УДК 519.85

А.Н. ДАНИЛИН, В.В. КОМЯК, В.М. КОМЯК, А.Н. СОБОЛЬ
Национальный университет гражданской защиты Украины
А.В. ПАНКРАТОВ
Институт проблем машиностроения НАН Украины

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНО-ПОТОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЮДСКИХ И ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Предложены математическая модель индивидуально-поточного движения индивидов и подход, позволяющий свести поиск локального экстремума целевой функции к решению последовательности задач нелинейного программирования.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейное программирование, оптимизация.

О.М. ДАНІЛІН, В.В. КОМЯК, В.М. КОМЯК, О.М. СОБОЛЬ
Національний університет цивільного захисту України
О.В. ПАНКРАТОВ
Інститут проблем машинобудування НАН України

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІНДИВІДУАЛЬНО-ПОТОЧНОГО РУХУ ЛЮДСЬКИХ ТА ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ

Запропоновано математичну модель індивідуально-поточного руху індивідів та підхід, який дозволяє звести пошук локального екстремуму цільової функції до розв'язку послідовності задач нелінійного програмування.

Ключові слова: математична модель, нелінійне програмування, оптимізація.

A.N. DANILIN, V.V. KOMYAK, V.M. KOMYAK, A.N. SOBOL
National University of Civil Protection of Ukraine
A.V. PANKRATOV
Institute for Mechanical Engineering Problems of National Academy of Sciences of Ukraine

MATHEMATICAL MODEL OF INDIVIDUAL-FLOW FOOT TRAFFIC AND TRAFFIC FLOWS

The mathematical model of individual-stream motion of individuals and an approach that is reduced the search of a local extremum of objective function to the solving of problem's sequence of the nonlinear programming are offered.

Keywords: mathematical model, nonlinear programming, optimization.

Постановка проблемы

В настоящий момент моделирование движения потоков людей и транспортных средств представляет собой область науки, которая интенсивно развивается благодаря процессу мировой глобализации и увеличению численности населения на Земле. Как известно, крупные города привлекают к себе все большее количество иммигрантов, что приводит к увеличению нагрузки на транспортную систему городов и усложняет процессы городского планирования. Также следует отметить, что крупные современные города характеризуются наличием большого количества высотных зданий, при этом вопросы обеспечения безопасной жизнедеятельности в этих зданиях относятся к числу приоритетных. Одним из подходов к повышению уровня безопасности пребывания людей в высотных зданиях является моделирование движения людских потоков с целью минимизации времени эвакуации из данных зданий. В связи с этим, необходимость расчета параметров людских и транспортных потоков породила особый интерес к разработке геоинформационных систем специального назначения: симуляторов толпы, дающих возможность измерения, оптимизации и визуализации подобных потоков. Таким образом, существует актуальная научно-прикладная проблема моделирования индивидуально-поточного движения людских и транспортных потоков. Одним из шагов, направленных на решение данной проблемы, является разработка соответствующей математической модели.

Анализ последних достижений и публикаций

Наличие обширной и разнообразной эмпирической базы натурных наблюдений за людскими потоками в зданиях различного назначения, на которую ориентировались теоретические исследования [1–2], привело к необходимости теоретического обоснования зависимостей между параметрами людских потоков. В этих же работах [1–2] был предложен графоаналитический метод определения параметров людских потоков который, несмотря на трудоемкость для проектной практики, недостаточно полно отражает словесное описание процесса движения людей.

В связи с этим, появилась проблема математического описания зависимостей между параметрами людских потоков и описания изменений состояний потока (его перемещений) в пространстве. Трудности моделирования людских потоков и незнание их закономерностей привело к попыткам подмены процессов движения реальных людских потоков моделями процессов иной физической природы. Так, например, моделируют параметры людских потоков, используя вместо них поток заявок или гидроаналогию [3–4]. Возможны и другие аналогии, которые реализованы при помощи соответствующих компьютерных программ [5]. Указанные подходы получили свою оценку в научной литературе: "Одних интересует структура и закономерности явления, приводящие к наблюдаемому результату, других – только сами результаты. Первые, моделируя, пытаются воспроизвести структуру и закономерности явления, вторые – только результаты, не вдаваясь в реальные механизмы их появления" [6].

В настоящее время одними из наиболее распространенных являются такие программные продукты:

– "Флоутек" [7], созданный на основе упрощенных аналитической и имитационно-стохастической моделей;

– "Эватек" [8], в котором реализуется индивидуально-поточная модель движения людских потоков.

Следует отметить индивидуально-поточную модель движения людских потоков, разработанную ВНИИПО МЧС России [9]. Так, результаты сравнения моделей, на основе которых был разработан программный комплекс "Флоутек", с индивидуально-поточной моделью говорят о том, что использование индивидуально-поточной модели приводит к определению таких параметров процесса эвакуации, которые неадекватны требуемым при вероятности эвакуации, равной 0,999 (показано на зависимостях плотности потока от времени прохождения) [9].

На основании этих же исследований можно сделать вывод о том, что в настоящее время отсутствует модель индивидуально-поточного движения индивидов, адекватная реальному потоку. Интерес к данной модели обоснован также необходимостью моделирования гетерогенных потоков, в которых разные группы людей (транспортных средств) имеют различные цели и характеристики.

Формулирование цели исследования

Целью статьи является построение математической модели индивидуально-поточного движения потоков людей (транспортных средств) и разработка подхода к ее реализации.

Изложение основного материала исследования

Постановка задачи. Пусть исходные данные о путях движения индивидов задаются в виде, представленном на рис. 1.

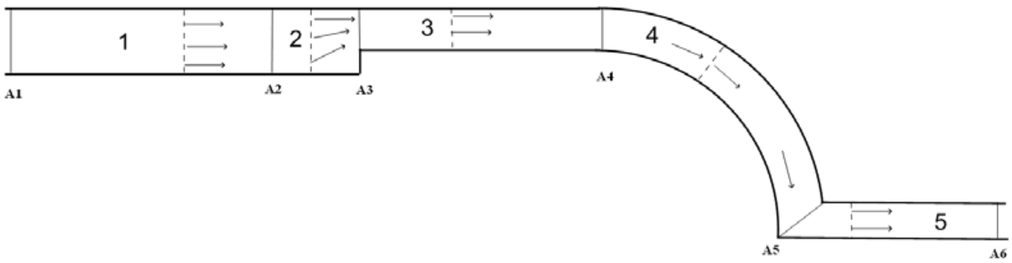

Рис. 1. Представление пути движения

Путь разделен на области, пронумерованные, соответственно, $1, 2, \ldots, m$ (для данного примера $m = 5$) и ограниченные разделителями $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$. Каждая область характеризуется одинаковым законом формирования основного направления движения и видом движения попавших в неё людей. Рассматриваются два вида движения – по прямой (области 1 – 3, 5) и по дуге окружности (область 4).

Для определения основного направления движения обозначим m-ую область через Ω_m, при этом разделитель A_m осуществляет трансляцию для областей с прямолинейным видом движения или же перемещается с вращением для областей с круговым видом движения таким образом, чтобы ему принадлежала анализируемая точка. В случае, если коридор в области равномерно изменяет свою ширину, то соответствующим образом меняется длина отрезка-разделителя.

Для областей, в которых реализуется прямолинейное движение, перемещение из анализируемой точки представляется в виде вектора, соединяющего данную точку с точкой на соответствующем разделителе (с учетом коэффициента гомотетии). Определение основного направление движения для этого случая наглядно проиллюстрировано на рис. 1 во второй области. Для определения основного направления движения в области Ω_4 используется соединение вышеуказанных точек разделителей дугами окружностей.

Далее производится случайное размещение индивидов в области движения (или непосредственно в области, или же за дверьми в прилегающих помещениях), причем характеристики индивидов подчинены нормальному закону распределения.

Не теряя общности рассуждений, предположим, что каждый индивид представляется в виде эллипса, большая полуось которого перпендикулярна к направлению движения. Для каждого из индивидов, поступивших в область движения, на каждом шаге (с заданным временным интервалом, например, 1 сек.) определяется основное направление и вид движения, после чего (возможно) вносятся небольшие индивидуальные изменения характеристик (скорости, направления, ускорения и т.п.). Угол поворота эллипса определяется между перпендикуляром к большой полуоси и вектором основного направления движения.

Следующий шаг – составление системы неравенств, обеспечивающей как непересечение всех эллипсов, моделирующих индивидов, так и их принадлежность области движения. Целевая функция в данном случае представляет собой максимум совокупного движения (пройденного всеми индивидуумами суммарного расстояния). Таким образом, полученная задача нелинейного программирования может быть решена при помощи солвера IPOPT. Данный процесс является итерационным и завершается после выхода индивидуумов из заданной области.

Очевидно, что для реализации предлагаемого подхода существует необходимость в аналитическом представлении условий непересечения эллипсов между собой, а также условий непересечения эллипсов с кругами и эллипсов с полуплоскостями [10–11].

Рассмотрим математическую модель индивидуально-поточного движения потока людей на примере задачи эвакуации.

Пусть область эвакуации не имеет круговых участков (для упрощения выкладок) и на *k*-ой итерации в области эвакуации Ω_m находится N_k человек с параметрами размещения $u_{ki} = (x_{ki}, y_{ki}, \theta_{ki})$, $i = 1, \ldots, N_k$, где (x_{ki}, y_{ki}) – координаты размещения начала локальной системы координат (текущая точка), а θ_{ki} – угол поворота i-ого эллипса E_i с размерами полуосей (a_i, b_i), служащего моделью *i*-ого человека. Для каждой текущей точки с координатами (x_{ki}, y_{ki}) определяется вектор скорости $\vec{v}_{ki} = \left(v_{ki,x}, v_{ki,y}\right)$.

Тогда математическая модель подзадачи на *k*-ой итерации может быть сформулирована в виде поиска максимума совокупного движения людей, находящихся в области эвакуации, т.е.

$$\max_{u \in W_k \subset R^n} F(u),\ F(u) = \Delta t \sum_{i=1}^{N_k} \left|\vec{v}_{ki}\right|, \tag{1}$$

$$u = (x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2, \ldots, x_{N_k}, y_{N_k}, \theta_{N_k}),$$

на области допустимых решений W_k, заданной системой ограничений:

$$x_i = x_{ki} + v_{ki,x}\Delta t, \tag{2}$$

$$y_i = y_{ki} + v_{ki,y}\Delta t, \tag{3}$$

$$\theta_i = \theta_{ki} + \Delta_{ki}, \tag{4}$$

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \ge 0,\ i = 1, \ldots, N_k - 1,\ j = i+1, \ldots, N_k, \tag{5}$$

$$\Phi_i(x_i, y_i, \theta_i) \ge 0,\ i = 1, \ldots, N_k, \tag{6}$$

$$0 < \Delta t \le 1, \tag{7}$$

где $n = 3N_k$, $\Phi_{ij}(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \ge 0$ – условие непересечения эллипсов E_i и E_j [10], $\Phi_i(x_i, y_i, \theta_i) \ge 0$ – условие принадлежности эллипса E_i области Ω_m [11], Δt – шаг по времени, $\Delta_{ki} = \hat{\theta}_{ki} - \theta_{ki}$, $\hat{\theta}_{ki}$ – угол поворота эллипса в точке $(x_{ki} + v_{ki,x}\Delta t, y_{ki} + v_{ki,y}\Delta t)$, поскольку большая полуось эллипса, транслированного в указанную точку, должна быть перпендикулярна основному направлению движения для этой точки.

Замечание. При наличии круговых участков сущность модели (1)÷(7) не меняется, но усложняется ее запись, так как добавляются условия движения эллипсов по дугам окружностей.

Поскольку при построении функций вида (5) и (6) используются операции максимума и минимума [10], то задача (1)÷(7) относится к задачам негладкой оптимизации. По способу построения область допустимых решений W может быть представлена в виде объединения η (η – некоторое большое число, зависящее от количества и вида объектов) подобластей вида

$$W_k = \bigcup_{s=1}^{h} W_{ks}\ , \tag{8}$$

где W_k описывается системой неравенств с гладкими функциями в левой части.

Представление области допустимых решений в виде объединения подобластей (8) позволяют свести поиск локального экстремума задачи (1)÷(7) к решению последовательности задач нелинейного программирования при помощи следующего алгоритма.

1. Обозначим начальную точку для задачи (1)÷(7):
$u^l = (x_{k1}, y_{k1}, \theta_{k1}, x_{k2}, y_{k2}, \theta_{k2}, ..., x_{kN_k}, y_{kN_k}, \theta_{kN_k}), l = 0$
(она принадлежит W_k по способу построения).
2. Генерируем по координатам начальной точки u^l подобласть W_{ks_l} из (8), содержащую эту точку. Если данные области уже исследованы, процесс решения закончен.
3. Начиная движение из точки u^l, находим локальный максимум функции $F(u)$ на области W_{ks_l}. Обозначаем полученную точку локального экстремума u^{l+1}.
4. Принимаем $l = l + 1$ и переходим к шагу 2.

Поскольку возможные перемещения эллипсов определяются средней скоростью движения человека за секунду, то они сравнимы с размерами эллипсов. Следовательно, количество подобластей, которые достаточно исследовать, на несколько порядков меньше теоретического значения величины η. Следует также учесть, что исходной является задача моделирования движения потока, а не задача получения с заданной точностью локального экстремума задачи (1)÷(7). Практические исследования показали, что при решении вполне достаточно ограничиться двумя-тремя итерациями вышеизложенного алгоритма.

Декомпозиция задачи (1)÷(7). При моделировании движения сотен людей процесс решения задачи (1)÷(7) будет весьма ресурсоемким, поскольку ограничения (5) состоят из $C_{N_k}^2$ неравенств, включающих в себя Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей [11]. С другой стороны, следует отметить, что система (2)÷(4) накладывает довольно жесткие ограничения на возможные положения эллипса (рис. 2).

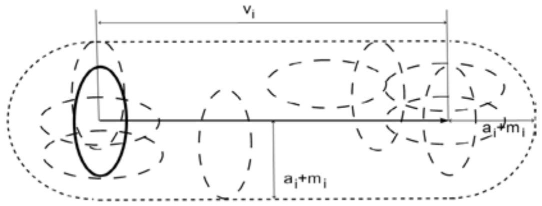

Рис. 2. Вид области, в которой гарантированно находится эллипс в ходе решения задачи (1)÷(7).

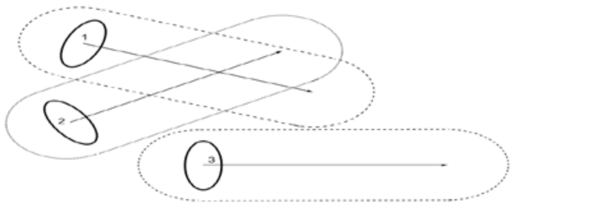

Рис. 3. Учет области возможного расположения эллипсов

Таким образом, при решении задачи можно исключить из (5) условия взаимного непересечения эллипсов, соответствующие области которых не пересекаются. Для ситуации, показанной на рис. 3, условия взаимного непересечения первого и третьего, а также второго и третьего эллипсов можно игнорировать.

Следует отметить, что условие непересечения областей пары эллипсов E_i и E_j совпадает с условием расположения отрезков с вершинами (x_{ki}, y_{ki}), $(x_{ki} + v_{ki,x}\Delta t, y_{ki} + v_{ki,y}\Delta t)$, и (x_{kj}, y_{kj}), $(x_{kj} + v_{kj,x}\Delta t, y_{kj} + v_{kj,y}\Delta t)$ на расстоянии, не меньшем $\rho_{ij} = a_i + m_i + a_j + m_j$, где m_i и m_j, соответственно, возможные уклонения эллипсов E_i и E_j от основного направления движения.

Подобный подход используется для условий размещения эллипсов в прямолинейных участках области Ω_m. Для круговых участков области рассматриваются условия нахождения на заданном расстоянии двух дуг или же дуги с отрезком.

Однако при увеличении значений N_k размерность задачи может оказаться слишком большой. Но при имитации эвакуации по коридорам, когда длина области значительно превышает ее ширину, легко разбить задачу на подзадачи меньшей размерности и решить ее приближенно. Для этого область эвакуации разбивается на зоны, и поочередно параметры размещения объектов во всех зонах, кроме одной, фиксируются. Так, для ситуации, представленной на рис.1, вначале фиксируются параметры размещения эллипсов для всех зон, кроме пятой. После решения подзадачи для пятой зоны параметры находящихся в ней объектов фиксируются и решается оптимизационная подзадача для четвертой зоны. И так далее.

Предложенные средства декомпозиции позволяют существенно снизить ресурсоемкость процесса оптимизации целевой функции (1) и использовать предложенный подход для моделирования широкого спектра ситуаций.

Выводы

В статье предложена математическая модель индивидуально-поточного движения людских и транспортных потоков, позволяющая имитировать возникновение заторов и заблаговременно вносить изменения как в существующие, так и в проектируемые объекты городского планирования. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку методов, алгоритмического и программного обеспечения для моделирования индивидуально-поточного движения.

Список использованной литературы

1. Предтеченский В.М. Проектирование зданий с учетом организации движения людских потоков / В.М. Предтеченский, А.И. Милинский. – М.: Стройиздат, 1969. – 248 с.
2. Предтеченский В.М. Проектирование зданий с учетом организации движения людских потоков / В.М. Предтеченский, А.И. Милинский. – М.: Стройиздат, 1979. – 375 с.
3. Таранцев А.А. Определение параметров людского потока при свободном движении // Пожаровзрывобезопасность. – 2004. – Т. 13. – № 5. – С. 64–69.
4. Таранцев А.А. Об одной задаче моделирования эвакуации с использованием теории массового обслуживания // Пожаровзрывобезопасность. – 2002. – №3. – С. 34–37.
5. Холщевников В.В. Обзор компьютерных программ моделирования эвакуации зданий и сооружений / В.В. Холщевников, Д.А. Самошин, Н.Н. Галушка // Пожаровзрывобезопасность. – 2002. – Т. 11. – № 5. – С. 40–49.
6. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Р. Шеннон. – М.: Мир, 1978. – 418 с.
7. Karkin I.N. Flowtech VD – computer-simulation method from evacuation calculation / I.N. Karkin, A.P. Parfenenko // International Scientific and Technical Conference Emergency Evacuation of People from Buildings. – Warsaw, 2011. – P. 111 –118.
8. Валидация и верификация эвакуационной модели СИТИС: Эватек. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://sitis.ru/doc/2502%20Эватек%20валидация%20и%20верификация.pdf.
9. Холщевников В.В. Сопоставление различных моделей движения людских потоков и результатов программно-вычислительных комплексов / В.В. Холщевников, А.П. Парфененко // Пожаровзрывобезопасность. – 2015. – Т. 24. – №5. – С. 68-74.
10. Стоян Ю.Г. Полный класс Ф-функций для базовых двумерных φ-объектов / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов, А.В. Панкратов // Доп. НАН України. – 2010. – № 12. – С. 25–30.
11. Панкратов А.В. Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей / А.В. Панкратов // Радиоэлектроника и информатика. – 2015. – 2(69). – С. 6–9.