

**ПРО МАСШТАБУВАННЯ ВІЗЕРУНКОВИХ КРИВИХ,
ОПИСАНИХ НАТУРАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ**

*Національний університет цивільного захисту України
Харківський національний університет радіоелектроніки*

Наведено спосіб масштабування візерункової кривої, описаної натуральним рівнянням, який базується на розв'язанні системи диференціальних рівнянь Френе, у якій вирази координатних функцій помножено на масштабний множник.

Постановка проблеми. Розділ геометрії, де розглядаються внутрішні властивості кривих ліній, називається натуральною геометрією, тому що за параметр там обирається довжина дуги лінії – природний (тобто натуральний) параметр. Дослідження у даній області до недавнього часу гальмувалося тим [1], що довжина дуги описується елементарними функціями тільки для обмеженого числа кривих, заданих параметричними рівняннями у нерухомій системі координат. Якщо задати криву натуральним рівнянням, тобто залежністю кривини від довжини дуги, то при переході до координатної форми запису потрібно застосувати чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь. Використання підходів натуральної геометрії довгий час стримувалося відсутністю ефективної обчислювальної техніки. Адже сполучення точок за їх координатами у лінію ручним способом забирало дуже багато часу і проблеми не розв'язувало. Поява механічних пристроїв (графопобудувачів) була кроком вперед у вирішенні питання візуалізації, але повністю його не розв'язувала, оскільки швидкість виконання побудов у них обмежена.

Зазначимо, що внутрішні характеристики ліній і поверхонь можуть впливати на робочий процес або нести інше функціональне навантаження і повинні враховуватися в аналітичному опису.

Огляд відомих результатів. Методи натуральної геометрії детально розвинуті італійським математиком Е.Чезаро. Аналіз праць із прикладної геометрії показав, що автоматизація побудов графіків натуральних рівнянь є невід'ємною складовою всіх напрямів досліджень. Розробка питань автоматизації пов'язана із працями С.Ф.Пилипаки [1,2], Ю.І.Бадаєва, Т.І. Щоголевої [3,4], В.М.Несвідоміна [5], В.Д.Борисенка [6], Спіцина В.Є. [12], К.О.Сазонова, С.М.Грибова та ін.

Поєднання можливостей сучасної обчислювальної техніки із методами натуральної геометрії створює передумови розв'язання нових різновидів прикладних задач, зокрема опису візерунків для поліграфічного захисту цінних паперів [7-11]. Але при цьому виникає питання масштабування візерунка, описаного натуральним рівнянням.

В роботі [12] наведено спосіб масштабування графіків розподілу кривини, який виконується із застосуванням нормалізованого елемента кривини одиничної довжини, що суттєво ускладнює розв'язок задачі. Спрощення при масштабуванні візерунка можна досягти, якщо обійтися без етапу нормування елемента кривини одиничної довжини.

Постановка задачі. Розробити спосіб масштабування візерункової кривої, описаної натуральним рівнянням, який базується на розв'язанні системи диференціальних рівнянь Френе, у якій вирази координатних функції помножено на масштабний множник.

Основна частина. Для зручності використання візерунків на практиці виготовлення поліграфічної продукції необхідно розробити інструментарій оформлення візерунків. По мінімуму він повинен реалізувати: здвиги вздовж координатних осей; обертання навколо початкової точки, а також масштабування візерунка.

Нагадаємо, що для побудови візерункових кривих за їх кривиною $k(s)$ (де s - параметр) необхідно розв'язати систему диференціальних рівнянь Френе

$$\frac{d}{ds} \alpha(s) = k(s); \quad \frac{d}{ds} x(s) = \cos(\alpha(s)); \quad \frac{d}{ds} y(s) = \sin(\alpha(s)), \quad (1)$$

в результаті чого одержимо натуральне рівняння лінії $\{x(s), y(s)\}$. Тут третя змінна $\alpha(s)$ визначає кут дотику у точці інтересу цієї кривої з віссю Ox .

Для виконання здвигу і повороту візерунка, описаного натуральним рівнянням, систему рівнянь (1) слід представити кодами мови Maple:

$$\begin{aligned} \text{sys} &:= \text{diff}(\alpha(s), s) = k(s), \\ &\text{diff}(x(s), s) = \cos(\alpha(s)), \\ &\text{diff}(y(s), s) = \sin(\alpha(s)). \end{aligned} \quad (2)$$

Тоді здвиги та повороти слід здійснювати при розв'язанні системи диференціальних рівнянь Френе `sys` за допомогою оператора

$$\begin{aligned} \text{DEplot3d}(\{\text{sys}\}, \{x(s), y(s), \alpha(s)\}, s = a..b, \\ [[x(0)=A, y(0)=B, \alpha(0)=C]], \\ \text{scene}=[x(s), y(s), \alpha(s)], \text{stepsize} = 0.1, \\ \text{orientation} = [-90, 0], \text{linecolor}=\text{black}), \end{aligned} \quad (3)$$

з врахуванням визначення початкової точки крайових умов у відповідній опції. Тут величини здвигів по осям Ox і Oy позначено через A і B , а величину кута обертання (в радіанах) відносно осі Ox позначено C .

Масштабування візерунка, описаного натуральним рівнянням. Відомо, що масштабування – це зміна розміру зображення зі збереженням пропорцій. Під масштабуванням розуміють як збільшення, так і зменшення розмірів зображення. Залежно від типу графіки (растрова чи векторна) масштабування здійснюється за різними алгоритмами. Якщо графіка

векторна, то масштабування відбувається без втрат якості зображення. Якщо растрова, то при масштабуванні відбувається втрата якості зображення. В цьому полягають особливості застосування комп'ютерної техніки в процесі масштабування.

Спрощення при масштабуванні візерунка можна досягти, якщо обійтися без етапу нормування елемента кривини одиничної довжини, як це пропонується в роботі [12]. В цьому випадку втрачається можливість передбачати величину масштабованого візерунка у розмірах глобальної системи координат. Але з'являється можливість регулювати величину масштабованого візерунка інтерактивним способом шляхом зміни умовного масштабного коефіцієнта M . Вважаємо, що такий підхід є прийнятним для задач технічної естетики, де на перше місце ставляться не метричні, а естетичні результати масштабування візерунка, описаного натуральним рівнянням.

Утворимо «модифіковану» систему рівнянь Френе:

$$\frac{d}{ds}(M\alpha(s)) = k(s); \quad \frac{d}{ds}(Mx(s)) = \cos(M\alpha(s)); \quad \frac{d}{ds}(My(s)) = \sin(M\alpha(s)), \quad (4)$$

або з використанням синтаксису мови Maple:

$$\begin{aligned} \text{sys} := \text{diff}(M*\alpha(s), s) &= \text{kap}(s), \\ \text{diff}(M*x(s), s) &= \cos(M*\alpha(s)), \\ \text{diff}(M*y(s), s) &= \sin(M*\alpha(s)). \end{aligned} \quad (5)$$

Після цього необхідно розв'язати «модифіковану» систему рівнянь Френе доступним чисельним методом; наприклад у середовищі Maple це можна здійснити за допомогою оператора (3). В результаті буде побудовано масштабований візерунок.

Приклад. Для візерункової лінії з кривиною $k(s) = 1/5 + \sin(s/3) + 2 \cos(s/2)$ (рис. 1) побудувати вдвічі збільшене та вдвічі зменшене зображення.

Для побудови вдвічі збільшеного візерунка необхідно у модифікованому рівнянні Френе обрати $M = 0,5$ (рис. 2); а вдвічі зменшеного - обрати $M = 2$ (рис. 3).

Зазначимо, що масштабування не змінює порядок кольорів вздовж лінії, при цьому колір вздовж лінії змінюється за заданим законом, наприклад за законом зміни кривини.

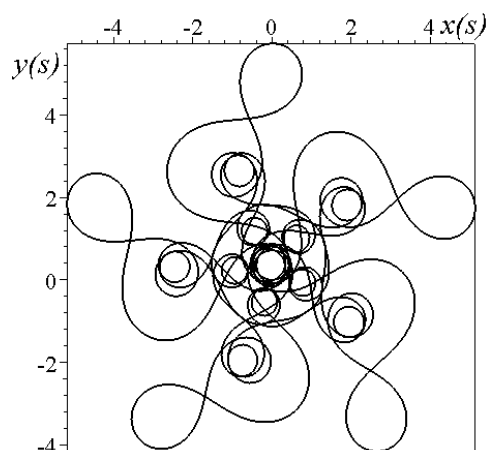


Рис. 1. Приклад вихідної візерункової кривої

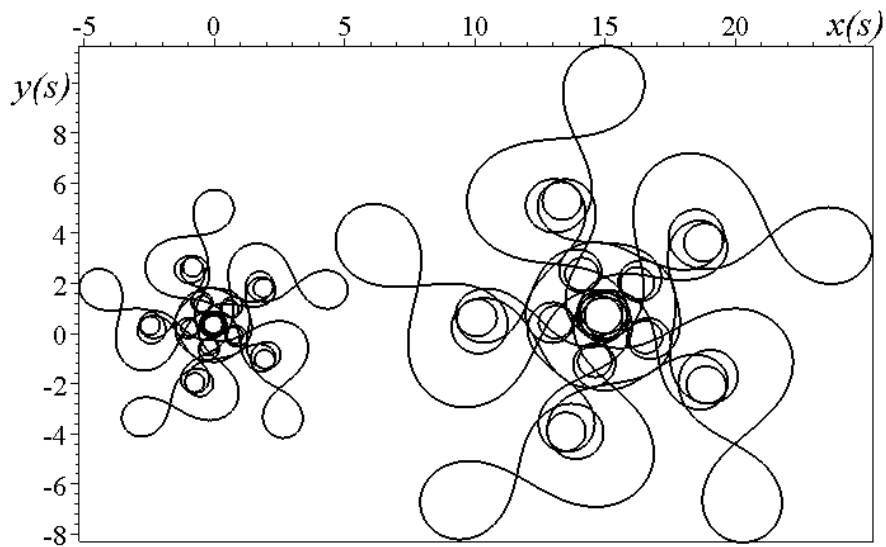


Рис. 2. Вдвічі збільшений візерунок при $M = 0,5$

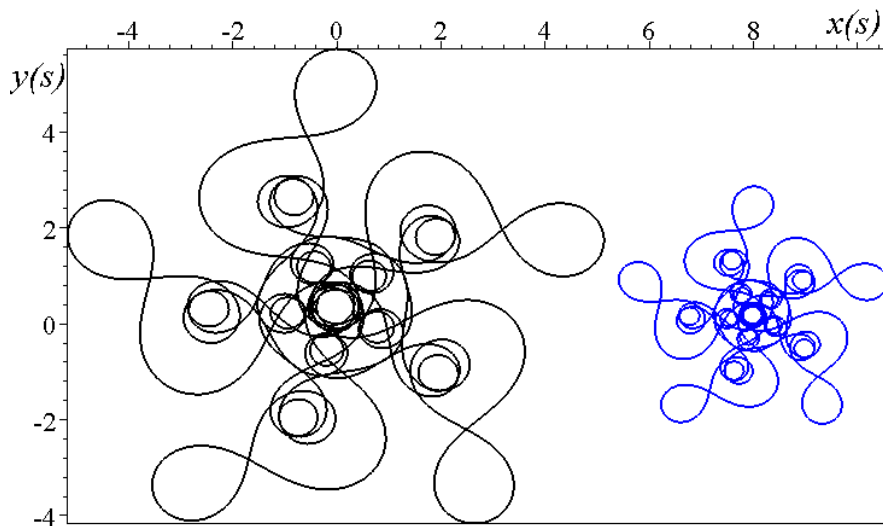


Рис. 3. Вдвічі зменшений візерунок при $M = 2$

До позитиву наведеного підходу слід віднести простоту складання «модифікованої» системи рівнянь Френе з умовним масштабним коефіцієнтом M . Лише після розв'язання системи рівнянь та візуалізації розв'язку можна скласти уявлення про числові значення масштабованого візерунка, адже початковий візерунок напевне не був «одиничним».

Розглянутий спосіб масштабування кривої, описаної натуральним рівнянням, дозволяє по-новому кодувати візерункові криві поліграфічного захисту цінних паперів. При цьому:

- замість параметричного подання лінії використовується такий опис, де мала за величиною зміна параметру суттєво впливає на «якісне» ускладнення візерунка розетки;

- для опису дизайну розеток обрано натуральне рівняння кривої, де натуральний параметр визначає довжину дуги кривої з початком у фіксованій точці на цій кривій;

- з використанням натурального параметру використовується спосіб побудови кривих, уздовж яких їхня кривина міняється за заданим законом;
- при цьому «секретними» будуть: натуральне рівняння візерункової кривої (формула), параметри, які впливають на її геометричну форму (числа), а також *масштабний множник*, що визначає розміри цієї кривої (число, бажано дробове).

Висновок. Масштабування візерункової кривої, описаної натуральним рівнянням, можна здійснити шляхом розв'язання системи диференціальних рівнянь Френе, у якій вирази координатних функції помножено на масштабний множник.

Література

1. *Пилипака С.Ф.* Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами : Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.01.01 / *С.Ф. Пилипака*; Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. – К., 2000. – 35 с.
2. *Пилипака С.Ф.* Комп'ютерна побудова кривих за графіками натуральних рівнянь // Труды Таврической государственной агротехнической академии. – Вып.4. Прикл. геометрия и инж. графика. Т.1. – Мелитополь: ТГАТА, 1997. – С.84-86.
3. *Бадаєв Ю.І.* Аналітично-комп'ютерні методи проектування візерунків. // *Ю.І. Бадаєв, Т.І. Щоголева* / Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом "Інженерна механіка"), Вип. №22, Част. 1, «Сучасні проблеми геометричного моделювання». - Луцьк, 2008. - С.21–26.
4. *Бадаєв Ю.І.* Універсальна аналітична крива для побудови візерунка. // *Ю.І.Бадаєв, Т.І.Щоголева* / Прикладна геом. та інж. графіка - Праці / Таврійська держ. агротехнічна академія. Вип. 4, Т, 40. - Мелітополь: ТДАТА, 2008. - С. 32–37.
5. *Несвідомін В. М.* Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії : Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.01.01 / *В. М. Несвідомін*; Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. – К., 2008. – 30 с.
6. *Борисенко В.Д.* Масштабування плоских криволінійних обводів заданої кривини // *Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спіцин В.Є.* / Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – вип. 72. – С.189-191.
7. *Куценко Л.М.* Лінії з керованими кривинами, побудовані засобами математичного пакету Maple / *Л.М. Куценко, В.Ф. Челомбійко* // Теорія та практика дизайну: Збірник наукових праць. – Вип. 1. К.: «Комп'ютер-пресс», 2012. – С.179–185.
8. *Куценко Л.Н.* Описание и построение кривых с управляемой кривизной // *Куценко Л.Н.* / Современное состояние, развитие инженерной геометрии и компьютерной графики в условиях информационных и компьютерных технологий - Алматы: КазНТУ, 2011. – С.26–33.

9. *Челомбітько В.Ф.* Використання ліній з керованими кривинами для побудови візерункових розеток / *В.Ф.Челомбітько* // Прикладна геометрія та інженерна практика. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, т. 52. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С.150–156.

10. *Челомбітько В.Ф.* Побудова візерунків за допомогою кривих з керованими кривинами / *В.Ф.Челомбітько* // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Технічна естетика і дизайн». – Вип. 9. – К.: Віпол, 2011. С.247–254.

11. *Челомбітько В.Ф.* Побудова візерункових розеток за допомогою ліній з керованими кривинами / *В.Ф.Челомбітько* // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Луцьк: ЛНТУ. № 6, 2011. - С.270–275.

12. *Спіцин В.Є.* Геометричне моделювання компресорних лопаткових апаратів : Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / *В.Є. Спіцин*; Тавр. держ. агротехн. акад. — Мелітополь, 2006. — 21 с.

О МАСШТАБИРОВАНИИ УЗОРЧАТЫХ КРИВЫХ, ОПИСАННЫХ НАТУРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Л.Н.Куценко, В.Ф.Челомбитко

Приведен способ масштабирования узорчатой кривой, описанной натуральным уравнением, основанный на решении системы дифференциальных уравнений Френе, в которой выражения координатных функции умножены на масштабный множитель.

ABOUT SCALING OF FIGURED CURVES, DESCRIBED BY THE NATURAL EQUATIONS

L.N.Kutsenko, V.F.Chelombitko

The way of scaling of the figured curve described by the natural equation, based on the decision of system of the differential equations to Frenet in whom expressions coordinate functions are increased by a large-scale multiplier is given.