

УДК 519.85

И.А. ЧУБ, М.В. НОВОЖИЛОВА

**ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

**Abstract.** An optimization placement problem of non-oriented polygons on a strip is considered. A linearization of approximation procedure for restriction functions is proposed on the base of studying additional peculiarities of the problem. As a result, we can present the placement problem of non-oriented objects as a set of linear programming problems with a prescribed accuracy.

**Key words:** placement of non-oriented objects, linear approximation, region of admissible decisions.

**Анотація.** Проведено дослідження оптимізаційної задачі розміщення багатокутних неорієнтованих об'єктів у смугі, виділені додаткові властивості області припустимих рішень задачі, на основі яких запропонована лінеаризація функцій основних обмежень області припустимих рішень, що дозволяє з наперед заданою точністю звести розглянуту нелінійну оптимізаційну задачу до набору задач лінійного програмування.

**Ключові слова:** розміщення багатокутних неорієнтованих об'єктів, лінійна апроксимація, область припустимих рішень.

**Аннотация.** Проведено исследование оптимизационной задачи размещения многоугольных неориентированных объектов в полосе, выделены дополнительные свойства области допустимых решений задачи, на основе которых предложена линейризация функций основных ограничений области допустимых решений, позволяющая с наперед заданной точностью свести рассматриваемую нелинейную оптимизационную задачу к набору задач линейного программирования.

**Ключевые слова:** размещение многоугольных неориентированных объектов, линейная аппроксимация, область допустимых решений.

## 1. Введение

Задача оптимального размещения конечного набора неориентированных многоугольных геометрических объектов в заданной многосвязной многоугольной области относится к классу задач оптимизационного геометрического проектирования [1] и является объектом пристального внимания исследователей, о чем свидетельствует постоянно растущее число публикаций [1–4] как в нашей стране, так и за рубежом. К задачам такого рода относятся, например, задачи раскроя изотропного материала (металлопрокат, ткань с соответствующими характеристиками, стекло, пластмасса и т.д.) на многоугольные заготовки. При этом, если над многоугольником допустимо аффинное преобразование поворота, такой геометрический объект называют неориентированным.

Данная задача является многомерной многоэкстремальной задачей нелинейного невыпуклого программирования с весьма специфичной областью допустимых решений, что затрудняет или делает невозможным применение классических методов условной оптимизации [5]. Эффективные точные методы решения задач практической размерности отсутствуют.

Актуальность рассматриваемого класса задач обуславливает необходимость создания программного обеспечения процесса решения, основанного на современном математическом инструментарии.

Целью настоящей статьи является выделение новых свойств области допустимых решений математической модели задачи и построение линейной аппроксимации основных ограничений области допустимых решений, причем точность аппроксимации является экзогенным параметром.

## 2. Постановка задачи

Пусть есть набор  $R = \{R_i\}, i = \overline{1, N}$  выпуклых неориентированных многоугольников, заданных в арифметическом евклидовом пространстве  $E^2$ , и область размещения  $R_0$  вида

$$R_0 = S_0 / \bigcup_{c=1}^C \Omega_c, \quad (1)$$

где  $S_0 = \{(x, y) \in E^2 | x \in [0, z], y \in [0, W], W = const, z = var\}$  – полубесконечная полоса,  $\Omega_c(a_c, b_c), c = 1, 2, \dots, C$  – множество выпуклых областей запрета,  $(a_c, b_c)$  – фиксированные параметры.

Объект  $R_i$  задается упорядоченным против часовой стрелки набором  $\{(x_i^n, y_i^n)\}, n = \overline{1, n_i}$  координат его вершин в собственной системе координат  $X_i O_i Y_i, i = \overline{1, N}$ .

Положение  $R_i$  в общей системе координат  $XOY$ , связанной с областью  $R_0$ , задается

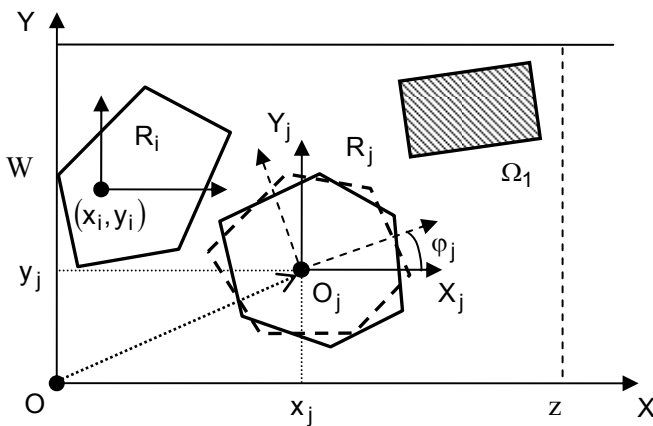


Рис. 1. Область размещения с размещаемыми объектами и неподвижной областью запрета

вектором параметров размещения  $u_i = (v_i, \varphi_i) = (x_i, y_i, \varphi_i)$ , который определяет начало его собственной системы координат  $X_i O_i Y_i$ . При этом компонента  $v_i = (x_i, y_i)$  задает трансляцию  $O_i$ , а угловой параметр  $\varphi_j$  – поворот системы координат  $X_i O_i Y_i$  относительно  $O_i$  (рис. 1).

Задача размещения такова:

необходимо разместить набор  $R_i, i = \overline{1, N}$  объектов без взаимных наложений в области

$R_0$  так, чтобы длина занятой части полосы  $z$  была минимальной.

Математическая модель оптимизационной задачи размещения имеет вид:

$$u^* = \arg \min_{u \in D \subset E^{3N+1}} z, \quad (2)$$

где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N, z) = (x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2, \dots, x_N, y_N, \varphi_N, z)$ ,  $D = D^1 \cap D^2 \cap D^3$  – область допустимых решений задачи;  $D^1$  – подобласть пространства  $E^{3N+1}$ , выделяемая ограничениями на размещение в полосе  $S_0$ ;  $D^2$  – подобласть  $E^{3N+1}$ , задаваемая условиями попарного взаимного непересечения  $(R_i, \Omega_c), i = \overline{1, N}, c = \overline{1, C}$ ;  $D^3$  – подобласть  $E^{3N+1}$ , выделяемая условиями попарного взаимного непересечения объектов размещения  $(R_i, R_j), i, j = \overline{1, N}, i \neq j$ .

Приведем основные свойства области  $D$ , необходимые для дальнейших построений.

Свойство 1. Область  $D$  – невыпуклое несвязное ограниченное точечное множество, имеющее кусочно-гладкую границу  $\Psi = FrD$ ,  $\Psi \subset E^{3N}$ . Каждая компонента связности области  $D$  является многосвязной. Гиперповерхность  $\Psi$  состоит из гладких участков, которые описываются линейными и нелинейными ограничениями.

Свойство 2. Число ограничений  $I$ , описывающих область  $D$  задачи (2), квадратично зависит от числа размещаемых объектов и равно

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = O(4N \max_{i=1,N} n_i) + O(CN \max_{i=1,N} n_i) + O(N^2 \max_{i=1,N} n_i), \quad (3)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – число ограничений, описывающих подобласти  $D^1, D^2, D^3$  соответственно.

Целью данной статьи является построение преобразования  $\mathfrak{Z}(D, \varepsilon): D \xrightarrow{\mathfrak{Z}} D^L$ , такого, что его применение к функциям ограничений задачи, определяющих исходную нелинейную область  $D$ , продуцирует аппроксимационное множество  $D^L$  с кусочно-линейной границей.

### 3. Построение кусочно-линейной аппроксимации области $D$

Замечание 1. Преобразование  $\mathfrak{Z}$  осуществляется для дальнейшего построения итерационного алгоритма решения исходной задачи как набора задач линейного программирования. При этом  $(h+1)$ -я итерация алгоритма имеет вид [5]

$$X_{h+1} = X_h + \Delta X \bullet p,$$

где  $X_h$  – значение переменной на предыдущей итерации,  $\Delta X$  – шаг,  $p$  – направление движения.

Замечание 2. Кусочно-линейная аппроксимация области  $D$ , реализуемая преобразованием  $\mathfrak{Z}$ , проводится в диапазоне  $\Delta$  и изменения параметров размещения объектов  $R_i$ , определяемом заданной точностью вычислений  $\varepsilon$ . На основании изучения особенностей области  $D$  сделан вывод о возможности выбора диапазонов вида  $\Delta\varphi \in [-0,3;0,3], \Delta x_i, \Delta y_i \in [0;5], i = \overline{1, N}$ .

Далее будем использовать обозначение  $\varphi$  вместо  $\Delta\varphi$ .

### 4. Линеаризация условий размещения объектов в области – подобласть $D^1$

Подобласть  $D^1$  описывается системой  $F_0(u) \leq 0 := \{f_{0i}^{hj}(u_i) \leq 0, j = \overline{1, n_i}; h = \overline{1, 4}; i = \overline{1, N}$  нелинейных неравенств, таких, что функции неравенств  $f_{0i}^{hj}(u_i) \leq 0$  имеют вид

$$f_{0i}^{hj} \in \{-x_i + x_i^j \cos \varphi_i + y_i^j \sin \varphi_i; -y_i + y_i^j \cos \varphi_i - x_i^j \sin \varphi_i; y_i - W - y_i^j \cos \varphi_i + x_i^j \sin \varphi_i; x_i - z - x_i^j \cos \varphi_i - y_i^j \sin \varphi_i\}.$$

Замечание 3. В данном случае реализовано касание типа «вершина  $(x_i^j, y_i^j)$  объекта  $R_i$  – сторона  $S_0$ ». Назовем это касание касанием I-го типа [4].

Каждая из функций  $f_{0i}^h$  представляет собой сумму трех слагаемых, первое из них является линейным, а два других – тригонометрические функции параметра  $\varphi_i$ . Для линеаризации функций  $f_{0i}^h$  разложим тригонометрические слагаемые в ряд Маклорена, что позволяет приближенно представить функцию  $\sin \varphi$  ее аргументом  $\varphi : \sin \varphi \cong \varphi$ , а функцию  $\cos \varphi$  – выражением  $\cos \varphi \cong 1 - 0,5\varphi^2$ . При этом, если в качестве экзогенного параметра задана погрешность вычислений  $\varepsilon_{\sin} > 0$ , то можно определить диапазон изменения  $\varphi$ , в котором  $|\sin \varphi - \varphi| < \varepsilon_{\sin}$ . Так, если  $\varepsilon_{\sin} = 0,015$ , то  $\varphi \in [-0,2; 0,2]$ .

Тогда функции  $f_{0i}^h, h = \overline{1,4}$  в соответствующих диапазонах изменения углового параметра  $\varphi$  могут быть представлены следующим образом:

$$f_{0i}^1 \approx -x_i + x_i^j \left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}\right) + y_i^j \varphi_i, \quad f_{0i}^2 \approx -y_i + y_i^j \left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}\right) - x_i^j \varphi_i, \quad (4)$$

$$f_{0i}^3 \approx y_i - W - y_i^j \left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}\right) + x_i^j \varphi_i, \quad f_{0i}^4 \approx x_i - z - x_i^j \left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}\right) - y_i^j \varphi_i. \quad (5)$$

Кусочно-линейная аппроксимация  $g^L(\varphi_i)$  функции  $g(\varphi_i) = \left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}\right)$  в диапазоне изменения углового параметра  $\varphi_i \in [0; 0,36]$  с заданной погрешностью  $\varepsilon_{\cos}$  [4] имеет вид

$$g_{k-1}^L(\varphi_i) = a_k \varphi_i + b_k, \quad k = \overline{2,4},$$

где  $a_k = (y_{A_k} - y_{A_{k-1}})/(x_{A_k} - x_{A_{k-1}})$ ,  $b_k = y_{A_{k-1}} - a_k x_{A_{k-1}}$ . Точки  $A_1 = (0; 1)$ ,  $A_2 = (0,12; 0,99)$ ,  $A_3 = (0,24; 0,97)$ ,  $A_4 = (0,36; 0,93)$  – равномерно отстоящие по оси  $\varphi$  узлы аппроксимации  $g^L(\varphi_i)$ .

Тогда функция  $f_{0i}^1$  представляется набором функций

$$f_{0i}^1 \approx -x_i + x_i^j g^L(\varphi_i) + y_i^j \varphi_i = \left\langle -x_i + x_i^j g_{k-1}^L(\varphi_i) + y_i^j \varphi_i, \varphi_i \in [A_{k-1}; A_k], k = \overline{2,4} \right\rangle. \quad (6)$$

Аналогично записываются аппроксимации функций  $f_{0i}^h, h = \overline{2,4}$ .

**Пример 1.** Пусть положение объекта  $R_1(x_1, y_1, \varphi_1)$  в полосе  $S_0$  (рис. 2а) задается системой уравнений вида

$$\begin{cases} f_{01}^{11} = 0, \\ f_{01}^{22} = 0, \\ \varphi_1 = \varphi_{1\_fixed}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_1^1 \cos \varphi_1 + y_1^1 \sin \varphi_1 = 0, \\ -y_1 + y_1^2 \cos \varphi_1 - x_1^2 \sin \varphi_1 = 0, \\ \varphi_1 = \varphi_{1\_fixed}. \end{cases} \quad (7)$$

Реализация алгоритма линейной аппроксимации функций ограничений  $f_{01}^{11}$ ,  $f_{01}^{22}$  при максимальном шаге изменения углового параметра  $\varphi_i = 0,2$  проиллюстрирована на рис. 2б. Так, на рисунке отмечен след полюса объекта при решении системы (7) и ее аппроксимированного аналога. Расчетное и аппроксимированное значения координат полюса практически совпадают.

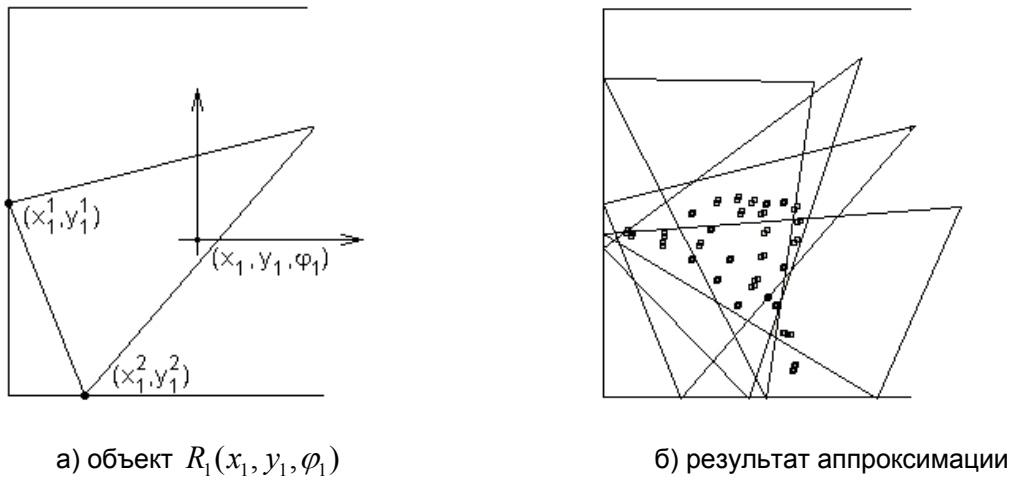


Рис. 2. Реализация алгоритма линейной аппроксимации функций системы (7)

**Замечание 4.** Предложенная методика линеаризации условий размещения объектов  $R_i$  в области  $S_0$  практически без изменений применима в случае, если объекты  $R_i$  – невыпуклые.

### 5. Линеаризация условий взаимного непересечения объектов и зон запрета – подобласть $D^2$

Подобласть  $D^2$  описывается системой  $F(u) \leq 0$  наборов  $F_{ic}(u_c, u_i) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $c = \overline{1, C}$  нелинейных неравенств, где набор  $F_{ic}(u_c, u_i) \leq 0$  задает условия попарного взаимного непересечения объекта  $R_i$  и зоны запрета  $\Omega_c$ :

$$F_{ic}(u_c, u_i) \leq 0 := \langle f_{ic}^{hj}(u_c, u_i) \leq 0, h = \overline{1, n_c}, j = \overline{1, n_i} \rangle, \quad (8)$$

где  $n_c$  – количество вершин зоны запрета  $\Omega_c$ .

Другими словами, для обеспечения условия непересечения или касания объекта  $R_i$  и зоны запрета  $\Omega_c$  необходимо выполнение только одного неравенства из набора (8).

Вид функции  $f_{ic}^{hj}(u_c, u_i)$  неравенств системы (8) зависит от типа касания пары  $(R_i, \Omega_c)$ . Здесь реализуется как касание I-го типа «вершина  $(x_i^k, y_i^k)$  – сторона  $[(x_c^l, y_c^l), (x_c^{l+1}, y_c^{l+1})]$ » (рис. 3а), так и касание II-го типа «сторона  $[(x_i^k, y_i^k), (x_i^k, y_i^k)]$  – вершина  $(x_c^l, y_c^l)$ » (рис. 3б).

Касание I-го типа (в системе координат  $X_c O_c Y_c$ ) описывается следующим образом:

$$f_{0i}^{hj_1} : A(x_i - a_c) + B(y_i - b_c) + (Ax_i^k + By_i^k) \cos \varphi_i - (Bx_i^k - Ay_i^k) \sin \varphi_i - C_1 = 0,$$

где  $A = Y_1 - Y_2 = y_c^l - y_c^{l+1}$ ,  $B = X_1 - X_2 = x_c^{l+1} - x_c^l$ ,  $C_1 = (x_c^l A + y_c^l B)$ .

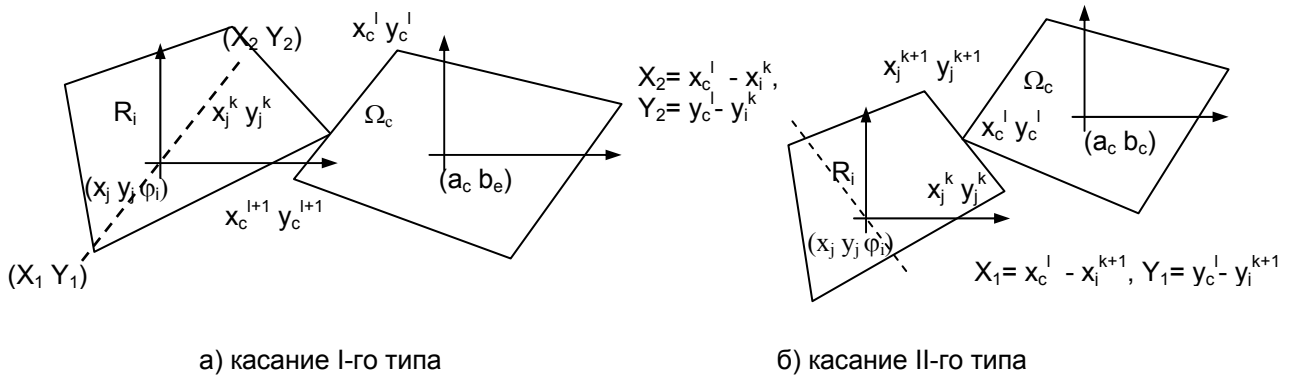


Рис. 3. Условия касания объектов и зон запрета

Применяя подход, изложенный в п.5, получаем следующее приближение функции  $f_{0i}^{hj_1}$ :

$$f_{0i}^{hj_1} : Ax_j + By_j - (Ax_j^k + By_j^k)g(\varphi_i) - (Bx_j^k - Ay_j^k)\varphi_j - Aa_c - Bb_i - C_1 \leq 0.$$

Использование функции  $g^L(\varphi_i)$  завершает линейризацию функции  $f_{0i}^{hj_1}$ .

Касание II-го типа (рис. 3б) описывается следующим образом:

$$f_{0i}^{hj_1} : A(\varphi_i)(x_i - a_c) + B(\varphi_i)(y_i - b_c) - \cos \varphi_i (x_c^l A + By_c^l) + \sin \varphi_i (y_c^l A - x_c^l B) + x_i^{k+1} A + y_i^{k+1} B = 0,$$

где  $A(\varphi_i) = A \cos \varphi_i + B \sin \varphi_i$ ,  $B(\varphi_i) = B \cos \varphi_i - A \sin \varphi_i$ ,  $A = -y_i^{k+1} + y_i^k$ ,  $B = -x_i^k + x_i^{k+1}$ ,

$$y_i = y_i^h + \Delta y_i, \quad x_i = x_i^h + \Delta x_i.$$

На первом шаге линейризации заменим

$$A(\varphi_i) = A \cos \varphi_i + B \sin \varphi_i \approx A(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}) + B\varphi, \quad B(\varphi_i) = B \cos \varphi_i - A \sin \varphi_i \approx B(1 - \frac{\varphi_i^2}{2}) - A\varphi.$$

Функция  $f_{0i}^{hj_1}$  ограничения примет вид

$$f_{0i}^{hj_1}(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i) = Q_1 + Q_2(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i) + Q_3(\varphi_i) + Q_4(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i) + Q_5(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i).$$

где  $Q_1 = -Aa_c - Bb_c + x_i^{k+1} A + y_i^{k+1} B$  – константная часть функции  $f_{0i}^{hj_1}$ ;

$$Q_2(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i) = A\Delta x_i + B\Delta y_i + \varphi_i(-A(x_i^h - b_c) + B(x_i^h - a_c) + y_c^l A - x_c^l B) – линейризованная часть;$$

$$Q_3(\varphi_i) = (1 - \frac{\varphi_i^2}{2})C_2, \quad C_2 = (B(y_i^h - b_c) + A(x_i^h - a_c) - x_c^l A - By_c^l) – квадратичная часть;$$

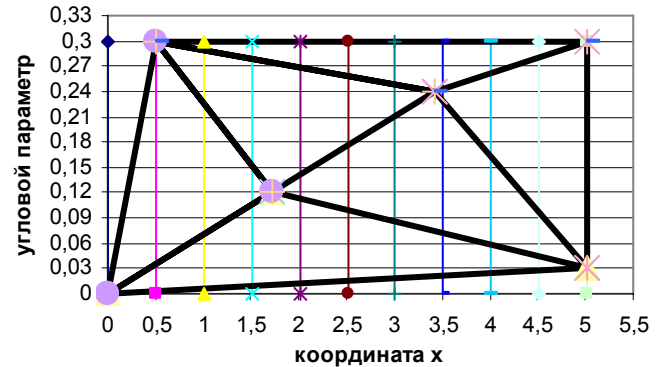
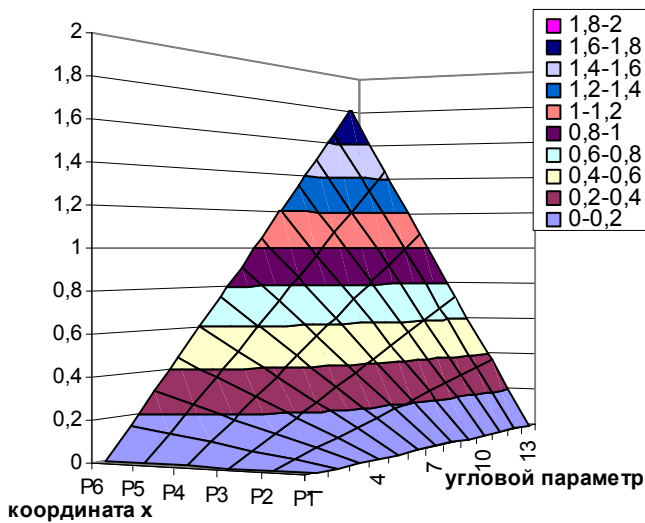
$$Q_4(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i) = B\varphi_i \Delta x_i - A\varphi_i \Delta y_i – гиперболическая часть;$$

$$Q_5(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i) = -A \frac{\varphi_i^2}{2} \Delta x_i - B \frac{\varphi_i^2}{2} \Delta y_i – составляющая третьего порядка.$$

Линейризация  $Q_3(\varphi_i)$  осуществляется на основе построения функции  $g^L(\varphi_i)$  и имеет вид

$$Q_3^L(\varphi_i) \approx g^L(\varphi_i) C_2 = \langle g_{k-1}^L(\varphi_i) C_2, \quad \varphi_i \in [A_{k-1}, A_k], \quad k = f(\varepsilon_{\cos}). \quad (9)$$

Функция  $Q_4$  содержит произведения  $\varphi_i \Delta x_i$ ,  $\varphi_i \Delta y_i$ . В рассматриваемых диапазонах  $\varphi_i \in [0; 0,3]$ ,  $x_i \in [0; 5]$  поверхность  $\Gamma(\varphi_i, \Delta x_i) = \varphi_i \Delta x_i$  имеет вид, показанный на рис. 4а.



а)  $\Gamma(\varphi_i, \Delta x_i) = \varphi_i \Delta x_i$

б) проекция кусочно-линейной аппроксимации поверхности  $\Gamma(\varphi_i, \Delta x_i)$

Рис. 4. Поверхность  $\Gamma(\varphi_i, \Delta x_i) = \varphi_i \Delta x_i$

Кусочно-линейная аппроксимация  $\Gamma^L(\varphi_i, \Delta x_i)$  функции  $\Gamma(\varphi_i, \Delta x_i) = \varphi_i \Delta x_i$  в диапазонах изменения параметров  $\varphi_i \in [0; 0,3]$ ,  $\Delta x_i \in [0; 5]$  может быть построена с помощью плоскостей вида

$$G_4(\Delta x_i, \varphi_i) \approx \langle \Gamma_k^L(\Delta x_i, \varphi_i) = (A_k \Delta x_i + B_k \varphi_i + D_k) / C_k, k = \overline{1,6}.$$

Проекция поверхности  $\Gamma^L(\varphi_i, \Delta x_i)$  на плоскость  $\varphi_i O \Delta x_i$  представлена на рис. 4б.

**Пример 2.** Пусть положение объекта  $R_1(x_1, y_1, \varphi_1)$  в полосе  $S_0$  (рис. 2а) задается системой уравнений вида

$$\begin{cases} A(\varphi_i)(x_i - a_c) + B(\varphi_i)(y_i - b_c) - \cos \varphi_i (x_c^l A + B y_c^l) + \sin \varphi_i (y_c^l A - x_c^l B) + x_i^{k+1} A + y_i^{k+1} B = 0, \\ y_1 - W - y_1^2 \cos \varphi_i + x_1^2 \sin \varphi_i = 0, \\ \varphi_1 = \varphi_{1\_fixed}. \end{cases} \quad (10)$$

Реализация алгоритма линейной аппроксимации функций ограничений при максимальном шаге изменения углового параметра  $\varphi_i = 0,2$  проиллюстрирована на рис. 5, где отмечен след полюса объекта  $R_1(x_1, y_1, \varphi_1)$  при решении системы (10) и ее аппроксимированного аналога, а также промежуточные положения объекта  $R_1(x_1, y_1, \varphi_1)$ . Точный результат (сплошная линия) и аппроксимированный результат (прерывистая линия) практически совпадают.

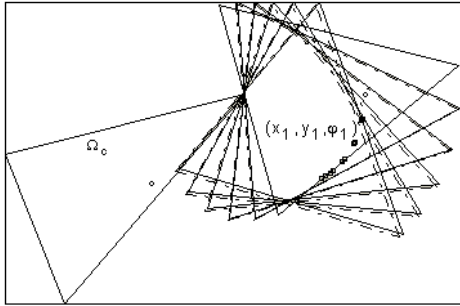


Рис. 5. Реализация алгоритма линейной аппроксимации ограничений области  $D^2$

## 6. Линеаризация условий взаимного непересечения объектов – подобласть $D^3$

Подобласть  $D^3$  сформирована условиями взаимного попарного непересечения объектов размещения.

Рассмотрим пару объектов  $(R_i, R_j)$ ,  $i, j \in \overline{1, N}, i \neq j$ .

В данном случае как параметры размещения  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i)$  объекта  $R_i$ , так и параметры размещения  $(\Delta x_j, \Delta y_j, \varphi_j)$  объекта  $R_j$ , являются переменными величинами. При этом реализуется как

касание I-го типа «сторона  $[(x_i^k, y_i^k) (x_i^k, y_i^k)]$  объекта  $R_i$  – вершина  $(x_c^l, y_c^l)$  объекта  $R_j$ », так и

касание II-го типа «вершина  $(x_i^k, y_i^k)$  объекта  $R_i$  – сторона  $[(x_c^l, y_c^l), (x_c^{l+1}, y_c^{l+1})]$  объекта  $R_j$ ».

Область  $D^3$  описывается системой  $F_3(u) \leq 0$  наборов  $F_{ij}^h(u_i, u_j) \leq 0$  нелинейных неравенств, задающих условие непересечения пары объектов  $(R_i, R_j)$ ,  $i, j \in \overline{1, N}, i \neq j$  вида

$$F_{ij}(u_i, u_j) \leq 0 := \langle F_{ij}^{hl}(u_c, u_i) \leq 0, h = \overline{1, n_i}, l = \overline{1, n_j} \rangle,$$

причем вид функции  $F_{ij}^{hl}(u_i, u_j) \leq 0$   $f_{ij}^{hl}$  зависит от типа касания пары  $(R_i, R_j)$ .

В случае реализации касания I-го типа функция  $f_{ij}^{hl}$  имеет вид

$$(A \cos \phi_i - B \sin \phi_i)(x_j - x_i) + (B \cos \phi_i + A \sin \phi_i)(y_j - y_i) + (Ax_j^k + By_j^k) \cos(\phi_i - \phi_j) - (Bx_j^k - Ay_j^k) \sin(\phi_i - \phi_j) - (By_i^l + Ax_i^l). \quad (11)$$

В случае реализации касания II-го типа функция  $f_{ij}^{hl}$  имеет вид

$$f_{ij}^{hl} : (A \cos \phi_j - B \sin \phi_j)(x_j - x_i) + (B \cos \phi_j + A \sin \phi_j)(y_j - y_i) - (Ax_i^l + By_g^l) \cos(\phi_j - \phi_i) + (Bx_g^l - Ay_i^l) \sin(\phi_j - \phi_i) + (By_j^k + Ax_j^k). \quad (12)$$

Структура функций (11–12) аналогична структуре функций набора (8), подробно рассмотренной ранее. Следовательно, для линеаризации функций (11–12) в качестве базовой применима процедура линеаризации функций ограничений II-го типа из набора условий взаимного непересечения объектов размещения и зон запрета.

Отличие состоит в том, что

1. Тригонометрические функции разности угловых параметров объектов размещения, входящие в состав функций (11) и (12), аппроксимируются следующим образом:

$$\cos(\varphi_i - \varphi_j) \approx 1 - \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^2}{2} = 1 - \frac{\varphi_i^2}{2} - \frac{\varphi_j^2}{2} + \varphi_i \varphi_j, \quad \sin(\varphi_i - \varphi_j) \approx \varphi_i - \varphi_j.$$



2. В силу переменности параметров размещения  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i, \Delta x_j, \Delta y_j, \varphi_j)$  объектов  $(R_i, R_j)$  функции  $f_{ij}^{hh}$   $(\Delta x_i, \Delta y_i, \varphi_i, \Delta x_j, \Delta y_j, \varphi_j)$  представляются в виде

$$f_{0i}^{hh} = Q_1 + \sum_{s,m \in \{i,j\}} [Q_2(\Delta x_s, \Delta y_s, \varphi_m) + Q_3(\varphi_m) + Q_4(\Delta x_s, \Delta y_s, \varphi_m) + Q_5(\Delta x_s, \Delta y_s, \varphi_m)] - (Ax_i^l + By_g^l)\phi_j\phi_i,$$

где  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$  – константная, линеаризованная, квадратичная, гиперболическая часть, составляющая третьего порядка функции  $f_{ij}^{hh}$  соответственно.

## 7. Выводы

Таким образом, построена линейная аппроксимация области допустимых решений задачи размещения неориентированных геометрических объектов, позволяющая с заданной точностью свести рассматриваемую нелинейную оптимизационную задачу к набору оптимизационных задач линейного программирования. При этом размерность пространства параметров размещения, в котором рассматривается область допустимых решений задачи, остается неизменной, а точность аппроксимации является экзогенным параметром.

Проведенная линеаризация дает возможность получить удовлетворительное решение многих задач практической размерности с использованием хорошо разработанного математического аппарата.

Данный подход является основой для построения алгоритмического и программного обеспечения процесса решения указанных оптимизационных задач, основанного на современном математическом инструментарии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.
2. Гиренко К.А. Математична модель та метод розв'язання задачі розміщення неорієнтованих складених геометричних об'єктів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук. – Харків, 2009. – 18 с.
3. Чуб И.А. Линеаризация оптимизационной задачи размещения неориентированных объектов в промышленных системах раскрытия изотропных материалов / И.А. Чуб // Тез. докл. IV междунар. научн.-практ. конф. "Математическое и имитационное моделирование систем" (Киев, 22–26 июня 2009 г.). – Киев: ИПММС, 2009. – С. 165 – 168.
4. Новожилова М.В. Методологія розв'язання оптимізаційних нелінійних задач геометричного проектування / М.В. Новожилова // Вісник Запорізького державного університету. – Запоріжжя: ЗДУ, 1999. – № 1. – С. 75 – 81.
5. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

*Стаття надійшла до редакції 11.09.2009*