

*А.А.ТЕСЛЕНКО*, канд. физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ»

## **НЕКОТОРЫЕ ПОДРОБНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОТОУПРУГОСТИ**

У роботі розглядаються основи нової модифікації методу фотоупругості та можливості її модельного дослідження. Суть нової модифікації полягає в поєднанні можливостей традиційного методу фотоупругості й методу скінчених елементів. Вироблена оцінка впливу точності установки досліджуваного тіла на точність у визначенні напружень в умовах конкретної речовини і схеми вимірювання.

Bases of a new modification of photoelasticity method and possibility of its model research are examined in work. Essence of a new modification consists of combination of possibilities of traditional photoelasticity method and finite-element method. Estimation of influencing of exactness of setting of the explored body on exactness in determination of tensions in the conditions of particular matter and chart of measuring is produced.

В настоящее время возрос интерес к методу фотоупругости после периода некоторого затишья в конце 90-х годов. Возникла потребность поточного определения напряжений в тонких пластинах стекол. Такая потребность возникает, например, при получении стекол для TFT мониторов. Имеется два направления развития технологии применения метода фотоупругости. Первая – развитие технологии измерений поляризационных параметров, вторая – развитие методов интерпретации измерений. В самом общем смысле томография представляет собой методологию получения новых знаний о распределении чего-то в объеме на основе имеющихся знаний о распределении чего-то на плоскости или поверхности. Применительно к поляризационно-оптической томографии это распределение напряжений в объеме на основе плоского распределения поляризационно-оптических параметров. В этой области подход к решению томографических задач еще не устоялся. В данной работе развивается направление, впервые представленное в [1,2], а именно, представление решения задачи поляризационной томографии в конечно-элементном виде. Развитие метода конечных элементов дает в руки разработчиков большой набор уже развитых и апробированных средств. В этой работе в отличие от [1,2] предложены новые методы получения результата.

В работах [1,2] описываются основы подхода к поляризационно-оптической томографии с использованием метода конечных элементов. Подход состоит в учете граничных условий и условий равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). С точки зрения МКЭ это – новая модификация метода, в которой элементы обладают не только упругими, но и пьезооптическими свойствами. Непосредственно наработки МКЭ переносить в метод фотоупругости нецелесообразно, т.к. МКЭ в теории упругости твердого деформируемого тела развивался для задач с совместными деформациями (выполняются дифференциальные условия совместности деформации).

ций [4]). Главным достоинством метода фотоупругости является его способность определять остаточные напряжения. Условие совместности деформаций в присутствии остаточных напряжений не выполняются. Традиционные вариационные постановки МКЭ содержат это условие и в этом случае неприменимы. В данной работе использовано условие равенства нулю дивергенции:

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma}_{i*}) = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{\sigma}_{i*}$  – вектор силы с координатами  $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$ ;  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений. Если граница свободна от напряжений:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\bar{\sigma}_{i*}) dV = 0. \quad (2)$$

Это соотношение выполняется для любой области внутри тела. Разобьем тело на области (конечные элементы) [3]. Для каждого конечного элемента будет выполняться условие (2).  $\sigma_{ij}$  в произвольной точке тела будет представлено интерполяционной формулой для соответствующего конечного элемента [3].

$$\sigma_{ij} = \sum_{\ell=1}^m N_{\ell} \sigma_{ij}^{\ell}, \quad (3)$$

где  $N_{\ell}$  – функции формы элемента;  $\sigma_{ij}^{\ell}$  – искомые величины напряжений в узлах конечных элементов,  $m$  – количество узлов в элементе,  $\ell$  – номер узла в элементе. В тонкой пластине, без градиента напряжений по ее толщине, для линейного треугольного элемента соотношение (2) будет записано в виде:

$$\iint_S \sum_{\ell=1}^3 \left( \sigma_{i1}^{\ell} \frac{\partial L_{\ell}}{\partial x} + \sigma_{i2}^{\ell} \frac{\partial L_{\ell}}{\partial y} \right) dS = 0 \quad (4)$$

или

$$\iint_S \sum_{\ell=1}^3 (\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell} + \sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}) dS = 0, \quad (5)$$

$L_{\ell}$  – функции формы элемента [3]:

$$L_{\ell} = (a_{\ell} + b_{\ell}x + c_{\ell}y)/D,$$

$a_{\ell}, b_{\ell}, c_{\ell}$  – коэффициенты линейного разложения функции формы,  $D$  – площадь элемента. Условие равновесия для одного элемента окончательно примет вид

$$\sum_{\ell=1}^3 (\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell} + \sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}) = 0. \quad (6)$$

Узловые напряжения  $\sigma_{ij}^{\ell}$  для всех узлов могут определяться решением системы уравнений (6), записанных для всех элементов и уравнений фотоупругости

$$A_{ij}^{\vec{n}} \sigma_{ij}^{\ell} = \delta^{\vec{n}} \cos(2\phi^{\vec{n}}), \quad (7)$$

определенных для направления  $\vec{n}$  в узле  $\ell$ . Уравнения (7) представляют собой обычные уравнения, связывающие напряжения и измеряемые парамет-

ры описанные, например, в [1]. В формуле (7)

$\delta^{\bar{n}}$  – оптическая разность хода;

$\varphi^{\bar{n}}$  – оптический параметр угла изоклины;

$A_{ij}^{\bar{n}}$  – коэффициенты, являющиеся функцией пьезооптических коэффи-

циентов, показателя преломления, толщины просвечиваемого слоя, ориентации направления просвечивания и ориентации системы координат, в которой определяются напряжения. Аналогично получаются соотношения для квадратичного элемента.

Решением систем линейных уравнений (6,7) будем получать искомые узловые напряжения  $\sigma_{ij}^{\ell}$ . Полученные таким образом значения  $\sigma_{ij}^{\ell}$  устойчивы. Если сравнить  $\sigma_{ij}^{\ell}$ , полученные решением системы уравнений (6,7) (метод МКЭ), с решением системы уравнений состоящей только из (7) (метод наклонного просвечивания), даже с избыточным числом измерений, то МКЭ обнаруживает большую устойчивость. В [1] был показан простейший имитационный эксперимент, доказывающий этот факт в частном случае напряженного состояния и нормально распределенной ошибкой в измеряемых параметрах. В данной работе исследуется влияние ошибки, связанной с точностью установки исследуемого предмета относительно измеряемой аппаратуры. В [1] исследовалась относительно сложная модель напряжений, что не способствовало пониманию результатов работы. В данном случае применение сложноподвижной модели ничем не оправдано. Логичнее взять для модельного исследования равномерно напряженное тело. В этом случае более наглядны будут отклонения измеренных напряжений от модельных. Конкретно, в данной работе было задано осевое сжатие, равномерно распределенное по квадратной пластине с размерами 10x10x1см. Исходя из заданного напряжения определялись, измеряемые параметры:  $\delta^{\bar{n}}$  – оптическая разность хода и  $\varphi^{\bar{n}}$  – оптический параметр угла изоклины, имея ввиду константы среды, соответствующие LiF. Кристаллографические плоскости считались направленными параллельно граням пластины. В уравнениях (7) в качестве  $A_{ij}^{\bar{n}}$  использовались значения соответствующие ориентациям просвечивания отклоненным от заданных в модели по которой определялись  $\delta^{\bar{n}}$  и  $\varphi^{\bar{n}}$ . Величина отклонения различна в различных точках, случайна с нормальным законом распределения, равным нулю математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением равным 1 градусу. Как и в [1] имеется ввиду, что просвечивание производится монохроматическим светом с длиной волны 640 нм и для оценки погрешности используется следующая модификация относительной погрешности  $\zeta(x) = \left| \frac{x - x^T}{\max} \right|$ , где  $x$  – исследуемое значение,  $x^T$  – точное значение,  $\max$  – максимальное по модулю зна-

чение  $x$ . Результаты приводятся в виде теневых картин, где численные значения величин увеличиваются от темного к светлому. Разбиение пластины производилось на прямоугольные четырехузловые изопараметрические элементы  $(10 \times 10)$ . Элементы имеют своими узловыми значениями независимые переменные  $\sigma_{ij}^e$ .

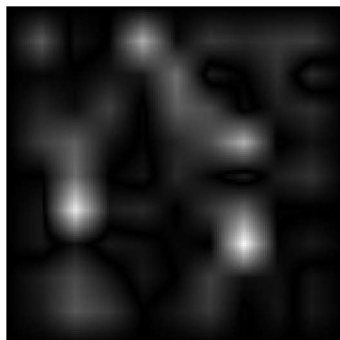
При указанном разбиении, МКЭ дает распределение  $\zeta(\sigma_{11})$ , показанное на рисунке. Оно внешне почти не отличается от полученного методом наклонного просвечивания (поэтому, здесь не приводится).

Количественное отличие имеется. Для МКЭ максимум  $\zeta(\sigma_{11}) - 1,46$ , дисперсия этой величины - 0,0021. Для метода наклонного просвечивания максимум  $\zeta(\sigma_{11}) - 1,86$ , дисперсия этой величины - 0,0042. Из этих результатов видно, что ошибка установки исследуемого тела в полярископ несколько компенсируется учетом условий равновесия.

Если новый метод сравнивать с применяемым методом разности касательных напряжений (МРКН), то, как уже указывалось в [1], МРКН имеет следующие очевидные недостатки:

1. результат МРКН зависит от выбора пути интегрирования;
2. МРКН не связывает воедино, в отличие от МКЭ, напряженное состояние во всех точках тела. Напряжения найденные на различных путях интегрирования независимы.

Устойчивость МРКН модельно не изучалась. Мы не знаем, насколько этот метод устойчив к неточности установки образца в поляриметре. Подробные исследования этого не производились (по крайней мере, автору они не известны). Есть еще один аспект применения данных исследований. Если напряжения уже определены, можно исследовать точность полученных результатов аналогичным приведенному выше способом.



Распределение (максимальное - 1,46).

**Список литературы:** 1. Тесленко А.А. / Заводская лаборатория 2. - 1998. - Т. 64, № 8. - С. 42-44. 2. Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В. / Функциональные материалы 2. - 1995. - № 4. - С. 543. 3. Тесленко А.А. Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. - Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. - Харьков, 1991. - 22 с. 4. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др. / Заводская лаборатория. - 1993. - Т. 59, № 2. - С.64-66.

Поступила в редколлегию 03.08.2005.