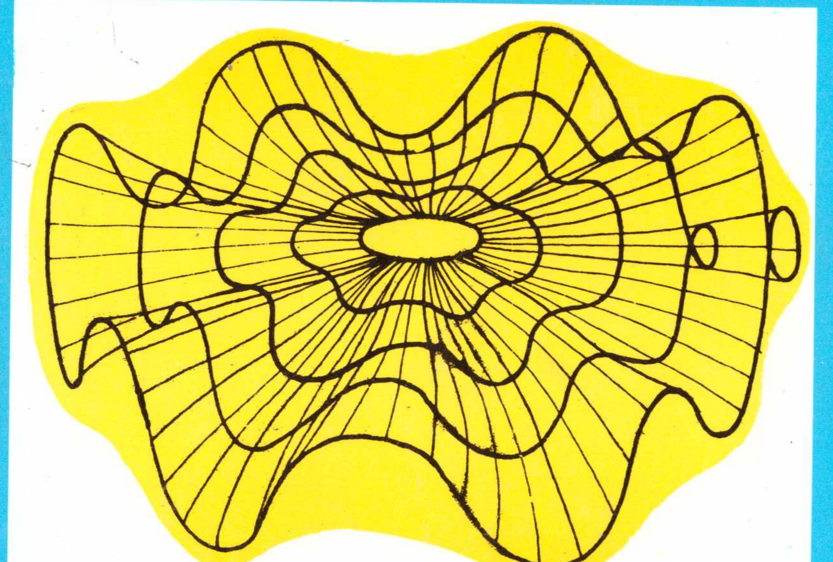
ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

2011 ВИПУСК 87



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Department of education and science, young people
and sport of Ukraine
Українська асоціація з прикладної геометрії
Ukrainian Association of Applied Geometry
**Київський національний університет
будівництва і архітектури**
Kiev National University of Building and Architecture

ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

APPLIED GEOMETRY AND GRAPHICS

(С П Е Ц В И П У С К)

Міжвідомчий науково-технічний збірник

The Interdepartmental Collection of Proceedings

Випуск № 87 Issue No 87

КИЇВ 2011 KYIV

Координатор

УКРАЇНСЬКА АСОЦІАЦІЯ З ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Приймаюча організація:

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД "УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"

ДОПОВІДІ VII МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ, ПРИСВЯЧЕНОЇ 65-РІЧЧЮ ДВНЗ "УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ" ТА 125-РІЧЧЮ НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

"ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ДИЗАЙН: ТЕОРІЯ, ПРАКТИКА, ОСВІТА"

UAAG UZHGOROD 2011

3-6 травня 2011 р.

УКРАЇНА, м. УЖГОРОД

Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 87. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко. – К.: КНУБА, 2011р. – 490с.

UKR В збірник включені дослідження кривих ліній та поверхонь, способів їх формоутворення, апроксимації, зображення та практичного застосування. Ряд статей присвячено питанням теорії зображень, геометричному моделюванню об'єктів, процесів та явищ, проблемам комп'ютерної графіки, геометричним питанням САПР, деяким питанням технічної естетики. Розрахований на працівників науково-дослідних і проектних організацій, викладачів, аспірантів та докторантів

RUS В сборник включены исследования кривых линий и поверхностей, способов их формообразования, аппроксимации, изображения и практических приложений. Ряд статей посвящен вопросам теории изображений, геометрическому изображению объектов, процессов и явлений, проблемам компьютерной графики, геометрическим вопросам САПР, некоторым вопросам технической эстетики. Рассчитан на работников научно-исследовательских и проектных рганизаций, преподавателей, аспирантов и докторантов.

ENG Articles is devoted to the investigation of curve lines, surfaces, ways of shape forming, approximation, imaging and its practical applications are included in the collection. A number of articles are devoted to questions of the theory of images, geometrical imaging of objects, processes and phenomena, problems of the Computer Graphics, geometrical questions of CAD, some questions of an Industrial Art.

Collection is intended for researchers, designers, high school teachers, post-graduate students etc.

Адреса редколегії спецвипуску: Виконавча дирекція Української асоціації з прикладної геометрії, к. 422, Повітрофлотський проспект, 31, 03680, Київ, Україна, телефон редакції: 241-54-32, geometry_kyiv@ukr.net

Випуск рекомендовано до друку Президією УАПГ, протокол **№ 62 від 23. 02. 2011року.**

Наукове фахове видання

Координатор

УКРАЇНСЬКА АСОЦІАЦІЯ З ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Приймаюча організація:

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД "УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Голова: ВЕГЕШ М.М., ректор УжНУ, м. Ужгород, Україна
Заст. голови: ТУРЯНИЦЯ І.І., УжНУ, м. Ужгород, Україна
Співголови: СТУДЕНЯК І.П., УжНУ, м. Ужгород, Україна,
МИХАЙЛЕНКО В.Є., КНУБА, м. Київ, Україна,
ПІДГОРНИЙ О.Л., КНУБА, м. Київ, Україна,
ПЛОСКИЙ В.О., КНУБА, м. Київ, Україна

НАУКОВИЙ КОМІТЕТ:

АНАТИЧУК Л.І. (Чернівці, Україна);
КОРОЛЬ І.Ю. (Ужгород, Україна);
ПУСТЮЛЬГА С.І. (Луцьк, Україна)
БАДАЄВ Ю.І. (Київ, Україна);
КОРЧИНСЬКИЙ В.М. (Дніпропетровськ,Україна)
РОСОХА С.В. (Харків, Україна)
БАРБАКАДЗЕ С.Ш. (Тбілісі, Грузія);
КРІВОШАПКО С.Н. (Москва, Росія);
САДКОВИЙ В.П. (Харків, Україна)
БОРИСЕНКО В.Д. (Миколаїв, Україна);
КУЗНЕЦОВА І.О. (Київ, Україна);
САЗОНОВ К.О. (Київ, Україна)
БРАЇЛОВ О.Ю. (Одеса, Україна);
КУСПЄКОВ К.А. (Алмати, Казахстан);
СЕРГЕЙЧУК О.В. (Київ, Україна)
БУТУРЛАКІН О.П. (Ужгород, Україна);
КУЦЕНКО Л.М. (Харків, Україна);
СКІДАН І.А. (Донецьк, Україна)
ВАНІН В.В. (Київ, Україна);
КУЧКАРОВА Д.Ф. (Ташкент, Узбекистан);
СОБОЛЬ О.М. (Харків, Україна)
ВЄРТІНСКАЯ Н.Д. (Іркутськ, Росія);
ЛІ В.Г. (Таганрог, Росія);
ТКАЧУК М.А. (Харків, Україна)
ВЛАСЮК Г.Г. (Київ, Україна);
ЛУСТЕ О.Я. (Чернівці, Україна);
ТОВАЖНЯНСЬКИЙ Л.Л. (Харків, Україна)
ВОЛКОВ В.Я. (Омськ, Росія);
МАЛКІНА В.М. (Мелітополь, Україна);
ТОРМОСОВ Ю.М. (Харків, Україна)
ГНАТУШЕНКО В.В. (Дніпропетровськ, Україна);
МАРТИН Є.В. (Львів, Україна);
ТУГАЙ А.М. (Київ, Україна)
ГОРДЄЄВ А.С. (Харків, Україна);
МАРЧЕНКО А.П. (Харків, Україна);
ЧЕКАНОВ Н.А. (Белгород, Росія)
ДВОРЕЦЬКИЙ О.Т. (Сімферополь, Україна);
НАЙДИШ А.В. (Мелітополь, Україна);
ЧЕРНІКОВ О.В. (Харків, Україна)
ДОРОШЕНКО Ю.О. (Київ, Україна);
НЕСВІДОМІН В.М. (Київ, Україна);
ШЕБАШЕВ В.Є. (Йошкар-Ола, Росія)
ЄСМУХАН Ж.М. (Алмати, Казахстан);
ПИЛИПАКА С.Ф. (Київ, Україна);
ШОМАН О.В. (Харків, Україна)
ІВАНОВ Г.С. (Москва, Росія);
ПОГРІБНИЙ М.А. (Харків, Україна);
ШТІРБУЛ І.І. (Кишинеу, Молдова)
КОВАЛЬОВ С.М. (Київ, Україна);
ПОДКОРИТОВ А.М.

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ:

БОНДАР О.А. (Київ, Україна)
ВОРОНЦОВА Д.В. (Харків, Україна)
ДАШКЕВИЧ А.О. (Харків, Україна)
КОЖЕДУБ С. А. (Київ, Україна)
ДРАГУЛА Є.Ю. (Ужгород, Україна)
КУТЧАК С.В. (Ужгород, Україна)
ЛЕГЕТА Я.П. (Ужгород, Україна)
ЧЕРНЕНКО А. Д. (Київ, Україна)
СИДОРЕНКО О.С. (Харків, Україна)
ТЮТЮННИКОВ С.В. (Ужгород, Україна)
ТЮТЮННИКОВА Г.С (Ужгород, Україна)
ПРОНЕВИЧ Ю. С. (Київ, Україна)

ПЛЕНАРНІ ДОПОВІДІ

Михайленко В.Є. д.т.н.,
профессор, президент УАПГ

ЗДОБУТКИ І ЗАДАЧІ УКРАЇНСЬКОЇ АСОЦІАЦІЇ З ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Серед закладів Київського вузівського центру з питань прикладної геометрії та технічної естетики перші місця займають Київський національний університет будівництва і архітектури (КНУБА) та Київський політехнічний інститут (КПІ).

У КНУБА дослідження проводяться на кафедрах нарисної геометрії та інженерної графіки і архітектурних конструкцій, до певного часу – в Проблемній лабораторії тонкостінних та просторових конструкцій, а останнім часом – на кафедрі комп'ютерних технологій проектування в архітектурі. Останнім часом розширення сфери можливостей прикладної геометрії викликає зустрічний інтерес науковців інших спеціальностей – на кафедрах менеджменту в будівництві, технології будівельного виробництва, металевих конструкцій тощо.

На кафедрі нарисної геометрії та інженерної графіки наукові дослідження здійснюються у двох напрямках: прикладної геометрії та технічної естетики. В галузі технічної естетики під керівництвом проф. В.Є.Михайленка підготовлено та захищено кілька кандидатських і дві докторські дисертації. Результати досліджень узагальнені у двох навчальних посібниках "Основи композиції" (автори В.Є.Михайленко, М.І.Яковлєв) та "Основи біодизайну" (автори В.Є.Михайленко, О.В.Кащенко). перший посібник присвячений геометричним аспектам художнього формотворення. В ньому наголошується на зображальному або геометричному аспекті композиції. Досліджено значення точок, ліній та поверхонь, зокрема, роль у формотворенні плоских кривих тощо.

В посібнику, присвяченому біодизайну, показано, що одним із можливих ефективних шляхів розвитку теорії і практики формотворення в архітектурі і дизайні є вивчення процесів організації конструктивних форм рослинного і тваринного світу, тобто вивчення закономірностей формотворення в природі.

Одним з напрямків держбюджетної теми кафедри "Геометричне моделювання об'єктів, процесів та явищ" є "Статико-геометричний метод формування каркасів дискретних структур". Основи цього методу були розроблені в докторській дисертації професора С.М.Ковальова. Суть методу полягає в тому, що геометрична форма структури зв'язується зі статичною рівновагою її вузлів, до яких додаються певні зовнішні зусилля.

В розвиток цього методу з 1985 року по теперішній час були захищені 22 кандидатські дисертації (наукові керівники професори В.Є.Михайленко, С.М.Ковальов, Н.І.Седлецька) та одна докторська дисертація (автор

$$x=(x_A-x_C)\left(\frac{\overline{u}_2^2\dot{v}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{\overline{u}_1^2\dot{v}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+(x_B-x_C)\left(\frac{v_2^2\dot{u}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{v_1^2\dot{u}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+x_C$$

$$y=(y_A-y_C)\left(\frac{\overline{u}_2^2\dot{v}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{\overline{u}_1^2\dot{v}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+(y_B-y_C)\left(\frac{v_2^2\dot{u}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{v_1^2\dot{u}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+y_C$$

$$z=(z_A-z_C)\left(\frac{\overline{u}_2^2\dot{v}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{\overline{u}_1^2\dot{v}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+(z_B-z_C)\left(\frac{v_2^2\dot{u}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{v_1^2\dot{u}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+z_C.$$

Выводы. Последнее параметрическое уравнение определяет обкатку плоских кривых (1), (2) плоскостей *ABC* и *ABD* в самом общем виде. Общность определяет – свобода выбора кривых (1), (2) ограниченная только соотношением (3) и свобода выбора положения плоскостей – локальным симплексом *DABC* в глобальной системе координат $OE_1E_2E_3$.

Перспективы дальнейших исследований. Открываются возможности аналитических и дифференциальных исследований по конструированию геометрических форм полученных на основе обкатки, которые дополнят существующие возможности синтетических и компьютерографических методов. Дальнейшие методы конструирования и исследования могут сконцентрироваться на оптимизации подбора свободных функций входящих в соотношение (3).

Аннотация – в работе заданы две кривые, определенные касательными, каждая из этих кривых задана свободными функциями и расположена в своей плоскости. Условия, что касательные пересекаются или параллельны, определяют зависимость четырех функций. Эта зависимость определяет плоскость обкатки и образующую линейчатой поверхности.

The summary - in work two curves defined by tangents are set, each of these curves is set by free functions and located in the plane. Conditions that tangents are crossed or are parallel, define dependence of four functions. This dependence defines a plane rolling and forming of liner surfaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обухова В.С. Конструирование сопровождающих торсов пространственных кривых // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомча науково - технічна збірка. Вип. 61. Київ, КДТУБА, 1997. С.13-18.
2. Підгорний О.Л., Несвідомін В.М. Утворення нелінійчатої поверхні 3-го порядку в перетині конгруенції прямих та в'язки площин. //Прикладна геометрія та інженерна графіка / Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 4. – Т. 36. – Мелітополь: ТДАТА, 2007. – С. 9-15.
3. Балюба І.Г. Конструктивна геометрія різноманітностей в точковому численні. Автореферат докт. дис. - Київ, 1995. - 38с.
4. Горягин Б.Ф., Клен А.Н. Поверхность торса в точечном описании. //Тр. ТГАТА. Вып.4. Прикл. геометрия и инж. графика, т.8. – Мелитополь: ТГАТА, 1999. – С.35-40.

УДК 515.2

Кукуруза Д.В., к.т.н.,
Лісняк А.А., к.т.н.,
Коваленко А.А

ДОСЛІДЖЕННЯ КРИВИХ ПОСТІЙНОЇ ШИРИНИ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Національний університет цивільного захисту України

Розглянуто опис кривих постійної ширини за допомогою складеного диференціальне рівняння та одержаних варіантів його розв'язків, що дозволило на практиці описувати всі різновиди кривих постійної ширини.

Постановка проблеми. Існують технічні впровадження, де використовуються властивості кривих постійної ширини. Це стосується формоутворення некруглих отворів [1], профілювання корпусів роторно - планетарних машин (двигунів Ванкеля) [2, 3] та проектування кулачків синхронного обертання з попарним точковим контактом для шнекових екструдерів [4]. Зазначені механічні пристрої діють на основі властивостей трикутника Релло як кривої постійної ширини. Шириною опуклої фігури у даному напрямку називається відстань між парою паралельних опорних прямих фігури, перпендикулярних до цього напрямку. Фігура називається *фігурою постійної ширини*, якщо ширина цієї фігури у всіх напрямках є однієї і тією ж. Для такої фігури замість ширини в даному напрямку можна говорити просто про *ширину фігури* [5]. Контур фігури постійної ширини називають *кривою постійної ширини*. Зазначено, що методи синтетичної геометрії прийнятні лише для теоретичних досліджень властивостей кривих постійної ширини, у тому числі і трикутника Релло. Але для алгоритмічної реалізації на практиці необхідні їх аналітичні описи.

Огляд відомих результатів. У роботах [6, 7] розглянуто геометричне моделювання і деякі впровадження обкатки трикутником Релло. В роботі [8] наведено опис трикутника Релло рівнянням у неявному вигляді за допомогою тримісної R-кон'юнкції. В роботі [9] розглянуто формоутворення глухих некруглих отворів за допомогою кривої постійної ширини. Огляд літературних джерел показав, що відкритою є тема досліджень класу кривих постійної ширини на площині з використанням диференціального рівняння, якому задовольняють функції, що входять до опису кривих постійної ширини.

Постановка завдання. Для опису кривих постійної ширини скласти диференціальне рівняння та навести варіанти його розв'язків, що дозволить на практиці описувати всі різновиди кривих постійної ширини.

Основна частина. Нехай на площині *Oxy* задано фігуру *G*, якій належить початок координат. Вважатимемо, що границею фігури *G* буде опукла замкнута крива *L*. Рівняння дотичної до кривої *L* задамо у вигляді

$$x\cos t+y\sin t=h(t), \qquad (1)$$

15-11-288

де параметр t буде змінюватися в інтервалі $[0..2\pi]$.

В рівнянні (1) через $h(t)$ позначено <u>*опорну функцію*</u>, яка визначає відстань від дотичної до початку координат (рис. 1).

Зважаючи на опуклість і замкнутість кривої L можна стверджувати, що існує друга дотична до кривої L з рівнянням $x\cos t + y\sin t = h(t+\pi)$, яка відповідає значенню параметра $t+\pi$ для опорної функції. На рис. 2 зображено криву L з двома дотичними до неї в точках P і Q. Зазначимо, що між точками P і Q найкоротшою відстань буде тоді, коли пряма PQ буде перпендикулярною до обраних дотичних.

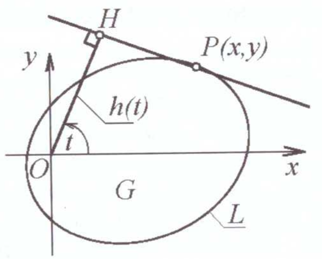


Рис. 1. Опорна пряма кривої

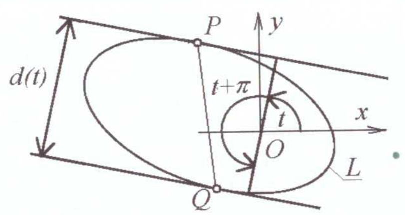


Рис. 2. Ширина кривої на площині

Відстань між дотичними $d(t)$ називають *узагальненим діаметром* опуклої замкнутої кривої. У випадку, коли значення $d(t) = d = const$, тобто коли воно не залежить від параметра t, то L має назву *кривої постійної ширини*.

Відомо, що опорна функція $h(t)$ для всіх t з інтервалу $[0..2\pi]$ має задовольняти трьом умовам:

i) замкнутості $h(t) = h(t + 2\pi)$;

ii) постійності шини $h(t) + h(t + \pi) = d$;

iii) опуклості $h(t) + \dfrac{d^2h(t)}{dt^2} > 0$.

Криву постійної ширини на площині можна вважати обвідною сім'ї прямих (1). Згідно традиційного способу опису зазначеної обвідної слід розв'язати відносно x і y систему рівнянь

$$F(x,y,t) \equiv x\cos t + y\sin t - h(t) = 0\,; \qquad (2)$$

$$\frac{dF(x,y,t)}{dt} \equiv -x\sin t + y\cos t - \frac{dh(t)}{dt} = 0$$

Шуканий розв'язок, тобто опис кривої L, можна одержати у вигляді:

$$x = h(t)\cos t - \frac{dh(t)}{dt}\sin t\,; \qquad y = \frac{dh(t)}{dt}\cos t + h(t)\sin t\,. \qquad (3)$$

Звідси виникає задача визначити таку опорну функцію $h(t)$, щоб обвідною була крива постійної ширини (як приклад - трикутник Релло).

З використанням умови $|PQ| = d$ складемо диференціальне рівняння відносно опорної функції $h(t)$ (рис. 2.2). Для цього врахуємо координати точок

$$\mathrm{P}\Big(\,h(t)\cos t - \frac{dh(t)}{dt}\sin t\,; \qquad \frac{dh(t)}{dt}\cos t + h(t)\sin t\,\Big)$$

і

$$\mathrm{Q}\Big(\,h(t+\pi)\cos(t+\pi) - \frac{dh(t+\pi)}{dt}\sin(t+\pi)\,;$$
$$\frac{dh(t+\pi)}{dt}\cos(t+\pi) + h(t+\pi)\sin(t+\pi)\,\Big),$$

а також формулу для обчислення довжини відрізка PQ. В результаті для визначення опорної функції $h(t)$ одержимо диференціальне рівняння:

$$\left(h(t)\cos t - \frac{dh(t)}{dt}\sin t - h(t+\pi)\cos(t+\pi) + \frac{dh(t+\pi)}{dt}\sin(t+\pi)\right)^2 +$$
$$\left(h(t)\sin t + \frac{dh(t)}{dt}\cos t - h(t+\pi)\sin(t+\pi) - \frac{dh(t+\pi)}{dt}\cos(t+\pi)\right)^2 = d^2, \qquad (4)$$

де вираз $\dfrac{dh(t+\pi)}{dt}$ слід розуміти так: спочатку виконується диференціювання функції h(t) по t, а потім в одержаному виразі аргумент t заміняється на $t+\pi$.

Реалізацію дій «диференціювання функції h(t) по t, а потім заміну аргументу t на $t+\pi$» у середовищі Maple можна здійснити за допомогою послідовності операторів:

```
h := t -> "рівняння опорної функції";
dh := unapply(D(h)(t), t);
f := (h(t)*cos(t) - dh(t)*sin(t) -
   h(t+Pi)*cos(t+Pi) + dh(t+Pi)*sin(t+Pi))^2 +
   (h(t)*sin(t) + dh(t)*cos(t) -
   h(t+Pi)*sin(t+Pi) - dh(t+Pi)*cos(t+Pi))^2 = d^2;
   factor(%);
```

За допомогою цих операторів можна перевірити, чи дійсно пропонований розв'язок задовольняє диференціальному рівнянню. Використання «штатного» оператора диференціювання **diff(h,t)** неможливо, адже він не підтримує дію підстановки аргументів.

Розв'язок диференціального рівняння (4) шукатимемо у вигляді ряду Фур'є з непарними компонентами:

$$h(t) = \frac{d}{2} + \frac{d}{2C}\sum_{n=1}^{N}\big(\cos(2n-1)t + \sin(2n-1)t\big), \qquad (5)$$

де C – константа інтегрування, за допомогою якої можна враховувати геометричну форму кривої постійної ширини.

В цьому випадку шуканий опис кривої L постійної ширини можна одержати у вигляді:

$$x = h(t)\cos t - \frac{dh(t)}{dt}\sin t\,; \qquad y = \frac{dh(t)}{dt}\cos t + h(t)\sin t\,. \qquad (6)$$

15*

Формула дозволяє одержати розв'язки диференціального рівняння (4), що будуть описами кривих постійної ширини для:

N = 2:

$$x := \frac{\frac{1}{2} d\cos(t)\,C + d\cos(2t) + \frac{d}{2} + d\sin(2t) - \frac{1}{2} d\cos(4t) - \frac{1}{2} d\sin(4t)}{C}; \qquad (7)$$

$$y := \frac{\frac{1}{2} d\sin(t)\,C + \frac{d}{2} - \frac{1}{2} d\sin(4t) + \frac{1}{2} d\cos(4t) - d\sin(2t) + d\cos(2t)}{C};$$

N = 3:

$$x := \frac{1}{2}\big(d\cos(t)\,C + 2d\cos(2t) + d + 2d\sin(2t) + 2d\cos(4t) + 2d\sin(4t) - 2d\cos(6t) - 2d\sin(6t)\big)/C \qquad (8)$$

$$y := \frac{1}{2}\big(d\sin(t)\,C + d - 2d\sin(6t) + 2d\cos(6t) - 2d\sin(2t) + 2d\cos(2t) - 4d\sin(4t) + 4d\cos(4t)\big)/C$$

N = 4:

$$x := \frac{1}{2}\big(d\cos(t)\,C + 2d\cos(2t) + d + 2d\sin(2t) + 2d\cos(4t) + 2d\sin(4t) + 2d\cos(6t) + 2d\sin(6t) - 3d\cos(8t) - 3d\sin(8t)\big)/C \qquad (9)$$

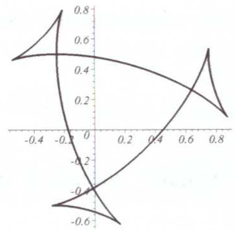
$$y := \left(\frac{1}{2} d\sin(t)\,C + \frac{d}{2} - \frac{3}{2} d\sin(8t) + \frac{3}{2} d\cos(8t) - d\sin(2t) + d\cos(2t) - 2d\sin(4t) + 2d\cos(4t) - 3d\sin(6t) + 3d\cos(6t)\right)/C$$

N =5:

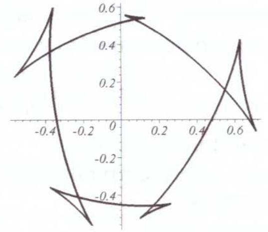
$$x := \left(\frac{1}{2} d\cos(t)\,C + d\cos(2t) + \frac{d}{2} + d\sin(2t) + d\cos(4t) + d\sin(4t) + d\cos(6t) + d\sin(6t) + d\cos(8t) + d\sin(8t) - 2d\cos(10t) - 2d\sin(10t)\right)/C \qquad (10)$$

$$y := \left(\frac{1}{2} d\sin(t)\,C + \frac{d}{2} - 2d\sin(10t) + 2d\cos(10t) - d\sin(2t) + d\cos(2t) - 2d\sin(4t) + 2d\cos(4t) - 3d\sin(6t) + 3d\cos(6t) - 4d\sin(8t) + 4d\cos(8t)\right)/C$$

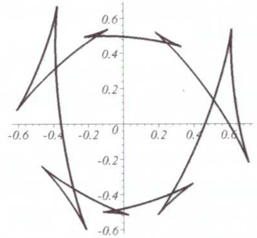
В загальному випадку одержані криві постійної ширини матимуть самоперетини (далі для порівняння форми кривих обрано $d = 1$). На рис. 3 наведено приклади криві постійної ширини з самоперетинами.



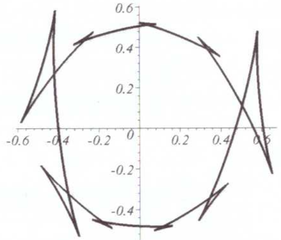
N = 2, C = 4



N = 3, C = 12



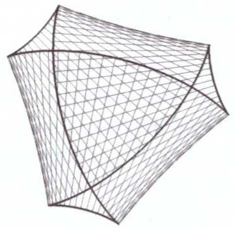
N = 4, C = 18



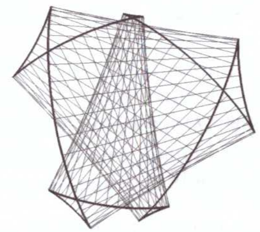
N = 5, C = 32

Рис. 3. Приклади кривих постійної ширини з самоперетинами.

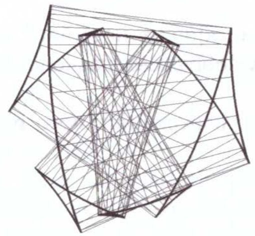
Для унаочнення сім'ї відрізків, які саме і забезпечують властивість кривої бути «постійної ширини», було зображено відрізки, що з'єднують точки кривої, які зміщені за параметром t на величину π (рис. 4).



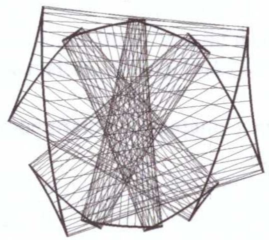
N = 2, C = 4



N = 3, C = 12



N = 4, C = 18



N = 5, C = 32

Рис. 4. Криві постійної ширини з узагальненими діаметрами.

На практиці зручно використовувати і скорочений розв'язок диференціального рівняння (4) у вигляді

$$h(t) = \frac{d}{2} + \frac{d}{2C}\sum_{n=1}^{N}\cos(2n-1)t\,, \qquad (11)$$

де C – константа інтегрування.

В цьому «несиметричному» випадку описи кривих постійної ширини суттєво спостяться.

Наприклад, при:

N = 2:

$$x := \frac{\frac{1}{2}d\cos(t)\,C + d\cos(2t) + \frac{d}{2} - \frac{1}{2}d\cos(4t)}{C} \qquad (12)$$

$$y := \frac{1}{2}\,\frac{d\sin(t)\,C - d\sin(4t) - 2d\sin(2t)}{C}$$

N = 3:

$$x := \frac{\frac{1}{2}d\cos(t)\,C + d\cos(2t) + \frac{d}{2} + d\cos(4t) - d\cos(6t)}{C} \qquad (13)$$

$$y := \frac{1}{2}\,\frac{d\sin(t)\,C - 2d\sin(6t) - 2d\sin(2t) - 4d\sin(4t)}{C}$$

N = 4:

$$x := \frac{\frac{1}{2}d\cos(t)\,C + d\cos(2t) + \frac{d}{2} + d\cos(4t) + d\cos(6t) - \frac{3}{2}d\cos(8t)}{C} \qquad (14)$$

$$y := \frac{\frac{1}{2}d\sin(t)\,C - \frac{3}{2}d\sin(8t) - d\sin(2t) - 2d\sin(4t) - 3d\sin(6t)}{C}$$

N = 5:

$$x := \left(\frac{1}{2}d\cos(t)\,C + d\cos(2t) + \frac{d}{2} + d\cos(4t) + d\cos(6t) + d\cos(8t) - 2d\cos(10t)\right)/C \qquad (15)$$

$$y := \frac{1}{2}\left(d\sin(t)\,C - 4d\sin(10t) - 2d\sin(2t) - 4d\sin(4t) - 6d\sin(6t) - 8d\sin(8t)\right)/C$$

На графічному рівні відмінність між описами кривих постійної ширини (7) – (10) і (12) – (15) виявляється в повороті їх зображень навколо початку координат.

Вдалося одержати і найпростіший розв'язок диференціального рівняння (4) у вигляді

$$h(t) = \frac{d}{2} + \frac{d}{2C}\cos(2N-1)t\,, \qquad (16)$$

де C – константа інтегрування.

Тоді рівняння кривих постійної ширини матимуть вигляд при:

N = 2:

$$x := \frac{1}{2}\,\frac{d\cos(t)\,C + 2d\cos(2t) - d\cos(4t)}{C} \qquad (17)$$

$$y := \frac{\frac{1}{2}d\sin(t)\,C - \frac{1}{2}d\sin(4t) - d\sin(2t)}{C}$$

N = 3:

$$x := \frac{1}{2}\,\frac{d\cos(t)\,C + 3d\cos(4t) - 2d\cos(6t)}{C} \qquad (18)$$

$$y := \frac{1}{2}\,\frac{d\sin(t)\,C - 2d\sin(6t) - 3d\sin(4t)}{C}$$

N = 4:

$$x := \frac{1}{2}\,\frac{d\cos(t)\,C + 4d\cos(6t) - 3d\cos(8t)}{C} \qquad (19)$$

$$y := \frac{\frac{1}{2}d\sin(t)\,C - \frac{3}{2}d\sin(8t) - 2d\sin(6t)}{C}$$

N = 5:

$$x := \frac{1}{2}\,\frac{d\cos(t)\,C + 5d\cos(8t) - 4d\cos(10t)}{C} \qquad (20)$$

$$y := \frac{\frac{1}{2}d\sin(t)\,C - 2d\sin(10t) - \frac{5}{2}d\sin(8t)}{C}$$

Отже, в загальному вигляді залежно від N рівняння кривої постійної ширини має вигляд:

$$x = \frac{d}{2C}\big(C\cos t + N\cos\big(2(N-1)t\big) - (N-1)\cos 2Nt\big); \qquad (21)$$

$$y = \frac{d}{2C}\big(C\sin t - N\sin\big(2(N-1)t\big) - (N-1)\sin 2Nt\big).$$

Висновки. Для формалізації досліджень кривих постійної ширини на площині пропонується скористатися складеним диференціальним рівнянням, якому задовольняють функції, що входять до опису кривих постійної ширини. Розглянуто варіанти розв'язків цього диференціального рівняння у вигляді ряду Фур'є з непарними доданками, що дозволило на практиці описувати різновиди кривих постійної ширини.

Л і т е р а т у р а

1. *Костромин Ф.П.* Сверление многоугольных отверстий. - М.: Машгиз. 1941. - 60 с.

2. *Сухомлинов Р. М.* Трохоидные роторные компрессоры. – Харьков: ХГУ-«Вища школа», 1975, 152 с.

3. Двигатели внутреннего сгорания. Устройство и работа поршневых и комбированных двигателей. / *В.П.Алексеев, В.Ф.Воронин, Л.В.Грехов* и др. М: Машиностроение. 1990. - 280 с.

4. *Суліма В.В.* Розрахунок насадок-роздрібнювачів шнекового преса для віджимання олії // Труды / Таврическая государственная агротехн. академия. - вып. 2, том 13. - Мелитополь: ТГАТА, 1999 - С. 64 -70.

5. *Радемахер Г., Теплиц О.,* Числа и фигуры, сер. «Библиотека математического кружка», вып. 10, М., изд-во «Наука», 1966.. - 88 с.

6. *Куценко Л.Н., Росоха С.В., Сулима В.В.* Геометрическое моделирование и некоторые приложения обкатки треугольником Релло // Проблемы машиностроения. 2001. Т. 4, № 3-4. С. 85-94

7. *Лісняк А.А.* Трикутник Релло як фігура постійної ширини та його можливі використання // Геометричне та комп'ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип.14. – С. 180-187.

8. *Лісняк А.А.* Опис трикутника Релло рівнянням у неявному вигляді за допомогою тримісної R-кон'юнкції // Прикладна геометрія та інженерна графіка – Київ: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 260-267 .

9. *Тормосов Ю.М., Лісняк А.А., Кукуруза Д.В.* Формоутворення глухих некруглих отворів // Праці Таврійської державної агротехн. академії. Мелітополь: ТДАТА, 2007. Вип. 4. -Т. 35. - С. 42–48

10. *Gardner M.,* Curves of constant width, one of which makes it possible to drill square holes, Sci. Amer., v. 208 (1963) n. 2, 148-156 and v. 208 (1963) n. 3, 154; also in Mathematics: An Introduction to Its Spirit and Use, W. H. Freeman, 1979, pp. 107-111 and 238-239.

11. *Besicovitch A.S.* Measure of asymmetry of convex curves. II: Curves of constant width, J. London Math. Soc. 26 (1951), p. 81-93;

12. *Eggleston H. G.* Measure of asymmetry of convex curves of constant width and restricted radii of curvature, Quart. J. Math. 3 (1952) p. 63-72

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ ПРИ ПОМОЩИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Кукуруза Д.В., Лисняк А.А., Коваленко А.А

Рассмотрено описание кривых постоянной ширины при помощи составленного дифференциального уравнения и полученных вариантов его решений, что позволило на практике описывать все разновидности кривых постоянной ширины.

INVESTIGATION OF CURVES OF CONSTANT WIDTH WITH DIFFERENTIAL EQUATION

Kukuruza D.V., Lisnyak A.A., Kovalenko A.A.

Is considered a description of the curves of constant width by means of a differential equation composed and received options for making that possible in practice to describe all kinds of curves

УДК 514.18

Куценко Л.М., д.т.н.
Адашевський О.В.

ВІДОБРАЖЕННЯ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО БІЛЬЯРДА ПРИ ВІДСУТНОСТІ ПЕРЕСКОКУ НА СУСІДНЮ ПІВПЛОЩИНУ

Національний університет цивільного захисту України,
НТУ «Харківський політехнічний інститут»

Розглянуто спосіб унаочнення руху точки фазового простору за допомогою двовимірного відображення Пуанкаре з метою дослідження динаміки гравітаційного більярда в межах кута, утвореного двома півплощинами.

Постановка проблеми. Дослідження динамічних систем традиційно пов'язане з трасуванням математичних більярдів у фізичних силових полях (центральному й гравітаційному). Більярдну кулю тут розглядають як абстрактну матеріальну точку, відбиття якої від прямолінійного пружного борта здійснюється за законом кут падіння дорівнює куту відбиття. Актуальною задачею є складання алгоритмів побудови траєкторій математичних більярдів для конкретно обраних областей. З метою дослідження динаміки гравітаційного більярда в межах певної області, доцільним буде розробка способу унаочнення руху точки фазового простору за допомогою двовимірного відображення Пуанкаре.

Аналіз відомих досліджень. Роботи [1 - 3] присвячені дослідженням по удосконаленню алгоритмів побудови математичних більярдів у гравітаційному полі. Особливу увагу тут приділено унаочненню *більярдних каустик.* В роботі [4] наведено спосіб розрахунку траєкторії математичного більярда в гравітаційному полі кута, утвореного двома півплощинами (рис. 1), та показано їх залежність від кута «розкриття» півплощин, від координат точки старту більярдної кулі, та від її початкової швидкості. Надано формули для визначення координат точки в момент зіткнення з півплощиною, а також формули для визначення проекцій швидкості. Одержано формули для визначення часу між зіткненнями на півплощинах. Сформульовано критерій перескоку точки з однієї півплощини на іншу. На основі зазначеного в роботі [4] було наведено розрахункові дослідження траєкторій руху точки за допомогою складеної програми (рис. 2- 4).

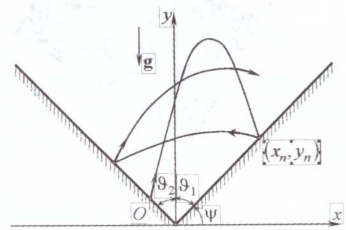


Рис. 1. Математичний більярд в куті

Волоха М.П., Волоха В.М., Болдирєва Л.В. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗПУШУВАННЯ ГРУНТУ РЕБРОМ ДИСКОВОГО РОБОЧОГО ОРГАНУ	94
Воронцов О.В., Радченко Г.О. ДОСЛІДЖЕННЯ РЕКУРЕНТНИХ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЕЛМЕНТАРНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ	98
Воронцов О.В. ДИСКРЕТНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ	102
Воронцова Д.В., Росоха С.В., Савченко Л.М., Венедиктов С.А. ЗАСТОСУВАННЯ ОПТИЧНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТОРЦЕВОГО ПРОФІЛЮ ЗУБЧАСТИХ КОЛІС	107
Гореленко О.О. ПРОБЛЕМЫ УСТРОЙСТВА ЦЕМЕНТОБЕТОННЫХ АЭРОДРОМНЫХ ПОКРЫТИЙ	113
Дашкевич А. О., Сидоренко О.С., Дашкевич О.С. СТВОРЕННЯ БІБЛІОТЕКИ MAPLE-ФУНКЦІЙ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАСОБАМИ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ	118
Денисова Т.В. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ СОЛНЕЧНОЙ ЭНЕРГИИ НА ТРУБЧАТОМ ПРИЕМНИКЕ КОНЦЕНТРИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ	123
Егорченков В. А. СРЕДНЯЯ ЯРКОСТЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОГО ОКНА В УСЛОВИЯХ ПОЛУЯСНОГО НЕБА	128
Запольський Л.Л. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ В ЗАДАЧАХ ПОЖЕЖНОЇ БЕЗПЕКИ	133
Ісмаілова Н.П. КІНЕМАТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ СПРЯЖЕНИХ КВАЗІГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ З ЛІНІЙНИМ І ТОЧКОВИМ КОНТАКТОМ	140
Калінін О. О., Калініна Т.О., Нікітенко О.А., Макаров В.О. ПОБУДОВА СПРЯЖЕНИХ ЕЛІПСІВ ЗА ЗАДАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ	145
Карабчевский В.В., Пашинская А.В. ОСОБЕННОСТИ ВОКСЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РОСТА МНОГОГРАННИКОВ	149
Карпінський М.П., Чиж В.М., Балабан С.М. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У ГРАФІЧНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ СЕНСОРНИХ МЕРЕЖ	154
Каруну О. В., Кущій Р.І. ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MATHCAD	159
Ковалев С.Н., Золотова А.В. ДИСКРЕТНА ДВОВИМІРНА КУСКОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ З ПЕРШИМ ПОРЯДКОМ ГЛАДКОСТІ СТИКУВАННЯ ПОРЦІЙ	164
Коваль Г.М. КОНСТРУЮВАННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ КРИВОЇ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ З ЗАДАНИМ РАДІУСОМ КРИВИНИ ТА З ЗАДАНОЮ ТОЧКОЮ ПЕРЕГИНУ	171
Ковальов С.М., Мостовенко О.. ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ ПОВЕРХОНЬ	176

БЕЗМОМЕНТНИХ ПОКРИТТІВ ПРИ РІВНОМІРНОМУ РОЗПОДІЛІ НАВАНТАЖЕННЯ У ПЛАНІ	
Плоский В.О., Кожедуб С.А. СИСТЕМНА КЛАСИФІКАЦІЯ ММР: ПОНЯТТЯ ТА АКТИВНЕ ВИКОРИСТАННЯ	182
Кокарєва Я.А. ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ КОНГРУЕНЦІЇ ПРЯМИХ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬ ДВІ ЛІНІЇ	189
Колочавін Р.М. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА КУНСА ДЛЯ ТРИКУТНОЇ ОБЛАСТІ	194
Комяк В.М., Соболь О.М., Попова А.В. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ 0-РІВНЯ Ф-ФУНКЦІЇ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З НЕЛІНІЙНОЮ ГРАНИЦЕЮ	202
Кочетов Г.М. МЕТОДИКА РАСЧЕТА КАТИОНИТОВЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ПРОЦЕССА ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД ОТ ИОНОВ МЕДИ	207
Кравчук О.А. ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ЗОВНІШНІХ ФОРМ ЕЛИ КАРТАНА У ПРИКЛАДНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ	214
Кузнецов С.Г., Балюба И.Г., Горягин Б.Ф., Малютина Т.П.,Давиденко И.П. ОБКАТКА ПЛОСКИХ КРИВЫХ ПЛОСКОСТЬЮ	220
Кукуруза Д.В., Лісняк А.А., Коваленко А.А. ДОСЛІДЖЕННЯ КРИВИХ ПОСТІЙНОЇ ШИРИНИ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ	225
Куценко Л.М., Адашевський О.В. ВІДОБРАЖЕННЯ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО БІЛЬЯРДА ПРИ ВІДСУТНОСТІ ПЕРЕСКОКУ НА СУСІДНЮ ПІВПЛОЩИНУ	233
Куценко Л.М., Морозова Г.В. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ ПЕРЕМІЩЕННЯ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ СЕРЕД ПЕРЕШКОД	240
Кучкарова Д.Ф., Жураев Т.Х. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ ЛЕМЕШНО-ОТВАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗАДАНИЕМ КОНИКИ	248
Легета Я.П. РОБОЧІ ПРОФІЛІ РОТОРНО-ПЛАНЕТАРНИХ МАШИН У ВИГЛЯДІ ЕКВІДИСТАНТ ЕПІГІПОТРОХОЇД	253
Лихачова В.В. ЗАСТОСУВАННЯ ТРИОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ПОБУДОВИ ГЕОДЕЗИЧНОЇ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА ПОВЕРХНІ КОНУСА ОБЕРТАННЯ	259
Маловик І.В., Венедіктов С.А. СПОСІБ ПОБУДОВИ СПРЯЖЕНИХ ЦЕНТРОЇД ЗУБЧАТИХ КОЛІС НЕТРАДИЦІЙНОЇ ФОРМИ	264
Митрофанова С. А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ КАУСТИКИ ДЛЯ КОНИЧЕСКИХ УЛИТОК ВРАЩЕНИЯ	270
Мілейковський В.О. ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ СТРУКТУРИ ПЛОСКИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ СТРУМИН	275
Мостовенко А.В. УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ БЕЗМОМЕНТНОГО БОЛЬШЕПРОЛЁТНОГО ПОКРЫТИЯ ПРИ ЗАДАННОМ ПЕРЕКРЫВАЕМОМ ОБЪЁМЕ	281