

*Semkiv Oleg Mikhaylovich,
National University of Civil Protection of Ukraine, vice rector
E-mail: legooleg1@rambler.ru*

FEATURES OF THE GEOMETRICAL OSCILLATION TRAJECTORIES OF THE 2D-SPRING PENDULUM WEIGHT

*Семків Олег Михайлович,
Національний університет цивільного захисту України, проректор
E-mail: legooleg1@rambler.ru*

ОСОБЛИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ ТРАЕКТОРІЇ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ 2D-ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Постановка проблеми. Пружинним маятником називають коливальну систему з пружиною (або її замінником — деяким еластиком), що закріплена одним кінцем стаціонарно, а на іншому кінці знаходиться вантаж певної маси, який коливається завдяки пружним зусиллям пружини. При цьому вважається, що конструктивно забезпечується поперечне «не згинання» пружини, і що вона розташовується горизонтально або вертикально. Тобто коливання здійснюються лише завдяки пружним властивостям пружини.

В літературі 2d-пружинним маятником називають¹ аналогічну коливальну систему, яка від наведеної відрізняється способом коливання.

А саме, у 2d-пружинному маятнику коливання тіла пружини здійснюється навколо стаціонарно закріпленого кінця у площині, подібно до звичайного маятника (рис. 1).

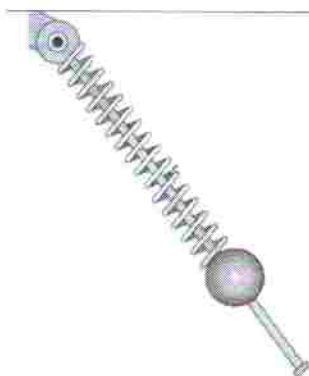


Рис. 1. 2d-пружинний маятник

Зрозуміло, що у першому наближенні на характер коливань 2d-пружинного маятника впливатимуть три головних параметри цієї коливальної системи: маса вантажу m , початкова довжина пружини у ненавантаженому стані l_0 , а також коефіцієнт жорсткості k пружини (опором повітря та тертям знехтуємо).

При таких коливаннях цікавість викликає геометрична форма траєкторії переміщення по площині (центру) вантажу. Її розгляд дозволить аналізувати (подібно до відомих фігур Ліссажу) характер коливань 2d-пружинного маятника.

¹ Broucke R., Baха P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system. // Celestial mechanics. – September 1973. – Volume 8, Issue 2. – P. 261–267.

Постановка завдання. Розробити метод визначення геометричної форми траєкторії переміщення по площині (центру) вантажу 2d-пружинного маятника залежно від маси вантажу m , початкової довжини пружини L_0 та її коефіцієнта жорсткості k .

Основна частина. Описувати коливання 2d-пружинного маятника будемо¹ за допомогою системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = -\frac{2\frac{d}{dt}L(t)\frac{d}{dt}\theta(t) + 9,81\sin(\theta(t))}{L(t) + L_0};$$

$$\frac{d}{dt}L(t) = (L(t) + L_0)\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 - \frac{kL(t)}{m} + 9,81\cos(\theta(t)).$$
(1)

Тут k — коефіцієнт жорсткості пружини; m — маса маятника; L_0 — початкова довжина маятника.

Розв'язувати систему рівнянь будемо одним з чисельних методів, наприклад, Рунге-Кутти, з такими параметрами $k = 25,6$; $m = 1$; $L_0 = 1$ і такими початковими умовами: кут початкового відхилення $\theta_0 = 0$; швидкість початкового відхилення тіла пружини $D\theta_0 = 0,5$; швидкість початкового подовження тіла пружини $DL_0 = 0$ (порівняти з²).

Одержаний розв'язок системи рівнянь (1) дозволяє за знайденими дискретними значеннями в моменти часу t визначати значення кутів відхилення $\theta(t)$, а також значення довжин тіла пружини $L(t)$. Це дозволяє побудувати на площині Oxy дискретну послідовність точок, після сполучення яких отримуємо слід від коливання вантажу (рис. 2). При цьому:

$$x = (L(t) + L_0)\sin(\theta(t)); \quad y = -(L(t) + L_0)\cos(\theta(t)).$$
(2)

На рис. 2 наведено зображення типового сліду від коливання вантажу. Якщо виникає задача аналізу властивостей траєкторії коливання вантажу, то для цього необхідно вміти визначати значення трійок параметрів k , m і L_0 , які б забезпечили потрібну форму траєкторії.

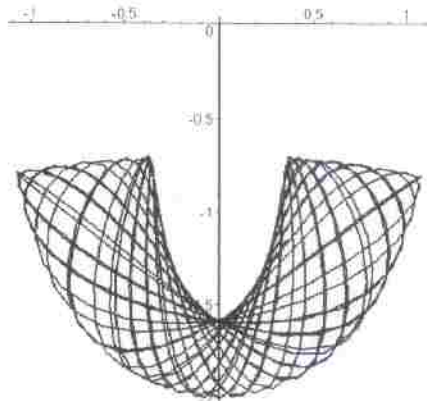


Рис. 2. Слід від коливання вантажу

Визначати значення трійок параметрів k , m і L_0 пропонується шляхом побудови фазових траєкторій в площинах значень параметрів $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ і $\{L(t), \dot{L}(t)\}$, де крапкою позначено похідну по t .

¹ Broucke R., Baer P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system. // Celestial mechanics. – September 1973. – Volume 8, Issue 2. – P. 261–267.

² Gavin Henri P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints. CEE 541. Structural Dynamics – Duke University, 2014. – 23 p.

Зазначимо, що фазова траєкторія на фазовій площині є ортогональною проекцією інтегральної кривої з фазового простору $\{\theta(t), \dot{\theta}(t), t\}$ чи $\{L(t), \dot{L}(t), t\}$, яка змінює свою форму залежно від зміни значень одного з параметрів k , m або L_0 при фіксованих двох інших. Критичне значення певного параметра відповідатиме випадку, коли інтегральна крива прийме форму, за якою її точки будуть взаємопроекційними. Тобто на фазовій площині вони матимуть однакові (або близькі) координати. Під критичним тут розуміємо значення параметра, при якому вигляд коливань 2d-пружинного маятника зміниться на якісному рівні, що наочно можна спостерігати за зміною характеру сліду від коливання вантажу.

Визначити взаємопроекційні точки інтегральної кривої пропонується за допомогою побудови послідовності анімаційних зображень фазових траєкторій на фазовій площині. Нехай (як приклад) фіксованими будуть параметри m і L_0 , а параметр k буде змінним. Тут обрано варіант найменш досліджених коливань - залежності від коефіцієнта жорсткості пружини.

Якщо на фазовій площині розглянути послідовність фазових траєкторій як результату зміни параметра t , то наочно вибір його критичного значення виглядає «як наведення на різкість» зображення з «плутанини» фазової траєкторії. При цьому критичних значень може бути декілька.

Отже, маємо такий алгоритм визначення критичних значень параметра.

Крок 1. Фіксуємо значення всіх параметрів, що впливають на характер коливань, крім одного, який назвемо керуючим.

Крок 2. Складаємо програму побудови послідовності анімаційних зображень фазових траєкторій залежно від значення керуючого параметра.

Крок 3. Визначаємо моменти, коли фазова траєкторія утвориться взаємопроекційними точками інтегральної кривої, що дозволяє визначити значення керуючого параметра.

Крок 4. За визначеним значенням критичного параметру перевіряємо коливання 2d-маятника шляхом уявлення сліду від коливання вантажу.

Крок 5. При необхідності за кроком 3 визначасмо наступне значення керуючого параметра або закінчуємо обчислення.

В результаті виконання алгоритму буде визначено послідовність критичних значень керуючого параметра.

Проілюструємо алгоритм на прикладі, розпочатому вище. Зафіксуємо значення параметрів $m = 1$ і $L_0 = 1$. Керуючим оберемо параметр k . Після розгляду анімаційних змін зображень фазових портретів залежно від значення k отримано його перше критичне значення $k = 22,88$.

На рис. 3 і 4 наведено відповідні фазові портрети, а на рис. 5 – зображення сліду від коливання вантажу при зазначених параметрах.

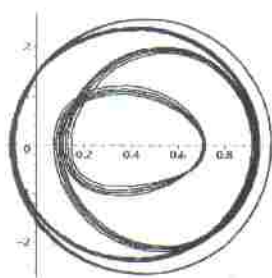


Рис. 3. Фазова траєкторія в координатах $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ при $k = 22,88$

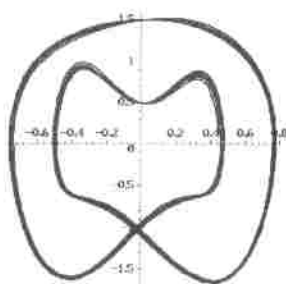


Рис. 4. Фазова траєкторія в координатах $\{L(t), \dot{L}(t)\}$ при $k = 22,88$

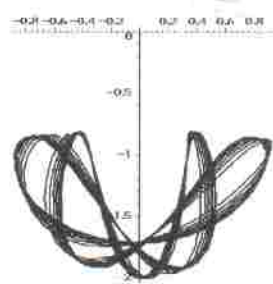


Рис. 5. Слід від коливання вантажу при значеннях $m = 1; L_0 = 1; k = 22,88$

На рис. 6–8 наведено аналогічні результати для критичного значення параметра $k = 25,08$; а на рис. 9–11 — для значення параметра $k = 28,82$.

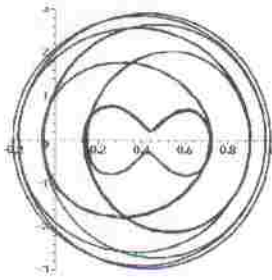


Рис. 6. Фазова траєкторія в координатах $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ при $k = 25,08$

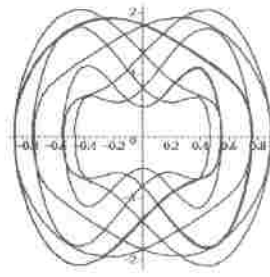


Рис. 7. Фазова траєкторія в координатах $\{L(t), \dot{L}(t)\}$ при $k = 25,08$

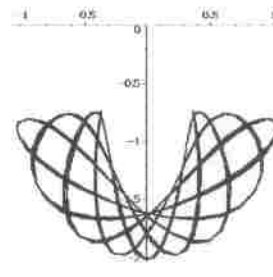


Рис. 8. Слід від коливання вантажу при значеннях $m = 1; L_0 = 1; k = 25,08$

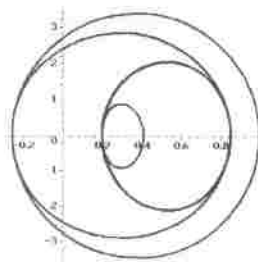


Рис. 9. Фазова траєкторія в координатах $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ при $k = 28,82$

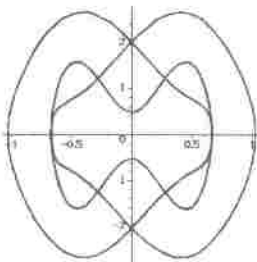


Рис. 10. Фазова траєкторія в координатах $\{L(t), \dot{L}(t)\}$ при $k = 28,82$

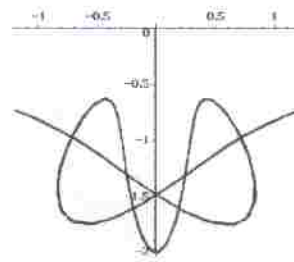


Рис. 11. Слід від коливання вантажу при значеннях $m = 1; L_0 = 1; k = 28,82$

Таким чином, отримано зображення сліду від коливання вантажу з властивістю самоповернення (рис. 11).

Знайдене критичне значення $k = 22,88$ коефіцієнту жорсткості пружини обрано як початкове для визначення критичних значень маси $m = 0,8$ (рис. 12–14) і $m = 1,25$ (рис. 15–17). Аналогічні кроки можна здійснити для $k = 25,08$ і $k = 28,82$, отримавши нові варіанти сліду від коливання вантажу.

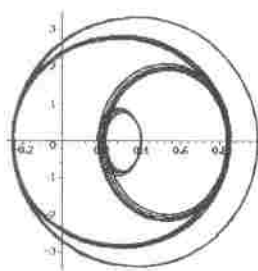


Рис. 12. Фазова траєкторія в координатах $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}$ при $m = 0,8; k = 22,88$

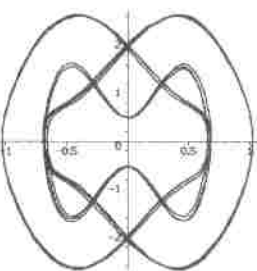


Рис. 13. Фазова траєкторія в координатах $\{L(t), \dot{L}(t)\}$ при $m = 0,8; k = 22,88$

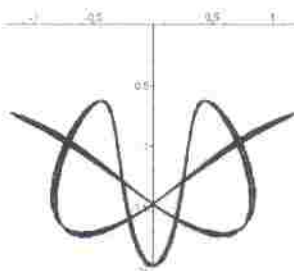


Рис. 14. Слід від коливання вантажу при значеннях $m = 0,8; L_0 = 1; k = 22,88$

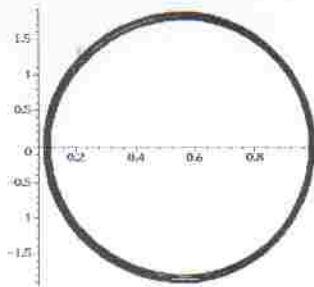


Рис. 15. Фазова траєкторія в координатах $\{\theta(t), \theta'(t)\}$ при $m = 1,25$; $k = 22,88$

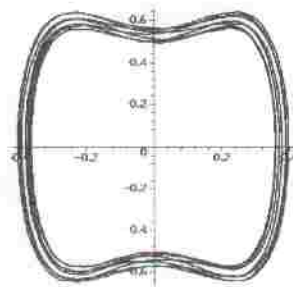


Рис. 16. Фазова траєкторія в координатах $\{L(t), L'(t)\}$ при $m = 1,25$; $k = 22,88$



Рис. 17. Слід від коливання вантажу при значеннях $m = 1,25$; $L_0 = 1$; $k = 22,88$

Наведемо елементи програми, яка дозволяє будувати зображення сліду від коливання вантажу при обраних значеннях m , L_0 і k .

Систему диференціальних рівнянь задаємо у такому вигляді:

$$\text{deq1} := \text{diff}(\text{theta}(t), t) = -(2 * \text{diff}(L(t), t) * \text{diff}(\text{theta}(t), t) + 9.81 * \sin(\text{theta}(t))) / (L_0 + L(t));$$

$$\text{deq2} := \text{diff}(L(t), t) = (L_0 + L(t)) * \text{diff}(\text{theta}(t), t)^2 - c * L(t) / m + 9.81 * \cos(\text{theta}(t)).$$

Розв'язуємо систему з початковими умовами:

$$\text{sol} := \text{dsolve}(\{\text{deq1}, \text{deq2}, L(0) = L_0, \text{theta}(0) = \text{theta}_0, (D(L))(0) = DL_0, (D(\text{theta}))(0) = D\text{theta}\}, \{L(t), \text{theta}(t)\}, \text{numeric}, \text{output} = \text{listprocedure}).$$

Упорядковуємо отриманий розв'язок:

$$\text{solu} := \text{subs}(\text{sol}, L(t)); \quad \# \text{ розв'язок } L(t)$$

$$\text{solv} := \text{subs}(\text{sol}, \text{theta}(t)); \quad \# \text{ розв'язок } \theta(t)$$

Підготуємо масив з N точок для побудови сліду за умовний час T :

```
N:= 500; T:= 40; x0:= 0; y0:= 0;
for i from 0 to N do
uu:= solu (T*i/N); vv:= solv (T*i/N);
x1:= (L0+uu)*sin (vv);
y1:= -(L0+uu)*cos (vv);
Dr [i]:= line ([x0, y0],, scaling=CONSTRAINED);
x0:= x1; y0:= y1;
end do;
```

В результаті будемо зображення сліду від коливання вантажу:

```
display (seq (Dr [i], i = 0..N)).
```

Висновок. Застосування фазових траєкторій дозволяє спрогнозувати геометричну форму траєкторії переміщення вантажу 2d-пружинного маятника залежно від головних параметрів коливальної системи.

Список літератури:

1. Broucke R., Baха P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system.//Celestial mechanics. – September 1973. – Volume 8, Issue 2. – P. 261–267.
2. Gavin Henri P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints. CEE 541. Structural Dynamics – Duke University, 2014. – 23 p.

¹ Broucke R., Baха P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system.//Celestial mechanics. – September 1973. – Volume 8, Issue 2. – P. 261–267.

Certificate of Achievement

Semkiy Oleg

HAS PARTICIPATED SUCCESSFULLY
IN THE 7th INTERNATIONAL CONFERENCE
ON EURASIAN SCIENTIFIC DEVELOPMENT,

HELD IN VIENNA, AUSTRIA, NOVEMBER 30th, 2015

