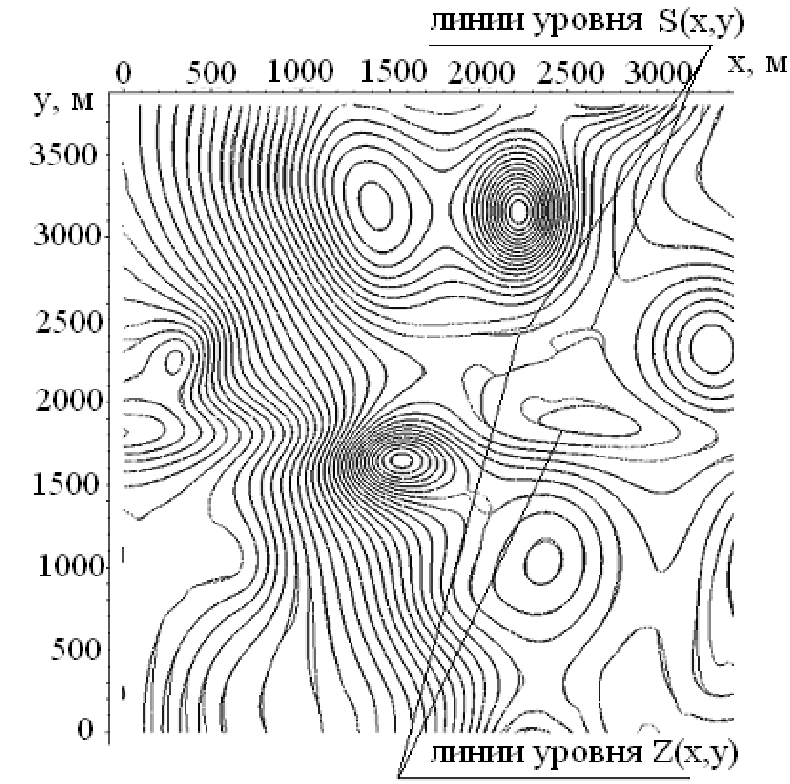

Рис. 2. Линии уровня исходного рельефа и его аппроксимации

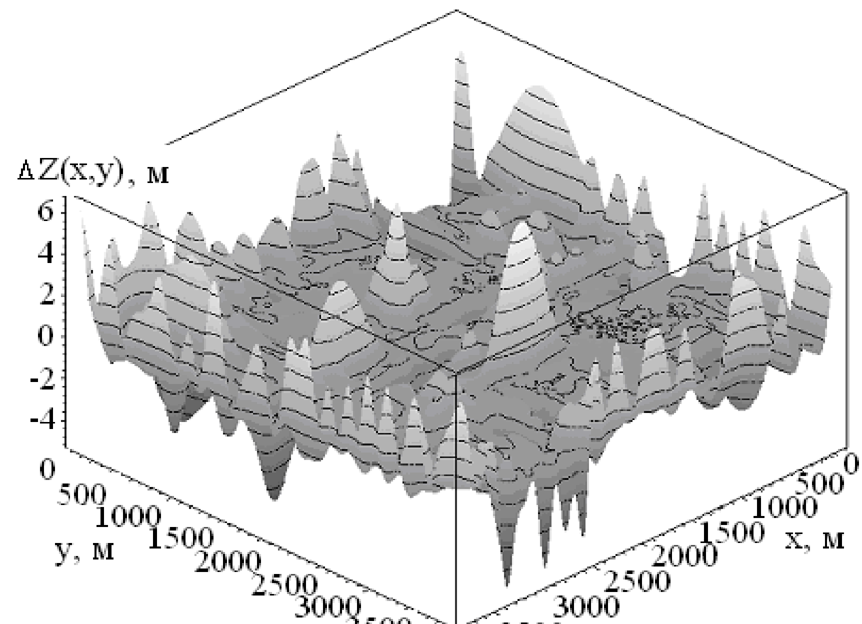

Рис. 3. График функции $\Delta Z(x, y)$

При распространении ландшафтных пожаров играют роль не сами высоты, а крутизна склона. На рис. 4 показана разность $\Delta\varphi$ крутизны склона в градусах между $S(x, y)$ и $Z(x, y)$

$$\Delta\varphi(x,y) = \frac{180}{\pi}\left[\operatorname{arctg}(|\operatorname{grad} S(x,y)|) - \operatorname{arctg}(|\operatorname{grad} Z(x,y)|)\right]. \quad (2)$$

Из рисунка видно, что максимальное отклонение угла склона $\Delta\varphi_{max} = \max\left\{ \max(\Delta\varphi(x,y))_{x,y\in\Omega}, \left| \min(\Delta\varphi(x,y))_{x,y\in\Omega} \right| \right\}$ модельного рельефа от его аппроксимации не превышает 6^o.

Необходимо оценить точность вышеописанной процедуры аппроксимации в зависимости от высоты h и параметра сетки H. На рис. 4 показана зависимость $\Delta Z(h,H)$ и $\Delta\varphi(h,H)$, полученные для разных модельных типов рельефа и при разных значениях шага сетки H. При этом время T_{ap} выполнения аппроксимационной процедуры быстро нарастает с укрупнением масштаба, т.к. $T_{ap} \sim (H^2 \times h)^{-1}$.

Из рис. 5-а следует, что укрупнение масштаба и уменьшение шага регулярной сетки уменьшает погрешность $\Delta Z(h,H)$ аппроксимации, что равнозначно повышению точности процедуры восстановления вида поверхности $Z = z(x,y)$ по линиям уровня. В тоже время рассогласование по крутизне склона $\Delta\varphi(h,H)$ чаще всего достигает минимума при значениях шага сетки $H \approx 100$ м.

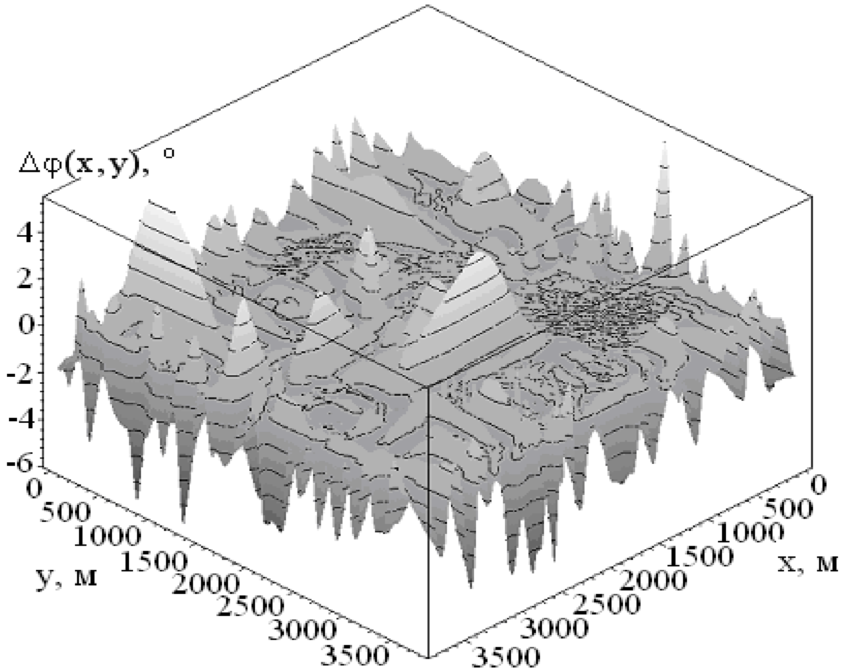

Рис. 4. График функции $\Delta\varphi_m(x,y)$

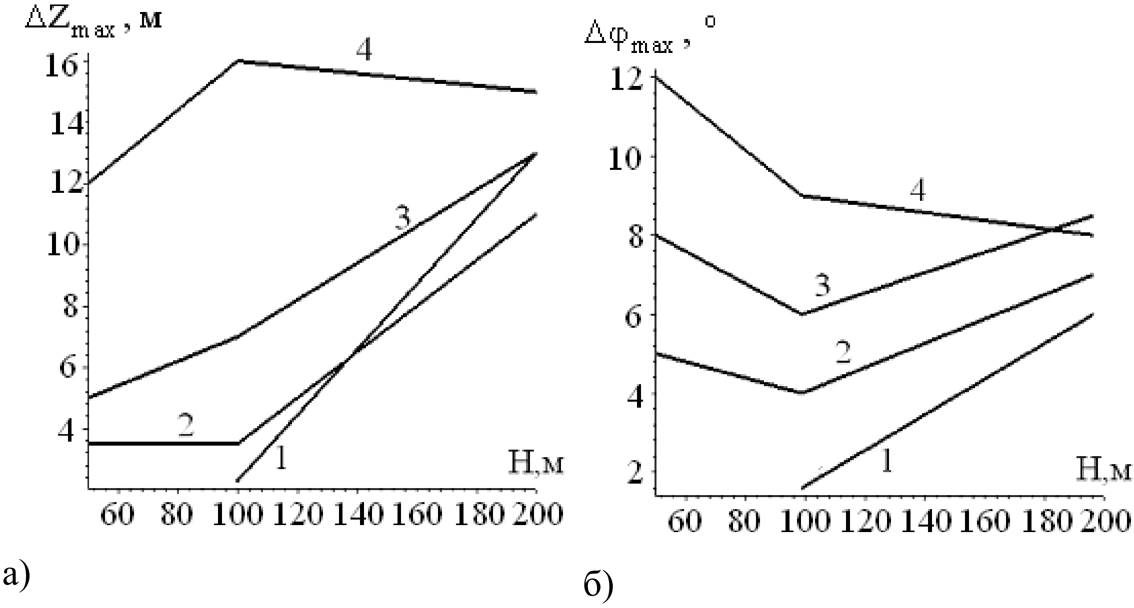

Рис. 5. Зависимость точности аппроксимации а) ΔZ_{max}; б) $\Delta\varphi_{max}$ от H. Линии: 1- $h = 2$ м; 2- $h = 5$ м; 3- $h = 10$ м; 4- $h = 20$ м

При этом из анализа рисунков 2-4 следует, что минимальная точность имеет место в областях с малой плотностью линий уровня – т.е. на равнинных участках и вблизи границ картографируемой области. В тоже время увеличение крутизны склона модельного рельефа приводит к более точному восстановлению вида поверхности.

Очевидно, что выбор параметра H будет определяться приемлемым уровнем точности (параметр h, как правило, варьировать нельзя – он задан имеющейся в распоряжении картой). В работе [1] приведена зависимость скорости $V(\varphi)$ распространения фронта низового лесного пожара на равнинном участке ($0^o \le \varphi \le 8^o$) от крутизны склона φ

$$V(\varphi) = \frac{V(\varphi = 0)}{1 - 0.012\varphi}. \qquad (3)$$

Задавая 10% уровень относительной погрешности в определении скорости, находим предельное отклонение угла $\Delta\varphi \le 7^o$ из соотношения

$$\left| \frac{1 - 0{,}012\varphi}{1 - 0{,}012(\varphi + \Delta\varphi)} - 1 \right| \times 100\% \le 10\%. \qquad (4)$$

Из рис. 5-б определяем величину периода для регулярной сетки: при $h = 2$ м приемлемо значение $H = 100...200$ м; при $h = 5$ м - $H \le 200$ м; при $h = 10$ м - $H = 100$ м. При $h = 20$ м приемлемая точность не достигается.

Выводы. Для модели бикубической сплайн-интерполяции поверхности рельефа найдены оценки величины рассогласования. Показано, что для крупномасштабных карт интерполяция на сетке со стометровым шагом приводит к менее чем 10% погрешности в вычислении скорости распространения ландшафтного пожара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. – Новосибирск: Наука, 1992. – 408 с.
2. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
3. Костюк Ю.Л., Фукс А.Л. Представление рельефа земной поверхности в геоинформационных системах // Геоинформатика-2000: Труды МНПК. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. С. 110-118.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.