

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

*Л. Куценко*

На правах рукописи  
УДК 515.2+517.9+681.3

КУЦЕНКО Леонид Николаевич  
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ  
ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА А-ОТОБРАЖЕНИЙ

Специальность 05.01.01  
"Прикладная геометрия и инженерная графика"

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Киев - 1992



## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Тема диссертационной работы утверждена в соответствии с Общесоюзной научно-технической программой № 026 (Вычислительная техника. Постановление ГКНТ и АН СССР № 573/137 от 10 ноября 1985 года).

В диссертации решены задачи, которые непосредственно связаны с народнохозяйственной проблемой повышения качества изделий на основе автоматизации процесса проектирования с использованием визуального контроля этапов вычислений. Рассмотрены также инженерно-геометрические вопросы расчета сложных технических объектов, в частности, вопросы геометрического моделирования инженерных объектов и процессов.

Повышение качества изделий неразрывно связано с совершенствованием и созданием новых алгоритмов решения инженерных задач. Составление алгоритмов производится на основе некоторых методик, традиционных для решения данной конкретной инженерной задачи. Освободиться от преобладающих при этом стереотипов можно путем отождествления алгоритма решения данной задачи с алгоритмами решений других задач — близких ей по характеру, но, быть может, далеких по смыслу. Следовательно, необходима классификация инженерных задач по ключевым формальным признакам алгоритмов их решения.

Для начертательной (прикладной) геометрии представляют интерес задачи, алгоритмы решений которых прямо или косвенно связаны с отображением некоторого множества точек в пространстве параметров данной задачи. Проникновение в инженерно-технические приложения методик, основанных на понятии отображения (проецирования), обогатило современную начертательную геометрию арсеналом новых методов решения реальных задач самого различного характера. Большой вклад в развитие теоретических основ этих методов внесли Н.Ф.Четверухин, И.И.Котов, Н.Н.Рыков, В.Е.Михайленко, П.В.Филиппов, А.М.Тевлин, А.В.Павлов, А.Л.Подгорный, Г.С.Иванов, В.И.Якунин, В.А.Осяпов, С.А.Фролов, В.Н.Первикова, В.С.Обухова, В.С.Полозов и др., чьи основополагающие работы во многом определили и определяют современный облик начертательной геометрии.

Кроме того, заметный вклад в решение различных геометрических проблем с привлечением вычислительной техники внесли К.А.Сазонов, С.Н.Ковалев, В.М.Найдыш, В.А.Надолинный, Ю.И.Бадаев, А.Н.Подкоритов, Е.А.Стародетко, В.И.Гольфарб, К.М.Наджаров, И.А.Скидан и др.

Область практических приложений методов начертательной геометрии может быть расширена под влиянием одного из новых разделов математики – теории катастроф. В ней естественным образом обобщается метод проекций, а также обосновывается применение категории отображения для решения ряда задач, в том числе и инженерно-технического профиля. Здесь в качестве компонентов отображения принимаются некоторые (чаще абстрактные) геометрические объекты, заданные в пространстве тех или иных параметров данной задачи.

Этим определен класс задач, для которых понятие отображения является ключевым формальным признаком, объединяющим алгоритмы их решения. Однако, здесь предполагается, что компоненты отображения описаны преимущественно в параметрическом виде с использованием дифференцируемых функций. При этом требование дифференцируемости является вынужденным, поскольку отображение осуществляется путем преобразования функций при помощи дифференциального оператора.

Существуют задачи, для которых компоненты отображения описать в параметрическом "гладком" виде либо невозможно, либо неоправдано сложно. В диссертации рассмотрен один из подобных классов задач, получивших название задач проекционной природы (з.п.п.).

Постановка задач проекционной природы, наследуя основные положения теории катастроф, предполагает использование еще и некоторых дополнительных характеристик проекций – величины ее площади и длины ее периметра (очертания). (Для краткости эти характеристики названы метрическими).

Принадлежность задачи классу з.п.п. характеризуется следующими признаками:

- формулировка задачи позволяет связать ее параметры уравнением в неявном (непараметрическом) виде;

- в пространстве параметров задачи геометрический образ этого уравнения образует поверхность;

- решение задачи сводится к описанию и к оценке метрических характеристик проекции, полученной в результате отображения этой поверхности на одну из координатных плоскостей.

Отмена ограничений на способ описания компонентов отображения и на гладкость функций, входящих в это описание, позволяет разработать методики решения реальных задач, обеспечив при этом удобство их алгоритмической реализации на ЭМ.

Вышеизложенное объясняет выбор конкретной проблемы исследования в рамках прикладной геометрии и инженерной графики. Проблема заключается в нахождении явного вида недифференциального оператора, связывающего непараметрические описания компонентов отображения, и использования его на практике для решения средствами машинной графики задач проекционной природы.

Диссертационная работа посвящена теоретическим, а также практическим вопросам создания алгоритмов решения конкретных з.п.п., представляющих большой научный и практический интерес. В частности, с такими задачами, как нахождение огибающей параметрического семейства, геометрического расчета гетерогенных процессов, вычисления интегралов типа "мера Крофтона", приходится постоянно сталкиваться при решении следующих инженерно-технических задач: профилирования машиностроительных изделий, расчета программы типа ракетного двигателя на твердом топливе, моделирования лучевого энергообмена между поверхностями и т.п. Каждое из названных приложений имеет большое значение для народного хозяйства страны.

Цель работы состоит в создании теоретической, методической и алгоритмической базы и программных средств для постановки и решения класса задач проекционной природы. При этом учитываются возможности:

- визуального контроля этапов вычислений при помощи устройств вывода графической информации растрового типа;

- организации итерационного процесса решения з.п.п. путем формального дробления величин дискретности раstra;

- использования негладких функций, входящих в описание исходной геометрической информации;

- реализации методики при помощи линейных ( неразветвляющихся ) алгоритмов.

Главная задача исследований связана с разработкой теоретических основ способа аналитического описания результата отображения геометрического объекта, заданного уравнением в неявном виде.

Основой для разработки алгоритмов решения з.п.п. является метод А-отображений. Метод А-отображений ( "аналитических" отображений ) составляет ряд вычислительных приемов, с помощью которых устанавливается явный вид недифференциального оператора преобразования описаний компонентов отображения. При этом оператор должен позволить определить метрические характеристики проекции.

Для достижения главной цели исследования в диссертации поставлены следующие основные задачи:

1. Составления перечня задач проекционной природы.
2. Установления явного вида недифференциального оператора А-отображения для различных видов проецирования.
3. Уменьшения количества операций, необходимых для алгоритмической реализации метода А-отображений на ЭВМ.
4. Нахождения метрических характеристик проекций при помощи функции области.
5. Метризации проекций контуров сечений при помощи производной функции области.
6. Интерполирования функции двух переменных, заданной на сторонах треугольника.
7. Вывода изображения проекции на периферийное устройство ЭВМ растрового типа.
8. Разработки алгоритмов решения следующих конкретных задач проекционной природы:
  - синтеза растровых изображений трехмерных объектов;
  - нахождения огибающей параметрического семейства;
  - геометрического расчета гетерогенных процессов;
  - вычисления интегралов типа "мера Крофтона".

9. Реализации алгоритмов в виде программ для ЭВМ.

10. Создания комплекса программ решения следующих практических задач:

- профилирования поверхности: а) цилиндрических зубчатых колес, полученных обкаткой, а также б) пуансонов для перфорации в валках;
- расчета рабочей поверхности заряда ракетного двигателя на твердом топливе;
- вычисления угловых коэффициентов излучения для систем тел "спираль-поверхность".

Методы исследования. В качестве основного в работе использован математический аппарат  $R$ -функций, позволяющий описывать геометрические объекты уравнением в неявном виде. Кроме того, используются основные положения прикладной геометрии поверхностей, моделирования геометрических преобразований, а также методы вычислительной математики и математического анализа. Вопросы численной и программной реализации разработанных алгоритмов рассматривались в процессе решения конкретных прикладных задач.

Научную новизну составляют:

- теоретические основы метода  $A$ -отображений, устанавливающего явный вид недифференциального оператора преобразования непараметрического описания геометрического объекта в непараметрическое описание его проекции ( для ортогонального, параллельно-косоголоного, центрального и радиально-параллельного видов проецирования );
- описание проекций при помощи финитных функций, устанавливающих связь оператора  $A$ -отображений с определенными интегралами;
- вычисление метрических характеристик проекции, включая вычисление длины линии уровня при помощи производной функции области;
- способ интерполирования функции двух переменных по ее значениям на сторонах треугольника;
- методика синтеза растровых изображений пространственных объектов, описанных уравнением в неявном виде;

- способ нахождения огибающей параметрического семейства, основанный на вращении геометрического объекта, описанного при помощи уравнения данного параметрического семейства;
- способ вычисления интегральных характеристик гетерогенных процессов, основанный на использовании производной функции области;
- способ вычисления интегралов типа "мера Крофтона" для поверхностей сложной формы, основанный на использовании функции области Крофтона.

Практическая ценность диссертации состоит в разработке универсальных алгоритмов и комплекса программ на языке форт-ран-77 для:

- синтеза растровых изображений пространственных геометрических объектов;
- профилирования рабочих поверхностей зубчатых колес, образованных обкаткой, а также пуансонов для перфорации листового материала в валках;
- геометрического расчета рабочей поверхности заряда ракетного двигателя на твердом топливе;
- расчета локальных и интегральных угловых коэффициентов излучения при лучевом энергообмене между излучателем в виде спирали и поверхностью.

Опыт использования на практике теоретических положений диссертации показал следующие достоинства метода А-отображений. Достоинства заключены в возможностях:

- визуального контроля этапов вычислений, исключая тем самым ошибки описания геометрической информации;
- организации итерационного процесса вычислений путем формального дробления дискретности раstra ( т.е. без вмешательства в управляющий алгоритм );
- не использования производных функции, входящей в описание исходной геометрической информации;
- реализации на ЭЕМ линейного ( неразветвляющегося ) алгоритма, поскольку геометрическая информация представляется в виде единого аналитического выражения ( уравнения ).

Кроме того, возможны распараллеливание вычислительного процесса, а также аппаратная реализация линейных алгоритмов.



На защиту выносятся:

- общие положения и понятия, базирующиеся на геометрических воззрениях, и открывающие пути к системному изучению феномена задач проекционной природы и практическому использованию метода  $A$ -отображений;
- теоретические основы метода  $A$ -отображений, позволяющего установить явный вид недифференциального оператора преобразования, связывающего непараметрические описания геометрического объекта и его проекции;
- представление уравнений проекций при помощи финитных функций, устанавливающих связь оператора  $A$ -отображения с определенными интегралами;
- способ вычисления метрических характеристик проекций при помощи функции области и ее производной;
- способ интерполирования функции двух переменных, заданной на сторонах треугольника;
- методика и алгоритмы синтеза растровых изображений пространственных объектов;
- способ нахождения огибающей параметрического семейства;
- методика геометрического расчета гетерогенных процессов на примере задачи горения рабочей поверхности заряда ракетного двигателя на твердом топливе;
- методика вычисления интегралов типа "мера Крофтона" для поверхностей сложной формы;
- алгоритмы: профилирования рабочих поверхностей зубчатых колес и пуансонов; геометрического расчета рабочей поверхности заряда ракетного двигателя на твердом топливе; вычисления локальных и интегральных угловых коэффициентов излучения при лучевом энергообмене между поверхностями.

Реализация работ выполнена на ряде предприятий, в том числе на СМЗ, ЧСЗ, ВНИИЭТО, ЦНИИ "Монолит". Материалы диссертации использовались при разработке спецкурса лекций кафедры НГТ ХИИ им.В.И.Ленина. Реализация подтверждена актами о внедрении и справками об использовании методики.

Объем публикаций по теме диссертации составляет 16 печатных листов ( опубликовано 45 работ, из них одна книга ).

Апробация работы проводилась на Всесоюзных, республиканских и зональных конференциях и совещаниях, на Днях Советской Науки на ВДНХ СССР, в ИПМаш АН УССР, в ИК АН УССР им. В. М. Глушкова, на секциях начертательной геометрии Ленинградского и Харьковского Дома ученых, а также на ведущих геометрических и графических кафедрах ВУЗов страны. Всего по теме диссертационной работы сделано свыше 30 докладов и сообщений.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести основных разделов, заключения, приложения, 422 наименований библиографии. Содержательная часть работы включает 272 страницы машинописного текста и 94 рисунка.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, изложена методика выполнения работы, сформулированы цель и основные задачи настоящей работы, ее научная новизна, практическая ценность, а также приведены сведения о структуре и объеме работы.

В первом разделе диссертации выявлены основные научные области, связанные с рассматриваемой проблемой, и выполнен анализ результатов, полученных предшественниками, с целью корректной постановки задачи исследования. Предполагается рассмотреть класс задач, решение которых можно связать с описанием и вычислением метрических характеристик проекции, полученной в результате отображения некоторого геометрического объекта (  $\Pi$  ). Описание  $\Pi$  уравнением в неявной форме должно следовать из формулировки данной задачи. Рассмотренный класс составляет задачи проекционной природы.

Отмечено, что з.л.п. наследуют основные признаки задач, изучаемые современным разделом математики – теорией катастроф. Действительно, бифуркационные множества задач теории катастроф образуются в результате отображения ( проецирования на плоскость ) поверхностей равновесия систем из соответствующих задач. Основные результаты в этой области при-

надлежат Р.Тому, Е.Зиману, В.И.Арнольду, А.Н.Варченко, Т.Постону, Р.Гилмору и др. Однако, известные исследования посвящены задачам, поверхности равновесия которых описаны, как правило, параметрическими уравнениями. Отображение этих абстрактных ГО осуществляется при помощи оператора, содержащего операции дифференцирования функций, входящих в описание отображаемой поверхности. Все это накладывает ограничения на вид и гладкость функций, при помощи которых задается исходная геометрическая информация. Этим объясняется причина сужения круга реальных прикладных задач, решение которых можно получить при помощи ЭВМ на основе идеи отображений.

Построению уравнений проекций ГО посвящены работы В.В.Найханова, А.Г.Буравкина, Б.Н.Чернова, Ю.С.Громова, В.А.Симонова, В.Г.Николаевского, А.И.Фломенблита и др. Однако, при этом осталась открытой проблема построения и использования на практике недифференциального оператора, преобразующего непараметрическое описание ГО в непараметрическое описание его проекций. Эта проблема в диссертации решена в рамках метода А-отображений.

Пусть пространство  $R^{n+1} = R^n \times R$  снабжено декартовой системой координат  $Ox_1, x_2 \dots x_n y$ . Рассматриваются действительные функции  $f(x): R^n \rightarrow R$ , образованные путем суперпозиции элементарных функций. Множества точек  $\text{pic } f(x) = \{x \mid f(x) = 0\}$  и  $\text{bas } f(x) = \{x \mid f(x) \geq 0\}$  называются чертёжом и опорной областью функции  $f(x)$  ( $x \in R^n$ ). Эти термины обобщают такие геометрические понятия, как кривая или поверхность, а также фигура или тело. Предполагается, что множество  $\text{bas } f(x)$  содержится в области определения функции  $f(x)$ .

Задача принадлежит классу з.п.п., если:

- существует функция  $f(x)$ , при помощи которой параметры  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  данной задачи можно связать условием (уравнением)  $f(x) = 0$ ;
- множество точек  $\text{pic } f(x)$  является  $n-1$ -мерной поверхностью ( $n-1$ -многообразием) в пространстве  $R^n$ ;
- решение данной задачи можно свести к описанию и к

вычислению некоторых метрических характеристик ( площади  $S[\text{bas } \varphi]$  или периметра  $\mathcal{L}[\text{bas } \varphi]$  ) проекции  $T': \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ , полученной в результате отображения на координатную плоскость  $x_n = 0$  множества точек  $\text{bas } f$ .

В диссертации приведен перечень з.п.п. Среди них выделены следующие задачи:

- нахождения огибающей ( дискриминанты ) параметрического семейства;

- геометрического расчета гетерогенных процессов на примере задачи горения заряда ракетного двигателя на твердом топливе;

- вычисления интегралов специального вида ( типа "мера Крофтона" );

- отыскания особых решений дифференциальных уравнений на примере уравнения Клеро;

- описания функции максимума.

Показано, что ключевым моментом при решении подобных задач является описание результата отображения

$$A f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Здесь необходимо указать недифференциальный ( в общем случае) вид оператора преобразования  $A$  такого, чтобы множество точек  $\text{bas } \varphi$  оказалось проекцией на координатную плоскость  $x_n = 0$  множества точек  $\text{bas } f$  при наперед заданном виде проецирования ( ортогональном, параллельно-косоугольном, центральном, радиально-параллельном и т.п.). При этом использование оператора  $A$  должно позволить вычислять метрические характеристики проекции.

Основным математическим аппаратом исследований в диссертации являются  $R$ -функции, предложенные академиком АН УССР В.Л.Рвачевым. Геометрические приложения  $R$ -функций отражены в работах Ю.Г.Стояна, И.Б.Сироджи, В.П.Путяткина, Л.Д.Пономаренко, В.С.Тоницы и др.

В диссертации дано - в дополнение к традиционному - геометрическое истолкование алгоритма использования  $R$ -функций для описания Ю уравнением в неявном виде. В основе графической интерпретации лежит идея "выхода" в пространство  $R^{n+1}$

при описании Г0 в пространстве  $R^n$ . Отмечено, что подобный прием часто применяется в геометрических исследованиях (например, при доказательстве теоремы Дезарга для плоскости необходим "выход" в трехмерное пространство).

Пусть  $\rho_{20} f(x) = \{(x, y) \mid y < f(x), (x, y) \in R^{n+1}\}$  обозначает подграфик функции  $f(x)$ . Считается, что если  $\text{bas } \varphi(x) = \text{bas } \psi(x)$ , то функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  принадлежат одному пучку функций и их подграфики  $\rho_{20} \varphi(x)$  и  $\rho_{20} \psi(x)$  являются подобными.

Геометрический смысл описания Г0  $T \subset R^n$  уравнением состоит в том, что он (объект) трактуется как чертёж  $\rho_{10} \Phi(x)$  некоторой, пока не известной, функции  $\Phi(x)$ . При этом полагается, что построение аналитического выражения для  $\Phi(x)$  можно связать с построением ее подграфика  $\rho_{20} \Phi(x)$ . Исходя из необходимых для приложений свойств функции  $\Phi(x)$ , в пространстве  $R^{n+1}$  выполняется графический "эскиз" подграфика одной из функций  $\Phi_3(x)$ , принадлежащей тому же пучку функций, что и функция  $\Phi(x)$ . Описать Г0  $T$  можно при помощи любой из функций, подграфик которой будет подобный подграфику  $\rho_{20} \Phi_3(x)$ . Такая свобода в выборе функций основана на свойстве неоднозначности решения обратной задачи аналитической геометрии (дифференциальные свойства функций в данной работе не учитываются). Итак, задача построения функции  $\Phi(x)$  свелась к построению ее подграфика  $\rho_{20} \Phi(x)$ , т.е. свелась к графическим построениям. При этом "эскизный" подграфик  $\rho_{20} \Phi_3(x)$  служит ориентиром-подсказкой пространственной формы в  $R^{n+1}$ , к которой следует стремиться при построении подграфика  $\rho_{20} \Phi(x)$ .

На практике это построение осуществляется в два этапа. На этапе анализа исходный чертёж  $T$  разбивается на такие фрагменты  $\{T_i\}$  ( $i = \overline{1, K}$ ), каждый из которых удалось бы описать, соответственно, при помощи функций  $\{\Phi_i(x)\}$  ( $i = \overline{1, K}$ ). На этапе синтеза строится подграфик  $\rho_{20} \Phi(x)$  при помощи логической функции  $\mathcal{F}$  аргументами которой являются подграфики  $\{\rho_{20} \Phi_i(x)\}$  ( $i = \overline{1, K}$ ). Основывался на алгоритме построения подграфика  $\rho_{20} \Phi(x)$

( заданного логической функцией  $\mathcal{F}$  ) и используя  $R$ -функции, некоторую функцию  $\Phi(x)$  можно описать аналитически. Это следует из того, что бинарные функции

$\varphi[u(x), v(x)] = u \vee v$  и  $\psi[u(x), v(x)] = u \wedge v$   
 обладают в том случае свойствами  $R$ -дизъюнкции и  $R$ -конъюнкции, если

$$p_{20}\varphi(x) = p_{20}u(x) \cup p_{20}v(x) \quad \text{и} \quad p_{20}\psi(x) = p_{20}u(x) \cap p_{20}v(x)$$

соответственно. (Здесь используются  $R$ -функции из системы  $\mathcal{R}_k$ ; в работе знаки  $R$ -функций используются без индексов). Следовательно, функцию  $\Phi(x)$  можно описать при помощи логической функции  $\mathcal{F}$ , заменив в ней знаки теоретико-множественных операций на соответствующие знаки  $R$ -функций, а выражения  $\{p_{20}\Phi_i(x)\}$  - на  $\{\Phi_i(x)\}$  соответственно ( $i = \overline{1, k}$ ).

Основное достоинство рассмотренного графического объяснения использования  $R$ -функций состоит в следующем. Показано, что для алгоритма построения функции  $\Phi(x)$  фактор сложности пространственной формы  $\Gamma \subset R^n$  не является существенным, поскольку ее ( сложность ) всегда можно обеспечить соответствующим усложнением пространственной формы "эскизного" подграфика из пространства  $R^{n+1}$ . Кроме того, показано, что алгоритм применения  $R$ -функций инвариантен относительно размерности пространства, содержащего  $\Gamma$ .

В диссертации приведены практические - на уровне мнемонических приемов - схемы описания чертежей.

Схема А предназначена для случая, когда  $\text{pic } \Phi(x)$  - суть граница множества точек  $\text{bas } \Phi(x)$

Схема Б применяется тогда, когда  $\text{pic } \Phi(x) = \text{bas } \Phi(x)$ .

Схема В используется в том ( объем ) случае, когда фрагменты  $\Gamma$  имеют различную размерность.

Отмечено, что построение нормальных функций сводится к схеме Б. Стремление описать  $\Gamma \subset R^n$  единичным выражением объясняется возможностью его реализации в виде линейного алгоритма. В работе указано место каждой из схем в общем алгоритме решения задач проекционной природы.

Второй раздел диссертации посвящен разработке теоретических основ метода А-отображений.

Отмечено, что метод А-отображений составляет ряд вычислительных приемов, позволяющих:

- установить явный вид недифференциального оператора

$A: f \rightarrow \varphi$ , где  $\text{bas } \varphi$  - суть проекция на координатную плоскость  $x_n = 0$  множества точек  $\text{bas } f$ ;

- вычислить (оценить) величину площади  $S[\text{bas } \varphi]$  этой проекции;

- найти связь между функцией  $V(x_n) = S[\text{bas } f]$  и функцией  $L(x_n) = \mathcal{L}[\text{bas } f]$  ( $\mathcal{L}[\text{bas } f]$  описывает изменение длины периметра проекции сечения множества точек  $\text{bas } f$  плоскостями уровня  $x_n = \text{const}$ );

- создать алгоритмическую базу и программные средства для реализации отображений при решении з.п.п.

Пусть  $\Gamma \subset R^n$  при помощи  $R$ -функций описан уравнением  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  и множество точек  $\text{bas } f$  расположено между плоскостями уровня  $x_n = a$  и  $x_n = b$  ( $a < b$ ). Так как множество точек  $\text{bas } f(x_1, \dots, x_{n-1}, c) = 0$  - суть проекция на координатную плоскость  $x_n = 0$  сечения множества  $\text{bas } f$  плоскостями уровня  $x_n = c$ , то множество точек  $\Omega_n = \bigcup_{i=1}^n \text{bas } f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{a(n-i) + bi}{n})$

образует объединение совмещенных проекций  $n$  сечений  $\Gamma$  плоскостями уровня  $x_n = [a(n-i) + bi]/n$ . Примем  $\Omega_n$  в качестве приближенной проекции  $\Gamma$  на координатную плоскость  $x_n = 0$ . Это предположение дает основание сформулировать следующую теорему.

Теорема I. Последовательность функций

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}) = \bigvee_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a(n-i) + bi}{n}) \quad (I)$$

при  $n \rightarrow \infty$  сходится к функции  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ , где  $\text{bas } \varphi$  - суть проекция множества  $\text{bas } f$  на координатную плоскость  $x_n = 0$ . При некоторых ограничениях, накладываемых на форму  $\Gamma$ , поточечная и интегральная скорости сходимости оцениваются неравенством  $|\varphi - \varphi_n| < \text{const}/n^2$ .

Функцию, полученную в результате предельного перехода в ( I ) предложено обозначать символом  $\int_a^b f(x)$ . Теоремой I определен вид  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_a^b f(x_1, \dots, x_n)$  нелинейного оператора  $A: f \rightarrow \varphi$  в случае ортогонального проецирования.

Отмечено, что функцию вида  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \vee O$  принято называть финитной функцией с носителем  $bas \varphi(x)$ . В работе найдено финитное представление функции, носителем которой является проекция множества  $bas f(x)$

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \int_a^b \{ f(x) \vee O \} dx, \quad (2)$$

Функция вида ( 2 ) в оговоренном в работе смысле решает проблему предельного перехода для последовательности функций ( I ), а также показывает связь с определенным интегралом оператора A-отображения  $\int_a^b f(x)$ . Показано, что на практике целесообразно использовать дискретное представление финитной функции

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ f(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a(n-i)+bi}{n}) \vee O \right\}. \quad (3)$$

Подсчитано, что для описания множества  $bas \varphi$  при помощи формулы ( 3 ) потребуется примерно в 2,5 раза меньше элементарных операций, чем при помощи формулы ( I ) ( при одном и том же  $n$  ).

Теорема 2. Пусть отображение  $A: f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$  задано системой уравнений  $\{ X_i = \varphi_i(x) \} \quad (i = \overline{1, n-1})$ .

Тогда  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_a^b B(x)$ ,

или в финитном представлении

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_a^b (B(x) \vee O) dx.$$

Здесь

$$B(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)).$$

На основании теоремы 2. удалось описать проекции для различных видов проецирования. Для геометрической определенности здесь и далее будут рассмотрены отображения  $A: f(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$  в пространстве  $R^3$ , снабженном декартовой системой координат  $Oxyz$ .



Теорема 3. Уравнение проекции на координатную плоскость  $z=0$  множества точек  $\text{locus } f(x, y, z)$  имеет вид

$$\varphi(x, y) = \int_a^b B(x, y, z), \quad (4)$$

или

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \int_a^b [B(x, y, z) \nu_0] dz, \quad (5)$$

где в зависимости от вида проецирования в качестве функции

$B$  необходимо принять:

а)  $B(x, y, z) = f(x, y, z)$  ( ортогональное проецирование );

б)

$$B(x, y, z) = f\left(x + z \sqrt{\text{ctg}^2 \alpha - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}}, y + z \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, z\right)$$

( косоугольно-параллельное проецирование ), здесь  $\alpha$  и  $\beta$  - углы, образованные проецирующей прямой с координатными плоскостями  $Oxy$  и  $Oxz$  соответственно;

в)

$$B(x, y, z) = f\left(\frac{x(z_s - z) + x_s z}{z_s}, \frac{y(z_s - z) + y_s z}{z_s}, z\right)$$

( центральное проецирование ), здесь  $(x_s, y_s, z_s)$  - координаты центра проецирования;

г)

$$B(x, y, z) = f\left(\frac{xz}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, z\right)$$

( радиально-параллельное проецирование ).

Для всех видов проецирования построены уравнения касательных проецирующих поверхностей ( цилиндров или конусов ).

В работе реализована возможность построения растровых изображений ГО, описанных уравнениями в неявной форме. Для удобства наглядного восприятия растрового изображения проекции пространственного ГО, использован прием "удаления" невидимых участков контуров проекций сечений.

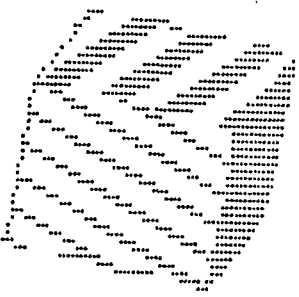
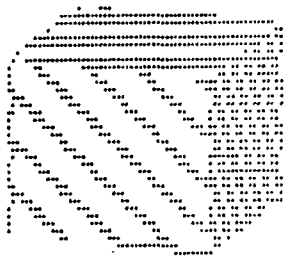
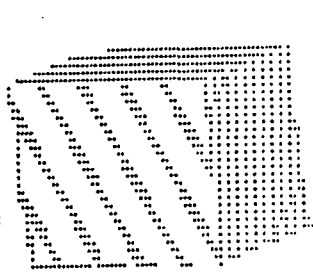
Теорема 4. Опорной областью функции

$$\bigvee_{j=2}^n \left[ \left( \bigvee_{i=1}^{j-1} B\left(x, y, \frac{a(n-i) + bi}{n}\right) \right) \vee \right. \\ \left. \vee \left( \bigvee_{i=1}^{j-1} B\left(x, y, \frac{a(n-i) + bi}{n}\right) \right) \right]$$

построенной при помощи схемы Б из раздела I данной работы, будет множество точек плоскости  $Z=0$ , расположенных на проекциях контуров сечений  $\Gamma_0 \Gamma$  плоскостями уровня  $Z=const$  ( $a \leq Z \leq b$ ). При этом проекции контуров с меньшим индексом могут "заслонить" проекции контуров с большими индексами. На рис. I приведен ряд растровых изображений куба, "вращающегося" в пространстве вокруг фиксированной оси. Вращение осуществляется без привлечения однородных координат путем соответствующего преобразования аргументов функции, входящей в описание куба (при помощи  $R$ -функций). Координаты проекций особых точек этой функции можно получить из растрового изображения, "проследив" проекции ребер и очерковой. Кроме того, формулой теоремы 4 задан в некотором смысле предельный по количеству операций случай алгоритмов синтеза изображений на основе метода  $Z$ -буфера.

Во второй части раздела исследуются метрические характеристики проекций, описанных уравнением  $\varphi(x, y) = 0$ . Пусть  $bas \varphi \subset \Omega \subset R^2$ , где множество  $\Omega$  принято называть основной областью. При помощи построенной выше функции  $\varphi(x, y)$  (или  $\tilde{\varphi}(x, y)$ ) точки множества  $\Omega$  всегда можно разделить (учитывая знак функции  $\varphi(x, y)$  в этих точках) на два подмножества - принадлежащих и не принадлежащих проекции  $bas \varphi$ . Это позволит оценить величину площади  $S[bas \varphi]$  фигуры, образованной множеством точек  $bas \varphi$ , при помощи функции области вида  $\mu(\varphi) = S[bas \varphi] / S[\Omega]$ .

В диссертации принята регулярная дискретизация основной области  $\Omega$ , образованная двумя семействами прямых, параллельных координатным осям. Дискретностью раstra называется расстояние  $\Delta$  между соседними прямыми. Дискретной функцией области называется величина дроби  $\mu_{\Delta}(\varphi) = N_{\varphi} / N_{\Omega}$ , где  $N_{\varphi}$  и  $N_{\Omega}$  - количество узлов сетки раstra, содержащихся в областях  $bas \varphi$  и  $\Omega$  соответственно. Рассмотрены следующие случаи задания основной области  $\Omega$  - в виде квадрата, со стороной, равной единице, и в виде круга единичного радиуса. Соответствующие случаям дискретные функции области принято связывать с методом Монте-Карло и с мерой Крофтона. В работе функция области Монте-Карло исполъ -



"a"

"б"

Рис. I. Растровое изображение аксонометрии ( а ) и центральной проекции ( б ) вращающегося в пространстве куба

зается для вычисления площади проекции  $bas\varphi$ , т.е. интегралов вида  $\iint_{bas\varphi} dx dy$ , а функция области Крофттона для вычисления интегралов специального вида типа "мера Крофттона" ( см. шестой раздел диссертации ). При этом порядок погрешности вычислений определяется величиной  $\Delta^2$ .

В диссертации учитывается влияние выбора растровой сетки на величину площади  $S[bas\varphi]$ . Показано, что если на область  $G$  с площадью  $\rho$  помещен растр дискретности  $\Delta=1$ , то область  $G$  всегда можно параллельно сдвинуть так, чтобы на ней оказалось  $\langle \rho \rangle + 1$  точка растра. Здесь  $\langle \rangle$  обозначает целую часть числа. Этот прием, названный "встряской" изображения, применяется в случае, если ожидается построение проекции в виде "вытянутой" многосвязной фигуры ( в разделе 6 такими фигурами являются  $RP$ -проекции спирали ).

Рассматривается функция "тени"  $\mathcal{T}(m, n, \ell, \Theta)$  для  $\Gamma O$ , описанного при помощи уравнения в неявном виде. Значение этой функции равно величине площади "тени", отбрасываемой  $\Gamma O T$  на плоскость  $Z=0$ . Аргументами функции  $\mathcal{T}$  являются координаты  $\{m, n, \ell\}$  направляющего вектора оси вращения, а также угол  $\Theta$  поворота  $\Gamma O T$  вокруг этой оси. Примеры результатов вращения куба представлены на рис. I. Используя эти изображения и функцию области Монте-Карло, всегда можно найти значение функции для данных  $m, n, \ell$  и  $\Theta$ . В случае, если ось вращения является линией уровня плоскости  $Z=0$ , в работе решена следующая задача. Найти значения аргументов, при которых функция  $\mathcal{T}$  достигает максимума.

В диссертации также установлена связь между функцией изменения величины площади проекции сечения  $\Gamma O T$  плоскостями уровня и функцией изменения длины периметра проекций этих сечений.

Теорема 5. Если между плоскостями уровня  $Z=a$  и  $Z=b$  фрагменты поверхности  $\Gamma O T$  являются торсовыми поверхностями равного ската (с углом ската  $\mathcal{L}$ ) и  $V(Z)$  есть функция, описывающая закон изменения площади проекции сечения  $T$  плоскостями уровня  $Z=const \in [a, b]$ , то длину периметра

проекции сечения можно определить из соотношения  $L(z) = V'(z)$ .

Отмечено, что в качестве торсовых поверхностей равного ската можно рассматривать графики нормальных функций. В частности, построено нормальное уравнение многоугольника в виде правильной звезды

$$F(x, y) = \bigwedge_{i=1}^n [-y \sqrt{F(x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i, -x \sin \varphi_i + y \cos \varphi_i)}] = 0; \quad \varphi_i = \frac{360^\circ}{n} i,$$

где  $F(x, y) = \Phi(|x| \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2}, -|x| \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2} - R)$ .

Здесь  $\Phi = \frac{1}{2} \sqrt{(x+|x|)^2 + (y+|y|)^2}$ ,  $R$  — радиус описанной окружности,  $\alpha$  — угол при вершине звезды. Кроме того, получено нормальное уравнение кривой  $y = f(x)$  (при  $a \leq x \leq b$ ) в виде

$$\varphi(x, y) = - \sqrt[3]{a \sqrt{(x-f)^2 + [y-f(f)]^2}} = 0.$$

В диссертации раскрыты особенности использования доказанных теорем для решения задач проекционной природы.

Третий раздел диссертации посвящен разработке интерполяционной формулы, позволяющей восстановить функцию двух переменных по ее значениям на сторонах треугольника. Включение этого раздела объясняется стремлением расширить круг возможных описаний компонентов отображения, участвующих в решении з.п.п. Вопросам интерполирования функций на треугольнике посвящены работы Ю.В.Сластина, О.Н.Литвина, К.Халла, Ф.Делваса, Р.Барнхилла, Д.Грегори, В.Гордона, Г.М.Нельсона и др. Традиционный подход к составлению интерполяционных функций состоит в подборе функции, удовлетворяющей заданным условиям. В диссертации рассмотрен геометрический подход к построению интерполяционной функции, основанный на графических соотношениях.

Пусть непрерывная функция  $Z = f(x, y)$  определена на угле  $G: \{\omega_1(x, y) \geq 0 \cap \omega_2(x, y) \geq 0\}$ , образованном пересекающимися в точке  $(x_p, y_p)$  прямыми. Показано, что функция

$$f_{12}^*(x, y) = f\left(x - \frac{\omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial y}}{D(\omega_1, \omega_2)}, y + \frac{\omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}}{D(\omega_1, \omega_2)}\right)$$

удовлетворяет свойствам  $f_{12}^* |_{\omega_1=0} = f(x, y) |_{\omega_1=0}$  и  $f_{12}^* |_{\omega_2=0} = f(x_p, y_p)$ . На основе графических соотношений показано, что функция  $L(x, y) = f_{12}^* + f_{21}^* - f(x_p, y_p)$  является интерполяционной для угла  $G$ . Для треугольника  $\{\omega_1(x, y) \geq 0 \wedge \omega_2(x, y) \geq 0 \wedge \omega_3(x, y) \geq 0\}$  интерполяционная функция имеет вид

$$L(x, y) = \sum_{k=1}^3 h_k(x, y) L_k(x, y), \quad (6)$$

где через  $L_i(x, y)$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) обозначены интерполяционные функции для углов этого треугольника, а  $h_k$  — суть функции сопряжения. Отмечено, что выбором функций сопряжения можно достичь выполнения трех тождеств

$$(L(x, y) - f(x, y)) |_{\omega_k=0} = 0.$$

В диссертации получена оценка погрешности интерполяции  $|L - f| < M h^2$ , где  $M$  — константа, зависящая от вторых производных функции  $f(x, y)$ , а  $h$  — длина максимальной стороны треугольника. Отмечено, что погрешность не зависит от величины минимального угла треугольника (как в оценке для полиномиальной интерполяции  $|L - f| < M h^2 / \sin \gamma$ ). Кроме того, найден вид дифференциального уравнения, решением которого служит функция (6)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^2 L(x, y) = 0.$$

В работе решен вопрос гладкой стыковки поверхностей, описанных при помощи интерполяционных функций вида (6) для двух треугольников с общей стороной. Отмечено, что точное решение этой задачи связано с учетом условий стыковки в углах треугольника функций, описывающих изменение производных по нормальям к смежным сторонам. Это сопровождается заметным усложнением интерполяционных функций, а также "техники" работы с ними. Поэтому был выбран некий компромисс между простотой формулы и ее качеством. А именно, в диссертации построена интерполяционная функция вида (6) такая, что производные от  $L(x, y)$ , взятые по нормали к соответствующей стороне треугольника, зависят только от значений граничных функций на концах этой стороны. Это достигается путем надлежащего выбора функций сопряжения  $h_k(x, y)$  ( $k = \overline{1, 3}$ ).

Четвертый раздел диссертации посвящен разработке проекционного способа нахождения огибающей параметрического семейства. Отмечено, что проблема описания огибающей прямо или косвенно присутствует во многих прикладных задачах. Вопросам определения огибающих различных параметрических семейств посвящены работы В.А.Залгаллера, Г.П.Толстова, П.В.Соколова, Г.П.Виткина, А.Н.Подкорытова, В.С.Обуховой, В.С.Льштина и др. На практике поиск огибающей усложняется тем, что семейство описано громоздким выражением. Это затрудняет реализацию традиционного способа нахождения огибающей из системы нелинейных уравнений. Кроме того, традиционный способ позволяет получать уравнение огибающей преимущественно в параметрическом виде, что не приемлемо для ряда прикладных задач. В.И.Гольцфарбом, А.Ф.Кириченко, В.Г.Клименко на примере профилирования зубчатых колес предложены разнообразные способы описания огибающей уравнением в неявном виде. Стремление к неявной форме описания объясняется возможностью ее использования для определения положения пробной точки относительно огибающей.

Показано, что нахождение огибающей семейства — суть задача проекционной природы. Это следует из работ В.И.Арнольда, Д.Брукса, П.Джиблина и др., где приведен следующий способ определения огибающей. Пусть уравнением  $f(x, y, c) = 0$  задано параметрическое семейство ( $c$  — параметр). В пространстве  $R^3$ , снабженном декартовой системой координат  $Oxyz$  рассматривается множество точек  $bas f(x, y, c)$ . На координатную плоскость  $c = 0$  строится проекция множества  $bas f$ . Известно, что очерковую кривую (границу) этой проекции можно принять в качестве огибающей (в общем виде — дискриминанты) исходного семейства. Действительно, рассматривая сечения множества  $bas f$  плоскостями уровня  $c = const$  (при  $c_{min} \leq c \leq c_{max}$ ), получим проекцию, состоящую из семейства проекций сечений. Компонентами отображения являются: чертёж  $pic f$  и огибающая (дискриминанта) семейства.

Использование на практике этой схемы нахождения огибающей имеет очевидную особенность: для достижения высокой точности описания огибающей необходимо взять большое число секу-

щих плоскостей. При реализации на ЭВМ этот момент проявляется в неприемлемо большом времени счета.

В диссертации предложен способ уменьшения числа секущих плоскостей с сохранением точности. Вместо плоскостей уровня множество  $basf$  предлагается рассекать другим специально подобранным семейством параллельных плоскостей. Ориентация в  $R^3$  элементов этого семейства выбирается из условия нормали к направлению, вдоль которого множество точек  $basf$  отбрасывает тень максимальной площади. Показано, что во втором случае проекции сечений образуют элементы параметрического семейства, у которых степень соприкосновения с огибающей будет максимальной. Следовательно, основная идея метода состоит в замене элементов первого семейства элементами второго семейства, имеющих ту же огибающую, что и первое семейство. Второе семейство должно иметь более высокую степень соприкосновения с огибающей. Это позволит обеспечить точность описания огибающей меньшим количеством элементов семейства.

На практике эта идея осуществляется следующим образом. Рассматривается параметрическое семейство кинематического формообразования вида  $f(x, y, c) = F(X, Y)$ , где  $X = \varphi(x, y, c)$  и  $Y = \psi(x, y, c)$ . Здесь  $F(X, Y) = 0$  - уравнение элемента параметрического семейства в подвижной системе координат  $O, X, Y$ , а формулами  $X = \varphi$  и  $Y = \psi$  задан закон перемещения этого элемента в пространстве с неподвижной системой координат  $O, x, y$ . Пусть  $c \in [a, b]$ . В этом случае множество  $picf$  является поверхностью жолоба в  $R^3$ . Уравнение параметрического семейства преобразуется к виду

$$\Phi(x, y, c) = f(x, y, c) \wedge \left( \frac{b-a}{2} - |c - \frac{b-a}{2}| \right) \quad (7)$$

и рассматривается множество точек  $bas\Phi(x, y, c)$ . Это множество является подмножеством множества  $basf(x, y, c)$ , расположенное между плоскостями уровня  $c = a$  и  $c = b$ . Множество  $bas\Phi$  (как твердое тело) вращается в  $R^3$  вокруг некоторой оси, эмпирическая информация о которой известна из постановки задачи. В результате находится ориентация множества  $bas\Phi$ , при которой значение функции "тени"  $\tau$  будет максимальным. Обратным преобразованием находится направление,



вдоль которого будет отбрасываться тень максимальной площади до вращения множества  $bas\Phi$ . Вращение контролируется при помощи ЭВМ (как на рис.1). Далее множество  $basf$  пересекается семейством плоскостей, перпендикулярных найденному направлению. В заключение строятся элементы нового параметрического семейства, при помощи которых находится искомая огибающая. В диссертации обсуждается точность метода, а также исследуются случаи построения дискриминантных множеств параметрических семейств.

В качестве примера в работе решены две задачи профилирования: зуба цилиндрического зубчатого колеса, образованного методом обкатки, а также рабочих поверхностей пуансонов для перфорации полосового материала во вращающихся валках. На рис.2 приведены результаты работы комплекса программ "Огибающая". Получены изображения: а) профиля зуба зубчатого колеса и положения исходного реечного контура в момент обкатки; а также б) процесса формообразования пуансона при перфорации (используется "обратный" прием - отверстие "формирует" пуансон).

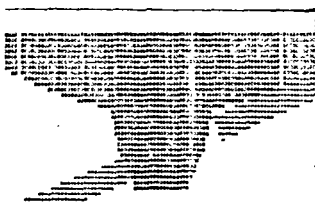
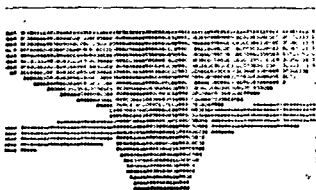
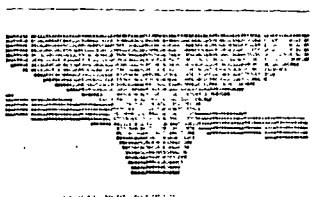
Отмечены следующие достоинства метода:

- процесс получения огибающей можно контролировать визуально;
- учитываются конечные пределы изменения параметра;
- уточнение решения достигается путем дробления дискретности раstra;
- не требуется гладкость функции, входящей в описание параметрического семейства;
- реализация на ЭВМ осуществляется при помощи линейного алгоритма;
- легко обобщается на многопараметрические семейства.

Предложенный метод использовался при разработке математического обеспечения блока "Геометрия" в алгоритме расчета упруго-напряженного состояния зубьев цилиндрических зубчатых колес. Отмечено, что предложенный метод - не альтернатива известным методам описания зубчатых колес в параметрическом виде. В интересах практики эти методы должны сосуществовать. Эффект достигается за счет автоматического построения узловых точек в теле зуба в зависимости от параметров исходного контура.



" а "



" б "

Рис. 2. Результаты профилирования зуба зубчатого колеса ( а ) и пуансона для перфорации в валках ( б )

Пятый раздел диссертации посвящен разработке способа геометрического расчета гетерогенных процессов. Под этим понимается процесс, происходящий в среде и характеризующийся фронтом его развития. Примером является процесс горения поверхности твердого тела – в частности, заряда ракетного двигателя на твердом топливе (РДТТ). Под геометрическим расчетом РДТТ понимается задача нахождения программы тяги двигателя при заданной форме рабочей поверхности заряда. Так как тяга зависит от площади поверхности горения в данный момент времени, то задача сводится к нахождению функциональной зависимости площади горящей поверхности от времени. Полагают, что горение подчиняется геометрическому (нормальному) закону горения.

Вопросам геометрического расчета заряда РДТТ посвящены работы Д.Ванденкеркове, М.Ф.Донзе, Б.Т.Ерохина, В.Ф.Разумеева, И.Х.Фахрутдинова, Я.М.Шапиро и др. Отмечается, что геометрический расчет является первым приближением для общего расчета динамики горения заряда, основанного на решении дифференциальных уравнений теории горения.

В диссертации предложен способ геометрического расчета рабочей поверхности заряда РДТТ, состоящий из двух этапов. Первый этап предполагает описание фаз горения заряда уравнением в неявной форме. Для этого рабочая поверхность заряда описывается при помощи нормального уравнения. При этом фазы горения можно рассматривать как проекции сечения графика нормальной функции плоскостями уровня. Средствами растровой машинной графики строятся изображения ряда промежуточных фаз горения. Одновременно с построением растровых изображений при помощи функции области Монте-Карло вычисляются сгоревший объем заряда в некоторые моменты времени. Второй этап предполагает вычисление значений площади горения в данный момент времени. Для этого используется теорема 5 второго раздела диссертации. На основании этой теоремы можно утверждать, что функция изменения площади горящей поверхности равна производной от функции изменения во времени сгоревшего объема. Для нахождения значения площади горения в некоторый момент времени необходимо использовать формулы численного дифференцирования. Входной информацией для этих формул служат

значения сгоревшего объема для некоторых моментов времени. Напомним, что эти значения получают из растровых изображений фаз горения.

На рис.3 представлены результаты работы комплекса программ "Горение". Изображены фазы горения заряда РДТТ, представляющего собой тело вращения. Ось вращения расположена слева на кадре изображения. Исходная форма рабочей поверхности состоит из конических, цилиндрической и торовой поверхностей. Кроме того, сечение тела заряда в верхней ( по рисунку ) части представляет собой круг с вырезанной областью в форме  $\surd$  - угольной правильной звезды. Сгоревшая часть на изображении отмечена мелкими точками.

Исследуются вопросы устойчивости процесса вычислений. Показано, что устойчивость нарушается в случае "смыкания" фронта горения.

К достоинствам предлагаемого метода следует отнести:

- возможность визуального контроля процесса вычислений;
- возможность редактировать рабочую поверхность заряда, подбирая тем самым требуемую функцию изменения площади горения;
- повышение точности расчетов путем дробления дискретности раstra изображения;
- возможность геометрического расчета с условием бронировки участков рабочей поверхности заряда.

Кроме того, описание заряда при помощи уравнений в неявном виде приемлемо для алгоритмов расчета физических полей, возникающих в заряде в процессе горения.

Предлагаемый способ геометрического расчета зарядов РДТТ использовался при разработке опытных изделий. Эффект достигается за счет возможности перебора вариантов геометрического расчета в зависимости от начальной геометрической формы рабочей поверхности заряда.

В шестом разделе предложен способ вычисления угловых коэффициентов излучения. Отмечено, что от используемых методов вычисления угловых коэффициентов излучения ( УКИ ) зависит эффективность математического моделирования и численных исследований лучевого энергообмена в технике и технологии. Вопросам вычисления УКИ посвящены работы А.В.Гушин -

28

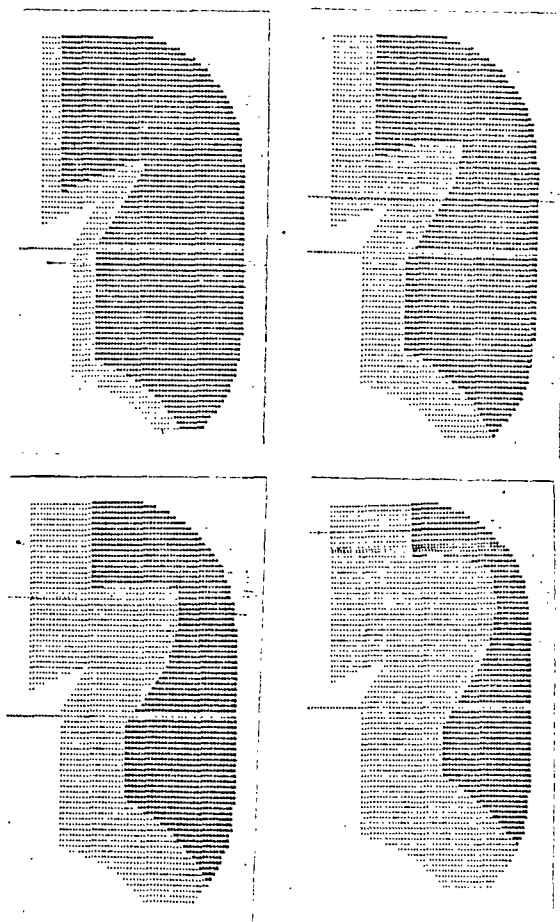


Рис.3. Изображения фаз горения заряда РДТТ

ского, Н.Джулла, Э.Коленда, Р.К.Корлета, М.Милгрема, А.Н.Ми-  
наева, М.Н.Одисики, Г.Л.Полика, Э.Спэрроу, Й.Холчендлера и др.  
Отмечается, что значение интегрального УКИ равно численному  
значению интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_A \int_B (\cos \alpha \cos \beta) / z^2 dB dA,$$

известного в интегральной геометрии как "мера Крофтона".  
Здесь  $A$  и  $B$  - два тела, поверхности которых участвуют  
в энергообмене,  $dA$  и  $dB$  - элементарные площадки поверхно-  
стей этих тел. Центральные точки элементарных площадок соеди-  
нены отрезком длины  $z$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  - углы между этим  
отрезком и соответствующей нормалью к поверхности каждого  
из тел, проходящей через центральную точку площадки. Внутрен-  
ний интеграл меры Крофтона дает значение локального УКИ.

В общем случае вычисление этих интегралов связано с уче-  
том таких геометрических факторов как samozаслоняемость тел.  
Например, витки спирали-излучателя могут заслонять участки  
других ее витков. Отмечено, что учет фактора samozаслоняемос-  
ти ведет к большому расходу машинного времени при вычислении  
меры Крофтона путем численной реализации на ЭВМ традиционного  
подхода к вычислению интегралов.

В диссертации предложен проекционный метод вычисления ло-  
кальных УКИ. Показано, что эта задача входит в класс задач  
проекционной природы. Основанием служат результаты, получен-  
ные в работах В.Нуссельта, Х.Хоттеля, И.Гамильтона, Е.Эккерта,  
К.Соммерса, Н.Т.Грира и др., и известные в литературе как  
метод сферы единичного радиуса. Проекционный метод вычисле-  
ния локальных УКИ состоит в следующем. На поверхности тела

$A$  выбирается элементарная площадка  $dA$ . Далее строи-  
тся плоскость, касательная к элементу  $dA$  и проходящая че-  
рез его центральную точку. Из этой же точки строится полу-  
сфера единичного радиуса, опирающаяся на касательную плос-  
кость. Из центра полусферы на ее поверхность радиально прое-  
цируется тело  $B$ . Полученная проекция, в свою очередь,  
параллельно проецируется на касательную плоскость, в резуль-  
тате чего получается радиально-параллельная проекция тела  $B$   
(сокращенно  $RP$  - проекция). Тогда отношение площади  $RP$ -  
проекции тела  $B$  к площади большого круга полусферы дает

значение локального УКИ. Следовательно, задача вычисления УКИ свелась к разработке алгоритма описания  $RP$ -проекции тела  $B$ , а также определения значений функции области Крофтона для этой проекции.

В диссертации рассмотрены три варианта описания  $RP$ -проекций тела  $B$ . Поверхность тела  $B$  можно задать:

- уравнением в неявном виде;
- в параметрическом виде;
- уравнением в явном виде ( с использованием интерполяционной функции из раздела 3 ).

Показано, что в некоторых частных случаях уравнение  $RP$ -проекции можно описать точно.

В диссертации решена задача самооблучения спирали. Найдена зависимость между коэффициентом растяжения спирали и интегральными УКИ. Для этого вычислялись локальные УКИ между одним из витков и остальными витками спирали. На рис.4 приведены результаты работы комплекса программ "Энергообмен". Изображены  $RP$ -проекция спирали относительно точек на поверхности выбранного витка спирали, расположенных в плоскости нормали к поверхности с шагом  $30^\circ$ . Отмечено, что значение локального УКИ вычисляется при помощи растровых изображений как отношение количества точек на  $RP$ -проекции спирали к общему количеству точек в круге ( значение функции области Крофтона ). Также вычислялись интегральные УКИ для системы тел " спираль - поверхность ". При этом поверхность описывалась при помощи интерполяционной функции из раздела 3. Отмечено, что направление нормали к поверхности можно определить на аналитическом уровне.

К достоинствам метода следует отнести:

- вычисление локальных УКИ можно контролировать визуально;
- итерационный процесс уточнения решения можно организовать путем дробления дискретности растра;
- инвариантность описания графической информации для алгоритма ( т.е. он не ориентирован на конкретные поверхности );
- точность вычислений допускает апостериорную оценку;

Метод использовался при разработке термоустановки. Эффект достигается за счет учета геометрического фактора самозаслонения витков спирали-излучателя.

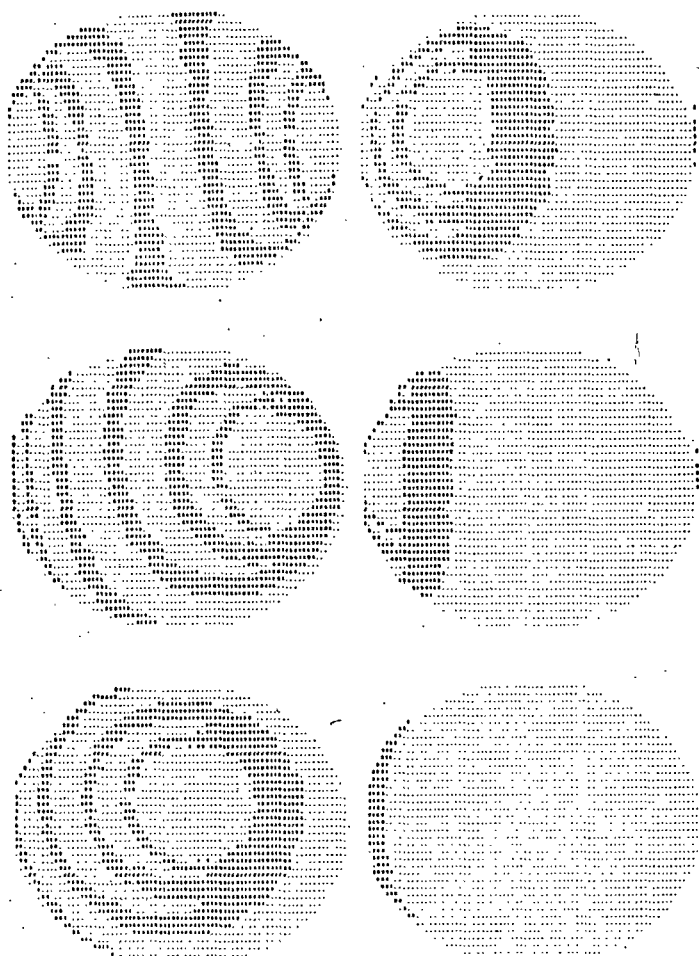


Рис.4. Изображение  $RP$  - проекции спирали, используемое для вычисления локальных угловых коэффициентов излучения



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важная народнохозяйственная проблема повышения качества машиностроительных изделий связана с созданием новых алгоритмов решения инженерных задач. Прямственность алгоритмов для близких по характеру задач можно получить путем классификации задач по ключевым формальным признакам этих алгоритмов. В диссертации в качестве формального признака классификации исследован феномен категории отображения. Соответствующий класс задач назван задачами проекционной природы. Для решения з.п.п. разработаны основные теоретические положения метода  $A$ -отображений. Созданные алгоритмические и программные средства позволили поставить и решить ряд задач проекционной природы. Среди них: нахождения огибающей параметрического семейства, геометрического расчета гетерогенных процессов и вычисления угловых коэффициентов излучения. При этом ключевым моментом было использование растровой машинной графики как для визуального контроля вычислений, так и для определения метрических характеристик проекций, построенных в рамках метода  $A$ -отображений.

При исследовании основной проблемы в диссертации решены следующие задачи:

1. Выявлен круг задач проекционной природы.
2. Установлен явный вид недифференциального оператора для различных видов проецирования.
3. Достигнуто уменьшение количества операций, необходимых для алгоритмической реализации метода  $A$ -отображений.
4. Найдены при помощи функций области метрические характеристики проекций.
5. Произведена метризация проекций контуров сечений торсовой поверхности равного ската при помощи производной функции области.
6. Предложена схема интерполирования функции, заданной на сторонах треугольника.
7. Осуществлен вывод изображений проекций на устройства растрового типа.
8. Разработаны алгоритмы решения конкретных задач проекционной природы:

- синтеза растровых изображений трехмерных объектов;
- нахождения огибающей параметрического семейства;
- расчета интегральных характеристик гетерогенных процессов;

- вычисления интегралов типа "мера Крофтона".

9. Алгоритмы реализованы в виде программ для ЭВМ на языке Фортран-77.

10. Созданы комплексы программ решения практических задач:

- профилирования поверхностицилиндрических зубчатых колес, полученных обкаткой, а также пуансонов для перфорации в валках;

- расчета рабочей поверхности заряда ракетного двигателя на твердом топливе;

- вычисления угловых коэффициентов излучения для системы тел "спираль-поверхность".

II. Разработанные методики, алгоритмы и программы применялись при решении практических задач геометрического моделирования в машиностроении, энергостроении и оборонной промышленности.

Содержание диссертационной работы отражено в следующих основных публикациях:

1. Куценко Л.Н. Построение уравнения огибающей семейства кривых при помощи  $R$ -функций // Известия ВУЗов. Математика. - 1982. - № 7, с.48-49. ( Д I453-81), 22 с.

2. Куценко Л.Н. Квазинормальное уравнение чертежа / В кн.: Начертательная геометрия и инженерная графика.- Алма-Ата:КазПИ, 1985, с.59-62

3. Куценко Л.Н., Чермных И.А., Серeda И.В. Теоретические основы получения прямоугольных проекций в растровой машинной графике / В кн.: Методы и средства обработки сложной графической информации.- Горький: ГТУ, 1985, с.79-

4. Куценко Л.Н. К вопросу описания геометрических объектов с изменяемой формой/ В кн.: Методы и средства обработки сложной графической информации.- Горький:ГТУ, 1985, с.117-118

5. Куценко Л.Н. Построение проекций пространственных объектов с удалением невидимых линий/ В кн. Прикладная геометрия и инженерная графика. - 1982. - вып.34, Киев:БудІвельник, с.142-144

6. Куценко Л.Н., Федько В.В. Приближенное построение эквидистанты поверхности, заданной семейством ортогональных сечений / В кн.: Геометрическое моделирование и графика в САПР.- М.:МАИ, 1983, с.73-75

7. Куценко Л.Н. Машинная графика в задачах проекционной природы. - М.: Знание ( Новое в жизни, науке и технике. Серия "Математика, кибернетика" № 9 ), 1990, 48 с.

8. Куценко Л.Н., Арендарчук А.В. Метод вычисления угловых коэффициентов излучения для исследований радиационного теплообмена между телами сложных пространственных форм // Инженерно-физический журнал.- 1989.- т.54.-№ 4, с.690-691 ( Д 4П9-89 ), 14 с.

9. Куценко Л.Н. Построение уравнения очерка изображения тела при параллельном проецировании / В кн. Прикладная геометрия и инженерная графика, вып.34, Киев: БудІвельник, 1982, с.93-95

10. Куценко Л.Н. Серeda И.В. Построение сечений сложных геометрических тел, описанных методом  $R$ -функций/ В сб.: Вестник Харьковского политехнического института.- 1983.- вып.5, с. 54-56

11. Клепанда С.В., Куценко Л.Н. Описание рациональной формы рабочих поверхностей пуансонов при перфорации полосового материала во вращающихся вальках/ В сб.: Вестник Харьковского политехнического института.- 1988.- вып.9, с.48-53

12. Куценко Л.Н. Математическое обеспечение систем электронной киномультипликации/ В кн. Вычислительные системы. Сплайн-функции в инженерной геометрии.-Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981, с.148-149