

УДК 514.18

ПЗ.8

Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет – Вип.4, т.55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – 297 с.

Друкуються за рішенням Вченої Ради ТДАТУ,  
Протокол № 5 від 27.11.2012 р.

У вилуску наукових праць друкуються матеріали за результатами досліджень, проведених у 2012 р. та присвячених геометричному моделюванню кривих ліній та поверхонь, що відображають явища та процеси у виробництві та експериментальних дослідженнях. В окремих роботах розглядаються деякі аспекти теорії апроксимації та перетворень.

Дослідження фахівців Таврійського державного агротехнологічного університету проведені у відповідності з науково-технічною програмою «Моделювання явищ та процесів в АПК» (№ держреєстрації 0102 У 000695)

Вилусок призначений для науковців, інженерів, аспірантів і студентів.

Редакційна колегія праць ТДАТУ:

Корнея В.М. – к.т.н., професор, ректор ТДАТУ (головний редактор);  
Нашисто В.Г. – чл.-кор. НААНУ, д.т.н., професор (заст. головного редактора);  
Дворців В.Г. – к.т.н., професор, (виповідальний секретар); Дідур В.А. – д.т.н., професор;  
Куливарьов А.С. – чл.-кор. УААН, д.т.н., професор;  
Найдиш А.В. – д.т.н., професор; Никифорова Л.С. – д.т.н., професор; Овчаров В.В. – д.т.н., професор; Павченко А.І. – д.т.н., професор; Рогач Ю.П. – к.т.н., професор;  
Сколяр О.Г. – к.т.н., доцент; Тарасенко В.В. – д.т.н., професор;  
Щадилий В.В. – д.т.н., професор; Ялтанник Ф.Ю. – к.т.н., професор.

Відповідальний за вилусок – д.т.н., професор Найдиш А.В.  
(кафедра «Прикладна математика та комп'ютерні технології»)

Адреса редакції: ТДАТУ  
Просп. Б. Хмельницького 18,  
м. Мелітополь, Запорізька обл.,  
72312, Україна

ISSN 2078-0877

© Таврійський державний агротехнологічний університет, 2012.

УДК 515.2

## МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ І ПРОСТОРОВИХ СПІРАЛЕЙ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФОРМУЛ СЕРРЕ-ФРЕНЕ

Атарков О.Ю.

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
(м. Миколаїв)

Тел. (0512) 39-73-82

**Анотація** – пропонується метод моделювання плоских і просторових спіралей із застосуванням рівнянь Серре-Френе, які інтегруються числовим методом Рунге-Кутти за умови, що кривинна і скрут підпорядковуються визначеним залежностям від довжини дуги обводу.

**Ключові слова** – спіраль, плоска і просторова, формули Серре-Френе, реалізація числа.

**Постановка проблеми.** При моделюванні плоских і просторових кривих дуже часто застосовуються їх параметричні рівняння, в яких за параметр приймається довжина дуги. Згідно з термінологією прийнятою в диференціальній геометрії, подібні рівняння називаються натуральними рівняннями кривих. Не зважаючи на розмаїття підходів до побудови кривих, які можна знайти в науковій літературі, проблема розробки нових методів їх моделювання є і по цей час актуальною, такою, що має теоретичне й практичне значення. Зокрема, це стосується спіральних кривих, які знайшли широке застосування в техніці. Спіралями Корно, які відомі також як клоїоди, моделюються лопатки турбін і компресорів, обводи суден, ділянки залізничних і автомобільних доріг тощо. Фахівців, які займаються проектуванням указаних об'єктів, у клоїоді приваблює те, що їх кривина прямопропорційно залежить від довжини кривої.

Але, на жаль, спірالی Корно – це плоскі криві, а в деяких практичних застосуваннях бажане мати просторові криві, наприклад, при проектуванні автомобільних і залізничних доріг на ділянках, де необхідно забезпечити плавний поворот шляху з одночасним його підйомом або спуском. Існують інші галузі техніки, де необхідно моделювати різноманітні спіральні криві у тому числі і просторові. Так, у сучасній компресорній техніці набули поширення спіральні компресори – "zero compressor" за західною термінологією. Вони

© Атарков О.Ю.

ПРО ОПТИМАЛЬНУ ФОРМУ ЛОПАТКИ  
РОТОРНОГО МЕТАЛЬНИКА ГРУНТУ

Шатохин В.М., д.т.н.

Харківський національний університет будівництва і архітектури

Семків О.М., к.т.н.,

Попова А.Н.

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)

Тел. 097-464-37-77

**Анотація** – запропоновано метод визначення оптимальної форми профілю лопатки роторного металельника ґрунту, який базується на розв'язанні задачі про брахістохрону для поля відцентрових сил інерції.

**Ключові слова** – металельник ґрунту, обертовий ротор, форма профілю лопатки, відцентрова сила інерції, брахістохрона, функціонал часу руху, рівняння Ейлера.

**Постановка проблеми.** При створенні технічних пристроїв певного класу виникає проблема вибору форми напрямних, у яких рухаються матеріальні частки (наприклад, ґрунту) під дією відцентрових сил. Зокрема, актуальною є проблема створення ґрунтометальних механізмів, використовуваних для гасіння лісових пожег у місцевостях з дефіцитом джерел води [1-5]. На практиці застосовують роторні ґрунтометальники [2-5], які за допомогою прикріплених до обертового ротора лопаток викидають частки ґрунту до зони загоріння. Технологічні характеристики цих пристроїв істотно залежать від геометричної форми й розташування лопаток. Це вказує на актуальність дослідження форми профілю лопаток – включаючи і пошук їхньої оптимальної форми.

**Аналіз останніх досліджень.** У роботах [2,3,5] проведені дослідження з вибору параметрів ґрунтометальника, профіль лопаток яких є прямолінійним. Перспективним буде використання лопаток з криволінійними профілями [4]. Методи вибору їхньої форми й аналізу руху часток ґрунту по них до цього часу не досить розроблені. Задача вибору оптимальної форми лопатки може бути формалізована як визначення форми кривої у полі відцентрових сил інерції, яка забезпечує мінімальний час руху. Прототипом є задача про

брахістохрону у полі відцентрових сил. Зазначимо, що класична задача про брахістохрону для однорідного поля сил ваги була відправною точкою при створенні варіаційного числення [6]. Відомі [7] спроби розв'язання аналогічних задач для випадку центральної сили тяжіння й сталої за величиною центральної сили відштовхування. У статті [8] викладено метод знаходження траєкторії точки за умови мінімізації часу руху при дії відцентрової сили інерції.

**Формування цілей статті.** Розробити метод складання і розв'язання функціонала часу для задачі про брахістохрону у полі відцентрових сил інерції, та визначити оптимальні за геометричною формою профілі лопаток металельників ґрунту.

**Основна частина.** Розв'язання задачі про функціонал часу руху у полі відцентрових сил слід проводити в полярній системі координат.

**Побудова функціонала часу.** Нехай точки  $A$  і  $B$  розташовані в центральному полі сил відштовхування – відцентрових сил із центром у точці  $O$  (рис. 1). Проведемо через точки  $A$ ,  $B$  і центр  $O$  площину й розглянемо криві, що з'єднують ці точки й розташовані на ланій площині. Виберемо із цих кривих таку, щоб матеріальна точка, яка виходить із  $A$  зі швидкістю  $v_0=0$  і рухається лише під дією відцентрової сили, досягне точки  $B$  за мінімальний час.

Уведемо полярну систему координат  $\rho$ ,  $\varphi$  із центром у зазначеній точці. Поточні координати точки  $M$  позначимо, як  $\rho$  і  $\varphi$ ; координати точок  $A$  і  $B$  нехай будуть відповідно  $(\rho_A, \varphi_A)$  й  $(\rho_B, \varphi_B)$ . Проекція відцентрової сили інерції матеріальної точки, пов'язаної з обертовим тілом, на напрямок радіуса  $\rho$  має вигляд

$$F_\rho = m a_\omega = m \omega^2 \rho, \quad (1)$$

де  $m$  – маса точки;  $a_\omega = \omega^2 \rho$  – відцентрове (нормальне) прискорення;  $\omega$  – кутлова швидкість.

Тоді вираз для потенціальної енергії відцентрової сили інерції можна представити так [9]:

$$\Pi = \int_\rho^0 F_\rho d\rho = m \omega^2 \int_\rho^0 \rho d\rho = -\frac{m \omega^2}{2} \rho^2. \quad (2)$$

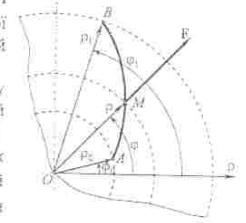


Рис. 1. Схема для побудови брахістохрони у полі відцентрових сил.

При записі формули (2) приймалися, що початковим положенням для визначення потенціальної енергії є відштовхувальний центр (точка  $O$ ), де потенціальна енергія дорівнює нулю.

Якщо знехтувати силами тертя й опору, то має місце закон збереження енергії у відносному русі у рівномірно обертової навколо нерухомої осі системи координат [9]:

$$T + \Pi = h = \text{const}, \quad (3)$$

де  $T = \frac{1}{2}mv^2$  — кінетична енергія точки у відносному русі стосовно

обертової системи координат;  $h = -\frac{m\omega^2}{2}\rho_0^2$  — постійна енергія.

Надалі вважатимемо, що у формулі (3) враховується тільки потенціальна енергія відцентрової сили інерції. З погляду впровадження це найбільш важливий випадок. У технологічних пристроях кутова швидкість така, що вплив сил ваги на рух точки є незначним. При аналізі руху в горизонтальній площині це застереження взагалі виявляється зайвою.

З урахуванням виразу (2) формула (3) набуває вигляду

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 = -\frac{m\omega^2}{2}\rho_0^2. \quad (4)$$

Звідки маємо формулу для обчислення швидкості точки

$$v = \omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (\rho \geq \rho_0). \quad (5)$$

З визначення алгебраїчної величини швидкості (проекції швидкості на дотичну до траєкторії)  $v = v_t = \frac{ds}{dt}$ , виразу для квадрата диференціала дуги у полярних координатах  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$  і формули (5) слідує, що

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi, \quad (6)$$

де  $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$ .

При відліку дуги у напрямку руху точки диференціал шляху збігатиметься з диференціалом дугової координати  $ds$ , а модуль швидкості точки з її алгебраїчною величиною  $v = v_t$ .

Інтегруючи, одержимо функціонал

$$\mathcal{I}[\rho(\varphi)] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi. \quad (7)$$

Пошук екстремуму функціонала. Для підінтегральної функції інтеграла (7) введемо позначення:

$$P = P(\rho, \rho') = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}. \quad (8)$$

На кривій, яка реалізує екстремум розглянутого функціонала (7), повинні виконуватися умови, яка випливає з необхідних умов екстремуму функціонала [6]:

$$P_\rho - \frac{d}{d\varphi} P_{\rho'} = 0, \quad (9)$$

де  $P_\rho, P_{\rho'}$  — похідні від  $P$  відповідно по  $\rho$  й  $\rho'$ .

Таким чином, шукана функція  $\rho = \rho(\varphi)$  є розв'язанням диференціального рівняння другого порядку (9), або з використанням позначення  $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$ , в розгорнутому вигляді має вигляд:

$$P_\rho - P_{\rho\rho''} - P_{\rho\rho'}\rho'' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (10)$$

Рівняння (10) є рівнянням Ейлера. У розглянутому випадку  $P$  залежить лише від  $\rho$  і  $\rho'$ , тому фактично воно є більш компактним

$$P_\rho - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (11)$$

тому що  $P_{\rho\rho''} = 0$ .

Якщо помножити всі компоненти рівняння на  $\rho'$ , то ліва частина перетворюється в точну похідну:

$$\frac{d}{d\varphi} (\rho - \rho' P_{\rho'}).$$

Отже, рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$\rho - \rho' P_{\rho'} = \frac{1}{C}. \quad (12)$$

У розглянутому випадку:

$$P_{\rho'} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}},$$

тому формула (12) набуває вигляду

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho^2 + \rho^2}} = \frac{1}{C} \quad (13)$$

З виразу (13) після спрощень одержуємо:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)} - 1}. \quad (14)$$

Диференціальне рівняння (14) допускає аналітичний розв'язок (занадто громіздкий виклад формул тут не наводиться):

$$\varphi = \begin{cases} \arctg z + \frac{1}{z} + C_1, & C^2 = 1, \\ \arctg z - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \arctg z - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{C^2-1}}{z + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (16)$$

Для знаходження постійних  $C$  і  $C_1$  з врахуванням (16) виносимо крайові умови:

$$\text{при } \varphi = \varphi_0, \quad \rho = \rho_0, \quad z = z(\rho_0) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_0^2} - 1} = \infty; \quad (17)$$

$$\text{при } \varphi = \varphi_1, \quad \rho = \rho_1, \quad z = z(\rho_1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (18)$$

На лівій границі співвідношення (15) набувають вигляду

$$\varphi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 = 1, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 < 1, \\ \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (19)$$

З виразів (19) слідує, що

$$C_1 = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 = 1, \\ \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2}, & C^2 < 1, \\ \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (20)$$

На правій границі співвідношення (15) дають

$$\varphi_1 = \begin{cases} \arctg z_1 + \frac{1}{z_1} + C_1, & C^2 = 1, \\ \arctg z_1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \arctg z_1 - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогічно (20) для  $C_1$  з виразів (21) маємо

$$C_1 = \begin{cases} \varphi_1 - \arctg z_1 - \frac{1}{z_1}, & C^2 = 1, \\ \varphi_1 - \arctg z_1 + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}}, & C^2 < 1, \\ \varphi_1 - \arctg z_1 + \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right|, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (22)$$

Для практики інтерес представляють випадки, коли  $C^2 < 1$  і  $C^2 > 1$ .

Вибір оптимальної форми лопаток ґрунтометального механізму. На рис. 2 показана схема ґрунтометального механізму: 1- ступиця; 2- кільце; 3- спиця; 4- криволінійна лопатка. Передбачається, що металік обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  проти ходу годинникових стрілок. Радіуси  $R_1$  і  $R_2$  являють собою радіуси кіл, що проходять через задню й передню крайки лопатки. У викладеній теорії їм відповідають полярні радіуси  $\rho_0$  й  $\rho_1$ .

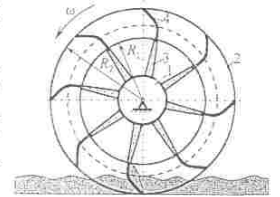


Рис. 2. Схема ґрунтометального механізму.

В даній роботі обмежимося аналізом розв'язку при  $C^2 < 1$ . Для

знаходження константи  $C$  скористаємося трансцендентним рівнянням, що випливає з порівняння правих частин відповідних рядків виразів (22) і (20) за умови врахування крайової умови (18)

$$f(x) = \varphi_1 - \arctg \sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctg \sqrt{\frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{1-x}} - \varphi_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{\pi}{2} = 0, \quad (23)$$

де  $x = C^2$ .

У середовищі MathCAD [10] при наявності графіка  $f(x)$  (рис. 3) корінь функції зручно знаходити з використанням убудованої функції  $\text{root}(f(x), x, a, b)$ . Для кореня  $f(x)$  (тестовий варіант розраховано з параметрами:  $\rho_0 = 0,496 \text{ м}$ ,  $\rho_1 = 0,632 \text{ м}$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 20^\circ$ ) отримане значення  $x^* = 0,393 < 1$ , якому відповідає

$C = \sqrt{x^*} = 0,627$ . У відповідності із другим виразом (20) або (22) з урахуванням (18) для  $C_1$  маємо

$$C_1 = \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2} = \varphi_1 - \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \sqrt{\frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{1-C^2}} = 0,445.$$

Знайдені значення постійних  $C$  і  $C_1$  за допомогою формул (15) і (16) дозволяють записати вираз для шуканої функції:

$$\varphi(\rho) = \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \sqrt{\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{1-C^2}} + C_1, \quad (24)$$

Графік цієї функції представлений на рис. 4, а; більше зручний для аналізу графік оберненої функції  $\rho(\varphi)$  – на рис. 4, б [11].

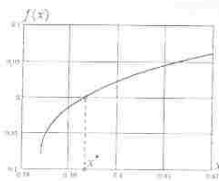


Рис. 3. Графік функції  $f(x)$ .

На завершення, наведемо графіки залежностей  $\rho(\varphi)$  у полярній системі координат (рис. 5) для граничних значень  $\rho_0^*$ , які забезпечують можливість використання формули (24) ( $C^2 < 1$ ) для побудови розв'язків. Значення  $\rho_0^* = 0,632 \text{ м}$ , а кут  $\varphi_1$  приймався кратним  $20^\circ$ .

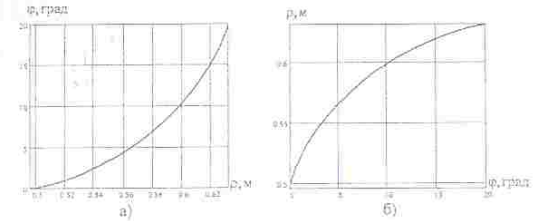


Рис. 4. Графіки функцій: а) –  $\varphi(\rho)$ ; б) –  $\rho(\varphi)$ .

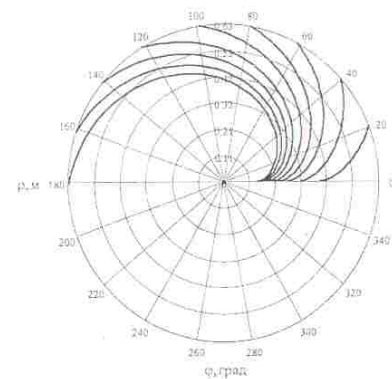


Рис. 5. Графіки функцій  $\rho(\varphi)$  для граничних значень  $\rho_0^*$  ( $C^2 < 1$ ) при різних значеннях  $\varphi_1$ .

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на детальне вивчення залежності властивостей оптимальних траєкторій від параметрів.