УДК 514.18

Семків О.М., канд. техн. наук,
Національний університет цивільного захисту України
Шатохін В.М., д-р. техн. наук,
Харківський національний університет будівництва й архітектури
Попова А.М., аспірант
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ОПИС РУХУ ЧАСТКИ ҐРУНТУ ПО ЛОПАТЦІ ІЗ ПРОФІЛЕМ БРАХІСТОХРОНИ У ПОЛІ ВІДЦЕНТРОВИХ СИЛ ІНЕРЦІЇ

Складено диференціальне рівняння руху частки ґрунту по криволінійній лопатці ґрунтометального механізму з урахуванням сил тертя. Розглянуто лопатку із профілем оптимальної форми - брахістохрони в полі відцентрових сил, рівняння якої отримано в полярній системі координат.

Постановка проблеми. Надзвичайно важливими є наукові роботи, спрямовані за умови відсутності води на модернізацію технології ґрунтометання для ліквідації низових лісових пожеж. Адже існуючі конструкції ґрунтометальних механізмів недостатньо досконалі [1, 2]. Ряд переваг мають роторні ґрунтометателі [2, 3], де ґрунт у зону загоряння лісової підстилки потрапляє за допомогою лопаток, розташованих на обертовому роторі. Від форми й розташування лопаток істотно залежать технологічні характеристики пристроїв. Тому актуальними будуть дослідження, спрямовані на модернізацію засобів ґрунтометання для гасіння низових лісових пожеж.

Аналіз основних досліджень і публікацій. У роботах [2, 3] проведені комплексні дослідження з вибору раціональних параметрів ґрунтометателя із лопатками прямолінійного профілю. Перспективним представляється використання в ґрунтометателях криволінійних лопаток. Дослідження з обґрунтованого вибору їхньої раціональної форми й аналізу руху часток ґрунту по них у цей час відсутні.

Постановка завдання. Описати рух частки ґрунту по криволінійній лопатці ґрунтометального механізму з урахуванням сил тертя, коли форма профілю лопатки є брахістохроною відносно відцентрової сили інерції, записаної в полярній системі координат.

Основна частина. На рис. 1 показана загальна принципова схема ґрунтометателя, де цифрами позначено: 1– ступицю; 2 – кільце; 3 – спицю; 4 - криволінійну лопатку. Передбачається, що метальник обертається з кутовою швидкістю ω проти ходу годинникової стрілки.

Радіуси R_1 і R_2 являють собою радіуси кіл, що проходять через задню й передню кромки лопатки.

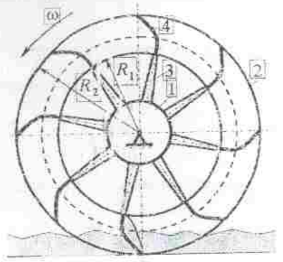

Рис. 1. Схема ґрунто-метального механізму

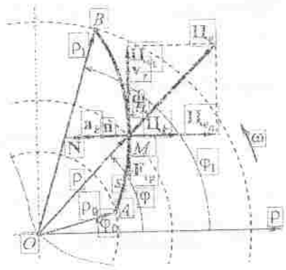

Рис. 2. Схема для запису рівняння руху частки ґрунту

Специфіка завдання полягає в тому, що рух необхідно вивчати в обертовій системі координат з використанням рівнянь динаміки відносного руху. Додаткові труднощі вносить та обставина, що аналітичний опис оптимальної траєкторії вдається одержати в полярній системі координат (рис. 2)

$$\rho=\rho(\varphi), \tag{1}$$

де ρ – полярний радіус; φ – полярний кут.

На рис. 2 частка ґрунту M зображена в поточному положенні з координатами (ρ, φ) на криволінійній лопатці *AB*. Точки *A* і *B* мають відповідно координати (ρ_1, φ_1) і (ρ_0, φ_0). У викладеній нижче теорії полярним радіусам ρ_0 і ρ_1 відповідають радіуси R_1 і R_2. Для прийнятого напрямку обертання ротора ґрунтометателя вектор кутової швидкості **ω** буде перпендикулярний площини рисунка і спрямований на читача.

В даній роботі використано такі позначення: **ф** – дотична, спрямована убік зростання дугової координати S; **n** – нормаль, спрямована убік увігнутості траєкторії; $\mathbf{v}_r$ – відносна швидкість, $\mathbf{a}_k=2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$ – коріолісове прискорення.

Для сил прийняті такі позначення: $\mathbf{\Phi}_e$ – переносна (відцентрова) сила інерції; $\mathbf{\Phi}_k$ – коріолісова сила інерції; N– нормальна реакція лопатки; $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – сила тертя ковзання, спрямована проти відносної швидкості.

Вирази для модуля сили $\mathbf{\Phi}_e$ і її проекції на напрямок полярного радіуса збігаються

$$\Phi_e = \Phi_{e_\rho} = ma_\omega = m\omega^2\rho, \tag{2}$$

де m – маса частки грунту; $a_\omega = \omega^2\rho$ – стрімке вздовж осі (нормальне) прискорення.

Для коріолісової сили інерції має місце формула:

$$\mathbf{\Phi}_k = -m\mathbf{a}_k, \tag{3}$$

а для її модуля з урахуванням виразу для коріолісового прискорення

$$\Phi_k = 2m\omega v_r, \tag{4}$$

де $v_r = \left|v_{r_\tau}\right|$ – модуль відносної швидкості; $v_{r_\tau} = \dfrac{ds}{dt}$ – проекція відносної швидкості на дотичну (тобто алгебраїчна величина швидкості).

Модулі сили тертя й нормальної реакції пов'язані відомим [5] співвідношенням

$$F_{\text{тр}} = Nf, \tag{5}$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання.

Для проекцій переносної (відцентрової) сили $\mathbf{\Phi}_e$ на дотичну Φ_{e_τ} й нормаль Φ_{e_n} мають місце формули

$$\Phi_{e_\tau} = \Phi_e \cos\alpha; \tag{6}$$

$$\Phi_{e_n} = -\Phi_e \sin\alpha, \tag{7}$$

де α – кут між вектором $\mathbf{\Phi}_e$ і одиничним вектором дотичній $\boldsymbol{\tau}$.

Можна показати [4], що для $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ справедливі вирази

$$\cos\alpha = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}; \tag{8}$$

$$\sin\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}. \tag{9}$$

Диференціальні рівняння відносного руху невільної матеріальної точки в природній формі при русі в площині будуть мати вигляд [5]

$$ma_{r_\tau} = \Phi_{e_\tau} - F_{\text{тр}}; \qquad ma_{r_n} = N - \Phi_{e_n} - \Phi_k, \tag{10}$$

де a_{r_τ}, a_{r_n} – проекції прискорення на дотичну й нормаль.

З урахуванням формул для дотичного й нормального прискорень

$$a_{r_\tau} = \frac{dv_{r_\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{11}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho_k} = \frac{v_{r_\tau}^2}{\rho_k} = \frac{1}{\rho_k}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{12}$$

рівняння можна записати інакше

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \Phi_{e_\tau} - Nf; \qquad \frac{m}{\rho_k}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = N - \Phi_{e_n} - \Phi_k, \tag{13}$$

де ρ_k – радіус кривини траєкторії.

Перетворимо рівняння (13) до рівняння для знаходження закону руху частки з врахуванням того, що рівняння траєкторії виявилося доцільним визначати в полярній системі координат.

Довжина дуги й радіус кривини кривої (1) обчислюється, відповідно, за формулами [6]:

$$s = s(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi; \tag{14}$$

$$\rho_k(\varphi)=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho'\rho''}, \tag{15}$$

де $\rho'=\dfrac{d\rho}{d\varphi}$, $\rho''=\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}$.

Тоді вираз для алгебраїчної величини швидкості й дотичного прискорення представимо так:

$$v_{r_\tau}=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{ds}{d\varphi}\dot{\varphi}; \tag{16}$$

$$a_{r_\tau}=\frac{dv_{r_\tau}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2s}{d\varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{ds}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d^2s}{d\varphi^2}\dot{\varphi}^2+\frac{ds}{d\varphi}\ddot{\varphi}, \tag{17}$$

де точкою позначена похідна за часом.

Із другого рівняння (13) для нормальної реакції з врахуванням виразів (4), (7), (9), (12), (15), (16) і (17) маємо

$$N=m\left[\frac{\dot{\varphi}^2}{\rho_k}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2-\frac{\omega^2\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}+2\omega\dot{\varphi}\frac{ds}{d\varphi}\right]. \tag{18}$$

Перепишемо тепер перше рівняння (13) з урахуванням формул (2), (8), (17) і (18) так:

$$m\left(\frac{d^2s}{d\varphi^2}\dot{\varphi}^2+\frac{ds}{d\varphi}\ddot{\varphi}\right)=m\frac{\omega^2\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}-m\left[\frac{\dot{\varphi}^2}{\rho_k}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2-\frac{\omega^2\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}+2\omega\dot{\varphi}\frac{ds}{d\varphi}\right]f. \tag{19}$$

Розділивши обидві частини виразу (19) на m, після нескладних перетворень, йому можна надати вигляд однорідного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами стосовно полярного кута $\varphi(t)$:

$$\ddot{\varphi}+\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{d^2s}{d\varphi^2}+\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho'\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}f\right)\dot{\varphi}^2+2\omega f\dot{\varphi}-\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^{-1}\frac{\omega^2\rho(\rho'+\rho f)}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}=0 \tag{20}$$

Рівняння (20) необхідно інтегрувати з початковими умовами: при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$.

Проблема вибору *оптимальної форми лопатки* може бути схематизована, як завдання визначення форми кривої у полі відцентрових сил інерції, яка забезпечує мінімальний час руху. Це нагадує постановку задачі про брахістохрону у фізичному полі відцентрових сил. Відомо, що класична задача про брахістохрону для однорідного поля сил ваги була відправною точкою при створенні варіаційного числення [7]. Методу побудови оптимальних траєкторій, коли на точку діє відцентрова сила інерції, присвячені роботи [11- 13].

У даній статті скористаємося одним з типів кривих, отриманих у результаті розв'язання аналогічного за змістом завдання [8]:

$$\varphi=\operatorname{arctg}z-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{1-C^2}}+C_1, \tag{21}$$

де

$$z=\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2-\rho_0^2}-1}; \tag{22}$$

$C^2<1$ – константа.

Для знаходження постійних C і C_1 з врахуванням виразу (22) випишемо крайові умови:

при $\varphi=\varphi_0$ і $\rho=\rho_0$,

$$z=z(\rho_0)=z_0=\sqrt{\frac{C^2\rho_0^2}{\rho_0^2-\rho_0^2}-1}=\infty; \tag{23}$$

при $\varphi=\varphi_1$ і $\rho=\rho_1$,

$$z=z(\rho_1)=z_1=\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}. \tag{24}$$

На лівій границі для функції (21) маємо

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\frac{\pi}{2}+C_1. \qquad (25)$$

звідки слідує, що

$$C_1=\varphi_0-\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right)\frac{\pi}{2}. \qquad (26)$$

На правій границі співвідношення (21) дає

$$\varphi_1=\operatorname{arctg} z_1-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}}+C_1. \qquad (27)$$

Із цього виразу аналогічно (25) для C_1 маємо

$$C_1=\varphi_1-\operatorname{arctg} z_1+\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}}. \qquad (28)$$

Для знаходження константи C скористаємося трансцендентним рівнянням, яке слідує з порівняння правих частин виразів (26) і (28) за умови врахування крайової умови (24)

$$f(x)=\varphi_1-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}}{\sqrt{1-x}}-\varphi_0+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\frac{\pi}{2}=0, \qquad (29)$$

де $x=C^2$.

Графік функції $f(x)$ показано на рис. 3; при цьому прийняті наступні параметри: $\rho_0=0{,}496\text{м}$, $\rho_1=0{,}632\text{м}$, $\varphi_0=0$, $\varphi_1=20^\circ$.

При наявності графіка корінь функції в середовищі MathCAD зручно знаходити з використанням штатної функції **root(f(x),x,a,b)** [10].

Для кореня в розглянутому випадку отримане значення $x^*=0{,}393<1$, якому відповідає $C=\sqrt{x^*}=0{,}627$. У відповідності із виразом (26) або (28) для C_1 маємо

$$C_1=\varphi_0-\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right)\frac{\pi}{2}=\varphi_1-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}+\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}}{\sqrt{1-C^2}}=0{,}445.$$

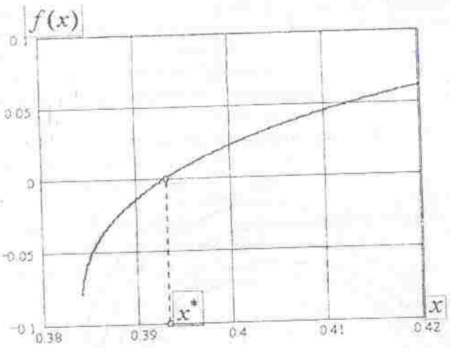

Рис. 3. Графік функції $f(x)$

Знайдені значення постійних C і C_1 за допомогою формул (21) і (22) дозволяють записати аналітичний вираз шуканої функції:

$$\varphi(\rho)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2-\rho_0^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2-\rho_0^2}-1}}{\sqrt{1-C^2}}+C_1. \qquad (30)$$

Графік цієї функції представлений на рис. 4, а; більш зручний для аналізу є графік оберненої функції $\rho(\varphi)$, зображений на рис. 4, б.

Побудова й інтегрування диференціального рівняння (20) при проведенні розрахунків має ряд особливостей, обумовлених тим, що аналітичне подання оптимальної траєкторії (30) записано в полярній системі координат, причому у оберненій формі. Аналітично розв'язати вираз (30) відносно ρ поки не вдається.

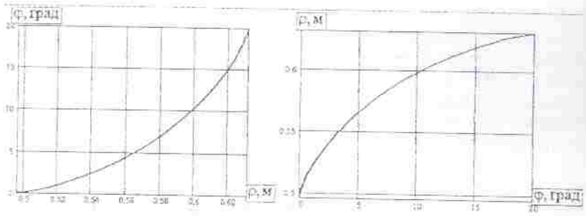

Рис. 4. Графіки функції (30)

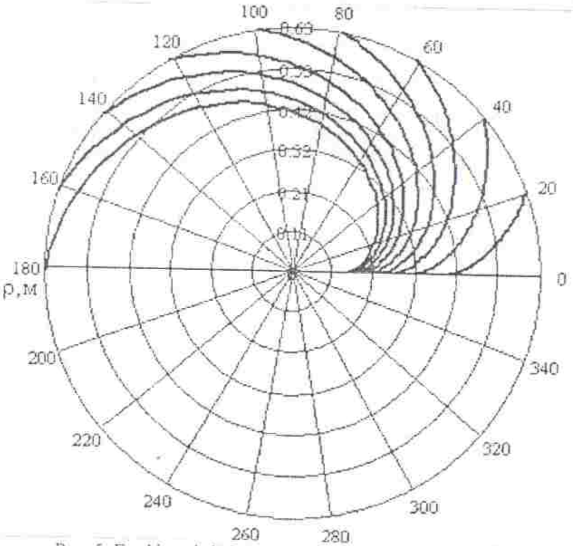

Рис. 5. Графіки сім'ї брахістохрон для різних значень φ_1

Однак сучасні математичні пакети, зокрема MathCAD [9], дозволяють досить просто обійти зазначені трудноші, використовуючи ідею інтерполяції функцій, заданих у табличному вигляді. У даній роботі розрахунки виконувалися із застосуванням кубічної сплайн - інтерполяції.

Важливою обставиною при цьому є те, що отримані таким способом функції в середовищі MathCAD можна аналітично диференціювати, як і традиційні функції.

На рис. 5 представлені графіки функцій $\rho(\varphi)$ для граничних значень ρ_0 при $C^2 < 1$ для різних значеннях φ_1.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення залежності кінематичних характеристик часток, що рухаються, грунту від параметрів оптимальних траєкторій і їхнього виду.

Висновок. Форму профілю лопатки доцільно обрати у вигляді брахістохрони для центральної сили - відцентрової сили інерції, записаної у полярній системі координат.

Бібліографічний список використаної літератури

1. *Семків О.М.* Розрахунок робочого органа ланцюгового грунтометального механізму / *Семків О.М., Шатохін В.М.* // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 87.– К.: КНУБА, 2011.– С. 303-312. **2.** *Попова А.М.* Дослідження руху частки грунту по лопатці: результати комп'ютерних експериментів / *Попова А.М., Шатохін В.М.* // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4. – Т.54. – С.135-144. **3.** *Семків О.М.* Дослідження траєкторії руху частки грунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного грунтометальника / *Семків О.М., Попова А.М.* // Праці Таврійського державного агротехнол. університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4. – Т.54. – С.126-134. **4.** *Шатохин В.М.* Избранные вопросы теоретической механики: Учеб. пособие. // *Шатохин В.М., Голинский Б.Л.* /– Харьков: НТУ "ХПИ", 2005.– 212 с. **5.** *Лойцянский Л.Г.* Курс теоретической механики. В 2-х томах. т. II. Динамика./ *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* –М.: Наука, 1983.– 640 с. **6.** *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике./ *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* –М.: Наука, 1981.– 720 с. **7.** *Эльсгольц Л.В.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. / *Эльсгольц Л.В.* –М.: Наука, 1969.– 279 с. **8.** *Шатохин В.М.*

Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции // *Шатохин В.М., Шатохина Н.В.* /Восточно-Европейский журнал передовых технологий.–Харьков, 2012.– Вып. 4/7 (58).– С. 9-14. **9.** *Кирьянов Д.В.* Mathcad 13./ *Кирьянов Д.В.* – СПб.: ВХВ-Петербург, 2006.– 608 с. **10.** *Семкив О.М.* Исследование движения частицы грунта по лопатке с профилем оптимальной формы в поле центральных сил инерции / *Семкив О.М., Шатохин В.М., Попова А.Н.* // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Технічна естетика і дизайн". Випуск 11.– К.: КНУБА, 2012.– С. 165-174. **11.** *Иванов А.Г.* Задача о брахистохроне в центральном поле тяготения – режим доступу http://home.imm.uran.ru/iagsoft/brach/netrad_.html. **12.** *Иванов А.Г.* Задача о брахистохроне в центральном поле тяготения – режим доступу http://home.imm.uran.ru/iagsoft/voron97_1_.html. **13.** *Иванов А.Г.* Задача о брахистохроне в центральном поле тяготения – режим доступу http://home.imm.uran.ru/iagsoft/trasbo2_1_.html

Отримано 01.10.2012, ХДУХТ, м. Харків.

УДК 515.2

С.А. Устенко, канд. техн. наук
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського
С.В. Діланов
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова (м. Миколаїв)

ПРОСТОРОВІ КРИВІ ЛІНІЇ ЗАДАНИХ РОЗПОДІЛІВ КРИВИНИ ТА СКРУТУ

У роботі розглядаються просторові криві лінії, які моделюються на основі заданих розподілів кривини та скруту, де розподіли задаються в загальному вигляді. Диференціальні характеристики кривих пропонується подавати за допомогою лінійного або параболічного закону розподілу, а також їх комбінацій вздовж дуги кривої.

Постановка проблеми. При розробці моделей об'єктів в технологічно складних галузях промисловості широкого застосування набули різні методи формування просторових кривих ліній та обводів. Одними з найважливіших їх диференціальних характеристик є неперервність кривини і скруту.

Аналіз останніх досліджень. При розв'язанні задач формування просторових криволінійних обводів існує низка задач, де необхідно отримати просторову криву. До таких задач, зокрема, відноситься побудова просторової перехідної кривої залізничного шляху [1-3]. Ця робота є продовження досліджень авторів з розробки методів геометричного моделювання плоских і просторових кривих ліній та поверхонь заданої кривини та скруту [4-6].

Формулювання цілей статті. Метою цієї роботи є геометричне моделювання просторових кривих ліній, для яких задано графіки розподілу кривини та скруту в загальному вигляді. Розглядаються лінійні та параболічні закони зміни кривини та скруту, а також їх комбінації вздовж дуги кривої.

Основна частина. Розглянемо довільну ділянку просторового криволінійного обводу (рис. 1) [5]. На цьому рисунку застосовані такі позначення: ds – диференціал дуги; $\varphi(s)$ – кут нахилу дотичної до кривої в поточній точці; $\psi(s)$ – кут відхилення кривої від дотичної площини в поточній точці. Кривій відповідають графіки розподілу кривини $K(s)$ і скруту $X(s)$, побудовані в залежності від довжини дуги обводу.