

УДК 621.3

*Абрамов Ю.А., д-р техн. наук, главный научный сотрудник, профессор
(Университет гражданской защиты Украины)*

*Тарасенко А.А., канд. техн. наук, докторант (Университет гражданской
защиты Украины)*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТУРА ЗОНЫ ЛОКАЛЬНОЙ ЧРЕЗВЫЧАЙНОЙ СИТУАЦИИ

Разработана математическая модель для аналитического описания контура зоны чрезвычайной ситуации в виде кусочной параметрически заданной функции, являющейся результатом сплайн-интерполяции полиномами третьего порядка на узлах, принадлежащих контуру.

Постановка проблемы. Использование ГИС-технологий при моделировании динамики чрезвычайных ситуаций (ЧС) требует расширения методов получения входной информации. Одним из базовых источников такой информации являются параметры зоны ЧС. Некоторые виды как техногенных, так и природных чрезвычайных ситуаций характеризуются четко выраженным контуром зоны. Примерами могут служить разливы нефти на поверхности воды, районы затопления и очаги природных пожаров. Для этих случаев существует возможность аналитического математического описания проекции контура ЧС в виде плоской, гладкой, параметрически заданной, в общем случае, невыпуклой замкнутой линии, являющейся границей односвязной области - зоны ЧС.

Анализ существующих решений. При описании пространственно распределенных объектов в электронной картографии чаще всего используются полигоны, линии уровня, векторная графика либо массивы координат точек контура. В тоже время, описание в виде гладкой линии применительно к контуру зоны ЧС, использовалось только для участка контура [1].

Постановка задачи и ее решение. При моделировании динамики зоны ЧС [2] необходимо задать начальный контур в виде плоской гладкой, в общем случае невыпуклой замкнутой линии.

Процедура построения уравнения контура зоны предполагает два этапа, первый из которых состоит в получении пронумерованного конечного двумерного массива $\{X; Y\}$ координат M точек (узлов), принадлежащих контуру L

$$\{X; Y\} = \{(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_{M-1}; y_{M-1}), (x_M; y_M)\}; x_M = x_1; y_M = y_1. (1)$$

При этом координаты первой и последней точек должны совпадать, т.к. контур должен быть замкнутым.

Инструментально-методическое обеспечение оперативного выполнения первого этапа возможно различными способами. Это может быть непосредственное получение множества (1) в «ручном режиме» (например, с использованием GPS технологий) при разведке контура зоны ЧС. В этом случае не возникает необходимости в какой-либо процедуре автоматизации. При этом время получения множества (1) должно быть существенно ниже характерного времени развития ЧС, что не осуществимо для быстрораспространяющихся либо масштабных чрезвычайных ситуаций.

Поэтому более предпочтительным является метод, основанный на автоматизированной процедуре обработки цифрового изображения зоны ЧС (аэро- или космического снимка). Данная процедура предполагает фильтрацию изображения с целью выделения контура, масштабирование, привязку к системе координат и выделение множества узлов (1) по заданному алгоритму.

Второй этап предполагает получение уравнения контура зоны ЧС.

С этой целью массив (1) представим в виде двух двумерных массивов

$$\{N; X\} = \{(n_1; x_1), (n_2; x_2), (n_3; x_3), \dots, (n_{M-1}; x_{M-1}), (n_M; x_M)\}; x_M = x_1; (2)$$

$$\{N; Y\} = \{(n_1; y_1), (n_2; y_2), (n_3; y_3), \dots, (n_{M-1}; y_{M-1}), (n_M; y_M)\}; y_M = y_1, (3)$$

где в качестве первого элемента обоих массивов n будет выступать дискретное множество номеров узлов, т.е.

$$N = \{n_1 = 1; n_2 = 2; n_3 = 3, \dots, n_{M-1} = M - 1; n_M = M\}. (4)$$

Приближение контура $L(n)$ будем осуществлять параметрически заданной функцией

$$\tilde{L}(n) = \begin{cases} \tilde{X} = \tilde{X}(n); \\ \tilde{Y} = \tilde{Y}(n), \end{cases} \quad (5)$$

определенной на непрерывной области $n \in [n_1; n_M]$. При этом функции $\tilde{X}(n)$ и $\tilde{Y}(n)$ зададим как результат сплайн-интерполяции полиномами третьего порядка узлов (2) и (3) на каждом из интервалов $[n_i; n_{i+1}]$.

Соответственно,

$$\tilde{X}(n) = \{\tilde{X}_i(n) = x_i + \sum_{j=1}^3 c_{xij} (n - n_i)^j\}; \quad \tilde{Y}(n) = \{\tilde{Y}_i(n) = y_i + \sum_{j=1}^3 c_{yij} (n - n_i)^j\}, \quad (6)$$

где $i = 1..M-1$.

Выбор такого приближения контура L обусловлен быстроедействием данного метода при его программной реализации (скорость порядка $O(M)$, в сравнении, например, со скоростью порядка $O(M^2)$ для полиномиальной или рациональной интерполяции), низким порядком полинома при высокой точности приближения даже для осциллирующих функций. При этом, поскольку ограничений на количество и регулярность узлов M нет, последняя величина может определяться из удовлетворительного соотношения точности приближения и времени выполнения вычислений.

В тоже время, данный вид интерполяции позволяет получать гладкие функции $\tilde{X}(n)$ и $\tilde{Y}(n)$ с непрерывными первыми и вторыми производными, что важно для будущего построения модели динамики контура. Кроме того, рассмотрение этих функций как периодических, что возможно в силу (2) и (3), позволяет достичь этого свойства и в точке сшивки контура [3]. При этом, будучи заданной параметрически, сама функция $\tilde{L}(n)$ может быть произвольной, в том числе негладкой.

Процедура нахождения коэффициентов c_{xij} и c_{yij} где $i=1..M-1$; $j=1,2,3$ из (6) предусматривает [3] решение системы линейных уравнений неразрывности сплайн-функции, ее первой и второй производных в узлах интерполяции

$$\tilde{X}_i^{(j)}(n_{i+1}) = \tilde{X}_{i+1}^{(j)}(n_{i+1}), \quad j=0, 1, 2; \quad i=1..M-2; \quad (7)$$

$$\tilde{Y}_i^{(j)}(n_{i+1}) = \tilde{Y}_{i+1}^{(j)}(n_{i+1}), \quad j=0, 1, 2; \quad i=1..M-2, \quad (8)$$

дополненной условиями периодической сшивки

$$\tilde{X}_{M-1}^{(j)}(n_M) = \tilde{X}_1^{(j)}(n_1), \quad j=0, 1, 2; \quad (9)$$

$$\tilde{Y}_{M-1}^{(j)}(n_M) = \tilde{Y}_1^{(j)}(n_1), \quad j=0, 1, 2. \quad (10)$$

В совокупности (7) – (10) дают $6 \times (M-1)$ линейных уравнений относительно такого же количества неизвестных коэффициентов. Соответственно, данная система имеет однозначное решение и, таким образом, контур области приближенно может быть определен двумя матрицами коэффициентов $\|c_{xij}\|$ и $\|c_{yij}\|$, где $i=1..M-1$; $j=1..3$.

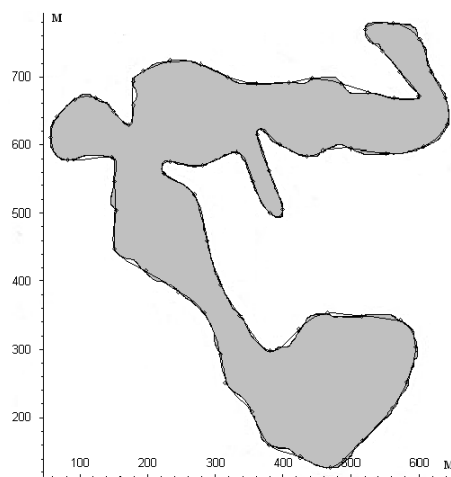
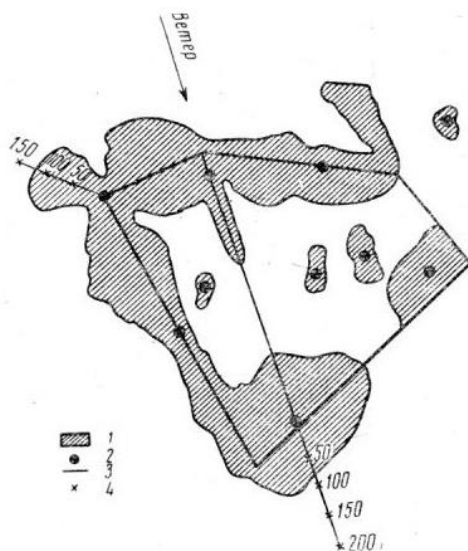


Рис. 1. Изображение области лесного пожара [4]

Рис. 2. Контур пожара и результат интерполяции на 71 узле, полученном в «ручном режиме»

Осуществленная программная реализация модели (1)-(10) позволила провести процедуру отыскания уравнения контура зоны ЧС.

На рис. 1 приведен контур реального лесного пожара, имевшего место при проведении эксперимента, описанного в работе [4]. Данный контур был проинтерполирован на множестве узлов, полученных в «ручном режиме». На рис. 2 представлен результат его интерполяции.

Очевидно, что параметры алгоритма получения множества (1), количество и регулярность узлов интерполяции M , определяют точность приближения сплайн-интерполяцией реального контура. В связи с этим возникает необходимость дополнительного исследования данной зависимости.

Выводы. Впервые предложена математическая модель замкнутого контура зоны чрезвычайной ситуации в виде параметрически заданной функции, каждая из компонент которой есть результат сплайн-интерполяции полиномами третьего порядка на множестве узлов, принадлежащих контуру. Область применения данной модели не ограничивается описанием зоны ЧС, а может быть использована в геодезии, картографии, при распознавании образов и т.д.

Перспективы дальнейших исследований связаны с выбором алгоритма получения множества узлов интерполяции и выяснения влияния его параметров на точность приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доррер Г.А. Математические модели динамики лесных пожаров. М.: Лесная пром-сть, 1979. - 160 с.
2. Абрамов Ю.А., Тарасенко А.А. Моделирование пространственной динамики природной чрезвычайной ситуации // Проблемы надзвичайних

ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. Вип. 5. – Харків: УЦЗУ, 2007.- С. 241-245.

3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1981. – 720 с.

4. Валендик Э.Н. Ветер и лесной пожар. М.: Наука, 1968. – 118 с.