



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНЬСЬКА АСОЦІАЦІЯ З ПРИКЛАДНОЇ
ГЕОМЕТРІЇ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧУВАННЯ ТА ТОРГІВЛІ

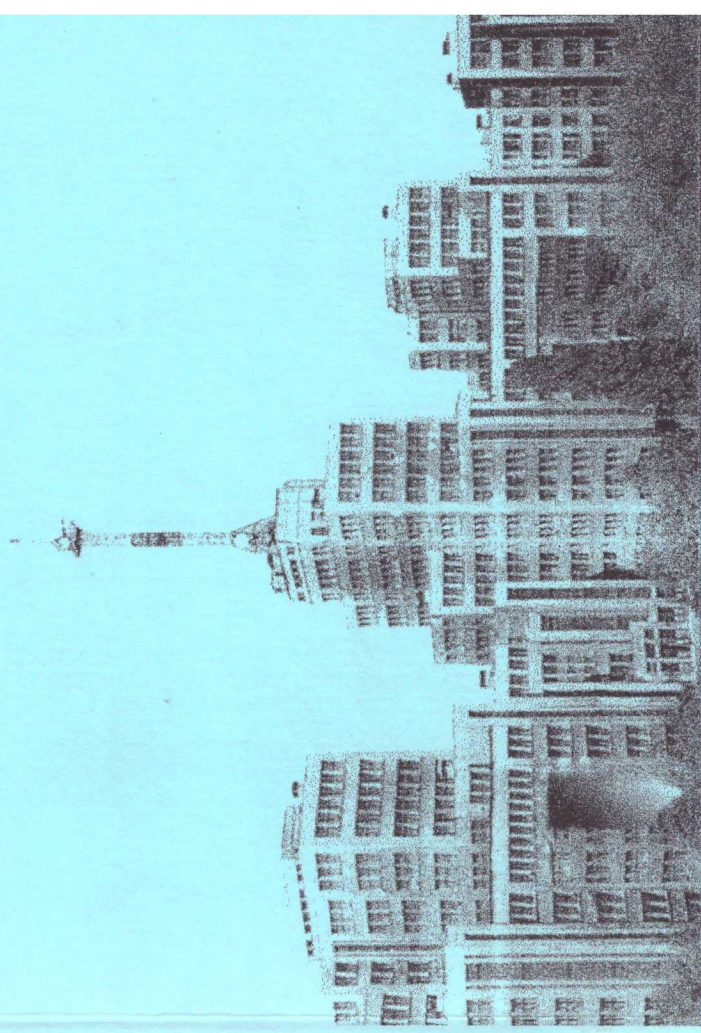


НАУКОВЕ ФАХОВЕ ВИДАННЯ

ГЕОМЕТРИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Збірник наукових праць

Випуск 21



Харків-2008

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНЬСЬКА АСОЦІАЦІЯ З ПРИКЛАДНОЇ
ГЕОМЕТРІЇ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧУВАННЯ ТА ТОРГІВЛІ

**ГЕОМЕТРИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ
МОДЕЛЮВАННЯ**

*Збірник наукових праць
Випуск 21*

НАУКОВЕ ФАХОВЕ ВИДАННЯ

Харків 2008

Геометричне та комп'ютерне моделювання:

23 наук. праці: Редкол.: Ю.М.Тормосов (відпов. ред.) та ін.; Харк. держ. університет харчування та торгівлі. - Харків, 2008. - Вип. 21. - 148с.: іл., табл.

**ДРУКУЄТЬСЯ ЗА РІШЕННЯМ ВЧЕНОЇ РАДИ ХДУХТ,
ПРОТОКОЛ № 10 від 27 червня 2008р.**

У збірник включено статті з сучасних проблем прикладної геометрії, геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ, інженерної та комп'ютерної графіки, ергономіки та дизайну, які містять результати оригінальних теоретичних досліджень та їх застосувань у визначених галузях. Розглянуто геометричні питання САПР, питання методики викладання графічних дисциплін.

Збірник розраховано на викладачів вищої школи, аспірантів та доцентів, працівників науково-дослідних та проектних організацій.

Редакційна колегія

- | | |
|---|---|
| Ю.М. Тормосов, д-р техн. наук, проф. (відпов. редактор); | В.М. Ком'як, д-р техн. наук, ст.н.сп.; |
| О.І. Черевко, д-р техн. наук, проф. (заст. відпов. редактора); | В.П. Плевако, д-р техн. наук, проф.; |
| В.М. Михайлов, д-р техн. наук, проф. (заст. відпов. редактора); | М.С. Синькоп, д-р техн. наук, проф.; |
| Л.М. Кученко, д-р техн. наук, проф. (заст. відпов. редактора); | М.І. Погосжих, д-р техн. наук, проф.; |
| В.С. Михайленко, д-р техн. наук, проф. (заст. відпов. редактора); | А.Д. Тевяшев, д-р техн. наук, проф.; |
| В.О. ПЛОСКИЙ, канд. техн. наук, доц.; | А.М. Краснокутський, канд. техн. наук, проф.; |
| А.Н. Хомченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; | В.П. Ткаченко, канд. техн. наук, проф.; |
| | К.Р. Сафюліна, канд. техн. наук, доц.; |
| | О.В. Черніков, канд. техн. наук, доц.; |
| | О.В. Шоман, канд. техн. наук, доц.; |
| | Р.Б. Слобідський, доц. |

Відповідальний за випуск – д-р техн. наук, проф. Тормосов Ю.М.
Адреса редакції: 61051 Харків-51, вул. Ключівська, 333, ХДУХТ.
Тел. (057) 349-45-65, fax: 336-94-88. E-mail: tormosov@ukr.net

© Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2008.

Л.М. Кученко, д-р техн. наук, А.А. Лісняк
Університет цивільного захисту України (Харків, Україна)

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
КРИВИХ ПОСТІЙНОЇ ШИРИНИ**

Розглянуто спосіб складання диференціального рівняння класу кривих постійної ширини та наведено його деякі розв'язки.

Постановка проблеми. В машинобудуванні широко використовуються деталі, профілі, яких мають форму трикутника Релло (triangle Reuleaux) [1]. Трикутник Релло є прикладом кривої постійної ширини. Шириною опуклої фігури у даному напрямку називається відстань між парою паралельних опорних прямих фігури, перпендикулярних до цього напрямку (рис.1). Фігура називається *фігурою постійної ширини*, якщо ширина цієї фігури у всіх напрямках є однієї і тією ж (рис. 2). Контур фігури постійної ширини називають *кривою постійної ширини* [1-4]. Для конструювання необхідно формалізувати опис кривої постійної ширини.

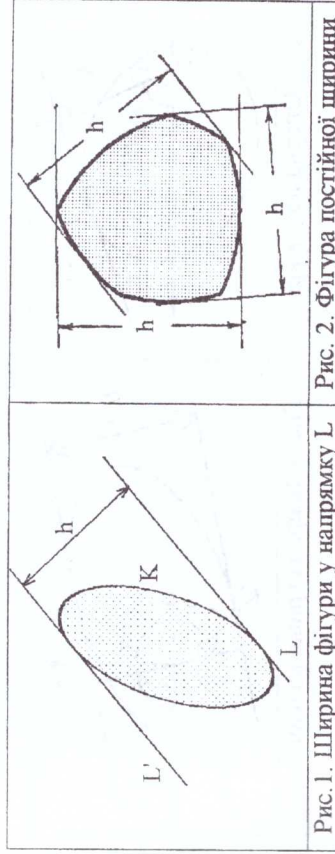


Рис. 1. Ширини фігури у напрямку L

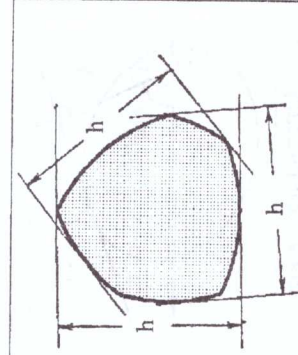


Рис. 2. Фігура постійної ширини

Аналіз відомих результатів. Виявляється, що і крім кола існує нескінченно багато різноманітних фігур постійної ширини. Прикладом однієї з них є *трикутник Релло* [1-4]. Для побудови фігури трикутника Релло необхідно обрати рівносторонній трикутник ABC із стороною довжини h, і кожні дві його вершини з'єднаємо дугою кола радіуса h із центром у третій вершині. Тоді ця крива обмежить

трикутник Релло. З кожної пари паралельних опорних прямих трикутника Релло одна проходить через якусь вершину трикутника АВС, що є кутовою точкою фігури, а інша дотикається протилежної дуги кола. Тому відстань між усіма двома паралельними опорними прямими трикутника Релло дорівнює h .

Постановка задавання. Для аналітичного опису цілого класу кривих постійної ширини необхідно скласти їх диференціальне рівняння та визначити його розв'язки.

Основна частина. Нехай на площині Oxy задано фігуру G , якій належить початок координат. Вважатимемо, що границею фігури G буде опукла крива L . Рівняння першої дотичної до кривої L задамо у вигляді

$$x \cos t + y \sin t = h(t), \quad (1)$$

де параметр t буде змінюватися в інтервалі $[0..2\pi]$.

В рівнянні (1) через $h(t)$ позначено *опорну функцію*, яка визначає відстань від дотичної до початку координат (рис. 3).

Зважаючи на опуклість і замкнутість кривої L можна стверджувати, що існує друга дотична до кривої L з рівнянням $x \cos t + y \sin t = h(t + \pi)$, яка відповідає значенню параметра $t + \pi$ для опорної функції. На рис. 4 зображено криву L з двома дотичними до неї в точках P і Q . Зазначимо, що між точками P і Q найкоротшою відстань буде тоді, коли пряма PQ буде перпендикулярною до обраних дотичних.

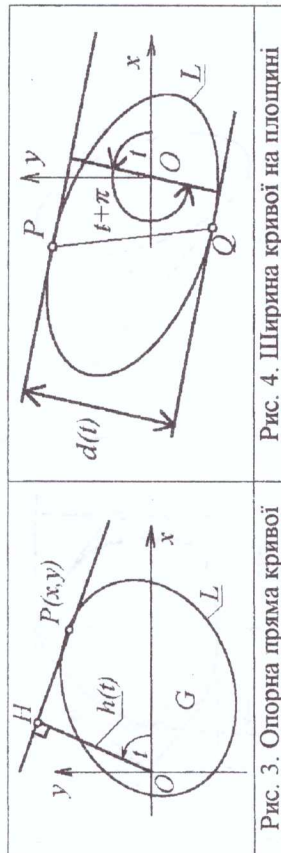


Рис. 3. Опорна пряма кривої

Рис. 4. Ширина кривої на площині

Відстань між дотичними $d(t)$ називають *узгальненим діаметром* опуклої замкнутої кривої. Коли значення $d(t) = d = const$, тобто коли воно не залежить від параметра t , то L має назву *кривої постійної ширини*.

Відомо [1-3], що опорна функція $h(t)$ для всіх t з інтервалу $[0..2\pi]$ має задовольняти трьом умовам:

- i) замкнутості $h(t) = h(t + 2\pi)$;
- ii) постійності ширини $h(t) + h(t + \pi) = d$;

$$h(t) + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} > 0$$

- iii) опуклості

Криву постійної ширини на площині можна вважати обвідною сім'ї прямих (1). Згідно традиційного способу опису зазначеної обвідної слід розв'язати відносно x і y систему рівнянь

$$F(x, y, t) \equiv x \cos t + y \sin t - h(t) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dF(x, y, t)}{dt} \equiv -x \sin t + y \cos t - \frac{dh(t)}{dt} = 0$$

Шуканий розв'язок, тобто опис кривої L , одержано у вигляді:

$$x = h(t) \cos t - \frac{dh(t)}{dt} \sin t; \quad y = \frac{dh(t)}{dt} \cos t + h(t) \sin t \quad (3)$$

Звідси виникає задача визначити таку опорну функцію $h(t)$, щоб обвідною була крива постійної ширини (як приклад - трикутник Релло).

З використанням умови $|PQ| = d$ складемо рівняння відносно опорної функції $h(t)$ (рис. 2). Врахуємо координати точок P і Q :

$$P \left(h(t) \cos t - \frac{dh(t)}{dt} \sin t; \frac{dh(t)}{dt} \cos t + h(t) \sin t \right) \quad \text{і}$$

$$Q \left(\frac{dh(t+\pi)}{dt} \cos(t+\pi) - \frac{dh(t+\pi)}{dt} \sin(t+\pi); \right.$$

$$\left. \frac{dh(t+\pi)}{dt} \cos(t+\pi) + h(t+\pi) \sin(t+\pi) \right),$$

а також формулу для обчислення довжини відрізка PQ . В результаті для визначення функції $h(t)$ одержимо диференціальне рівняння:

$$\left(h(t) \cos t - \frac{dh(t)}{dt} \sin t - h(t+\pi) \cos(t+\pi) + \frac{dh(t+\pi)}{dt} \sin(t+\pi) \right)^2 + \left(h(t) \sin t + \frac{dh(t)}{dt} \cos t - h(t+\pi) \sin(t+\pi) - \frac{dh(t+\pi)}{dt} \cos(t+\pi) \right)^2 = d^2, \quad (4)$$

де вираз $\frac{dh(t+\pi)}{dt}$ слід розуміти так: спочатку виконується диференціювання функції $h(t)$ по t , а потім в одержаному виразі аргумент t замінюється на $t + \pi$.

Реалізацію дій «диференціювання функції $h(t)$ по t , а потім заміну аргументу t на $t + \pi$ » у середовищі процесора Maple можна здійснити за допомогою програми:

$h := t \rightarrow$ "рівняння опорної функції";
 $dh := \text{unapply}(D(h)(t), t)$;
 $f := (h(t) * \cos(t) - dh(t) * \sin(t) -$
 $h(t + \pi) * \cos(t + \pi) + dh(t + \pi) * \sin(t + \pi)) ^ 2 +$
 $(h(t) * \sin(t) + dh(t) * \cos(t) -$
 $h(t + \pi) * \sin(t + \pi) - dh(t + \pi) * \cos(t + \pi)) ^ 2 = d^2$;
 За допомогою цих операторів можна перевірити, чи дійсно
 пропонувані розв'язок задовольняє диференціальне рівняння.
 Одержано розв'язок диференціального рівняння (4) у вигляді [4]

$$h(t) = \frac{d}{2} + \frac{d}{2C} \cos(2Nt - 1)t \quad (5)$$

де C – константа інтегрування.

В загальному вигляді залежно від N рівняння кривої постійної ширини має вигляд:

$$x = \frac{d}{2C} (C \cos t + N \cos(2(N-1)t) - (N-1) \cos 2Nt) \quad (6)$$

$$y = \frac{d}{2C} (C \sin t - N \sin(2(N-1)t) - (N-1) \sin 2Nt)$$

В загальному випадку одержані криві постійної ширини матимуть самоперетини (далі для порівняння форми кривих обрано $d = 1$). На рис. 3 наведено приклади криві постійної ширини з самоперетинами.

Для унаочнення сім'ї відрізків, які забезпечують властивість кривої «постійної ширини», було зображено відрізки, що з'єднують точки кривої, які зміщені за параметром t на величину π (рис. 4).

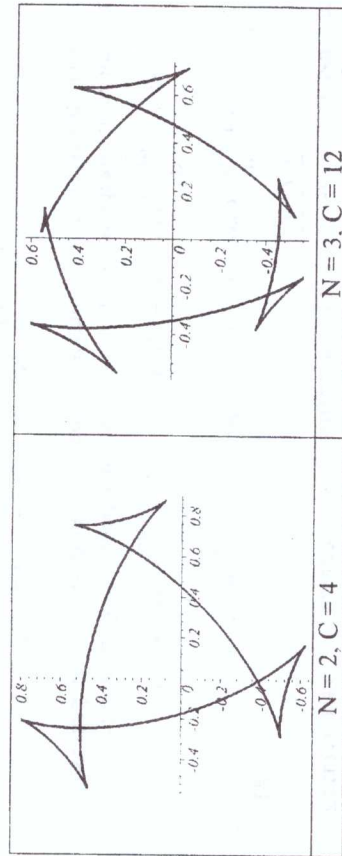


Рис. 3. Приклади кривих постійної ширини з самоперетинами.

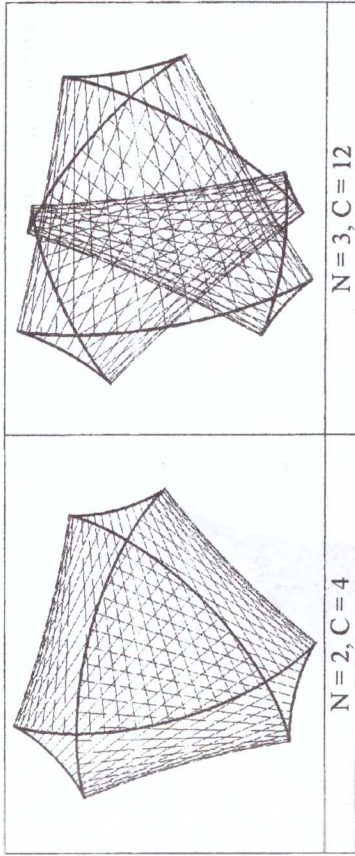


Рис. 4. Криві постійної ширини з узагальненими діаметрами.

На практиці ж найчастіше необхідно визначити опуклу криву постійної ширини, тобто криву без самоперетинів [5]. Для обчислення значення відповідної випадку константи інтегрування C , скористаємося умовою опуклості кривої. Визначимо похідні виразів (6)

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \left(h(t) + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right); \quad \frac{dy}{dt} = \cos t \left(h(t) + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right); \quad (7)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\sin t \left(\frac{dh(t)}{dt} + \frac{d^3 h(t)}{dt^3} \right) - \cos t \left(h(t) + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \cos t \left(\frac{dh(t)}{dt} + \frac{d^3 h(t)}{dt^3} \right) - \sin t \left(h(t) + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right)$$

та обчислимо кривину кривої

$$k = \frac{x \frac{d^2 y}{dt^2} - d^2 x \frac{dy}{dt^2}}{\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{3/2}} = \frac{1}{h(t) + \frac{d^2 h(t)}{dt^2}} \quad (8)$$

Звідси слідує, що умову опуклості кривої постійної ширини

$$h(t) + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} > 0$$

можна обрати у вигляді нерівності. Для складання загальної формули для визначення «пограничного» значення відповідного C , необхідно обчислити константу інтегрування, починаючи зі значення якої буде опуклою й відповідна крива постійної ширини. У випадку опису кривої у вигляді (5) або (6), для обчислення константи C слід використовувати формулу $C = 4N(N-1)$.

Наведемо приклади описів та зображень опуклих кривих постійної ширини. На рис. 5 зображено криву постійної ширини, описану рівняннями

$$x := \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{8} \cos(2t) - \frac{1}{16} \cos(4t), \quad y := \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{16} \sin(4t) - \frac{1}{8} \sin(2t)$$

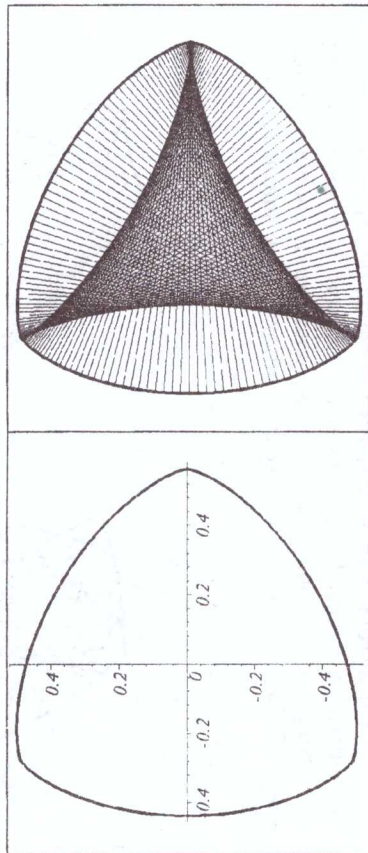


Рис. 5. Опукла крива постійної ширини при $N = 2$ і $C = 8$

На рис. 6 зображено криву постійної ширини, описану рівняннями

$$x := \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{16} \cos(4t) - \frac{1}{24} \cos(6t), \quad y := \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{24} \sin(6t) - \frac{1}{16} \sin(4t)$$

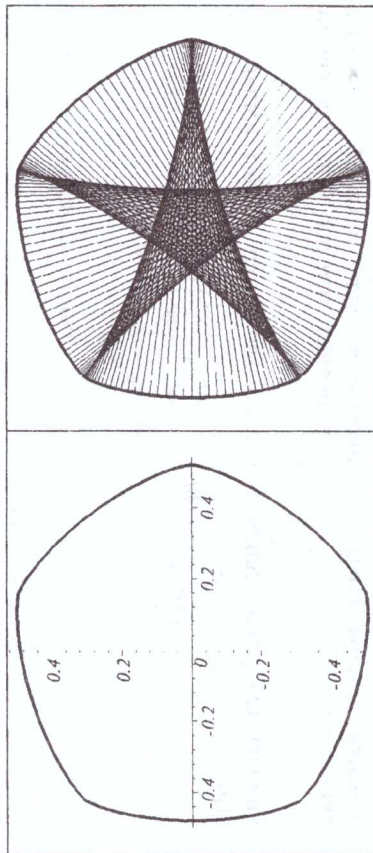


Рис. 6. Опукла крива постійної ширини при $N = 3$ і $C = 24$

Для знаходження рівняння обвідної сім'ї узагальнених діаметрів кривої постійної ширини, описаної рівняннями (6), задамо дві діаметральні протилежні точки:

$$\begin{aligned} xA &:= \frac{1}{2} \frac{d(C \cos(t) + N \cos(2(N-1)t) - (N-1) \cos(2Nt))}{C} \\ yA &:= \frac{1}{2} \frac{d(C \sin(t) - N \sin(2(N-1)t) - (N-1) \sin(2Nt))}{C} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} xB &:= \frac{1}{2} \frac{d(-C \cos(t) + N \cos(2(N-1)(t+\pi)) - (N-1) \cos(2N(t+\pi)))}{C} \\ yB &:= \frac{1}{2} \frac{d(-C \sin(t) - N \sin(2(N-1)(t+\pi)) - (N-1) \sin(2N(t+\pi)))}{C} \end{aligned}$$

Запишемо рівняння узагальненого діаметра, проведеного через них:

$$f_{sem} := (X - xA)(yB - yA) - (Y - yA)(xB - xA) = 0 \quad (10)$$

Вираз (10) слід вважати описом параметричної сім'ї прямих, де параметром буде t . Для визначення обвідної сім'ї прямих слід розв'язати відносно X і Y систему рівнянь, в якій до виразу (10) необхідно приєднати вираз, побудований на основі похідної від f_{sem} по параметру t .

Наведемо одержані в середовищі математичного процесора Maple розв'язки зазначеної системи рівнянь

а) для $N = 2$:

$$x = \frac{1}{C} (3d \cos 2t + 1,5d \cos 4t); \quad y = \frac{1}{C} (1,5d \sin 4t - 3d \sin 2t); \quad (11)$$

б) для $N = 3$:

$$x = \frac{1}{C} (7,5d \cos 4t + 5d \cos 6t); \quad y = \frac{1}{C} (-7,5d \sin 4t + 5d \sin 6t); \quad (12)$$

в) для $N = 4$:

$$x = \frac{1}{C} (14d \cos 6t + 10,5d \cos 8t); \quad y = \frac{1}{C} (-14d \sin 6t + 10,5d \sin 8t); \quad (13)$$

На рис. 7 і 8 для різних N наведено приклади обвідних сім'ї узагальнених діаметрів залежно від параметра інтегрування C .

З побудов стає зрозумілим, що обвідна узагальнених діаметрів є інваріантом для певного підкласу кривих постійної ширини, який визначається величиною N .

Г.А. Вірченко, канд. техн. наук, В.В. Ванін
 Національний технічний університет України "КПІ" (м. Київ, Україна)
 В.Г. Вірченко
 Національний авіаційний університет (м. Київ, Україна)

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНЕ ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЕЛЕМЕНТ РЕСУРСОЗБЕРІГАЮЧИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ЖИТТЄВОМУ ЦИКЛІ СКЛАДНОЇ ПРОДУКЦІЇ МАШИНОБУДУВАННЯ

У роботі проаналізовано напрямки застосування структурно-параметричного геометричного моделювання для комплексної оптимізації використання різноманітних ресурсів (сировини, матеріалів, енергії, живої та матеріалізованої праці, фінансів тощо) на протязі усього життєвого циклу складних виробів машинобудування.

Постановка проблеми. Нині ресурсозберігаючі технології – це одна з основ сталого динамічного розвитку суспільного виробництва.

Стрімкий ріст можливостей сучасної обчислювальної техніки, постійне зменшення її вартості та значні досягнення в галузі математичного моделювання створили необхідні умови для широкого впровадження у практику комп'ютерних інформаційних технологій, що стають дедалі все більш дієвим засобом для розв'язання багатьох інженерних задач.

Аналіз досліджень і публікацій. Існує значна кількість наукових праць у галузі геометричного моделювання [1, 2 та ін.], технології машинобудування [3, 4, 5 і т. д.], експлуатації та економіки [6 та ін.], що спрямовані на підвищення ефективності суспільного виробництва.

Недоліком перших, як правило, є розгляд питань економії одних ресурсів (наприклад, раціонального розкрою матеріалів) без урахування відповідного впливу на інші (витрати живої праці та енергії, можливість застосування високопродуктивного обладнання, оснащення, інструменту тощо).

У двох інших випадках, при декларуванні єдності стадій проектування, виробництва та експлуатації продукції машинобудування, математичні моделі, які пропонуються для оптимізації, мають локальний характер.

Відомо, що досконалість окремих етапів певного процесу не гарантує йому оптимальності в цілому.

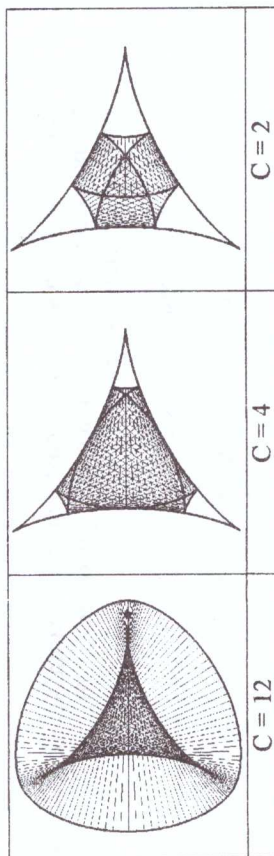


Рис. 7. Обвідні сім'ї узагальнених діаметрів для $N = 2$

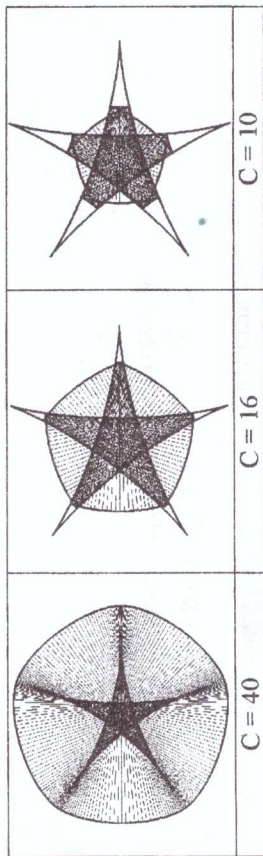


Рис. 8. Обвідні сім'ї узагальнених діаметрів для $N = 3$

Висновок. Розглянутий спосіб складання диференціального рівняння (4) класу кривих постійної ширини дозволяє одержати їх опис у вигляді (6), а також визначити (11) – (13) і побудувати (рис. 7, 8) обвідні узагальнених діаметрів, які будуть їх інваріантами.

Список літератури

1. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Выпуклые фигуры и тела. Энциклопедия элементарной математики. Кн. V. М.: Наука, 1966, с. 181-269.
2. Лостерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.: Гостехиздат, 1956. - 212 с.
3. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. - М.: Гостехиздат, 1951. - 185 с.
4. Лісняк А.А. Трикутник Релло як фігура постійної ширини та його можливі використання // Геометричне та комп'ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип. 14. – С. 180-187.
5. Лісняк А.А. Геометричне моделювання дій механічних пристроїв на основі властивостей трикутника Релло: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01/ Таврійська держ. агротехн. академія. – Мелітополь, 2008. – 20 с.

Отримано 10.06.2008, ХДУХТ, м. Харків

© Л.М. Куденко, А.А. Лісняк, 2008

Зміст

Кущенко Л.М., Лісняк А.А.	
Геометричне моделювання кривих постійної ширини.....	3
Вірченко Г.А., Ванін В.В., Вірченко В.Г.	
Структурно-параметричне геометричне моделювання як елемент ресурсозберігаючих технологій у життєвому циклі складної продукції машинобудування.....	11
Черніков О.В.	
Конформне перетворення квазі-еквідистантних кривих в колі на півплощину.....	16
Плевако В.П., Саєнко С.Ю.	
Доведення доцільності розрахунку теплотехнічних систем у плоскій постановці.....	20
Плоский В.А., Толлок А.В., Бондарь Е.А.	
Исследование метода аппроксимации преобразований средствами системы «РАНОК».....	30
Ницын А.Ю.	
Перспектива перспектив.....	38
Ларін О.М., Новіков В.С.	
Геометричне моделювання коливної системи задньої підвіски автомобіля.....	59
Мартин Є.В., Селенина Й.Р.	
Геометричні засоби оптимізації макромоделей електромеханічних систем.....	65
Хомченко Б.А., Камаєва С.О.	
Некласичний базис серендипового елемента з біквадратичною інтерполяцією.....	71
Толок А.В., Морозов Д.Н., Мьльцев А.М.	
Когнитивність м-образов в системі «РАНОК».....	77
Плевако В.П., Костенко С.М., Педорич І.П.	
Визначення форми рефлектора для рівномірного опромінювання приймача з круговою формою перерізу.....	83
Ткаченко В.П., Куценко І.Л.	
Вивчення властивостей багатифокусного еліпса на основі поняття бівольтенти.....	91
Росоха С.В., Маловик І.В.	
Спряжені елементи роторно-планетарних машин гіпотрохідного типу.....	95
Пилипак Т.С.	
Аналітичне конструювання просторових та сферичних кривих у функції довжини власної дуги.....	100

Пікасов М.М., Запольський Л.Л.	
Визначення параметрів еліпсоподібної кривої за її растровим зображенням.....	106
Гузенко В.А.	
Траекторії гравітаційного більярда в куті, утвореного двома прямиoliniйними променями.....	112
Морозова Г.В.	
Обчислення координат центральної точки множини точок на топографічній схемі.....	117
Дубров А.А., Слободской Р.Б., Логвиненко А.В.	
О появления особых точек на изображении линий пересечения кривых поверхностей.....	123
Глірко О.А., Максимова М.О., Білогуб О.В.	
Дистанційне навчання моделюванню у тривимірному середовищі.....	127
Грищенко І.Ю.	
Описання довільної ділянки на поверхні кулі інтерполяційною кривою.....	131
Руденко С.Ю., Самарін В.О.	
Аналитичний опис фокальної поверхні конгруентні променів, відбитих сферою.....	135
ДИСКУССИОННЫЕ ВОПРОСЫ ДИСЦИПЛИНЫ <i>Рубрика «В порядке обсуждения»</i>	140
Тормосов Ю.М., Слободской Р.Б., Логвиненко Е.В.	
Курсовой проект в дисциплине «Инженерная графика».....	141
Алфавітний показчик.....	145

Наукове фахове видання

Геометричне та комп'ютерне моделювання

Збірник наукових праць

Випуск 21

Відповідальний за випуск: Ю.М. Тормосов
Редактори: Ю.М. Тормосов
В.І. Кльосова
Комп'ютерна верстка: В.І. Кльосова

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавництва, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 2319 від 19.10.2005 р.

Підп. до друку 22.09.2008р., Формат 60х84 1/16. Папір офс. Друк офс.
Обл.-вид.арк. 8,2. Умов.-друк.арк. 9,3. Тираж 300 прим.
Зам. **140**

Харківський державний університет харчування та торгівлі
61051 Харків-51, вул. Клочківська, 333.

ДОД ХДУХТ. Харків-51, вул. Клочківська, 333.