УДК 515.2

Леонід КУЦЕНКО, Олег СЕМКІВ
м. Харків
leokuts@mail.ru

НЕХАОТИЧНІ ТРАЄКТОРІЇ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА З РУХОМОЮ ТОЧКОЮ ПІДВІСУ

Наведено метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу маятників з рухомими точками підвісу. Метод базується на проекційному фокусуванні, сутність якого полягає у побудові у фазовому просторі наближеної інтегральної кривої розв'язку системи рівнянь Лагранжа другого роду, побудови її проекції на координатну фазову площину, яка утворює фазову траєкторію, та вибору значення «керуючого» параметра для забезпечення нехаотичних коливань.

Ключові слова: маятник із рухомою точкою підвісу, маятник Капиці, рівняння Лагранжа 2-роду, траєкторія переміщення вантажу маятника.

Математичні маятники з рухомою точкою підвісу є являються зручними моделями для випробування методів вивчення коливальних процесів [1–3]. Цікавість викликають геометричні форми траєкторій переміщення по площині (центра) вантажу. Адже вони ілюструють розв'язки відповідних диференціальних рівнянь, які за аналогією можна використати і в подібних за змістом задачах. Наприклад, за допомогою маятника з вібруючою точкою підвісу академік П. Л. Капиця пояснював принцип дії високочастотного генератора (ніготронома), що застосовується в ядерній фізиці.

Існує значна кількість публікацій, присвячених математичним маятникам із рухомою точкою підвісу, серед яких чільне місце займають роботи, присвячені маятникам Капиці [1–3]. У них розглядаються різноманітні прояви феномену цього різновиду маятників. Найцікавіший із них проявляється у тому, що точка абсолютно нестійкої рівноваги для математичного маятника, може виявитися точкою стійкої рівноваги для маятника Капиці. Розглядаються задачі параметричного резонансу, коли нижнє положення рівноваги не є стійким, і амплітуда малих відхилень маятника наростає в часі. Також цікаві ефекти, коли при великій амплітуді вимушених коливань у системі можуть реалізовуватися хаотичні режими.

Ці дослідження доцільно було б доповнити графічним унаочненням результату розв'язання рівнянь, що описують динаміку коливань маятників із рухомою точкою підвісу. А саме – унаочненню траєкторій коливань вантажу з метою виявлення серед них нехаотичних траєкторій.

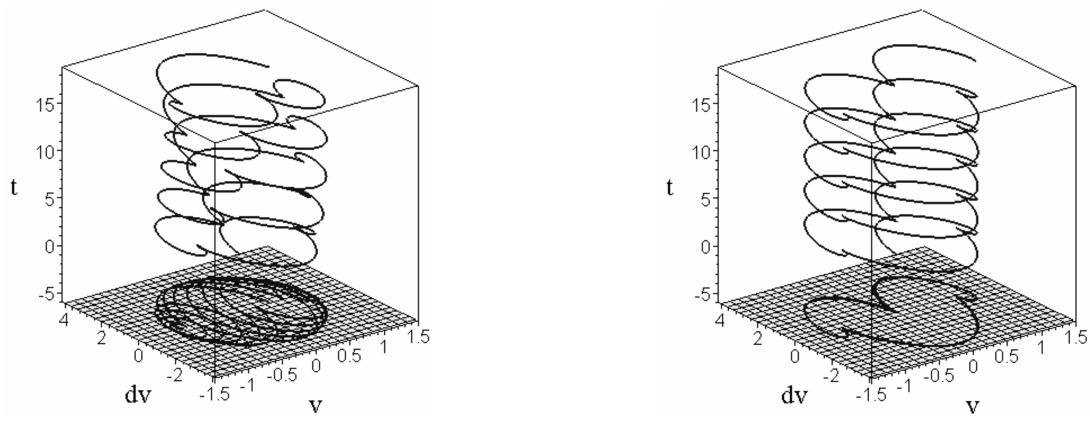
Розробити графічний комп'ютерний метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу маятників з рухомою точкою підвісу.

Спочатку розглянемо випадок коливання математичного маятника, точка підвісу якого рухається вздовж горизонтальної осі *Ox*. У цьому випадку для опису динаміки руху можна використати [3] диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right)+\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right)\cos\big(v(t)\big)+g\sin\big(v(t)\big)=0\,. \tag{1}$$

У формулі (1) прийнято такі позначення: $v(t)$ – функція зміни величини кута відхилення маятника; L – довжина маятника; $f(t)$ – закон зміни положення точки підвісу маятника вздовж осі $0x$; $g = 9{,}81$.

Розв'язувати рівняння (1) будемо чисельним методом Рунге-Кутти з початковими умовами: а) $v\,(0) = v0$; б) $v'(0) = dv0$. Для визначення значень параметрів $v0$ і $dv0$, які б забезпечили нехаотичну траєкторію руху вантажу маятника, застосуємо метод проекційного фокусування [4]. Для цього чисельним методом із обраними початковими умовами і з урахуванням функції $f(t)$ розв'язуємо рівняння (1) і будуємо зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{v,\ dv,\ t\}$ залежно від значення «керуючого» параметра, наприклад, довжини маятника L. При випадкових значеннях $v0$ і $dv0$ у фазовому просторі утвориться «плутана» інтегральна крива (рис. 1, *а*). Спроектуємо її на фазову площину $\{v, dv\}$, де також спостерігаємо відповідну «плутану» фазову траєкторію. У разі зміни «керуючого» параметра L має змінюватися і характер фазової траєкторії.



а) *б)*

Рис. 1. Фазові траєкторії як проекції інтегральних кривих:

а) для довільного значення «керуючого» параметра L; *б)* для критичного значення $L0$ «керуючого» параметра L

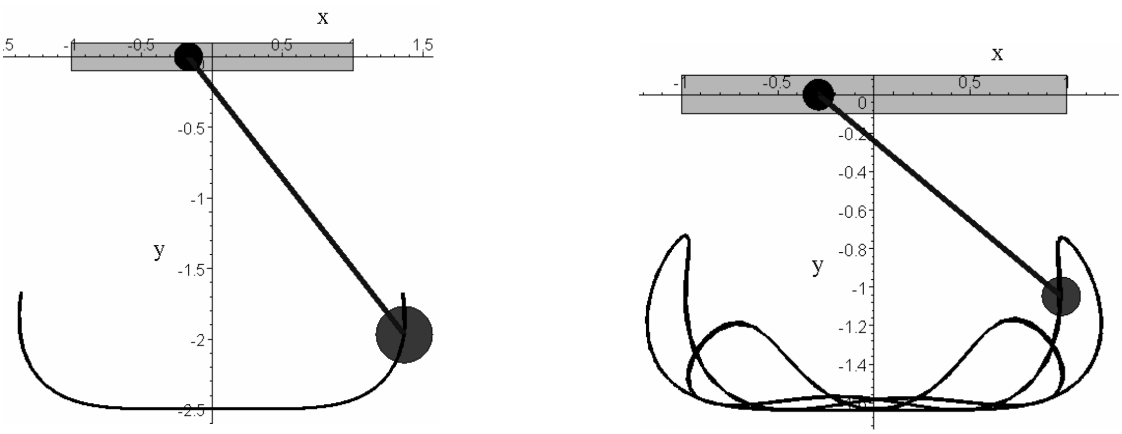
При певному критичному значенні $L = L0$ характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться у «закономірну» криву. На фазовій площині спостерігатиметься ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (рис. 1, *б*). Цей процес знаходження критичних значень параметрів названо *проекційним фокусуванням*.

Урахування критичного значення параметра $L0$ під час розв’язання диференціального рівняння (1) приведе до координат точок на площині $\{x, y\}$, які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії.

Наведемо приклад розв’язання системи рівнянь (1) з такими умовами: $v0 = 0$; $dv0 = 0$; $f(t) = \sin (7t)/2$. У разі зміни параметра L, наприклад: у межах $2 \leq L \leq 3$ з кроком $h = 0{,}2$ одержуємо множину інтегральних кривих, одну з яких наведено на рис. 2, *а*. Критичне значення параметра одержуємо в результаті проекційного фокусування при значенні $L0 = 2{,}456$, що відповідає рис. 1, *б* та 2, *а*. На рис. 2, *б* наведено приклад геометричного моделювання процесу коливання маятника та побудови нехаотичної траєкторії. На рис. 3 наведено інші знайдені варіанти нехаотичних траєкторій.

а) *б)*

Рис. 2. Приклад моделювання коливання маятника з параметрами:
$v0 = 0$; $dv0 = 0$; $L = 2{,}456$; $f(t) = \sin(7t)/2$; *а)* фазова траєкторія;
б) кадр анімаційної схеми коливання маятника



а) *б)*

Рис. 3. Приклад моделювання коливання маятника з параметрами:

$v0 = 0$; $dv0 = 0$; $f(t) = \sin(5t)/2$; при: *а)* $L = 2{,}496333$; *б)* $L = 1{,}64$

Далі розглянемо випадок коливання математичного маятника, точка підвісу якого рухається вздовж вертикальної осі *Oy*. Теорію такої коливальної системи у 1951 р. запропонував академік П. Л. Капиця [1]. Для опису динаміки руху маятника використаємо [3] диференціальне рівняння

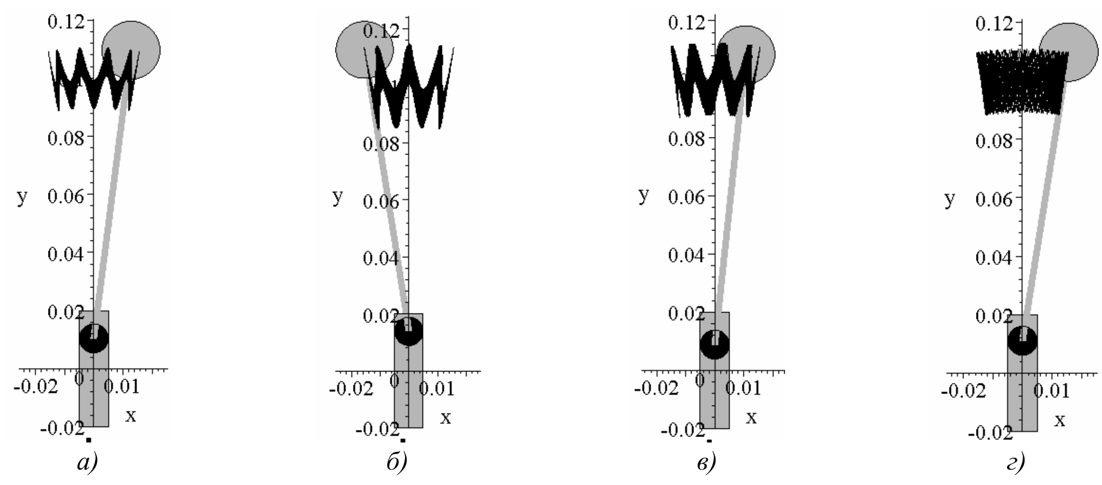
$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right)+\left(g+Aw^2\cos\left(wt\right)\right)\sin\left(v(t)\right)=0. \qquad (2)$$

У формулі (2) прийняті такі позначення: $v(t)$ – функція зміни величини кута відхилення маятника; L – довжина маятника; $\cos(wt)$ – закон зміни положення точки підвісу маятника вздовж осі $0y$; A – амплітуда коливань; w – частота коливань; $g = 9{,}8$.

Розв'язувати рівняння (2) будемо чисельним методом Рунге-Кутти з початковими умовами: $v(0) = v0$; $v'(0) = dv0$. Для визначення значень параметрів A і w, які б забезпечили нехаотичну траєкторію руху вантажу маятника, застосуємо метод проекційного фокусування.

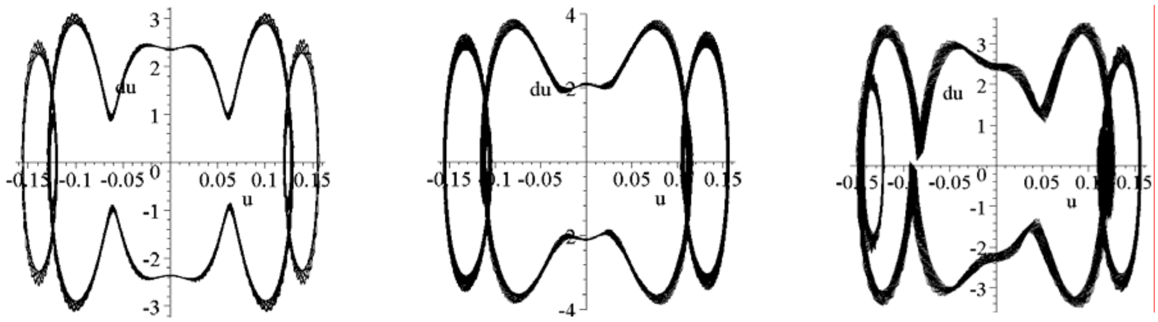
Для цього знайдемо розв'язок рівняння (2) для $L = 0.1$; $w = 150$ і з початковими умовами $v0 = \pi/20$; $dv0 = 0$. Методом проекційного фокусування одержимо критичні значення амплітуди коливань А, що забезпечують нехаотичні коливання вантажу.

На рис. 4. зображено приклади геометричного моделювання траєкторій вантажу маятника Капиці для знайдених значень амплітуди коливань (наведено кадри анімаційної схеми процесу коливань). На рис. 4, *г* для порівняння наведено приклад хаотичних коливань вантажу. На рис. 5 зображено фазові траєкторії, відповідні випадкам коливань із рис. 4.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 4. Геометричне моделювання траєкторій вантажу маятника Капиці для: *а)* А = 0,0105; *б)* $A = 0{,}01469$; *в)* $A = 0.01245$; *г)* $A = 0.011$



а) A = 0,0105 *б) A* = 0,01469 *в) A* = 0.01245

Рис. 5. Фазові траєкторії

для: *а) A* = 0,0105; *б) A* = 0,01469; *в) A* = 0.01245

Для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу маятника з рухомим підвісом вибір значень параметрів можна здійснити на базі графічного методу проекційного фокусування. Ці траєкторії дозволяють аналізувати характер одержаних розв'язків.

Список використаних джерел

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21. — 588 с.
2. Широносов В. Г. Резонанс в физике, химии и биологии. — Ижевск : Удмуртский университет, 2000. — № 1. — 92 с.
3. Бутиков Е. И. Стабилизация перевернутого маятника (к 60-летию маятника Капицы) // Компьютерные инструменты в образовании. — 2010. — № 5. — С. 39—51.
4. Бутиков Е. И. Маятник с осциллирующим подвесом (к 60-летию маятника Капицы) [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://butikov.faculty.ifmo.ru/Russian/ParamPendulum.pdf.
5. Семків О. М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2-d — пружинного маятника // Вестник ХНАДУ. — № 71. — Харьков : ХНАДУ, 2015. — С. 36—44.
6. Семків О. М., Куценко Л. М. Визначення критичних значень параметрів диференціальних рівнянь коливань за допомогою кривин фазових траєкторій // Сучасні проблеми моделювання. Збірник наукових праць. — Мелітополь : МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2015. — С. 82–89.
7. Semkiv O. M. Computer graphics of the oscillation trajectories of 2d spring pendulum weight Stuttgart, Germany — ORT Publishing — European Applied Sciences: challenges and solutions 2015. — С. 63–70.
8. Семкив О. М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d- пружинного маятника // Международная конференция по научному развитию в Евразии (Австрия, г. Вена, VII 2015). — С. 217—214.

Leonid KUTSENKO, Oleg SEMKIV
Kharkiv

NOT CHAOTIC TRAJECTORIES OF FLUCTUATIONS OF FREIGHT SIMPLE PENDULUM WITH THE RELATIVE FRAME POINT OF THE SUSPENSION

The method of the choice of values of parameters for receiving not chaotic trajectories of fluctuations of freight of pendulums with the relative frame points of a suspension is given. The method is based on a projective focalizing which substance consists in construction in a phase space of an approximate integral curve of the solution of a set of equations of Lagrange of the second sort, creation of its projection to the coordinate phase plane which forms a phase trajectory, and the choice of value of the "operating" parameter for ensuring not chaotic fluctuations.

Key words: a pendulum with the relative frame point of a suspension, Kapitsa's pendulum, the equation of Lagrange 2 sorts, a trajectory of movement of freight of a pendulum.

Леонид КУЦЕНКО, Олег СЕМКИВ
г. Харьков

НЕХАОТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Приведен метод выбора значений параметров для получения нехаотических траекторий колебаний груза маятников с подвижными точками подвеса. Метод базируется на проекционном фокусировании, сущность которого состоит в построении в фазовом пространстве приближенной интегральной кривой решения системы уравнений Лагранжа второго рода, построения ее проекции на координатную фазовую плоскость, которая образовывает фазовую траекторию, и выбора значения «управляющего» параметра для обеспечения нехаотических колебаний.

Ключевые слова: маятник с подвижной точкой подвеса, маятник Капицы, уравнение Лагранжа 2-рода, траектория перемещения груза маятника.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.2016