

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

В.А.Жовдак, И.В.Мищенко

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И
ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ
ФАКТОРОВ**

Харьков

1999

ББК 30.14-02

Ж78

УДК 62-192:624.041

Рецензенти: Ю.С.Воробйов, д-р техн. наук, проф., ПМаш НАН України
Д.Ф.Симбірський, д-р техн. наук, проф., Державний аерокосмічний
університет (ХАІ)

Друкується за рішенням вченої ради Харківського державного політехнічного
університета протокол № 8 від 3 грудня 1999 року

В.О.Жовдак, І.В.Мищенко. Прогнозування надійності елементів конструкцій з
урахуванням технологічних та експлуатаційних факторів: Монографія.-Харків: ХДПУ,
1999.- 120 с.-Рос.мовою.

ISBN 966-593-113-X

Розглянуто методи вирішення задач статистичної динаміки з урахуванням випадкового стаціонарного та нестаціонарного навантаження у вигляді випадкових функцій або полей, випадкових властивостей самої конструкції. На основі використання лінійних і нелінійних кінетичних рівнянь пошкоджень і математичного апарату теорії марковських процесів розроблено методи вирішення задач надійності при відмовах від втоми з урахуванням стаціонарного та нестаціонарного широкосмугового випадкового навантаження й імовірносного опису властивостей конструкції і матеріалу. Проведено чисельні дослідження надійності конкретних елементів машинобудівних конструкцій.

Для наукових працівників та спеціалістів з проектування, розрахунку та дослідження елементів конструкцій в різних галузях машинобудування, студентів старших курсів машинобудівних спеціальностей.

Рассмотрены методы решения задач статистической динамики с учетом случайного стационарного и нестационарного нагружения в виде случайных функций или полей, случайных свойств самой конструкции. На основе использования линейных и нелинейных кинетических уравнений повреждений и математического аппарата теории марковских процессов разработаны методы решения задач надежности при усталостных отказах с учетом стационарного и нестационарного широкополосного случайного нагружения и вероятностного описания свойств конструкции и материала. Проведены численные исследования надежности конкретных элементов машиностроительных конструкций.

Для научных работников и специалистов по проектированию, расчету и исследованию конструкций в различных областях машиностроения, студентов старших курсов машиностроительных специальностей.

ББК 30.14-02

ISBN 966-593-113-X

© В.А.Жовдак,
И.В.Мищенко,
1999.

*115-летию
Харьковского государственного
политехнического университета и
70-летию
специальности «Динамика и прочность машин»
ПОСВЯЩАЕТСЯ*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тенденцией развития современного машиностроения является снижение материалоемкости и энергопотребления при одновременном усложнении, повышении мощности, производительности и энергонасыщенности машин и конструкций. В этих условиях приоритетными являются требования к надежности новой техники, которые продиктованы не только экономическими соображениями, но и социально-экологическими последствиями в случае возникновения отказов. Удовлетворение этих требований осуществляется на этапах проектирования, производства, испытания, доводки и эксплуатации машин и оборудования. Для решения проблемы надежности машиностроительных конструкций необходимы как новые теоретические подходы, отличные от существующих своей системностью и комплексностью, так и новые научно обоснованные методы и средства обеспечения и поддержания надежности при производстве и эксплуатации. Одним из важнейших этапов обеспечения надежности является этап проектирования, поскольку на нем закладывается надежность новой техники. В современных условиях эффективное проектирование возможно осуществить только на основе создания на базе современных ЭВМ систем автоматического проектирования (САПР), обладающих способностью к адаптации и самообучению и включающих соответствующие банки алгоритмов и программ и банки данных. Неотъемлемой частью САПР должна быть проблемно ориентированная подсистема определения показателей надежности, вместе с тем банки алгоритмов и программ должны создаваться на основе современных теоретических и экспериментальных достижений в различных научных областях и максимально охватывать многообразие возможных отказов машин и сооружений, связанных с различными физи-

ческими явлениями, и прежде всего такими, как усталость, ползучесть, износ, коррозия, хрупкое разрушение. Банки данных должны включать большие объемы необходимой информации для прогнозирования надежности, включая данные о характеристиках материалов, свойствах машин и конструкций, технологических факторах, нагружении и пр.

Корректное прогнозирование надежности элементов конструкций (ЭК) возможно только на основе методов, позволяющих с высокой степенью точности выполнять расчеты основных показателей надежности (вероятности безотказной работы (ВБР), плотности вероятности отказов (ПВО) и др.) и учитывать влияние на их работоспособность основных случайных факторов. К последним следует отнести, прежде всего, внешние воздействия и условия эксплуатации, свойства конструкции и физико-механические характеристики конструкционных материалов. Разработке таких методов прогнозирования надежности сложных ЭК при совместном учете вероятностной природы нагружения, свойств объекта и характеристик конструкционной прочности, и на их основе программного обеспечения, ориентированного на использование в САПР, посвящена данная работа.

В монографии излагаются результаты цикла исследований, выполненных авторами и коллективом сотрудников под их руководством на кафедре «Динамика и прочность машин» Харьковского государственного политехнического университета. Материалы данной монографии использовались также при разработке специальных курсов для студентов специальности «Динамика и прочность машин». Авторы выражают благодарность к.т.н. Иглину С.П., к.т.н. Степченко А.С., н.с. Марченко Т.Н. за созданное программное обеспечение для решения задач о случайных колебаниях сложных трубопроводных систем и панелей летательных аппаратов.

Список аббревиатур

ВБР	-	вероятность безотказной работы
ВВВ	-	вектор внешних воздействий
ВОП	-	вектор определяющих параметров
ВПКП	-	вектор параметров конструкционной прочности
ВПО	-	вектор параметров объекта
ВПП	-	вектор предельных параметров
ВТР	-	вектор параметров работоспособности
ВС	-	вектор состояний
КИН	-	коэффициент интенсивности напряжений
КУП	-	кинетическое уравнение повреждений
ЛА	-	летательный аппарат
МКЭ	-	метод конечных элементов
МСЭ	-	метод суперэлементов
ММО	-	многоуровневая модель объекта
ММН	-	математическая модель надежности
МТР	-	модель параметров работоспособности
МОП	-	модель определяющих параметров
НДС	-	напряженно-деформированное состояние
ПВО	-	плотность вероятности отказов
РУТ	-	распространение усталостной трещины
СКО	-	среднеквадратическое отклонение
СОДУ	-	система обыкновенных дифференциальных уравнений
уравнение	-	уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова
ФПК	-	
ЭК	-	элемент конструкций

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ФАКТОРОВ

1.1. Основные понятия и определения

В работе рассматривается подход к прогнозированию надежности технических объектов, научные основы которого заложены Биргером И.А. [5, 6], Болотиным В.В. [9-12], Гусевым А.С. [22, 23], Когаевым В.П. [33-35], Переверзевым Е.С. [49, 51], Прониковым А.С. [54], Светлицким В.А. [55], Серенсенем С.В. [56], Тимашевым С.А. [63], Трощенко В.Т. [66-68], Crandall S.H. [75, 76], Lin Y.K. [78, 79], Shinozuka M. [83], Yang J.N. [72]. В соответствии с данным подходом исследуемый объект может находиться в следующих состояниях: работоспособном, предельном, неработоспособном.

Работоспособное состояние (работоспособность) трактуется как состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, находятся в пределах, установленных нормативно-технической и конструкторской документацией. Набор этих параметров, характеризующих работоспособность объекта, называется вектором параметров работоспособности (ВПП) и обозначается $Z(t)$. Область, в которой должен находиться ВПП $Z(t)$ при работоспособном состоянии, называется областью работоспособных состояний Ω , которая является открытой [12]. Предельное состояние объекта - это такое состояние, при котором его дальнейшее применение по назначению недопустимо или нецелесообразно. Предельные состояния объекта описываются поверхностью предельных состояний Γ_{Ω} .

Надежность трактуется как свойство объекта сохранять во времени работоспособность.

Отказ - событие, заключающееся в нарушении работоспособности. В зависимости от природы возникновения отказы можно классифицировать на внезапные и постепенные. Внезапные отказы возникают в результате внезапного изменения условий эксплуатации: ошибок, допущенных при проектировании; скрытых дефектов в материале; нарушения правил эксплуатации. Постепенные отказы возникают в результате необратимых фи-

зико-химических явлений, которые происходят в объекте в результате износа, усталости, ползучести, коррозии и т.п.

Ресурс - продолжительность работы объекта от начала его эксплуатации до перехода в предельное состояние.

В основу построения рассматриваемого подхода прогнозирования надежности положен экспериментально установленный факт, что отказ объекта представляет случайное событие, а его ресурс является случайной величиной. Это является следствием неизбежного влияния на надежность объекта случайных факторов:

- разброс физических и прочностных характеристик исходных материалов, используемых в конструкции;
- технология изготовления и нестабильность производства;
- условия эксплуатации и внешние воздействия.

Осуществить корректный прогноз надежности конструкций с учетом указанных случайных факторов, можно только на основе всесторонних экспериментальных исследований с целью их вероятностного описания. На основе этих экспериментов должны быть составлены постоянно пополняющиеся базы данных, которые в дальнейшем являются основой для прогноза. Однако план и объем производимых экспериментальных исследований может быть корректно и в полном объеме сформулирован только на основе отработанной общей методологии прогноза для рассматриваемого класса конструкций. Так, например, модель внешнего воздействия на конструкцию во многом зависит от используемой при прогнозе модели самой конструкции, физической модели отказа и других факторов. Во многих случаях провести экспериментальные исследования в полном объеме невозможно и поэтому для широкого класса конструкций прогноз надежности осуществляется в условиях неполной статистической информации.

Влияние указанных случайных факторов, оказывающих основное влияние на работоспособность объекта, учитывается при прогнозировании надежности путем введения совокупности случайных векторов $V(t)$, в которую входят:

- Вектор внешних воздействий (ВВВ) $X(t)$ - определяет различного рода силовые, вибрационные, температурные и другие воздействия окружающей среды на объект во время его эксплуатации, включая воздействия коррозионно-агрессивной среды, наличие вакуума, электрических полей, радиационного облучения и пр.

- Вектор параметров объекта (ВПО) $S(t)$ - определяет геометрические, жесткостные, физические, механические свойства объекта, которые закладываются на этапе изготовления, к числу таких параметров можно отнести диаметры, длины, толщины элементов, размеры поперечных сечений, податливости заделок, модуль упругости, коэффициент Пуассона и др. величины. В машиностроительных конструкциях ВПО, как правило, является неизменным во времени, т.е. представляет векторную случайную величину.
- Вектор параметров конструкционной прочности (ВПКП) $R(t)$ - определяет способность материала машин и конструкций сопротивляться внешним воздействиям. При этом прочность понимается в широком смысле, включая способность сопротивляться усталости, ползучести, износу, коррозии и т.д. Например, в качестве компонент ВПКП при отказах, происходящих в результате многоциклового усталости, могут быть предел выносливости элемента машиностроительной конструкции σ_{-1} и соответствующее ему базовое число циклов N_0 .
- Вектор предельных параметров (ВПП) $\Gamma(t)$ определяет границы области работоспособных состояний Ω (поверхность предельных состояний Γ_Ω), пересечение с которой ВПР $Z(t)$ соответствует отказу объекта. При этом предельных состояний может быть несколько и сама граница области работоспособных состояний Γ_Ω в процессе эксплуатации может меняться случайным образом.

Эффективное прогнозирование надежности различных машин и конструкций возможно на основе новых подходов информационного обеспечения с использованием банков данных по вышерассмотренным случайным векторам $X(t)$, $S(t)$, $R(t)$ и $\Gamma(t)$, представляющим некоторый обобщенный вход $V(t)$ для системы прогнозирования. Построение банка данных для вектора внешних воздействий $X(t)$ должно осуществляться на основе экспериментально полученных типовых реализаций каждой компоненты, отражающих типичные эксплуатационные условия, за некоторый характерный период (1 полет, 1 км пробега и т.д.). Такие реализации могут быть получены для выделенных специальным образом типовых элементов объекта, которые близки не по конструкции, а по уровням эксплуатации. Информацию о параметрах внешнего воздействия на проектируемые детали и узлы можно получить при помощи записи этих параметров на уже имею-

щихся в эксплуатации элементах конструкции. Путем статистической обработки этих реализаций получаются спектры и другие вероятностные характеристики компонент вектора $X(t)$ для некоторого класса конструкций.

Для описания векторов $S(t)$, $R(t)$ и $\Gamma(t)$, определяющих физико-механические характеристики конструкционных материалов, геометрические, инерционные и жесткостные характеристики конструкции и т.п., можно использовать находящиеся в эксплуатации и разрабатываемые банки данных, которые получили наибольшее распространение в области механических свойств материалов.

Совокупность случайных векторов $V(t)$, рассматриваемая как обобщенный вход для системы прогнозирования надежности, приводит к необходимости рассмотрения ВПР $Z(t)$ как векторного случайного процесса, который в некотором фазовом пространстве Π_Z будет описывать некоторую траекторию. В качестве пространства Π_Z удобно рассматривать евклидовы пространства.

Структурная схема прогнозирования надежности технических объектов при внезапных и постепенных отказах, которая иллюстрирует формирование вектора параметров работоспособности, изображена на рис 1.1. Обозначенные на этом рисунке случайные вектора $Y(t)$ и $\Lambda(t)$, вероятностные характеристики которых определяются расчетным путем по известным вероятностным характеристикам $V(t)$, имеют следующий смысл:

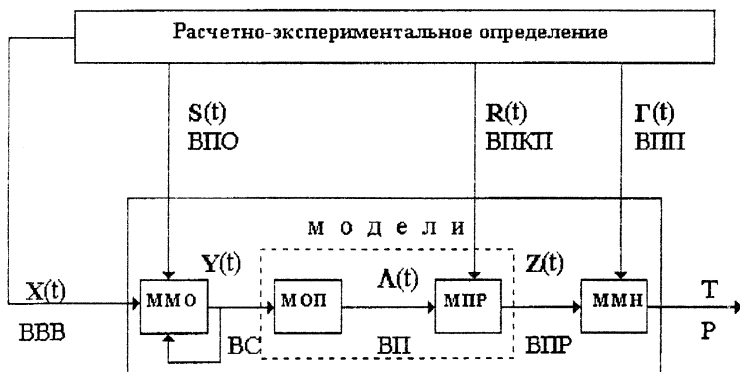


Рис. 1.1.

Вектор состояний (ВС) $Y(t)$ - определяет вибрационные и температурные характеристики, параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) объекта во время его эксплуатации.

Вектор определяющих параметров (ВОП) $\Lambda(t)$ - представляет совокупность силовых, деформационных, температурных и др. характеристик, с помощью которых осуществляется построение математических моделей, описывающих ВПР $Z(t)$.

T - ресурс работы объекта.

Принятые условные обозначения для моделей:

ММО – многоуровневая модель объекта – предусматривает расчетные схемы различного уровня, позволяющие описать как отдельные элементы объекта, так и весь объект в целом;

МОП – модель определяющих параметров – представляет совокупность операций, необходимых для построения вектора $\Lambda(t)$. К ним, например, можно отнести приведение сложного напряженного состояния к простому, широкополосного случайного процесса к эквивалентному по повреждающему действию узкополосному и пр.;

МПР – модель параметров работоспособности – описывает развитие во времени вектора параметров работоспособности $Z(t)$. В качестве таких моделей при постепенных отказах можно, например, использовать кинетические уравнения повреждаемости;

ММН – математическая модель надежности позволяет определить показатели надежности объекта как вероятностные характеристики ресурса, который рассматривается как время достижения траекторий $Z(t)$ в пространстве P_z границы Γ_Ω области работоспособных состояний Ω . Среди таких моделей можно, например, выделить пуассоновские, марковские, асимптотические и др.

1.2. Основные этапы прогнозирования надежности механических объектов

В соответствии с приведенной на рис 1.1 структурной схемой можно выделить следующие основные этапы прогнозирования надежности технических объектов:

1 этап $[X S] \rightarrow [Y]$. Решение задачи статистической динамики, заключающейся в определении вероятностных характеристик вектора $Y(t)$ по

известным вероятностным характеристикам векторов $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{S}(t)$, которые в большинстве случаев решаются в рамках корреляционной теории на основе построения математической модели функционирования объекта.

Среди наиболее эффективных подходов решения задач данного класса для сложных ЭК можно отнести сочетание методов конечных элементов (МКЭ) и суперэлементов (МСЭ) с методами, разработанными для решения линейных и нелинейных задач статистической динамики для систем с большим числом степеней свободы. Поскольку для решения большинства задач надежности машиностроительных конструкций необходимо знать характеристики вектора $\mathbf{Y}(t)$ в наиболее опасных местах концентрации параметров НДС, то задача статистической динамики должна решаться на математических моделях разного уровня. В этом случае результаты решения задачи на моделях первого уровня являются входными характеристиками для моделей второго уровня и т.д. Можно решать и обратную задачу, связанную с идентификацией вероятностных характеристик вектора $\mathbf{X}(t)$ по экспериментально полученным характеристикам вектора $\mathbf{Y}(t)$.

Наибольшее развитие применительно к детерминированным расчетам этот метод получил в работах Bathe K.J., Wilson E.L., Gallagher R.H., Zienkiewicz O.C., Strang G., Segerlind L.J., Fix G.J., Варвака П.М., Образцова Н.Ф., Розина Л.А., Постнова В.А., Хархурима М.Я., Сахарова Л.С. и др. В соответствии с данными методами математическая модель объекта может быть представлена в виде

$$L \mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) \quad (1.1)$$

где $\mathbf{Y}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ - соответственно векторы обобщенных узловых перемещений и узловых нагрузок, L - случайный дифференциальный линейный или нелинейный оператор, зависящий от случайного вектора параметров объекта $\mathbf{S}(t)$.

Среди авторов, занимающихся разработкой методов решения задач статистической динамики применительно к механическим системам, необходимо отметить Болотина В.В. [9, 11], Вольмира А.С. [15], Макарова Б.П. [41], Николаенко Н.А. [45], Светлицкого В.А. [55], Crandall S.T. [75, 76], Yang I. [72], Iwan W [77], Schuller G.I. [82].

Для решения линейных и нелинейных задач статистической динамики на основе МКЭ и МСЭ могут быть эффективно применены методы, разработанные для систем с конечным числом степеней свободы большой

размерности, среди которых можно выделить методы теории марковских процессов, использующие уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), метод обобщенных координат, метод возмущений, метод статистической линеаризации, метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), метод спектральных представлений, метод функций Грина (импульсных переходных функций). Случайные свойства самого объекта при решении задачи статистической динамики могут быть учтены путем задания вероятностных характеристик вектора параметров объекта $S(t)$.

Из проведенного анализа существующих подходов решения задач статистической динамики для линейных и нелинейных систем большой размерности следует, что не существует единого универсального метода, позволяющего эффективно применять его для решения указанных задач. Наиболее перспективными являются различные комбинации указанных методов. Учитывая существующую в настоящее время обширную базу матричных алгоритмов и программ для решения проблемы собственных значений операторных уравнений типа (1.1), наиболее перспективным является комбинация метода обобщенных координат, позволяющего на основе представления решения в виде разложения в ряд по собственным формам понизить размерность исходной задачи, с другими из рассмотренных методов. Так, если задача статистической динамики решается для линейных систем при стационарном воздействии в рамках корреляционной теории, удобно применить метод спектральных представлений, в случае нестационарного случайного воздействия - метод импульсных переходных функций. Если необходимо определить плотности вероятности выходных координат, то эффективно использовать аппарат теории марковских процессов, на основе которого разработано большое количество приближенных подходов решения нелинейных стохастических задач.

2 этап $[Y] \rightarrow [A]$. Формирование вектора определяющих параметров $A(t)$. Поскольку, как правило, машиностроительные конструкции обладают слабым демпфированием, а внешние нагрузки, действующие на них, являются широкополосными функциями или полями, то компоненты вектора состояний системы $Y(t)$, представляющие обобщенные перемещения в узловых точках системы, являются суперпозицией узкополосных случайных процессов с несущими частотами, соответствующими собственным частотам. Для описания в этом случае вектора параметров работоспособности $Z(t)$ необходимо сформировать так называемый вектор определяющих па-

раметров $\Lambda(t)$ на основе $Y(t)$. Для определенных моделей отказов при тождественном совпадении векторов $Y(t)$ и $\Lambda(t)$ данный этап может отсутствовать.

3 этап $[\Lambda \mathbf{R}] \rightarrow [\mathbf{Z}]$. Определение вероятностных характеристик вектора параметров работоспособности $\mathbf{Z}(t)$ по известным вероятностным характеристикам векторов $\Lambda(t)$ и $\mathbf{R}(t)$. Связь между этими векторами может быть представлена в операторной форме

$$\mathbf{Z}(t) = H[\Lambda(t), \mathbf{R}(t)], \quad (1.2)$$

где H - некоторый детерминированный оператор.

Для широкого класса постепенных отказов для вектора $\mathbf{Z}(t)$ можно записать феноменологические кинетические уравнения вида

$$dz(t)/dt = F[\Lambda(t), \mathbf{R}(t)]. \quad (1.3)$$

Зависимости типа (1.3) могут быть получены путем проведения так называемых базовых испытаний [10] на исследуемых элементах конструкций или стандартных образцах при постоянных значениях векторов $\Lambda(t)$ и $\mathbf{R}(t)$.

Для определения основных показателей надежности на стадии проектирования необходимо, кроме спектральных характеристик вектора параметров работоспособности $\mathbf{Z}(t)$, иметь его одномерные и двумерные плотности вероятности. Во многих случаях операторные уравнения типа (1.2) и (1.3) являются нелинейными, поэтому для нахождения указанных плотностей вероятности эффективно использовать математический аппарат теории марковских процессов.

4 этап. Определение основных показателей надежности, рассматриваемых как вероятностные характеристики ресурса T , который представляет время от начала эксплуатации объекта до достижения вектором параметров работоспособности $\mathbf{Z}(t)$ границы области допустимых состояний Γ_{Ω} . Например, ВБР $P(t)$ трактуется как вероятность случайного события, которое заключается в нахождении вектора $\mathbf{Z}(t)$ в течение заданного промежутка времени $[0, t]$ в области работоспособных состояний Ω

$$P(t) = P\{z(\tau) \in \Omega, \tau \in [0, t]\}, \quad (1.4)$$

Среди основных подходов решения указанной задачи можно выделить теорию выбросов случайных функций и полей, метод статистических испытаний, асимптотический метод и метод теории марковских процессов.

Рассмотренные основные этапы прогнозирования надежности сложных машиностроительных объектов позволяют на основе статистической информации о внешних воздействиях, физико-механических характеристиках материалов, конструкционно-технологических свойствах исследуемого объекта расчетным путем определять его основные показатели надежности. При решении конкретных задач надежности некоторые из указанных этапов могут отсутствовать, а отдельные векторы тождественно совпадать.

На основе изложенной методологии прогнозирования надежности элементов машиностроительных конструкций, учитывающей все основные случайные факторы, которые влияют на работоспособность рассматриваемых объектов и обзора имеющихся работ по основным этапам, реализующим эту методологию, можно отметить, что в настоящее время нет универсальных методов решения задач статистической динамики для случайных механических систем с учетом случайности параметров самого объекта, нелинейных эффектов, связанных с демпфированием, возникновением пластических деформаций и пр. Наиболее перспективными подходами, для которых имеется хорошо разработанный математический аппарат для решения различного рода динамических задач в детерминированной постановке, является конечноэлементный и суперэлементный.

Интенсивное развитие разработок, связанных с созданием банков данных о характеристиках внешних воздействий, свойствах материалов и технологических факторах, не снижает актуальности проблемы идентификации характеристик воздействий и свойств самой конструкции в эксплуатационных условиях.

Существование богатейшего эмпирического материала для построения кинетических уравнений, описывающих меры повреждений при детерминированном гармоническом нагружении и физических моделях отказов различной физической природы, позволяет успешно применять полученные уравнения и в случае узкополосного квазигармонического случайного нагружения. При широкополосном случайном нагружении разработаны математические методы, позволяющие привести широкополосный процесс к эквивалентному по различным вероятностным критериям узкопо-

лосному случайному процессу с использованием методов схематизации случайных процессов. Использование кинетических уравнений повреждаемости позволяет доказать, что мера повреждений является компонентой двумерного марковского процесса, вероятностные свойства которого полностью описываются уравнениями ФПК.

На основании вышесказанного актуально решение следующих задач:

- разработка на основе современных подходов (МКЭ и МСЭ), которые применяются для решения детерминированных динамических задач, методов решения задач статистической динамики с учетом случайного стационарного и нестационарного воздействия в виде случайных функций или полей, случайных свойств самой конструкции в линейной и нелинейной постановке.
- разработка на основе использования линейных и нелинейных кинетических уравнений повреждаемости и математического аппарата теории марковских процессов методов решения задач надежности при постепенных отказах с учетом стационарного и нестационарного широкополосного случайного нагружения и вероятностного описания свойств конструкции и материала.
- создание на основе разработанных методов программного обеспечения для ПЭВМ, которое может использоваться как составная часть автоматических систем проектирования различных машин и конструкций с учетом требований надежности.

2. РЕШЕНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ И НЕСТАЦИОНАРНОМ ОДНОРОДНОМ СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

2.1. Упругие детерминированные системы

Решается задача статистической динамики для детерминированных систем, находящихся под действием внешней нагрузки в виде векторного пространственно-временного случайного поля. Вектор интенсивностей поля внешних нагрузок $\mathbf{F}(r, t)$ предполагается стационарным по времени и однородным по пространственной координате r и задается математическим ожиданием $m_F = \langle \mathbf{F}(r, t) \rangle$ и корреляционным тензором

$$\mathbf{K}_F(r_1, t_1; r_2, t_2) = \langle \tilde{\mathbf{F}}(r_1, t_1) \tilde{\mathbf{F}}(r_2, t_2) \rangle = \mathbf{K}_F(\rho, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_F(\rho, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.1)$$

где $\tau = t_2 - t_1$; $\rho = r_2 - r_1$; $\langle \dots \rangle$ - оператор взятия математического ожидания; $\tilde{\mathbf{F}}(r, t) = \mathbf{F}(r, t) - m_F$; $\mathbf{S}_F(\rho, \omega)$ - временная спектральная плотность, обладающая свойством корреляционного тензора по пространственным координатам и спектральной плотности по переменной ω .

Одной из простейших моделей векторного поля случайных нагрузок $\mathbf{F}(r, t)$ является

$$\mathbf{F}(r, t) = F_1(t) \mathbf{F}_2(r), \quad (2.2)$$

где $F_1(t)$ - стационарная случайная функция времени, $\mathbf{F}_2(r)$ - векторная детерминированная функция координат. В этом случае

$$\mathbf{K}_F(r_1, r_2; \tau) = K_{F_1}(\tau) \mathbf{F}_2(r_1) \mathbf{F}_2(r_2), \quad (2.3)$$

где $K_{F_1}(\tau)$ - корреляционная функция случайного процесса $F_1(t)$. В частном случае, когда внешняя нагрузка зависит только от временной координаты $\mathbf{F}(r, t) = \mathbf{F}(t)$ и будет являться векторной случайной функцией, корреляционная функция задается математическим ожиданием и корреляционной (спектральной) матрицей.

После конечноэлементной дискретизации матричное дифференциальное уравнение, описывающее случайные колебания элемента конструкции, можно записать

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = X(t), \quad (2.4)$$

где M , C , K - соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости, которые содержат случайные параметры s_i , ($i = \overline{1, m}$); $X(t)$, $Y(t)$ - n - мерные векторы внешней узловой нагрузки и обобщенных узловых перемещений, компоненты которых представляют случайные функции времени.

Предполагается, что матрицу демпфирования C можно представить в виде линейной комбинации матриц M и K :

$$C = \beta_1 M + \beta_2 K, \quad (2.5)$$

где β_1, β_2 - коэффициенты соответственно внутреннего и внешнего трения.

В уравнении (2.4) коэффициенты матриц масс, жесткости, демпфирования содержат случайные параметры s_i , представляющие независимые случайные величины с заданными вероятностными характеристиками: математическим ожиданием m_i , дисперсией $\sigma_{s_i}^2$, плотностью вероятности $f_i(s_i)$. Указанные параметры s_i ($i = \overline{1, m}$) образуют вектор s и представляют инерционные, жесткостные, геометрические характеристики или физические характеристики материала рассматриваемого элемента конструкции.

Если на систему действует векторная распределенная нагрузка с вектором интенсивностей $F(r, t)$, компоненты которого представляют случайные стационарные однородные поля с заданными вероятностными характеристиками, то по этим нагрузкам в соответствии с общей теорией МКЭ [17, 53] можно построить вектор эквивалентных узловых нагрузок $X(t)$. Для этого рассмотрим i -й конечный элемент, на который действует равномерно распределенная поверхностная нагрузка $F(r, t)$ (r_i - координата центра тяжести элемента). В этом случае вектор эквивалентных узловых нагрузок для i -го элемента можно представить

$$\mathbf{X}_i(t) = \int_{\delta_i} \mathbf{B}_i^T(r) \mathbf{F}(r, t) dr, \quad (2.6)$$

где δ_i - площадь элемента; $\mathbf{B}_i(r)$ - матрица, связывающая вектор обобщенных перемещений в любой точке i -го элемента u_i с вектором обобщенных узловых перемещений \mathbf{Y}_i .

Поскольку предполагается, что интенсивность нагрузки $\mathbf{F}(r, t)$ в пределах i -го элемента постоянна, выражение (2.6) можно представить

$$\mathbf{X}_i(t) = \left(\int_{\delta_i} \mathbf{B}_i^T(r) dr \right) \mathbf{F}(r_i, t) = \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{F}(r_i, t), \quad \bar{\mathbf{B}}_i^T = \int_{\delta_i} \mathbf{B}_i^T(r) dr, \quad (2.7)$$

Полный вектор узловых нагрузок системы $\mathbf{X}(t)$ образуется из векторов $\mathbf{X}_i(t)$, определяемых по формуле (2.7), и может быть представлен в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A} \mathbf{F}(t), \quad (2.8)$$

где \mathbf{A} - матрица, образованная на основе интегрирования по формуле (2.7) и перехода от локальной к глобальной системе координат; $\mathbf{F}(t)$ - векторный случайный процесс, компоненты которого представляют значения соответствующих компонент векторного поля $\mathbf{F}(r, t)$ в центрах тяжести i -х элементов $r = r_i$. Таким образом, корреляционная матрица векторного случайного процесса $\mathbf{F}(t)$ определяется корреляционным тензором $\mathbf{K}_F(\rho, \tau)$, заданным в соответствии с формулой (2.1).

Предположим, что математическое ожидание поля внешних нагрузок равно нулю $m_F = 0$, тогда в соответствии с формулой (2.8) $m_X = 0$, и его корреляционная матрица может быть представлена

$$\mathbf{K}_X(t_1, t_2) = \mathbf{K}_X(\tau) = \langle \mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2) \rangle = \mathbf{A} \mathbf{K}_F(\rho, \tau) \mathbf{A}^T. \quad (2.9)$$

Полученная формула (2.9) позволяет по заданным характеристикам поля корреляционной нагрузки $\mathbf{F}(r, t)$ построить корреляционную матрицу обобщенных узловых нагрузок $\mathbf{X}(t)$, входящих в правую часть основного уравнения (2.2). Спектральная плотность вектора $\mathbf{X}(t)$ определяется как преобразование Фурье от корреляционной матрицы $\mathbf{K}_X(\tau)$

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \mathbf{A} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \mathbf{A}^T = \mathbf{A} S_F(\omega) \mathbf{A}^T. \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) позволяет определить обычные и взаимные спектральные плотности компонент вектора узловых нагрузок $\mathbf{X}(t)$ через временную спектральную плотность поля $\mathbf{F}(r, t)$.

Решение задачи статистической динамики для системы, описываемой уравнением (2.2), производится на основе разложения в ряд по собственным формам колебаний недемпфированной системы

$$\mathbf{Y}(t) = \Phi \mathbf{q}(t), \quad (2.11)$$

где $\mathbf{q}(t)$ - вектор обобщенных координат, компоненты которого представляют случайные функции; $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ - матрица собственных форм, столбцы которой Φ_k представляют k -ую нормированную собственную форму колебаний, которая получается из решения задачи о собственных значениях

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \Phi_k = 0, \quad (2.12)$$

ω_k - k -я собственная частота.

Подставляя (2.11) в уравнение (2.2) и домножая его на Φ^T , с учетом выше сделанных предположений получим систему отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат

$$\ddot{q}_k(t) + (\beta_1 \omega_k^2 + \beta_2) \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = (\Phi_k^T, \mathbf{X}(t)) = \chi_k(t), \quad (k = \overline{1, n}) \quad (2.13)$$

где n - число удерживаемых форм колебаний.

Для решения задачи статистической динамики в рамках корреляционной теории для системы (2.13) необходимо определить корреляционные функции (спектральные плотности) внешних воздействий $\chi_k(t)$ через аналогичные характеристики $\mathbf{X}(t)$. Используя определение (2.8) случайных функций $\chi_k(t)$, можно записать выражения для корреляционной матрицы и матрицы спектральных плотностей вектора $\chi(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\chi_k \chi_m}(\tau) &= \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ki} \Phi_{mj} \mathbf{K}_{X_i X_j}(\tau), \\ \mathbf{S}_{\chi_k \chi_m}(\omega) &= \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ki} \Phi_{mj} \mathbf{S}_{X_i X_j}(\omega), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где Φ_{ki} - элементы вектора Φ_k .

Используя метод спектральных представлений [9], можно записать выражение для элементов матрицы взаимных спектральных плотностей $q_k(t)$, ($k = \overline{1, n}$) в стационарном случае ($k, m = \overline{1, n}$)

$$\mathbf{S}_{q_k q_m}(\omega) = H_k(-i\omega) H_m(i\omega) \mathbf{S}_{\chi_k \chi_m}(\omega), \quad (2.15)$$

где $H_k(i\omega)$ - амплитудно-частотные характеристики системы (2.8), которые определяются по формулам

$$H_k(i\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 + 2i\varepsilon_k \omega - \omega^2}, \quad 2\varepsilon_k = \beta_1 \omega_k^2 + \beta_2. \quad (2.16)$$

С учетом (2.10) выражение для $\mathbf{S}_{q_k q_m}(\omega)$ будет иметь вид

$$\mathbf{S}_{q_k q_m}(\omega) = \frac{\mathbf{S}_{\chi_k \chi_m}(\omega)}{(\omega_k^2 - 2i\varepsilon_k \omega - \omega^2)(\omega_m^2 - 2i\varepsilon_m \omega - \omega^2)}. \quad (2.17)$$

По найденным спектральным плотностям можно определить корреляционную матрицу

$$\mathbf{K}_{q_k q_m}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{S}_{\chi_k \chi_m}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_k^2 - 2i\varepsilon_k \omega - \omega^2)(\omega_m^2 - 2i\varepsilon_m \omega - \omega^2)}. \quad (2.18)$$

Для реальных машиностроительных конструкций часто встречается ситуация, когда поле внешних нагрузок является широкополосным, демпфирование является малым и собственные частоты являются разнесенными. В этом случае [9] можно пренебречь взаимной корреляцией между обобщенными координатами $q_k(t)$, ($k = \overline{1, n}$) и считать спектральные плотности внешних воздействий $\chi_k(t)$ постоянными в пределах полосы пропускания системы, описываемой уравнением (2.13). С учетом сделанных предположений

$$S_{q_k}(\omega) = \frac{S_{z_k}(\omega_k)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon_k^2\omega^2}; \quad (2.19)$$

$$K_{q_k}(\tau) = \sigma_{q_k}^2 e^{-\varepsilon_k|\tau|} \left(\cos \beta_k \tau + \frac{\varepsilon_k}{\beta_k} \sin \beta_k |\tau| \right); \quad (2.20)$$

$$\sigma_{q_k}^2 = \frac{\pi S_{z_k}(\omega_k)}{2\varepsilon_k \omega_k^2}; \quad \beta_k = \sqrt{\omega_k^2 - \varepsilon_k^2}.$$

В выражении (2.20) $\sigma_{q_k}^2$ - дисперсия обобщенной координаты $q_k(t)$. Если вышеуказанные условия не выполняются, то интегрирование по формуле (2.18) можно выполнить численно. Формулы (2.20) описывают вероятностные характеристики узкополосных случайных процессов.

Для определения корреляционных функций и спектральных плотностей обобщенных узловых перемещений и напряжений, которые можно рассматривать как безынерционные преобразования обобщенных координат $q(t)$, необходимо воспользоваться основными соотношениями МКЭ. Так, корреляционную матрицу узловых перемещений $\mathbf{Y}(t)$ на основе соотношения (2.11) можно представить

$$\mathbf{K}_Y(\tau) = \langle \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t+\tau) \rangle = \mathbf{\Phi} \langle q(t)q^T(t+\tau) \rangle \mathbf{\Phi}^T = \mathbf{\Phi} \mathbf{K}_q(\tau) \mathbf{\Phi}^T. \quad (2.21)$$

Корреляционная матрица напряжений может быть получена, исходя из линейной зависимости между векторами напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и перемещений $\mathbf{Y}(t)$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{G}\mathbf{Y}(t). \quad (2.22)$$

Проводя выкладки, аналогичные при определении корреляционной матрицы перемещений (2.21), получим

$$\mathbf{K}_\sigma(\tau) = \mathbf{G}\mathbf{K}_Y(\tau)\mathbf{G}^T. \quad (2.23)$$

Подставляя в (2.23) выражение для корреляционной матрицы (2.21), получим формулу для корреляционной матрицы напряжений через корреляционную матрицу обобщенных координат

$$\mathbf{K}_\sigma(t) = (\mathbf{G}\mathbf{\Phi})\mathbf{K}_q(\tau)(\mathbf{G}\mathbf{\Phi})^T \quad (2.24)$$

или

$$\mathbf{K}_\sigma(t) = \mathbf{L}\mathbf{K}_q(\tau)\mathbf{L}^T, \quad \mathbf{L} = \mathbf{G}\Phi. \quad (2.25)$$

В случае, когда взаимной корреляцией обобщенных координат $q_k(t)$ можно пренебречь, выражения для элементов корреляционной матрицы $\mathbf{K}_Y(\tau)$ и $\mathbf{K}_\sigma(\tau)$, определяемых по формулам (2.21) и (2.25), можно представить

$$\mathbf{K}_{\sigma,\sigma_j}(\tau) = \sum_m l_{im} l_{jm} \mathbf{K}_{q_m}(\tau), \quad (2.26)$$

где l_{im} - элементы матрицы \mathbf{L} в выражении (2.25). При выполнении условий, сформулированных при получении формул (2.19-20), формула (2.26) будет иметь вид

$$\mathbf{K}_{\sigma,\sigma_j}(\tau) = \sum_m l_{im} l_{jm} \sigma_{q_m}^2 e^{-\varepsilon_m |\tau|} \left(\cos \beta_m \tau + \frac{\varepsilon_m}{\beta_m} \sin \beta_m |\tau| \right); \quad (2.27)$$

$$\sigma_{q_m}^2 = \frac{\pi S_{x_m}(\omega_m)}{2\varepsilon_m \omega_m^2}. \quad (2.28)$$

Соответствующее (2.26) выражение для элементов матрицы спектральных плотностей напряжений (перемещений) можно представить

$$S_{\sigma,\sigma_j}(\omega) = \sum_m l_{im} l_{jm} \frac{S_{x_m}(\omega_m)}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon_m^2 \omega^2}. \quad (2.29)$$

2.2. Упругие детерминированные системы при нестационарном поле воздействий

Рассматривается модель внешней нагрузки типа (2.2), представляющая нестационарное однородное случайное поле, у которого случайная функция $F_1(t)$ может быть представлена в виде

$$F_1(t) = B(t)\xi(t), \quad (2.30)$$

где $B(t)$ - заданная детерминированная функция; $\xi(t)$ - стационарная случайная функция с известными вероятностными характеристиками.

В соответствии с проведенными выше выкладками можно определить вектор узловых нагрузок, а компоненты вектора обобщенных усилий $\chi_k(t)$ в уравнениях (2.13) будут иметь вид

$$\chi_k(t) = B(t)\xi(t)(\Phi_k^T, \mathbf{A}) = B(t)\xi(t)Q_k; \quad Q_k = (\Phi_k^T, \mathbf{A}) = const. \quad (2.31)$$

При решении задачи статистической динамики для системы (2.13) рассмотрим два возможных варианта изменения функции $F_1(t)$. Для первого детерминированная функция $B(t)$ является медленно меняющейся по сравнению с $\xi(t)$. В этом случае для решения поставленной задачи эффективно может быть применен квазистатистический метод [61] в сочетании с методом неканонического разложения [26]. Исходя из этих методов, стационарная составляющая $\xi(t)$ внешней нагрузки $\chi_k(t)$ в формуле (2.31) представляется в виде нелинейной функции трех случайных величин

$$\xi(t) = m_\xi + \alpha \cos(\lambda t + \varphi), \quad (2.32)$$

где m_ξ - математическое ожидание $\xi(t)$, α , λ , φ - независимые случайные величины. Представление случайной функции (2.32) позволяет добиться совпадения моментов первого, второго порядков и одномерной плотности исходного процесса и рассматриваемой модели, если плотности вероятности случайных величин α , λ , φ определяются из соотношений [26]

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^\infty \Theta_z(p) I_0(p\alpha) p dp; \quad f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\lambda\tau) R_\xi(\tau) d\tau; \\ f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2.33)$$

В выражениях (2.33) $R_\xi(\tau)$ - нормированная корреляционная функция $\xi(t)$; $\Theta_z(p)$ - преобразование Ганкеля от плотности вероятности $f(\alpha)$; I_0 - функция Бесселя нулевого порядка.

Используя формулы (2.31-32), правые части системы дифференциальных уравнений (2.13) могут быть представлены

$$\chi_k(t) = Q_k B(t) m_\xi + Q_k B(t) \alpha \cos(\lambda t + \varphi). \quad (2.34)$$

В соответствии с квазистатическим методом и представлением обобщенных сил в виде (2.13) можно записать

$$q_k(t) = m_{q_k}(t) + D_k B(t) \cos(\lambda t + \varphi - \theta_k), \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.35)$$

где

$$D_k = \frac{Q_k \alpha}{\sqrt{(\omega_k^2 - \lambda^2)^2 + 4\varepsilon_k^2 \lambda^2}}; \quad \theta_k = \text{arctg} \frac{2\varepsilon_k \lambda}{\omega_k^2 - \lambda^2}, \quad (2.36)$$

$m_{q_k}(t)$ - математическое ожидание $q_k(t)$, которое определяется из решения детерминированной задачи о вынужденных колебаниях для системы (2.13).

Используя представление (2.35), элементы корреляционной матрицы вектора $\mathbf{q}(t)$ можно представить

$$K_{q_k q_m}(t_1, t_2) = \langle \mathbf{q}_k(t_1) \mathbf{q}_m(t_2) \rangle = B(t_1) B(t_2) \langle D_k D_m \cos(\lambda t_1 + \varphi - \theta_k) \cos(\lambda t_2 + \varphi - \theta_m) \rangle. \quad (2.37)$$

Подставляя выражение (2.36) в формулу (2.37) и преобразовывая произведение косинусов, получим

$$K_{q_k q_m}(t_1, t_2) = m_{\alpha^2} B(t_1) B(t_2) Q_k Q_m \left\langle \frac{\cos(\lambda(t_2 - t_1) + \theta_k - \theta_m)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \lambda^2)^2 + 4\varepsilon_k^2 \lambda^2} \sqrt{(\omega_m^2 - \lambda^2)^2 + 4\varepsilon_m^2 \lambda^2}} \right\rangle = \quad (2.38)$$

$$= m_{\alpha^2} B(t_1) B(t_2) Q_k Q_m \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda) \cos(\lambda \tau + \theta_k - \theta_m) d\lambda}{\sqrt{(\omega_k^2 - \lambda^2)^2 + 4\varepsilon_k^2 \lambda^2} \sqrt{(\omega_m^2 - \lambda^2)^2 + 4\varepsilon_m^2 \lambda^2}},$$

где $f(\lambda)$ - плотность вероятности случайной величины λ ; m_{α^2} - математическое ожидание α^2 ; $\tau = t_2 - t_1$.

В случае пренебрежения взаимной корреляцией обобщенных координат $q_k(t)$, ($k = \overline{1, n}$) выражение (2.38) можно представить

$$K_{q_k q_m}(t_1, t_2) = m_{\alpha^2} B(t_1) B(t_2) Q_k^2 \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda) \cos \lambda \tau d\lambda}{(\omega_k^2 - \lambda^2)^2 + 4\varepsilon_k^2 \lambda^2}. \quad (2.39)$$

Корреляционная матрица напряжений (перемещений) определяется аналогично как и в предыдущем разделе по формуле (2.25).

Рассмотрим второй (более общий) случай, когда в выражении (2.30) скорости изменения функций $B(t)$ и $\xi(t)$ соизмеримы. Для решения задачи статистической динамики в этом случае применяется метод импульсных переходных функций, в соответствии с которым полное решение системы (2.13) при нулевых начальных условиях и нулевых математических ожиданиях компонент $x_k(t)$, описываемых выражением (2.31), можно представить [9]

$$q_k(t) = \frac{Q_k}{\beta_k} \int_0^t B(\tau) \xi(\tau) \exp\{-\varepsilon_k(t-\tau)\} \sin \beta_k(t-\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

С учетом данного представления элементы корреляционной матрицы вектора обобщенных координат $q(t)$ будут иметь вид

$$K_{q_k q_m}(t_1, t_2) = \frac{Q_k Q_m}{\beta_k \beta_m} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} B(\tau_1) B(\tau_2) \exp\{-\varepsilon_k(t_1 - \tau_1)\} \exp\{-\varepsilon_m(t_2 - \tau_2)\} \times \\ \times \sin \beta_k(t_1 - \tau_1) \sin \beta_m(t_2 - \tau_2) (\xi(t_1) \xi(t_2)) d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E_k(t_1, \tau_1) E_m(t_2, \tau_2) K_\xi(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2; \quad (2.41)$$

$$E_k(t_1, \tau_1) = \frac{Q_k}{\beta_k} B(\tau_1) \exp\{-\varepsilon_k(t_1 - \tau_1)\} \sin \beta_k(t_1 - \tau_1);$$

$$E_m(t_2, \tau_2) = \frac{Q_m}{\beta_m} B(\tau_2) \exp\{-\varepsilon_m(t_2 - \tau_2)\} \sin \beta_m(t_2 - \tau_2).$$

Двойные интегралы в выражении (2.41) могут быть вычислены аналитически для конкретных выражений функций $B(t)$ [30]. Дальнейшие вычисления корреляционных матриц напряжений (перемещений) производятся по формулам типа (2.25).

2.3. Упругие системы со случайными параметрами

Рассматривается решение задачи статистической динамики систем, описываемых уравнением (2.4), в котором коэффициенты матриц масс, жесткости и демпфирования содержат случайные параметры s_i , представ-

ляющие независимые случайные величины с заданными вероятностными характеристиками: m_{s_i} , дисперсией $\sigma_{s_i}^2$, плотностью вероятности $f(s_i)$. Указанные параметры s_i , ($i = \overline{1, m}$) образуют вектор \mathbf{S} и представляют инерционные, жесткостные, геометрические характеристики или характеристики материала рассматриваемого ЭК. Решение данной задачи производится на основе вышеизложенного подхода к решению задачи статистической динамики для случая детерминированных параметров системы с использованием математического аппарата теории чувствительности [70]. Поскольку параметры системы являются случайными величинами, то собственные частоты и формы также являются случайными. Для реальных конструкций разброс параметров s_i является малым, поэтому собственные частоты системы, зависящие от вектора \mathbf{S} , можно разложить в ряд Тейлора в окрестности математического ожидания m_s с удержанием только линейных слагаемых

$$\omega_k(s) = \omega_k(m_s) + \sum_{i=1}^m \left. \frac{\partial \omega_k}{\partial s_i} \right|_{s_i=m_{s_i}} (s_i - m_{s_i}), \quad (k = \overline{1, n}). \quad (2.42)$$

В случае достаточно большого m или при условии, что вектор \mathbf{S} имеет нормальную плотность вероятности и некоррелированные компоненты, $\omega_k(s)$ также будут иметь нормальные плотности вероятности. Математические ожидания m_{ω_k} и дисперсии $\sigma_{\omega_k}^2$ определяются из соотношений

$$m_{\omega_k} = \omega_k(m_s); \quad \sigma_{\omega_k}^2 = \sum_{i=1}^m \left(\left. \frac{\partial \omega_k}{\partial s_i} \right|_{s_i=m_{s_i}} \right)^2 \sigma_{s_i}^2; \quad (k = \overline{1, n}). \quad (2.43)$$

Математическое ожидание m_{ω_k} определяется из решения задачи о собственных значениях (2.12) при детерминированных параметрах системы $S = m_s$. Для вычисления дисперсий $\sigma_{\omega_k}^2$ применяется теория чувствительности [67], в соответствии с которой для определения производных $\frac{\partial \omega_k}{\partial s_i}$, входящих в выражение (2.43), необходимо основное уравнение для решения задачи о собственных значениях (2.12) продифференцировать по параметрам s_i и полученный результат скалярно умножить на вектор собственных

форм Φ_k . При этом предполагается, что формы колебаний Φ_k остаются неизменными для различных значений вектора S . Учитывая условие нормировки $(M\Phi_k, \Phi_k) = 1$ и разрешая данное уравнение относительно производной $\frac{\partial \omega_k}{\partial s_i}$, получим

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial s_i} = \frac{1}{2\omega_k} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \Phi_k, \Phi_k \right) - \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s_i} \Phi_k, \Phi_k \right), \quad (k = \overline{1, n}), \quad (i = \overline{1, m}). \quad (2.44)$$

Правая часть в выражении (2.44) вычисляется при $s_i = m_{s_i}$. Определение производных от матриц жесткости и масс производится с учетом свойства аддитивности, т.е. вычисление производных по параметрам s_i от матриц жесткости и масс конечных элементов выполняется отдельно.

Решение задачи статистической динамики для систем со случайными параметрами выполняется в два этапа. На первом этапе вычисляется условная нормированная корреляционная функция обобщенных координат $R_{q_k}(\tau / \omega_k)$, и дисперсия $\sigma_{q_k}^2(\omega_k)$, при условии, что собственные частоты колебаний ω_k ($k = \overline{1, n}$) являются фиксированными. На втором этапе вычисляются безусловные характеристики

$$R_{q_k}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{q_k}(\tau / \omega_k) f(\omega_k) d\omega_k; \quad \sigma_{q_k}^2 = \int_0^{\infty} \sigma_{q_k}^2(\omega_k) f(\omega_k) d\omega_k; \quad (2.45)$$

Для случая широкополосного внешнего воздействия и малости затухания в системе ($\varepsilon_k \ll \omega_k$) вычисление $R_{q_k}(\tau / \omega_k)$ и $\sigma_{q_k}^2(\omega_k)$, можно произвести по формулам (2.20-21). Предполагая нормальность плотности вероятности $f(\omega_k)$, выражения (2.45) для безусловных характеристик можно записать

$$\begin{aligned} R_{q_k}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\omega_k}} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon_k|\tau|} \left(\cos \omega_k \tau + \frac{\varepsilon_k}{\omega_k} \sin \omega_k \tau \right) \exp \left(-\frac{(\omega_k - m_{\omega_k})^2}{2\sigma_{\omega_k}^2} \right) d\omega_k = \\ &= e^{-\varepsilon_k|\tau|} \exp \left(-\frac{\tau^2 \sigma_{\omega_k}^2}{2} \right) \left(\cos \omega_k \tau + \frac{\varepsilon_k}{\omega_k} \sin \omega_k \tau \right); \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\sigma_{q_k}^2 = \frac{S_{\varepsilon_k}(m_{\omega_k})}{2\varepsilon_k \sqrt{2\pi}\sigma_{\omega_k}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega_k^2} \exp\left(-\frac{(\omega_k - m_{\omega_k})^2}{2\sigma_{\omega_k}^2}\right) d\omega_k; \quad (2.47)$$

$(k = \overline{1, n})$

Интеграл в формуле (2.47) берется численно. Спектральная плотность обобщенной координаты $S_{q_k}(\omega)$ определяется как обратное преобразование Фурье от корреляционной функции.

$$S_{q_k}(\omega) = 4 \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon_k|\tau|} \exp\left(-\frac{\tau^2 \sigma_{\omega_k}^2}{2}\right) \left(\cos m_{\omega_k} \tau + \frac{\varepsilon_k}{\omega_k} \sin m_{\omega_k} \tau\right) \cos \omega \tau d\tau. \quad (2.48)$$

По полученным вероятностным характеристикам вектора обобщенных координат $\mathbf{q}(t)$ можно найти вероятностные характеристики обобщенных перемещений и напряжений аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе.

2.4. Уруго-пластические системы

На основе результатов, полученных в разделе 2.1, рассматривается решение задачи статистической динамики ЭК с учетом возникновения локальных уруго-пластических деформаций и случайного динамического нагружения в виде пространственно-временного случайного поля. Предполагается, что:

- 1) пластические деформации носят локальный характер, поэтому собственные частоты и формы колебаний при уруго-пластическом деформировании мало отличаются от аналогичных характеристик уругих систем;
- 2) материал конструкции является циклически стабильным, и диаграмма циклического деформирования имеет вид, изображенный на рис. 2.1;
- 3) возбуждается только одна форма колебаний.

Для записи уравнений колебаний ЭК с учетом уруго-пластических деформаций применяется МКЭ, в котором используются физические уравнения, построенные на основе теории малых уруго-пластических деформаций [52] с нелинейной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций. В дальнейшем для описания этой нелинейной зависи-

мости применяется кусочно-линейная аппроксимация. Используя данные предположения, матричное дифференциальное уравнение системы после конечноэлементной дискретизации описывается уравнением, аналогичным (2.4), в котором матрица жесткости $q(t)$ будет состоять из элементов, нелинейно зависящих от вектора обобщенных узловых перемещений $Y(t)$ и его производной $\dot{Y}(t)$. Кроме этого, вектор узловых нагрузок будет содержать дополнительную составляющую Φ_k , которая также будет нелинейно зависеть от $Y(t)$ и $\dot{Y}(t)$

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + K(Y, \dot{Y}, t)Y(t) = X(t) + X^*(Y, \dot{Y}, t). \quad (2.49)$$

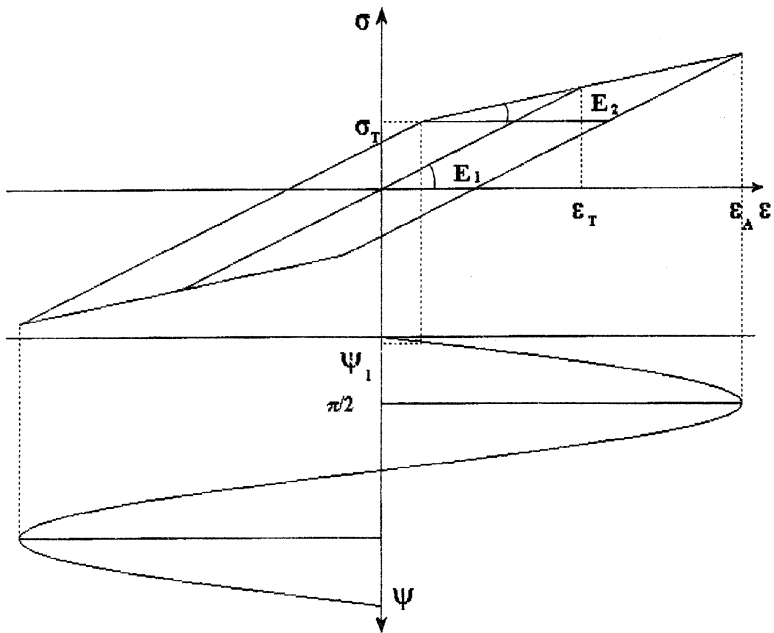


Рис. 2.1.

Представляя матрицу жесткости \mathbf{K} в виде $\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_L$, где \mathbf{K}_L - матрица жесткости при упругом деформировании конструкции, уравнение (2.49) можно записать в виде

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}_L \mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) - \left[\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}, t) - \mathbf{K}_L \right] \mathbf{Y}(t) + \mathbf{X}^*(t). \quad (2.50)$$

Применяя процедуру, изложенную в разделе 2.1, и предполагая возбужденность одной формы колебаний Φ_e , т.е. $\mathbf{Y}(t) = \Phi_e q(t)$, приходим к одному нелинейному уравнению относительно соответствующей данной форме обобщенной координаты $q(t)$

$$\ddot{q}(t) + 2\epsilon\Omega \dot{q}(t) + \Omega^2 q(t) = \Phi_B^T \left[\mathbf{X}(t) - (\mathbf{K} - \mathbf{K}_L) \Phi_B q(t) + \mathbf{X}^*(t) \right], \quad (2.51)$$

где Ω - собственная частота, соответствующая возбуждаемому вектору собственных форм Φ_e .

Введем следующие обозначения для стационарного широкополосного процесса $\chi(t)$, пропорциональному малому параметру μ

$$\chi(t) = \Phi_B^T \mathbf{X}(t), \quad (2.52)$$

и функции $h(q, \dot{q}, t)$, имеющей порядок малости μ^2

$$h(q, \dot{q}, t) = 2\epsilon\Omega \dot{q} + \Phi_B^T \left\{ \left[\mathbf{K}(q, \dot{q}, t) - \mathbf{K}_L \right] \Phi_B q - \mathbf{X}^* \right\}, \quad (2.53)$$

тогда уравнение (2.51) можно записать

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = -h(q, \dot{q}, t) + \chi(t). \quad (2.54)$$

Полученное уравнение (2.54) для возбуждаемой обобщенной координаты $q(t)$ представляет нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение с широкополосным случайным внешним воздействием $\chi(t)$, корреляционная функция $K_\chi(\tau)$ и спектральная плотность $S_\chi(\Omega)$ которого определяется по известным вероятностным характеристикам вектора узловых нагрузок $\mathbf{X}(t)$ в соответствии с соотношением (2.52). Решение задачи статистической динамики для такого уравнения осуществляется на основе

принципа усреднения Крылова-Боголюбова в сочетании с методами теории марковских процессов [24, 44]. Для этого в уравнении (2.54) необходимо перейти к новым «медленным» переменным - амплитуде $\lambda(t)$ и фазе $\varphi(t)$ в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} q(t) &= \lambda(t) \sin(\Omega t + \varphi(t)) = \lambda(t) \sin \phi(t) \\ \dot{q}(t) &= \Omega \dot{\lambda}(t) \cos(\Omega t + \varphi(t)) = \Omega \dot{\lambda}(t) \cos \phi(t); \\ \phi(t) &= \Omega t + \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Используя замену переменных (2.55) и уравнение (2.54), можно получить систему двух уравнений первого порядка относительно «медленных» переменных $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ [24]

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \Omega^{-1} \cos \phi [-h(\lambda, \varphi, t) + \chi(t)] \\ \dot{\varphi}(t) &= -(\Omega \lambda)^{-1} \sin \phi [-h(\lambda, \varphi, t) + \chi(t)] \end{aligned} \quad (2.56)$$

Введя обозначения $g_1(\lambda, \varphi, t) = \Omega^{-1} \cos \phi$ и $g_2(\lambda, \varphi, t) = -(\Omega \lambda)^{-1} \sin \phi$, выражения (2.56) запишем в виде

$$\begin{aligned} v_1(\lambda, \varphi, t) &= -g_1(\lambda, \varphi, t) h(\lambda, \varphi, t) \\ v_2(\lambda, \varphi, t) &= -g_2(\lambda, \varphi, t) h(\lambda, \varphi, t) \end{aligned} \quad (2.57)$$

В силу принятых предположений о порядке величин, входящих в правую часть, систему (2.56) можно представить в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= v_1(\lambda, \varphi, t) + g_1(\lambda, \varphi, t) \chi(t) \\ \dot{\varphi}(t) &= v_2(\lambda, \varphi, t) + g_2(\lambda, \varphi, t) \chi(t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

При стремлении малого параметра μ к нулю $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ можно рассматривать как двумерный марковский процесс с коэффициентами сноса A_i и диффузии B_{ii} [24]

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T v_i(\lambda, \varphi, t) dt + \int_0^T dt \int_0^\infty \frac{\partial g_i(\lambda, \varphi, t)}{\partial u_i} g_i(\lambda, \varphi, t+s) K_\chi(s) ds \right] \\ B_{ii} &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T dt \int_0^\infty g_i(\lambda, \varphi, t) g_i(\lambda, \varphi, s) K_\chi(s-t) ds \right] \\ B_{12} &= B_{21} = 0; u_1 = \varphi, u_2 = \lambda; T = 2\pi / \Omega \end{aligned} \quad (2.59)$$

Проводя вычисления по формулам (2.57) и (2.59), получим

$$\begin{aligned}
 A_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_1(\lambda, \phi) d\phi + \frac{S_0}{4\Omega^2 \lambda} = -\frac{1}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} h(\lambda, \phi) \cos \phi d\phi + \frac{S_0}{4\Omega^2 \lambda} \\
 A_2(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_2(\lambda, \phi) d\phi = \frac{1}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} h(\lambda, \phi) \sin \phi d\phi \\
 B_{11} &= \frac{S_0}{2\Omega^2}, B_{22} = \frac{S_0}{2\Omega^2 \lambda^2}
 \end{aligned} \quad (2.60)$$

где $S_0 = 2\pi S_x(\Omega)$ - интенсивность приведенного белого шума. По полученным коэффициентам интенсивности A_i, B_{ii} можно составить уравнение ФПК для переходной плотности вероятности $f(\lambda, \varphi, t)$, описывающей двумерный марковский процесс $[\lambda(t), \varphi(t)]$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [A_1(\lambda) f] - \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_2(\lambda) f] + \frac{B_{11}}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [B_{22}(\lambda) f]. \quad (2.61)$$

Поскольку в полученном уравнении коэффициенты интенсивности зависят только от амплитуды λ , проинтегрировав его по переменной φ в пределах $[0, 2\pi]$, можно получить уравнение ФПК для стационарной одномерной переходной плотности амплитуды $\lambda(t)$ для областей, находящихся в условиях пластического деформирования

$$\frac{d}{d\lambda} [A_1(\lambda) f(\lambda)] = \frac{B_{11}}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}. \quad (2.62)$$

Подставляя выражения (2.60) для A_1, B_{11} в (2.62), получим

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \left[-\frac{1}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} h(\lambda, \phi) \cos \phi d\phi + \frac{S_0}{4\Omega^2 \lambda} \right] f(\lambda) \right\} = -\frac{S_0}{4\Omega^2} \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda^2}. \quad (2.63)$$

При фиксированной форме колебаний пластические деформации в конструкции наступают при достижении амплитудой $\lambda(t)$ определенного значения λ^* , которое определяется из условия достижения максимальной интенсивности напряжений для рассматриваемой системы предела текучести. На интервале изменения $\lambda(t)$ в пределах $[0, \lambda^*]$ система деформируется упруго. В этом случае коэффициент интенсивности $A_1(\lambda)$ в уравнении (2.62) для разных интервалов можно представить в виде

$$A_1(\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} 2\varepsilon\lambda\Omega^2 \cos^2 \phi d\phi = \varepsilon\lambda\Omega, & 0 \leq \lambda(t) < \lambda^* \\ -\frac{1}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} h(\lambda, \phi) \cos \phi d\phi + \frac{S_0}{4\Omega^2 \lambda}, & \lambda \geq \lambda^* \end{cases} \quad (2.64)$$

Решение уравнения (2.62) с учетом представления $A_1(\lambda)$ по формулам (2.64) можно записать

$$f(\lambda) = \begin{cases} C_1 \lambda \exp \left[-\frac{4\Omega^2}{S_0} \int_0^\lambda \varepsilon \lambda d\lambda \right], & 0 \leq \lambda(t) < \lambda^* \\ C_2 \lambda \exp \left[-\frac{4\Omega^2}{S_0} \int_0^\lambda \int_0^{2\pi} h(\lambda, \phi) \cos \phi d\phi d\lambda \right], & \lambda \geq \lambda^* \end{cases} \quad (2.65)$$

Подставляя (2.53) в (2.65) и выполняя интегрирование по переменной λ , получим

$$f(\lambda) = \begin{cases} C_1 \lambda \exp \left[-\frac{2\Omega^2}{S_0} \varepsilon \lambda^2 \right], \\ C_2 \lambda \exp \left[-\frac{2\Omega^2}{S_0} \varepsilon \lambda^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \int_0^\pi \Phi_B^T [K(\lambda, \phi) \Phi_B \lambda \sin \phi - X^*(\lambda, \phi)] \cos \phi d\phi d\lambda \right], \end{cases} \quad (2.66)$$

с аналогичными пределами изменения $\lambda(t)$.

В выражении (2.66) в константу C_2 входит значение интеграла в нижнем пределе $\lambda = \lambda^*$, а сами константы C_1 и C_2 определяются из условий сопряжения решений (2.66) в точке $\lambda = \lambda^*$ и нормировки плотности вероятности

$$C_1 \lambda^* \exp \left[-\frac{4\Omega^2}{S_0} \int_0^{\lambda^*} \varepsilon \lambda d\lambda \right] = C_2 \lambda^* \quad (2.67)$$

Из выражения (2.57) следует

$$C_1 \exp \left[-\frac{4\Omega^2}{S_0} \varepsilon \lambda^2 \right] = C_2 \quad (2.68)$$

Постоянная C_1 определяется из условия

$$\int_0^\infty f(\lambda) d\lambda = 1. \quad (2.69)$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ПОСТЕПЕННЫХ ОТКАЗАХ

В настоящее время для ЭК при циклическом нагружении и различных физических моделях постепенных отказов имеется хорошо разработанный феноменологический кинетический подход для описания разнообразных механизмов накопления повреждений с учетом свойств материала и характера напряженного состояния. Данный подход базируется на использовании кинетических уравнений повреждений (КУП), являющихся, как правило, кумулятивными и получающихся в результате экспериментальных исследований при простом гармоническом нагружении с использованием той или иной гипотезы накопления повреждений. Необходимо отметить, что для многих КУП при детерминированном нагружении параметры, входящие в эти кинетические уравнения, имеют значительный статистический разброс, что приводит к необходимости их вероятностного описания. В силу этого естественным является распространение данного кинетического подхода к описанию меры различных повреждений для решения задачи надежности при широкополосном случайном нагружении, которое является весьма характерным для широкого класса ЭК. Для систем с малым затуханием такое нагружение приводит к тому, что их параметры НДС являются также широкополосными случайными процессами, представляющими суперпозицию узкополосных процессов с несущими частотами, равными резонансным. Для применения КУП, полученных при детерминированном нагружении, к системам при случайном нагружении необходимо привести широкополосный случайный процесс к эквивалентному по повреждающему воздействию квазигармоническому (узкополосному).

Математическая структура КУП такова, что они в сочетании с уравнениями фильтра, с помощью которых можно представить любой случайный процесс как результат прохождения нормального белого шума через заданную систему (фильтр), позволяют рассматривать меры повреждений в определенных точках ЭК как компоненты многомерного марковского процесса. Такой подход дает возможность определить вероятностные характеристики меры повреждений, а по ним получать основные показатели надежности, путем решения уравнений ФПК. В данной главе разработан

подход к прогнозированию надежности ЭК при случайном широкополосном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов.

3.1. Описание кинетических уравнений для меры повреждений

Постепенные отказы, возникающие в ЭК, обусловлены необратимыми явлениями, которые неизбежно возникают при их эксплуатации в результате усталости, износа, накопления пластических деформаций, коррозии, эрозии и т.д. Все эти явления можно описать в рамках единой полуэмпирической теории, связывающей скорость накопления повреждений с различными факторами, характеризующими условия нагружения, состояние окружающей среды, способность материала конструкции сопротивляться различным типам воздействий. В настоящее время существует большое количество моделей, применяемых для описания процесса накопления повреждений, однако к числу наиболее распространенных можно отнести модели, которые описываются при помощи кинетических уравнений [10, 47]. Так, например, с помощью таких уравнений при усталостном разрушении можно описать две основные стадии разрушения – стадию рассеянных повреждений и стадию развития макроскопических трещин. Для полного описания процесса разрушения необходимо располагать двумя различными уравнениями повреждений, одно из которых относится к первой стадии рассеянных повреждений, второе – ко второй стадии локальных повреждений. Кроме того, необходимо еще установить условия завершения первой и начала второй стадии, оканчивающейся полным разрушением конструкции при достижении трещинами их критических размеров. Однако в подавляющем большинстве случаев ресурс работы оценивают на основе рассмотрения только одной из названных стадий [10].

При постепенных отказах в качестве компонент вектора параметров работоспособности $z(t)$ удобно взять меры повреждений в заданных точках конструкции, соответствующие различным моделям постепенных отказов. Причем, каждая мера повреждений $z(t)$, как правило нормируется $0 \leq z(t) \leq 1$. В начальный момент времени $z(0) = 0$, а в момент разрушения

$t = t_*$, $z(t_*) = 1$. КУП, описывающее процесс накопления повреждений при постепенных отказах механического происхождения, в самом общем виде можно представить [5]

$$dz(t)/dt = F[z(t), \lambda(t), R(t), C(t)], \quad (3.1)$$

где $z(t)$ - мера повреждений; $F[\cdot]$ - детерминированная неотрицательная для кумулятивных моделей отказов скалярная линейная или нелинейная функция; $\lambda(t)$ - амплитудное значение параметра НДС при простом гармоническом нагружении; $R(t)$ - вектор параметров базовых зависимостей; $C(t)$ - вектор параметров, характеризующих влияние внешней среды.

Кинетические уравнения (3.1) можно классифицировать в зависимости от заложенной в них модели: линейной, нелинейной, автомодельной и т.д. [10]

Например, линейное КУП для много- и малоциклового усталости, основанное на правиле Пальмгрена-Майнера, можно представить [5, 33]

$$dz/dt = F[\lambda] = C(\lambda)\lambda^r, \quad (3.2)$$

где λ - амплитуда деформаций или напряжений, C и r - кусочно-постоянные функции.

Несмотря на огромную популярность уравнений типа (3.2), они имеют и ряд недостатков, связанных с большими погрешностями решения задач надежности для определенных режимов нагружения. Одним из путей преодоления этого недостатка является использование скорректированной линейной гипотезы суммирования усталостных повреждений [33, 34], а также автомодельной гипотезы накопления повреждений типа [10, 47]

$$dz/dt = F_1[\lambda] \cdot F_2[z]. \quad (3.3)$$

По существу данная модель приводит к нелинейному закону суммирования повреждений, для которого в общем случае в правой части КУП не удается разделить переменные λ и z [10, 12]

$$dz/dt = F[\lambda, z]. \quad (3.4)$$

В основе уравнений типа (3.4) лежат различные нелинейные модели накопления повреждений: Кортена-Долана, Фрейденталю, Серенсена-Козлова,

Болотина, Райхера [37, 38]. В работах [32, 80] дан обзор различных нелинейных моделей, однако большинство из них можно описать уравнениями Болотина [7]. В частности, им было предложено следующее уравнение, описывающее накопление усталостных повреждений [13]

$$dz / dt = [\rho(\lambda) / N(\lambda)] z^{[\rho(\lambda)-1] / \rho(\lambda)}, \quad (3.5)$$

где $\rho(\lambda)$ - не возрастающая функция амплитуды напряжений λ , $\rho(\lambda) \geq 1$.

Учитывая непрерывную тенденцию современного машиностроения к понижению запасов прочности и повышению эксплуатационной надежности, наряду с обеспечением сопротивления ЭК упругим деформациям важное значение приобретает анализ и обоснование сопротивления неупругим (упруго-пластическим) деформациям. При таких условиях деформирования образование предельных состояний по возникновению трещин или по окончательному разрушению оказывается возможным при числе циклов нагружения, измеряемых сотнями и тысячами. В этом случае расчет циклической несущей способности конструкций основывается на деформационных критериях сопротивления малоциклового разрушению [42].

Для случая циклического деформирования КУП деформационного типа можно строить по аналогии с силовыми уравнениями [47]

$$dz / dt = F[\varepsilon, z]. \quad (3.6)$$

В простейшем случае

$$dz / dt = F[\varepsilon] = C(\varepsilon) \varepsilon^{r(\varepsilon)}, \quad (3.7)$$

где C и r - кусочно-постоянные функции амплитуды деформаций ε .

При расчете конструкций в области много- и малоциклового усталости экспериментально получаемые базовые зависимости (кривые усталости), как правило, предполагаются неизменными, однако в настоящее время существуют подходы, использующие изменяемые во времени кривые усталости [10, 36, 38].

При рассмотрении второй стадии процесса разрушения при постепенных отказах, на которой происходит рост одной или ряда магистральных трещин, используются подходы механики разрушения, позволяющие во времени описывать распространение усталостных трещин (РУТ).

Известно большое число различных формул для описания РУТ при циклических нагрузках, амплитуда которых не достигает предела текучести материала, т.е. имеет место многоцикловая усталость. В общем случае РУТ можно описать кинетическими уравнениями типа (3.1), в которых в качестве $z(t)$ берется текущая длина трещины $l(t)$, а в качестве основного параметра, характеризующего скорость РУТ, коэффициент интенсивности напряжений (КИН) K у вершины трещины [48, 58]

$$dl/dt = F[\Delta K, B], \quad (3.8)$$

где $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ - размах КИН, B - вектор констант, характеризующих усталостное разрушение конструкции. В соотношениях типа (3.8) можно выделить три характерных участка, отличающихся различным характером и скоростью РУТ. Наиболее простым из них является уравнение Пэриса, описывающее второй участок РУТ со скоростями $10^{-5} < dl/dN < 10^{-3}$ мм/цикл [10, 43]

$$dl/dt = C(\Delta K)^n, \quad (3.9)$$

где C, n - константы материала.

Известны более сложные уравнения, учитывающие несколько участков диаграммы усталостного разрушения, особенности нагружения, образование пластических зон впереди усталостной трещины и т.д. [8, 10, 42, 48, 68, 81]

$$dl/dN = C(\Delta K - \Delta K_{th})^n; \quad (3.10)$$

$$dl/dN = C_1[\Delta K/(1-R)]^B \exp\{-C_2 R\}; \quad (3.11)$$

$$dl/dN = \frac{C(\Delta K)^n}{(1-R)K_C - \Delta K}; \quad (3.12)$$

$$dl/dN = \frac{CK_C(\Delta K)^n}{[(1-R)K_C - \Delta K]^{1/2}}; \quad (3.13)$$

$$dl/dN = C(K_{\max})^n(\Delta K)^m, \quad (3.14)$$

где K_{\max} - максимальное значение КИН; $R = K_{\min} / K_{\max}$ - коэффициент асимметрии цикла; K_{th} , K_C - соответственно пороговое и критическое значение КИН.

В работах [73, 74] дан анализ применимости уравнения Пэриса и проанализированы 16 типов уравнений для полных диаграмм усталостного разрушения, обобщением которых является соотношение

$$dl/dN = AK_{\max}^S (K_{\max}^m - K_{th}^m)^q / (K_C^n - K_{\max}^n)^r, \quad (3.15)$$

Детальный обзор эмпирических уравнений для скорости РУТ в областях много- и малоциклового усталости дан в работах [42, 48].

В заключение приведенного обзора описания кинетики накопления повреждений для широкого класса постепенных отказов машиностроительных конструкций необходимо отметить наличие большого количества феноменологических зависимостей, описывающих скорость накопления меры повреждений, отсутствие универсальных соотношений данного типа хотя бы для определенного класса физических моделей отказов, а также возможность представления всех рассмотренных уравнений в форме (3.1).

3.2. Построение вектора определяющих параметров

Рассмотрим один из возможных способов построения вектора определяющих параметров $\Lambda(t)$ в случае постепенных отказов, происходящих в результате нарушения усталостной прочности. В настоящее время имеется обширный эмпирический материал [10, 47], позволяющий описывать скорость накопления повреждений при помощи кинетических уравнений, которые, как правило, получены для простого детерминированного гармонического нагружения. Поэтому для того, чтобы использовать данные кинетические уравнения, необходимо осуществить поэтапное приведение:

- 1) сложного НДС к простому на основе существующих гипотез прочности [47, 51];
- 2) широкополосного случайного процесса к эквивалентному по повреждающему воздействию узкополосному с использованием методов схематизации случайных процессов [22, 33].

Рассмотрим последовательность действий на первом этапе. Как показано в разделе 2.1, при выбранной конечноэлементной дискретизации

вектор узловых параметров НДС можно представить в виде (2.7). В случае широкополосного случайного нагружения и малого демпфирования компоненты вектора обобщенных координат $q_j(t)$ представляют узкополосные случайные процессы, которые можно представить в виде [39]

$$q_j(t) = \lambda_j(t) \sin(\omega_j t + \varphi_j(t)), \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.16)$$

где $\lambda_j(t)$ и $\varphi_j(t)$ - медленно меняющиеся по сравнению с $\sin \omega_j t$ амплитуда и фаза; ω_j - j -ая собственная частота колебаний; m - число удерживаемых форм колебаний. С учетом формулы (3.16) для компонент вектора $Y(t)$ можно записать

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^m \Phi_{ij} q_j(t) = \sum_{j=1}^m \Phi_{ij} \lambda_j(t) \sin(\omega_j t + \varphi_j(t)). \quad (3.17)$$

Введем обозначения для узкополосных процессов $y_{ij}(t)$, представляющих i -ые компоненты вектора $Y(t)$, соответствующие j -ой форме колебаний

$$y_{ij}(t) = \Phi_{ij} q_j(t) = \Phi_{ij} \lambda_j(t) \sin(\omega_j t + \varphi_j(t)), \quad (3.18)$$

тогда $y_i(t)$ в соответствии с формулой (3.17) будут определяться соотношением

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^m y_{ij}(t). \quad (3.19)$$

При сложном НДС в заданных точках системы можно определить эквивалентные напряжения (деформации) y_{ej} , соответствующие простому НДС и j -ой форме колебаний. Существующие в настоящее время приближенные подходы [47, 51, 52] позволяют на основе классических гипотез прочности или обобщения результатов испытаний при плоском циклическом НДС определить эти напряжения (деформации), предполагая синхронность и синфазность изменения по гармоническому закону компонент тензора напряжений (деформаций), описывающих НДС в заданной точке. Это требование выполняется для узкополосных процессов $y_{ij}(t)$, введенных в соответствие с формулой (3.18). Таким образом, для заданной точки кон-

струкции введем эквивалентные напряжения y_{ej} , (в качестве которых можно взять интенсивности напряжений) квадраты которых будут представлять некоторую квадратичную форму компонент $y_{ij}(t)$

$$y_e(t) = \sum_{j=1}^m y_{ej}(t) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i,r} \alpha_{ir} \Phi_{ij} \Phi_{ir} \right)^{1/2} q_j(t) = \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j(t) \sin(\omega_j t + \varphi_j(t)), \quad (3.20)$$

где α_{ir} - коэффициенты, задающие соответствующую гипотезу прочности.

На втором этапе осуществляется приведение широкополосного векторного случайного процесса $y_e(t)$ к модели эквивалентного узкополосного процесса $y_M(t)$. В настоящее время решение задач надежности при случайном нагружении и постепенных отказах [33] в большинстве случаев базируется на введении гармонического случайного процесса со случайной амплитудой, представляющей случайную величину с заданной плотностью вероятности, и детерминированной частотой, представляющей эффективную частоту или частоту максимумов исходного случайного процесса. Применение гармонического процесса имеет недостатки, обусловленные тем, что его корреляционная функция имеет вид гармонического процесса с бесконечным временем корреляции, что не соответствует реальным процессам нагружения. Поэтому в данной работе предлагается использовать модель квазигармонического случайного процесса $y_M(t)$, являющегося узкополосным случайным процессом с конечным временем корреляции [39]

$$y_M(t) = \Lambda(t) \sin(\omega t + \varphi(t)) = A(t) \cos \omega t + C(t) \sin \omega t, \quad (3.21)$$

где $\Lambda(t)$ - огибающая узкополосного случайного процесса, медленно меняющаяся по сравнению с $\sin \omega t$, $\varphi(t)$ – фаза, $A(t)$ и $C(t)$ – квадратурные составляющие узкополосного случайного процесса, которые являются медленно меняющимися функциями по сравнению с $\cos \omega t$.

В качестве критериев эквивалентности по повреждающему действию процессов $y_e(t)$ и $y_M(t)$ выбираются:

1) совпадение одномерных плотностей вероятности огибающей $\Lambda(t)$ и амплитуд $y_e(t)$, определенных в соответствии с одним из методов схематизации случайных процессов (метод максимумов, метод полных циклов и т.д.);

2) совпадение несущей частоты ω узкополосного процесса $y_M(t)$ со средним числом нулей или максимумов процесса $y_e(t)$ в зависимости от выбранного способа схематизации;

3) совпадение времен корреляции процессов $y_e(t)$ и $y_M(t)$.

В настоящее время в инженерной практике применяется более десяти схематизаций процесса [22], основанных на рассмотрении его максимумов. К основным можно отнести метод превышений (выбросов), метод размахов (с учетом или без учета среднего значения напряжений), метод укрупненных размахов, метод максимумов, метод полных циклов. Самую нижнюю оценку долговечности дает метод максимумов, а самые завышенные результаты при расчете усталостной долговечности дает метод размахов. Для гауссовских процессов, заданных корреляционной функцией или спектральной плотностью, метод схематизации удобно назначать по величине отношения среднего числа экстремумов к среднему числу нулей. Если это отношение мало отличается от единицы, то за метод схематизации следует принимать (как наиболее простой) метод максимумов. Если это отношение значительно больше единицы, то за методы схематизации следует принимать такие методы, которые дают результаты, наиболее близкие к экспериментальным. К таким методам в первую очередь относится метод полных циклов, что и обусловило дальнейшее использование в работе данной схематизации. В этом случае аналитические выражения для одномерной плотности вероятности амплитуд $f(x)$ имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} \chi^2 x \exp(-0,5\chi^2 \mu x^2), & 0 < x < x_\chi \\ \chi c \exp(-0,5x^2) / \chi, & x \geq x_\chi \end{cases}, \quad (3.22)$$

где $\mu = \sqrt{(a+3b)/(ab)}$, a , b , c , x_χ - const, протабулированные для различных коэффициентов широкополосности χ . Учитывая структуру случайного процесса $y_e(t)$, представляющего суперпозицию некоррелированных случайных процессов (3.20), определяют [9] дисперсию процесса $y_e(t)$ и его производной

$$\sigma_{y_e}^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_{y_j}^2; \quad \sigma_{\dot{y}_e}^2 = \sum_{j=1}^m \omega_j^2 \sigma_{y_j}^2, \quad (3.23)$$

эффективную частоту

$$\omega_e = \sigma_{y_e} / \sigma_{y_e} = \left[\frac{\sum_{j=1}^m \omega_j^2 \sigma_{y_j}^2}{\sum_{j=1}^m \sigma_{y_j}^2} \right]^{1/2}, \quad (3.24)$$

коэффициент широкополосности

$$\chi = \frac{\left[\int_0^{\infty} S_{y_e}(\omega) \omega^4 d\omega \int_0^{\infty} S_{y_e}(\omega) d\omega \right]^{1/2}}{\int_0^{\infty} S_{y_e}(\omega) \omega^2 d\omega} = \frac{\left[\sum_{j=1}^m \omega_j^4 \sigma_{y_j}^2 \sum_{j=1}^m \sigma_{y_j}^2 \right]^{1/2}}{\sum_{j=1}^m \omega_j^2 \sigma_{y_j}^2}, \quad (3.25)$$

корреляционную функцию

$$K_{y_e}(\tau) = \sum_{j=1}^m \sigma_{y_j}^2 \exp(-\alpha_j |\tau|) \left(\cos \omega_j \tau + \frac{\alpha_j}{\omega_j} \sin \omega_j |\tau| \right), \quad (3.26)$$

время корреляции

$$\tau_{ky_e} = \frac{1}{K_{y_e}(0)} \int_0^{\infty} |K_{y_e}(\tau)| d\tau. \quad (3.27)$$

Таким образом, по этим характеристикам $y_e(t)$ можно определить вероятностные характеристики процесса $y_M(t)$ (3.21).

Одномерная плотность вероятности огибающей $\Lambda(t)$ задается соотношением (3.22), а для определения времени корреляции процесса $y_M(t)$ предположим, что его коэффициент корреляции описывается выражением, соответствующим возбуждению только одной формы колебаний с частотой ω ($\tau \geq 0$)

$$K_{y_M}(t) = \sigma_{y_M}^2 \exp(-\alpha t) \left(\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right), \quad (3.28)$$

где α - коэффициент затухания корреляционной функции. Если $\alpha \ll \omega$, что предполагает симметрию спектральной плотности $y_M(t)$ [39], то

$$K_{y_M}(\tau) = \sigma_{y_M}^2 \exp(-\alpha \tau) \cos(\omega \tau) = K_A(\tau) \cos(\omega \tau). \quad (3.29)$$

Приведенные формулы (3.28-29) соответствуют общим выражениям корреляционных функций случайных процессов (3.21), для которых время корреляции определяется из соотношения

$$\tau_{ky_M} = \frac{1}{\sigma_{y_M}^2} \int_0^{\infty} K_A(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} R_A(\tau) d\tau, \quad (3.30)$$

где $K_A(\tau)$ и $R_A(\tau)$ - соответственно корреляционная функция и коэффициент корреляции квадратурной составляющей $A(t)$, которые с учетом (3.29) равны

$$K_A(\tau) = \sigma_{y_M}^2 \exp(-\alpha\tau); \quad R_A(\tau) = \exp(-\alpha\tau). \quad (3.31)$$

В соответствии с выражениями (3.30-31) время корреляции $y_e(t)$ можно определить

$$\tau_{ky_M} = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.32)$$

Приравнивая времена корреляции $y_e(t)$ и $y_M(t)$, получим выражение для коэффициента затухания α

$$\tau_{ky_M}^{-1} = \tau_{ky_e}^{-1} = \alpha. \quad (3.33)$$

Поскольку в дальнейшем в кинетические уравнения для описания меры повреждений при постепенных отказах будет входить огибающая $\Lambda(t)$ узкополосного процесса (3.21), необходимо будет осуществить синтез этого процесса в рамках найденных характеристик. Поэтому обеспечение равенства (3.33) будет реализовано при помощи соответствующих вероятностных характеристик огибающей $\Lambda(t)$. Наиболее простые соотношения имеют место для коэффициента корреляции квадрата огибающей. Так, например, в работе [39] показано, что для нормального узкополосного процесса $y_M(t)$ имеет место равенство

$$R_{\Lambda^2}(\tau) = R_A^2(\tau), \quad (3.34)$$

где $R_{\Lambda^2}(\tau)$ - коэффициент корреляции квадрата огибающей. Если процесс $y_M(t)$ мало отличается от нормального, соотношение (3.34) будет выполняться приближенно.

Используя соотношения для коэффициента корреляции квадрата огибающей $\tau_{k\lambda^2}$ и считая процесс $y_M(t)$ мало отличающимся от нормального, получим

$$\tau_{k\lambda^2} = \tau_{ky_e} / 2. \quad (3.35)$$

что обеспечит совпадение времен корреляции процессов $y_e(t)$ и $y_M(t)$.

3.3. Применение метода статистического моделирования

Рассматривается применение метода статистического моделирования для определения показателей надежности элементов конструкций при усталостных отказах и случайном узкополосном нормальном нагружении вида (3.21).

Исследуются две модели накопления повреждения: линейная

$$dz(t) / dt = F[\lambda] = \frac{\omega}{2\pi N_0 \sigma_{-1}^r} \lambda^r(t) \quad (3.36)$$

и нелинейная автомодельная

$$dz(t) / dt = F_1[\lambda]F_2[z] = \frac{\omega}{2\pi N_0 \sigma_{-1}^r} \lambda^r(t)z(t), \quad (3.37)$$

где λ - амплитуда деформаций или напряжений, σ_{-1} - предел выносливости с заданным законом распределения, N_0 - базовое число циклов, ω - несущая частота. Дискретный аналог данных моделей можно соответственно представить в виде

$$z_i = \begin{cases} z_{i-1} + \frac{\omega}{2\pi N_0} \left(\frac{\lambda_i}{\sigma_{-1}} \right)^r, & \lambda_i \geq \sigma_{-1} \\ z_{i-1} & \lambda_i < \sigma_{-1} \end{cases} \quad (3.38)$$

$$(i = \overline{1, N})$$

$$z_i = \begin{cases} z_{i-1} + \frac{\omega}{2\pi N_0} \left(\frac{\lambda_i}{\sigma_{-1}} \right)^r z_{i-1}, & \lambda_i \geq \sigma_{-1} \\ z_{i-1} & \lambda_i < \sigma_{-1} \end{cases} \quad (3.39)$$

Для получения j реализации меры повреждений z_{ij} в момент времени t_i для детерминированного предела выносливости необходимо определить случайные последовательности λ_{ij} амплитуд узкополосного стационарного нормального процесса $y_M(t_i)$ (3.21) при условии, что в момент времени t_{i-1} амплитуда приняла значение $\lambda_{i-1,j}$. Для рассматриваемого процесса $y_M(t_i)$ двумерная плотность вероятности амплитуд $\lambda_{i-1,j}$ и λ_{ij} является релеевской. По полученным значениям реализаций повреждаемости z_{ij} , соответствующих определенному объему выборок моделируемых амплитуд и пределов выносливости, строятся гистограммы для меры повреждений в моменты времени t_i , по которым можно определить основные показатели надежности. Таким образом, задача сводится к моделированию стационарного релеевского случайного процесса $\lambda(t)$ и случайной величины σ_{-1} с заданной плотностью вероятности. Для этого используется датчик случайных чисел, генерирующий реализации случайной величины u , распределенной равномерно в интервале $[0,1]$. Получение случайной величины x с заданными плотностью вероятности $f(x)$ и функцией распределения $F(x)$ осуществляется с использованием функционального преобразования $x = \varphi(u)$ [60], которое представляет обратную функцию от $F(x)$

$$x = \varphi(u) = F^{-1}(1-u). \quad (3.40)$$

Существующие в настоящее время подходы, связанные с применением метода статистического моделирования для решения задач надежности при усталостных отказах с использованием соотношений (3.38) и (3.39) [13], не учитывают взаимного влияния значений амплитуд $\lambda(t)$ в различные моменты времени t_{i-1} , t_i . В данной работе разработан подход, позволяющий производить учет взаимного влияния значений амплитуд $\lambda(t)$ в различные моменты времени t_{i-1} , t_i путем моделирования амплитуд λ_i в момент времени t_i , при условии, что в момент времени t_{i-1} амплитуда равнялась λ_{i-1} . Для этого рассмотрим двумерную релеевскую плотность вероят-

ности амплитуд стационарного случайного процесса $\lambda(t)$ в моменты времени t и $t+\tau$ [39]

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \tau) = \lambda_1 \lambda_2 \exp\left\{-\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n}(\tau) L_n^{(0)}\left(\frac{\lambda_1^2}{2}\right) L_n^{(0)}\left(\frac{\lambda_2^2}{2}\right). \quad (3.41)$$

где $R_0(\tau) = \exp(-\alpha\tau)$ - корреляционная функция огибающей, α - степень затухания корреляционной функции, $L_n^{(0)}(\bullet)$ - полином Лагерра нулевого порядка, явное выражения для которого представляется в виде

$$L_n^{(0)}\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(m!)^2 (n-m)!} \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^m = \sum_{m=0}^n A_{nm} \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^m. \quad (3.42)$$

Используя выражение для условной плотности вероятности $f(\lambda_2, \tau/\lambda_1) = f(\lambda_2, \lambda_1, \tau)/f(\lambda_1)$, получим

$$f(\lambda_2, \tau/\lambda_1) = \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n}(\tau) \sum_{m=0}^n A_{nm} \left(\frac{\lambda_1^2}{2}\right)^m \sum_{k=0}^n A_{nk} \lambda_2 \exp\left\{-\frac{\lambda_2^2}{2}\right\} \left(\frac{\lambda_2^2}{2}\right)^k. \quad (3.43)$$

С учетом соотношения

$$\int \lambda_2 \exp\left\{-\frac{\lambda_2^2}{2}\right\} \left(\frac{\lambda_2^2}{2}\right)^k d\lambda_2 = \exp\left\{-\frac{\lambda_2^2}{2}\right\} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} \left(\frac{\lambda_2^2}{2}\right)^{k-j}. \quad (3.44)$$

запишем условную функцию распределения $F(\lambda_2, \tau/\lambda_1)$

$$F(\lambda_2, \tau/\lambda_1) = \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n}(\tau) \sum_{m=0}^n A_{nm} \left(\frac{\lambda_1^2}{2}\right)^m \sum_{k=0}^n A_{nk} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} \left(\frac{\lambda_2^2}{2}\right)^{k-j}. \quad (3.45)$$

Проведенные численные исследования на основании формулы (3.45) при различных значениях λ_1 из интервала $[0.5\sigma_\lambda]$, который практически является областью определения релейской плотности вероятности, показали, что функцию $f(\lambda_2, \tau/\lambda_1)$ с большой точностью можно аппроксимировать нормальным законом с параметрами

$$m_{\lambda_2}(\tau/\lambda_1) = \int_0^{5\sigma_{\lambda_2}} \lambda_2 f(\lambda_2, \tau/\lambda_1) d\lambda_2; \quad \sigma_{\lambda_2}^2(\tau/\lambda_1) = \int_0^{5\sigma_{\lambda_2}} (\lambda_2 - m_{\lambda_2})^2 f(\lambda_2, \tau/\lambda_1) d\lambda_2. \quad (3.46)$$

На рис. 3.1 представлены условные плотности вероятности, рассчитанные в соответствии с формулой (3.43) для различных значений λ_1 , и нормальный закон с параметрами (3.46).

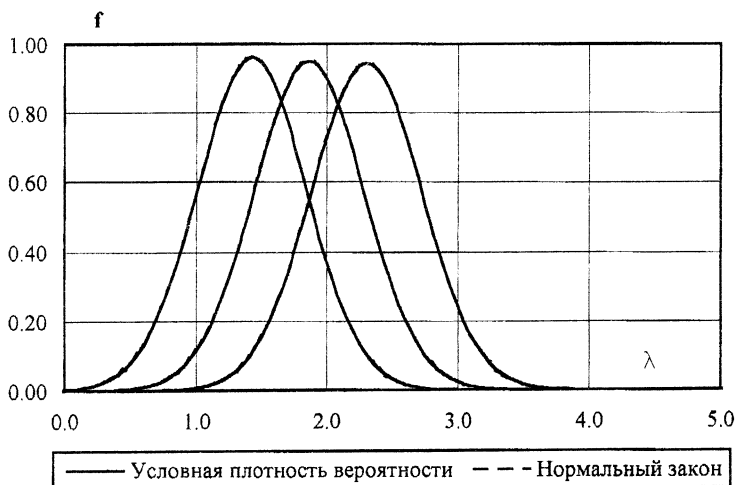


Рис. 3.1.

Для нормального закона с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией на основе двух генерируемых реализаций u_i и u_{i+1} получаем две реализации x_i и x_{i+1} нормально распределенной случайной величины [25, 60]

$$x_i = \sqrt{-2 \ln u_i} \cos(2\pi u_{i+1}) \quad x_{i+1} = \sqrt{-2 \ln u_i} \sin(2\pi u_{i+1}). \quad (3.47)$$

Если необходимо получить реализацию нормальной случайной величины с ненулевым математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 используется следующее соотношение

$$\bar{x}_i = m + x_i \sigma. \quad (3.48)$$

Для широкого класса машиностроительных конструкций [38] можно считать, что предел выносливости σ_{-1} подчиняется лог-нормальному распределению

$$f(\sigma_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\lg\sigma_{-1}}} \exp\left\{-\frac{(\lg\sigma_{-1} - m_{\lg\sigma_{-1}})^2}{2\sigma_{\lg\sigma_{-1}}^2}\right\} \frac{1}{\ln 10}, \quad (3.49)$$

где $m_{\lg\sigma_{-1}}$, $\sigma_{\lg\sigma_{-1}}$ - соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение десятичного логарифма предела выносливости. С учетом (3.47) и (3.48) j -ая реализация случайной величины σ_{-1j} с распределением (3.49) и с $m_{\lg\sigma_{-1}}$, $\sigma_{\lg\sigma_{-1}}$ записывается в виде [25]

$$\sigma_{-1j} = 10^{m_{\lg\sigma_{-1}} + x_j \sigma_{\lg\sigma_{-1}}}. \quad (3.50)$$

В начальный момент времени амплитуда огибающей подчиняется релеевскому закону

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{\sigma_\lambda^2} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\sigma_\lambda^2}\right\}, \quad (3.51)$$

где σ_λ - параметр релеевского распределения. Для получения реализаций указанной амплитуды используется соотношение

$$\lambda_i = \sigma_\lambda \sqrt{-2 \ln u_i}. \quad (3.52)$$

На основе приведенных соотношений получение реализаций z_{ijr} меры повреждения в моменты времени t_i проводится следующим образом. Вначале получаем r -ую реализацию предела выносливости σ_{-1r} ($r = \overline{1, R}$), соответствующую лог-нормальному закону, и j -ую реализацию начальной амплитуды λ_{0j} ($j = \overline{1, J}$), соответствующую релеевскому закону. Затем с шагом по времени $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, равным периоду процесса $y_M(t)$, моделируются амплитуды λ_i ($i = \overline{1, N}$), зависящие от значений λ_{i-1} и подчиняющиеся условной плотности распределения (3.45), которая аппроксимируется нормальным законом. Указанная процедура последовательно повторяется для всех J реализаций начальной амплитуды и R реализаций предела выносливости. По полученным реализациям z_{ijr} строятся гистограммы для меры по-

вреждений в моменты времени t_i и по критериям согласия производится проверка статистической гипотезы о соответствии их заданным законам распределения.

3.4. Применение теории двумерных марковских процессов

3.4.1. Синтез формирующих фильтров на основе системы распределений Пирсона

По найденным характеристикам процесса $y_M(t)$ (одномерной плотности вероятности огибающей, несущей частоте, времени корреляции квадрата огибающей) синтезируется стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение фильтра) первого порядка для огибающей $\lambda(t)$, описывающее одномерный марковский процесс. Для построения этого уравнения плотность вероятности $f(\lambda)$ аппроксимируется системой стационарных плотностей вероятности Пирсона $P(\lambda)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda - a}{b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2} P(\lambda), \quad (3.53)$$

решение которого можно записать в виде

$$P(\lambda) = C \exp\left(\int \frac{\lambda - a}{b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2} d\lambda\right). \quad (3.54)$$

Коэффициенты a и b_i в уравнении полностью задают систему распределений Пирсона.

Для описания одномерного марковского процесса достаточно определить переходную плотность вероятности $P(\lambda t / \lambda_0 t_0)$ процесса $\lambda(t)$, которая удовлетворяет прямому уравнению ФПК [65]

$$\frac{\partial P(\lambda t / \lambda_0 t_0)}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [A(\lambda, t) P(\lambda t / \lambda_0 t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [B(\lambda, t) P(\lambda t / \lambda_0 t_0)], \quad (3.55)$$

где $A(\lambda, t)$ и $B(\lambda, t)$ - соответственно коэффициенты сноса и диффузии (локальные характеристики процесса $\lambda(t)$, которые определяются по вероятностным характеристикам $\lambda(t)$).

Стационарное решение $P_s(\lambda)$ уравнения (3.55) при $t \rightarrow \infty$ и независимости $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ от времени записывается в виде

$$P_s(\lambda) = \frac{C}{B(\lambda)} \exp \left[2 \int \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} d\lambda \right], \quad (3.56)$$

при этом связь между $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ и коэффициентами a и b ,

$$A(\lambda) = 0,5 \left[\frac{dB(\lambda)}{d\lambda} + \beta(\lambda - a) \right] = 0,5 [b_1 - a + (2b_2 + 1)\lambda]; \quad B(\lambda) = \beta(b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2), \quad (3.57)$$

где β - параметр, определяющий масштаб изменения переходной плотности $P(\lambda/\lambda_0 t_0)$ во времени.

Зная коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, определяющие уравнение ФПК, можно синтезировать стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка

$$d\lambda(t)/dt = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)n(t) = A(\lambda) - \frac{1}{4} \frac{d}{d\lambda} B(\lambda) + \left[\frac{2}{N_0} B(\lambda) \right]^{1/2} n(t), \quad (3.58)$$

где $n(t)$ - нормальный белый шум с корреляционной функцией $K(\tau) = 0,5N_0\delta(\tau)$; $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ - детерминированные функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Для определения масштабного коэффициента β предлагается подход, основанный на получении нестационарного решения уравнения ФПК. Используется метод Фурье [19] и вводится функция $Q(\lambda, t)$ согласно соотношению

$$P(\lambda, t) = P_s(\lambda)Q(\lambda, t), \quad (3.59)$$

удовлетворяющая обратному уравнению ФПК

$$\frac{\partial Q(\lambda, t)}{\partial t} = A(\lambda) \frac{\partial Q(\lambda, t)}{\partial \lambda} + B(\lambda) \frac{\partial^2 Q(\lambda, t)}{\partial \lambda^2}. \quad (3.60)$$

Частное решение уравнения (3.60) можно искать в виде $Q(\lambda, t) = Q_n(\lambda) \exp(-\gamma_n t)$, где $Q_n(\lambda)$ - собственные функции, удовлетворяющие обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A(\lambda) \frac{\partial Q_n(\lambda)}{\partial \lambda} + 0,5B(\lambda) \frac{\partial^2 Q_n(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\gamma_n Q_n(\lambda) \quad (3.61)$$

и образующие ортогональные системы функций

$$h_n^{-1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda) Q_n(\lambda) Q_m(\lambda) d\lambda = \delta_{nm}; \quad W(\lambda) = P_s(\lambda) / g. \quad (3.62)$$

Выражение переходной плотности вероятности окончательно принимает вид

$$P(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_s(\lambda) Q_n(\lambda) \exp(-\gamma_n t) = W(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(\lambda) Q_n(\lambda_0)}{h_n} \exp(-\gamma_n t), \quad (3.63)$$

что позволяет найти корреляционные функции $\lambda(t)$ и $\lambda^2(t)$

$$K_{\lambda}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n g)^{-1} K_{1n}^2 \exp\{-\gamma_n(t - t_0)\}; \quad K_{1n} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda P_s(\lambda) Q_n(\lambda) d\lambda, \quad (3.64)$$

$$K_{\lambda^2}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n g)^{-1} K_{2n}^2 \exp\{-\gamma_n(t - t_0)\}; \quad K_{2n} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^2 P_s(\lambda) Q_n(\lambda) d\lambda. \quad (3.65)$$

Время корреляции процесса $\lambda^2(t)$ определяется через корреляционную функцию $K_{\lambda^2}(\tau)$

$$\tau_{k\lambda^2} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (h_n \gamma_n)^{-1} K_{2n}^2 \right] / \left[\sum_{n=1}^{\infty} h_n^{-1} K_{2n}^2 \right] \quad (3.66)$$

Полученная формула для времени корреляции квадрата огибающей модельного процесса $y_M(t)$ в сочетании с формулой (3.35) позволяет определить масштабный коэффициент β , линейным образом входящий в выражение γ_n с заданным коэффициентом пропорциональности для каждого типа системы распределения Пирсона.

От характера корней λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) характеристического уравнения $b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 = 0$ зависит интервал на оси $\lambda \geq 0$, на котором задано распре-

ление $P_S(\lambda)$, и вне которого оно принимает нулевые значения. В таблице 3.1 приведены значения корней λ_1 и λ_2 для центрированных распределений при различных значениях коэффициента широкополосности χ .

Таким образом, проведенные исследования показали, что при схематизации процесса $y_M(t)$ по методу полных циклов корни уравнения λ_i являются вещественными и различными по знаку. По классификации Пирсона это отвечает 1-му типу распределения или β -распределению [64]

$$P_S(\lambda) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q)\Gamma(p-q+1)} \lambda^{q-1} (1-\lambda)^{p-q} = F(p, q)W(\lambda); \quad 0 \leq \lambda \leq 1; p, q > 0, \quad (3.67)$$

что сводит задачу аппроксимации одномерной плотности вероятности параметров НДС к определению значений параметров p и q .

Таблица 3.1

χ	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0	2.25	2.50	2.75	3.0	3.50	4.0
λ_1	-1.42	-1.03	-0.80	-0.65	-0.55	-0.48	-0.43	-0.39	-0.36	-0.31	-0.27
λ_2	5.08	5.72	5.63	5.05	4.70	4.37	4.15	3.98	3.85	3.63	3.49

Коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ будут равны

$$A_1(\lambda) = -\frac{\beta}{2(p-1)} [q - (p+1)\lambda]; \quad B(\lambda) = \beta(\lambda^2 - \lambda) / (p-1). \quad (3.68)$$

Уравнение для собственных функций принимает вид

$$\lambda(1-\lambda)Q_n''(\lambda) + [q - (p+1)\lambda]Q_n'(\lambda) = \frac{2\gamma_n(p-1)}{\beta} Q_n(\lambda). \quad (3.69)$$

Полученное уравнение совпадает с дифференциальным уравнением для полиномов Якоби $J_n(\lambda)$ [39]

$$\lambda(1-\lambda)J_n''(\lambda) + [q - (p+1)\lambda]J_n'(\lambda) = -n(p+n)J_n(\lambda). \quad (3.70)$$

Сравнивая уравнения (3.69) и (3.70), получим выражение для собственных значений γ_n

$$\gamma_n = -\frac{\beta}{2(p-1)}n(p+n), \quad (\beta < 0). \quad (3.71)$$

Полиномы Якоби представляются в виде

$$J_n(\lambda) = \sum_{m=0}^n D_{nm} \lambda^{n-m}; \quad D_{nm} = (-1)^{n+m} \binom{n}{m} \frac{\Gamma(p+2n-m)\Gamma(q)}{\Gamma(p+n)\Gamma(q+n-m)}. \quad (3.72)$$

Для β -распределения входящий в выражение (3.63) коэффициент h_n

$$h_n = \frac{\Gamma^2(q)\Gamma(p-q+n+1)}{\Gamma(q+n)\Gamma(p+n)} \cdot \frac{n!}{(p+2n)}, \quad (3.73)$$

а коэффициенты K_{1n} и K_{2n} , входящие в (3.64) и (3.65)

$$K_{1n} = \begin{cases} F(p, q)h_1/D_{10}, & n=1; \\ 0, & n>1; \end{cases} \quad K_{2n} = \frac{F(p, q)}{D_{10}D_{20}} \begin{cases} -D_{21}h_1, & n=1 \\ D_{10}h_2, & n=2. \\ 0, & n>2 \end{cases} \quad (3.74)$$

Параметр β будет равен

$$\beta^{-1} = \frac{\tau_{k\lambda^2}}{h_1 \left(\frac{D_{21}}{D_{10}D_{20}} \right)^2 \left(\frac{p+1}{2(p-1)} \right) + h_2 \frac{1}{D_{20}^2} \left(\frac{p+2}{p-1} \right)}. \quad (3.75)$$

Задача аппроксимации β -распределения решается различными способами и по степени совпадения моментов исходной плотности и β -распределения можно судить об оптимальности того или иного способа. Первый из них является традиционным, при этом достигается совпадение первых двух моментов обоих распределений. Второй учитывает тот факт, что при вычислении среднего ресурса используется момент r -го порядка, что требует совпадения первого и r -го моментов распределения. Третий заключается в аппроксимации исходной плотности β -распределением по методу наименьших квадратов.

В таблице 3.2 приведены значения моментов β -распределения для каждого способа аппроксимации (1, 2, 3), а также соответствующие им значения p и q при $r=6, 8, 10$. В последней графе приведены относительные значения среднего ресурса T (при использовании в расчетах исходной плотности $T=1,0$). В качестве исходной была взята релеевская плотность,

соответствующая коэффициенту $\chi=1,0$. Для нее соответствующие начальные моменты равны: $m_1=0,1931$; $m_2=4,745 \cdot 10^{-1}$; $m_6=6,411 \cdot 10^{-4}$; $m_8=1,217 \cdot 10^{-4}$; $m_{10}=2,887 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 3.2

N	r	m_1	m_2	m_r	p / q	T
	6	0,1931	$4,745 \cdot 10^{-2}$	$6,857 \cdot 10^{-4}$	13,298 / 2,760	0,936
1	8	0,1931	$4,745 \cdot 10^{-2}$	$1,356 \cdot 10^{-4}$	13,298 / 2,760	0,899
	10	0,1931	$4,745 \cdot 10^{-2}$	$3,303 \cdot 10^{-5}$	13,298 / 2,760	0,876
	6	0,1931	$4,705 \cdot 10^{-2}$	$6,407 \cdot 10^{-4}$	13,918 / 2,880	1,001
2	8	0,1931	$4,702 \cdot 10^{-2}$	$1,214 \cdot 10^{-4}$	13,981 / 2,892	1,002
	10	0,1931	$4,703 \cdot 10^{-2}$	$2,864 \cdot 10^{-5}$	13,964 / 2,889	1,008
	6	0,1978	$5,002 \cdot 10^{-2}$	$8,181 \cdot 10^{-4}$	12,494 / 2,667	0,786
3	8	0,1978	$5,002 \cdot 10^{-2}$	$1,716 \cdot 10^{-4}$	12,494 / 2,667	0,712
	10	0,1978	$5,002 \cdot 10^{-2}$	$4,416 \cdot 10^{-5}$	12,494 / 2,667	0,657

Таблица 3.3

N	χ	m_1	m_2	m_r	p / q	T
	1,50	0,1457	$2,989 \cdot 10^{-2}$	$1,596 \cdot 10^{-5}$		1,0
ИП	2,00	0,1436	$3,262 \cdot 10^{-2}$	$8,435 \cdot 10^{-5}$		1,0
	2,50	0,1417	$3,381 \cdot 10^{-2}$	$2,615 \cdot 10^{-4}$		1,0
	1,50	0,1457	$2,989 \cdot 10^{-2}$	$1,231 \cdot 10^{-5}$	12,380 / 1,950	1,297
1	2,00	0,1436	$3,262 \cdot 10^{-2}$	$3,844 \cdot 10^{-5}$	8,814 / 1,427	2,195
	2,50	0,1417	$3,381 \cdot 10^{-2}$	$8,039 \cdot 10^{-5}$	6,850 / 1,112	3,252
	1,50	0,1457	$3,004 \cdot 10^{-2}$	$1,587 \cdot 10^{-4}$	11,512 / 1,823	1,012
2	2,00	0,1436	$3,505 \cdot 10^{-2}$	$8,425 \cdot 10^{-4}$	6,927 / 1,152	1,004
	2,50	0,1417	$3,838 \cdot 10^{-2}$	$2,610 \cdot 10^{-4}$	4,640 / 0,799	1,002
	1,50	0,1391	$2,596 \cdot 10^{-2}$	$4,061 \cdot 10^{-6}$	16,134 / 2,384	3,928
3	2,00	0,1271	$2,189 \cdot 10^{-2}$	$2,110 \cdot 10^{-6}$	17,358 / 2,333	39,85
	2,50	0,1152	$1,794 \cdot 10^{-2}$	$8,440 \cdot 10^{-7}$	19,818 / 2,398	309,7

В таблице 3.3 приведены значения моментов исходных плотностей (ИП), полученных при схематизации по методу полных циклов для коэффициентов широкополосности $\chi=1,50$, $\chi=2,0$ и $\chi=2,50$, и моментов β -распределения для каждого способа аппроксимации (1, 2, 3), а также соответствующие им значения p и q при $r=10$. В последней графе приведены относительные значения среднего ресурса T (при использовании в расчетах исходной плотности $T=1,0$).

В дальнейших расчетах параметры β -распределения определялись только из условия совпадения моментов первого и r -го порядка.

Данная методика представлена применительно к схематизированным процессам, когда одномерная плотность амплитуд имеет аналитическое выражение. Однако не существует принципиальных затруднений при использовании предложенной методики для любых полученных тем или иным способом одномерных плотностей, что позволяет говорить о ее универсальности при решении задач надежности.

3.4.2. Математическая постановка задачи

Исходя из выше представленных результатов, для элементов машиностроительных конструкций, в которых имеет место случайное нагружение и постепенные отказы различной физической природы, можно соответственно записать кинетические уравнения для меры повреждений $z(t)$ и уравнения фильтра для определяющего эти уравнения параметра $\lambda(t)$

$$\begin{cases} dz(t) / dt = F[z(t), \lambda(t), R(t)] \\ d\lambda(t) / dt = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)n(t) \end{cases} \quad (3.76)$$

где $F[\bullet]$ - детерминированная неотрицательная для кумулятивных моделей отказов скалярная линейная или нелинейная функция, $\mathbf{R}(t)$ - вектор параметров базовых зависимостей для заданной модели отказов.

Для класса постепенных отказов, происходящих в элементах конструкций вследствие нарушения усталостной прочности, процесс накопления повреждений от z_0 до 1 находится в интервале 10^2 - 10^7 циклов, охватывая области мало- и многоциклового усталости. Такой значительный временной диапазон является следствием малой скорости изменения $z(t)$ в

единицу времени. Напротив, скорость изменения амплитуды $\lambda(t)$ эквивалентного узкополосного процесса $y_M(t)$ определяется скоростью изменения этого процесса и лежит в диапазоне десятков-сотен циклов. В этом случае процесс $z(t)$, скорость которого описывается первым уравнением (3.76), можно считать приближенно одномерным марковским для временных интервалов $t \Delta t$ ($t \geq 0$), если величина Δt удовлетворяет неравенствам [65]

$$\tau_c \gg \Delta t \gg \tau_k, \quad (3.77)$$

где τ_c – постоянная времени системы, значительно превосходящая 10^7 циклов, τ_k – время корреляции $\lambda(t)$, имеющее порядок десятков циклов. Вследствие этого, выполнение левой части неравенства (3.77) не вызывает сомнений, в то время как выполнение правой части требует проверки в каждом конкретном случае. Приведенные доводы о возможности рассмотрения процесса накопления повреждений как марковского носят качественный характер, строгое доказательство этого утверждения представляет сложную проблему.

Для преодоления указанного недостатка предлагается следующая методика. Рассматривая совместно уравнения (3.76), можно на основании теоремы Дуба [65] утверждать, что $[z(t), \lambda(t)]$ будет представлять двумерный марковский процесс, одномерная плотность вероятности которого $f(z, \lambda, t)$ удовлетворяет уравнению ФПК

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [A_1(\lambda)f] - \frac{\partial}{\partial z} [A_2(\lambda, z)f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B(\lambda)f] \quad (3.78)$$

с граничными

$$\lim f(z, \lambda, t) = 0, \quad (z, \lambda) \rightarrow 0, \infty \quad (3.79)$$

и начальными условиями

$$\lim f(z, \lambda, t) = f(z)f(\lambda), \quad t \rightarrow 0. \quad (3.80)$$

Условия (3.79) формулируются исходя из физической сущности задачи. В (3.80) предполагается, что $\lambda(t)$ и $z(t)$ в начальный момент времени $t=0$ стохастически независимы. В соответствии с общей теорией марковских

процессов существует взаимнооднозначное соответствие между коэффициентами уравнения (3.78) и коэффициентами стохастических дифференциальных уравнений (3.76)

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= \Phi_1(\lambda) + \frac{N_0}{4} \Phi_2(\lambda) \cdot d\Phi_2(\lambda) / d\lambda \\ A_2(\lambda, z) &= F[\lambda, z, y_m, R] \\ B(\lambda) &= \frac{N_0}{2} \Phi^2(\lambda) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Таким образом, из решения уравнения (3.78), которое базируется на методе характеристических функций, можно определить одномерную плотность вероятности меры повреждений $f(z, t)$, по которой определяются все основные показатели надежности для кумулятивных моделей накопления повреждений: ВБР $P(t)$ и ПВО $q(t)$

$$P(t) = \int_0^1 f(z, t) dz; \quad q(t) = -dP(t) / dt = -\int_0^1 df(z, t) / dt dz, \quad (3.82)$$

среднее время до разрушения m_T и дисперсию времени до разрушения σ_T^2

$$m_T = \int_0^{\infty} tq(t) dt; \quad \sigma_T^2 = \int_0^{\infty} t^2 q(t) dt - m_T^2. \quad (3.83)$$

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГорова ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

4.1. Линейная модель

Для решения уравнения ФПК (3.78) вводится функция $\theta(\lambda, \omega, t)$, представляющая характеристическую функцию по переменной z и плотность вероятности по переменной λ

$$\theta(\lambda, \omega, t) = \int_0^{\infty} f(\lambda, z, t) e^{i\omega z} dz. \quad (4.1)$$

Исходя из свойств плотности вероятности и соотношения (4.1), одномерная характеристическая функция переменной z будет равна

$$\theta(\omega, t) = \int_0^{\infty} \theta(\lambda, \omega, t) d\lambda = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\lambda, z, t) e^{i\omega z} dz d\lambda. \quad (4.2)$$

В соответствии с формулой (4.1) из уравнения ФПК (3.78) с тремя независимыми переменными получим уравнение для $\theta(\lambda, \omega, t)$ с двумя независимыми переменными λ и t путем его умножения на $e^{i\omega z}$ и интегрирования по переменной z в пределах $[0, \infty]$. Предполагая, что операции интегрирования и дифференцирования можно менять местами, и коэффициент A_2 зависит только от λ , получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [A_1(\lambda)\theta] + i\omega A_2(\lambda)\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [B(\lambda)\theta]. \quad (4.3)$$

В уравнении (4.3) учтены граничные условия (3.79) по переменной z . В соответствии с условиями (3.79) и (3.80), а также выражением (4.1), можно сформулировать соответственно граничные и начальные условия для функции $\theta(\lambda, \omega, t)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, \infty} \theta(\lambda, \omega, t) = 0, \quad \lambda \rightarrow 0, \infty; \quad (4.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta(\lambda, \omega, t) = P_S(\lambda)\theta(\omega, t), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

В уравнение (4.3) ω входит как параметр. Рассматривая $\theta(\lambda, \omega, t)$ как плотность вероятности по переменной $\lambda \geq 0$, ее можно разложить в одномерный ряд по ортогональным полиномам $J_n(\lambda)$ с весовой функцией $P_S(\lambda)$ [39] и неизвестными коэффициентами $C_n(\omega, t)$, зависящими от ω и t

$$\theta(\lambda, \omega, t) = P_S(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\omega, t) J_n(\lambda). \quad (4.6)$$

Исходя из условия ортогональности полиномов $J_n(\lambda)$

$$\int_0^{\infty} W(\lambda) J_n(\lambda) J_m(\lambda) d\lambda = \begin{cases} h_n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad (4.7)$$

можно найти коэффициенты ряда (4.6)

$$C_n(\omega, t) = (F(p, q) h_n)^{-1} \int_0^{\infty} \theta(\lambda, \omega, t) J_n(\lambda) d\lambda. \quad (4.8)$$

С учетом $J_0(\lambda) = 1$, $h_0 = F^{-1}(p, q)$ и соотношений (4.2) и (4.8) следует, что $C_0(\omega, t)$ представляет характеристическую функцию z

$$C_0(\omega, t) = \int_0^{\infty} \theta(\lambda, \omega, t) d\lambda = \theta(\omega, t). \quad (4.9)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $C_n(\omega, t)$ в соответствии с (4.8) умножим уравнение (4.3) на $(F(p, q) h_n)^{-1} J_n(\lambda)$ и проинтегрируем по переменной λ в пределах $[0, \infty]$. С учетом граничных условий (3.80) после подстановки разложения (4.6) получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) в комплексной форме относительно неизвестных коэффициентов $C_n(\omega, t)$

$$\frac{dC_n(\omega, t)}{dt} = \sum_{k=0}^N C_k(\omega, t) u_{nk}, \quad (n = \overline{0, N}), \quad (4.10)$$

где

$$u_{nk} = (F(p, q)h_n)^{-1} \int_0^\infty P_S(\lambda) \left[\frac{\partial J_n}{\partial \lambda} J_k A_1(\lambda) + i\omega J_n J_k A_2(\lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_n}{\partial \lambda^2} J_k B \right] d\lambda + \frac{1}{2} J_n B \frac{\partial P_S(\lambda)}{\partial \lambda} J_k \Big|_0^\infty \quad (4.11)$$

Используя обозначения для комплексных коэффициентов $C_n = C_n^\delta + iC_n^M$, получим СОДУ для действительной и мнимой частей

$$\begin{aligned} \frac{dC_n^\delta}{dt} &= \sum_{k=0}^N C_k^\delta u_{nk}^\delta - \sum_{k=0}^N C_k^M u_{nk}^M \\ \frac{dC_n^M}{dt} &= \sum_{k=0}^N C_k^\delta u_{nk}^M + \sum_{k=0}^N C_k^M u_{nk}^\delta \end{aligned} \quad (n = \overline{0, N}). \quad (4.12)$$

При использовании β -распределения коэффициенты u_{nk} будут равны

$$\begin{aligned} u_{nk}^\delta &= (F(p, q)h_n)^{-1} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^k D_{nm} D_{kl} \left\{ -\frac{(m-n)\beta}{2(p-1)} [qm_{\eta-1} - (p+1)m_\eta] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(n-m)(n-m+1) \frac{\beta}{p-1} [m_\eta - m_{\eta-1}] \right\}, \quad (\eta = n-m+k-l), \\ u_{nk}^M &= (F(p, q)h_n)^{-1} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^k D_{nm} D_{kl} \omega m_{n+r}^* \end{aligned} \quad (4.13)$$

где D_{nm} и β определяются соответственно из выражений (3.72) и (3.75); m_i - i -ый начальный момент β -распределения, m_i^* для кинетического уравнения $dz/dt = C(\lambda)\lambda^{r(\lambda)}$, ($\lambda_* < \lambda$) определяется следующим соотношением

$$m_i^* = \int_{\lambda_*}^1 C(\lambda) \lambda^{r(\lambda)} P_S(\lambda) \lambda^i d\lambda, \quad (0 < \lambda_* < 1). \quad (4.14)$$

Система (4.12) представляется в виде $dC/dt = -UC$ с начальным условием $C(t_0)$. Решение СОДУ в этом случае можно представить в виде [18]

$$C = \exp\{-U(t-t_0)\}C(t_0). \quad (4.15)$$

Таким образом, интегрирование данной системы сводится к вычислению матрицы $\exp(-Ut)$. В частном случае матрица U при помощи невырожденного линейного преобразования приводится к диагональному виду, т.е. выполняется условие

$$T^{-1}UT = U', \quad (4.16)$$

где U' - блочно-диагональная матрица, состоящая из блоков (2×2) , на диагонали которых расположены действительные части, а вне диагонали - сопряженные мнимые части собственных значений матрицы U ; T^{-1} и T - соответственно левая и правая система собственных векторов матрицы U . Здесь реализуется алгоритм решения проблемы собственных значений по методу Якоби с понижением нормы для действительных матриц.

Начальные условия для $C_n(\omega, t)$ можно получить из выражения (4.8) с учетом начальных условий (4.5) для $\theta(\lambda, \omega, t)$.

Для численного определения основных показателей надежности, приведенных в разделе 3.3, определяется одномерная центрированная плотность меры повреждений $f_y(z, t)$ как обратное преобразование Фурье от характеристической функции

$$f_y(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{0y}(\omega, t) e^{-i\omega z} d\omega. \quad (4.17)$$

Представим характеристическую функцию $C_{0y}(\omega, t)$ в виде разложения в ряд с помощью интерполяционной формулы [64]

$$C_{0y}(\omega, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{0y} \left[\frac{2\pi n}{\Delta}, t \right] \frac{\sin \left[\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta} \right) \frac{\Delta}{2} \right]}{\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta} \right) \frac{\Delta}{2}}. \quad (4.18)$$

Тогда с учетом (4.17) выражение для $f_y(z, t)$ можно представить в виде

$$f_y(z, t) = \frac{1}{\Delta} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{0y}^{\delta} \left[\frac{2\pi n}{\Delta}, t \right] \cos \frac{2\pi n z}{\Delta} + C_{0y}^{\mu} \left[\frac{2\pi n}{\Delta}, t \right] \sin \frac{2\pi n z}{\Delta} \right\} \right], \quad (4.19)$$

где Δ - интервал, на котором плотность вероятности $f_y(z, t)$ отлична от нуля. Таким образом, определение плотности вероятности $f_y(z, t)$ свелось к определению действительной и мнимой частей характеристической функции в дискретном ряде точек. Количество членов ряда (4.19) определяется количеством точек, в которых характеристическая функция отлична от нуля и правильным выбором интервала Δ . Используя соотношения (3.82), (4.19), определим ВБР $P(t)$ и ПВО $q(t)$, по которым можно вычислить среднее время до разрушения и дисперсию времени до разрушения

$$P(t) = \frac{1}{\Delta} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{0y}^{\delta} (\sin[\omega_n(1-m_z)] + \sin[\omega_n m_z]) + C_{0y}^{\mu} (-\cos[\omega_n(1-m_z)] + \cos[\omega_n m_z]) \right\} \right]; \quad (4.20)$$

$$q(t) = -\frac{2}{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{dC_{0y}^{\delta}}{dt} \frac{1}{\omega_n} [\sin[\omega_n(1-m_z)] + \sin[\omega_n m_z]] - \frac{dC_{0y}^{\mu}}{dt} \frac{1}{\omega_n} [\cos[\omega_n(1-m_z)] + \cos[-\omega_n m_z]] \right\} + \frac{1}{\Delta} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{0y}^{\delta} \cos[\omega_n(1-m_z)] + C_{0y}^{\mu} \sin[\omega_n(1-m_z)] \right\} \right] \frac{d(1-m_z)}{dt}. \quad (4.21)$$

Для проверки точности разработанного метода, базирующегося на теории двумерных марковских процессов, были проведены численные исследования для линейной модели накопления повреждений (3.36) и сравнение с результатами, полученными по методу статистического моделирования, изложенному в разделе 3.3, и асимптотическому методу [10]. Рассчитывалась плотность вероятности меры усталостных повреждений в два различных момента времени t_i при следующих исходных данных:

- частота процесса $\omega = 200\pi$ и соответствующий период $T = 2\pi/\omega = 0,01$ сек;
- число моделируемых амплитуд (циклов) N для $t_1=5$ сек равнялось 500, для $t_2=10$ сек - 1000;
- базовое число циклов $N_0=10^7$, показатель кривой усталости $r=4$;
- математическое ожидание десятичного логарифма предела выносливости $m_{lg\sigma_1}=2,6989$;
- средноквадратическое отклонение десятичного логарифма предела выносливости $\sigma_{lg\sigma_1}=0,0$ (соответствует детерминированной кривой усталости); 0,05; 0,1;
- параметр релеевого распределения $\sigma_{\lambda}^2=10^6$ (МПа)²;

Результаты статистического моделирования получены для 400 значений предела выносливости σ_1 и представлены на рис. 4.1-4.6 в виде гистограмм для $N_j=400$ значений меры повреждений. Гистограмма 1 соответствует методу статистического моделирования без учета взаимного влияния значений амплитуд $\lambda(t)$ в различные моменты времени t_{i-1} и t_i , а гистограмма 2 - с учетом указанного влияния.

На рис. 4.1, 4.3, 4.5 представлены плотности вероятности меры повреждений, полученных с использованием теории двумерных марковских процессов и асимптотического метода для $t_1=5$ сек и соответственно $\sigma_{\text{в.с.}}=0,0; 0,05; 0,1$, а на рис. 4.2, 4.4, 4.6 - для $t_2=10$ сек. Решение, полученное по асимптотическому методу, дает нормальный закон для плотности вероятности меры повреждений. Степень совпадения эмпирического и теоретического распределения определяем по критерию согласия Пирсона χ^2 [4]. В таблице 4.1 представлены значения статистики χ_0^2 и соответствующие им P -значения ($P_{\text{д.м.п}}$ и $P_{\text{а.м}}$ - при сравнении гистограммы 2 с решением на основе двумерных марковских процессов и нормальным законом) для различного числа интервалов разбиения $m=14$ и $m=16$. Указанная таблица получена для решений, представленных на рис. 4.3, 4.4. Из анализа полученных результатов следует, что значительно лучшее соответствие между гистограммой 2 и решением при использовании двумерных марковских процессов в сравнении с асимптотическим методом. Качественно такие же результаты получены и при анализе результатов, представленных на рис. 4.1, 4.2, 4.5, 4.6. Гистограмма 1, как видно из рисунков, даже качественно не соответствует анализируемым решениям, что позволило для нее не проводить дальнейшие исследования с использованием критерия согласия Пирсона χ^2 . К сожалению, величина статистики χ_0^2 существенно зависит от объема выборки и при достижении некоторого уровня совпадения между исследуемой гистограммой и предполагаемой плотностью вероятности дальнейшее увеличение выборки приводит к увеличению χ_0^2 и, следовательно, уменьшению P -значения.

Таблица 4.1

m	$t_1=5$ сек, $\sigma_{\text{в.с.}}=0,05$				$t_2=10$ сек, $\sigma_{\text{в.с.}}=0,05$			
	χ_0^2	$P_{\text{д.м.п}}$	χ_0^2	$P_{\text{а.м}}$	χ_0^2	$P_{\text{д.м.п}}$	χ_0^2	$P_{\text{а.м}}$
14	4,485	0,963	13,042	0,291	5,044	0,929	19,747	0,049
16	5,272	0,968	11,771	0,546	2,773	0,998	13,397	0,418

В работе рассмотрена также статистика s^2

$$s^2 = \sum_{i=1}^m (\bar{p}_i - p_i^{(0)})^2, \quad (4.22)$$

которая стремится к нулю при совпадении эмпирического и теоретического распределений и обладает свойством сходимости при увеличении объема выборки. В выражении (4.22) $\hat{p}_i = r_i / N_j$ - оценки максимального правдоподобия для экспериментальных значений частот r_i ($r_1 + r_2 + \dots + r_m = N_j$), $p_i^{(0)}$ - известные величины для конкретных плотностей вероятности, $\sum_{i=1}^m p_i^{(0)} = 1$.

В таблице 4.2 представлены значения статистики s^2 при сравнении гистограммы 2 с решениями, полученными при использовании двумерных марковских процессов ($s_{д.м.п}^2$) и асимптотического метода ($s_{а.м}^2$), для различного числа интервалов разбиения и различного объема выборки N_j . Указанная таблица получена при анализе решений, представленных на рис.4.3.

Таблица 4.2

m	$N_j=100$		$N_j=200$		$N_j=300$		$N_j=400$	
	$s_{д.м.п}^2 \cdot 10$	$s_{а.м}^2 \cdot 100$	$s_{д.м.п}^2 \cdot 10$	$s_{а.м}^2 \cdot 100$	$s_{д.м.п}^2 \cdot 10$	$s_{а.м}^2 \cdot 100$	$s_{д.м.п}^2 \cdot 10$	$s_{а.м}^2 \cdot 100$
7	0,741	2,884	0,338	0,681	0,396	0,536	0,195	0,847
8	0,814	1,746	0,248	0,226	0,325	0,398	0,224	0,643
9	1,302	1,191	0,125	0,535	0,246	0,394	0,177	0,647
10	1,021	1,993	0,256	0,411	0,355	0,239	0,229	0,442
11	0,731	2,244	0,094	0,586	0,208	0,548	0,188	0,904
12	0,594	1,224	0,319	0,105	0,398	0,339	0,220	0,457
13	0,324	0,948	0,332	0,232	0,458	0,218	0,237	0,384
14	1,108	2,332	0,251	0,566	0,35	0,488	0,197	0,582
15	0,766	1,587	0,253	0,255	0,34	0,267	0,197	0,387
16	0,526	1,392	0,225	0,413	0,256	0,259	0,169	0,384
17	0,483	1,081	0,303	0,276	0,301	0,243	0,165	0,381
18	0,921	1,645	0,229	0,418	0,277	0,348	0,168	0,445
19	1,031	1,900	0,219	0,327	0,315	0,339	0,209	0,459

Из анализа полученных результатов следует значительно лучшее соответствие между гистограммой 2, полученной с использованием метода статистического моделирования с учетом взаимного влияния значений амплитуд $\lambda(t)$ в различные моменты времени t_{i-1} и t_i , и решением при использовании двумерных марковских процессов в сравнении с асимптотическим

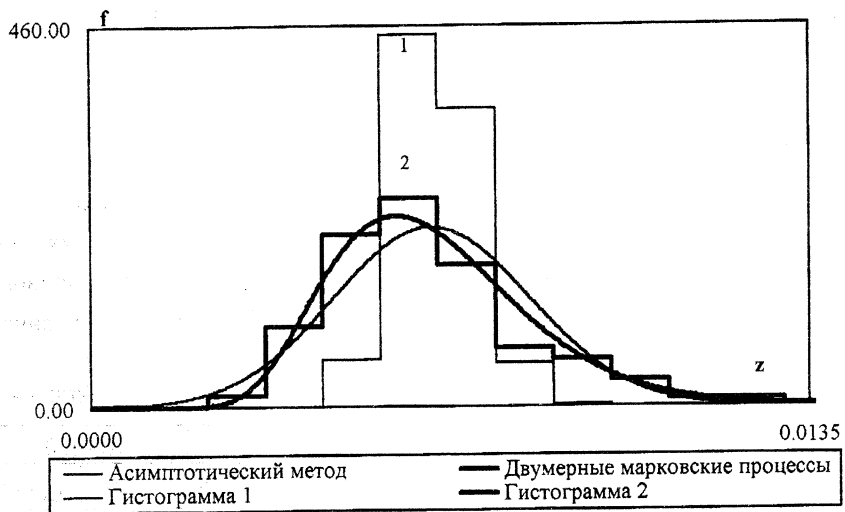


Рис. 4.1.

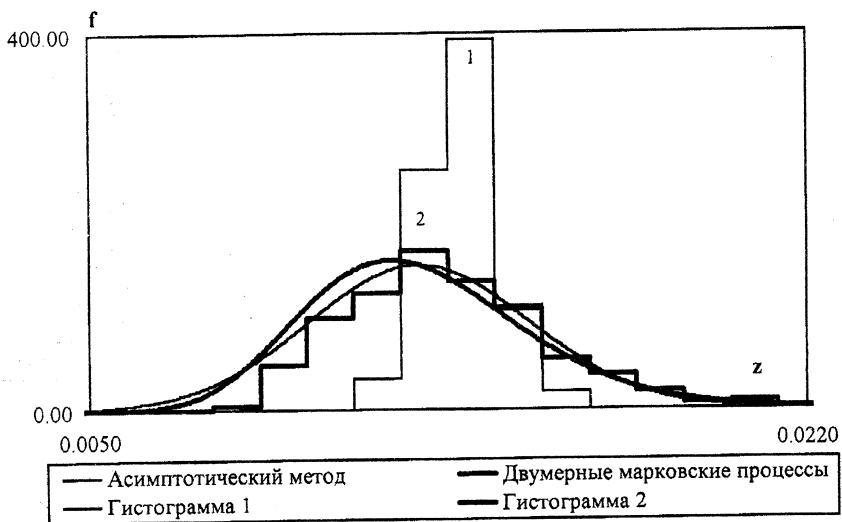


Рис. 4.2.

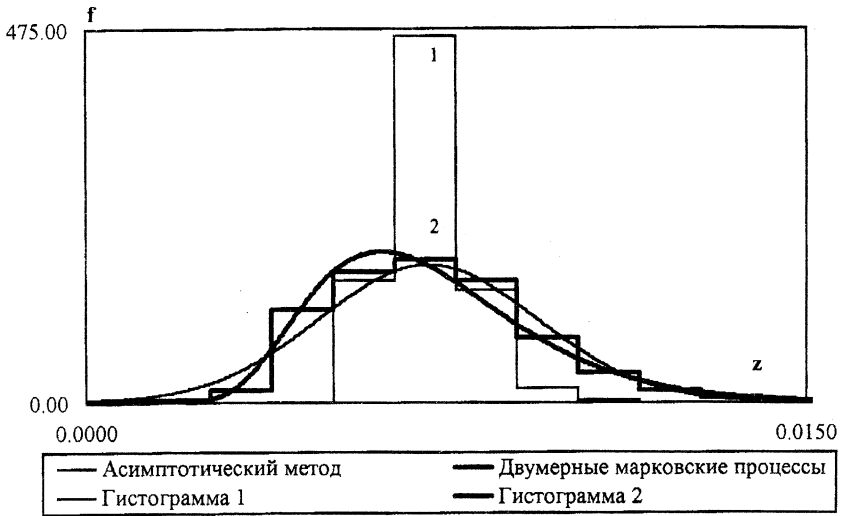


Рис. 4.3.

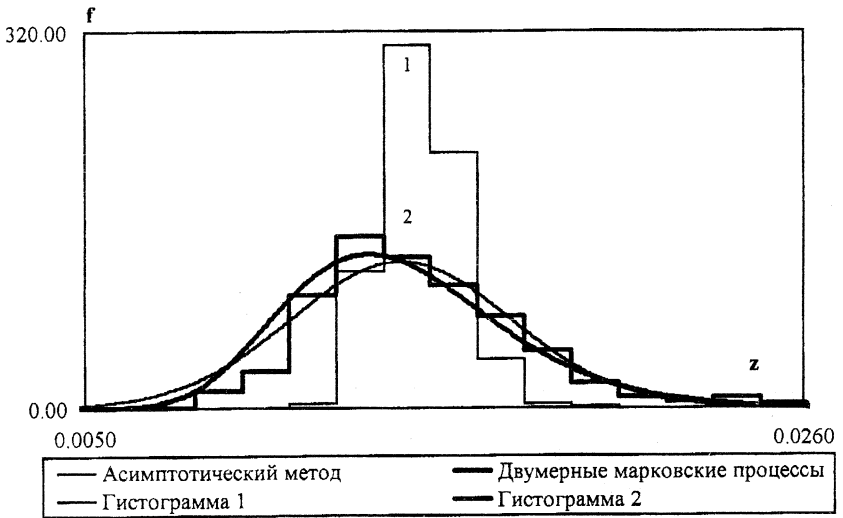


Рис. 4.4.

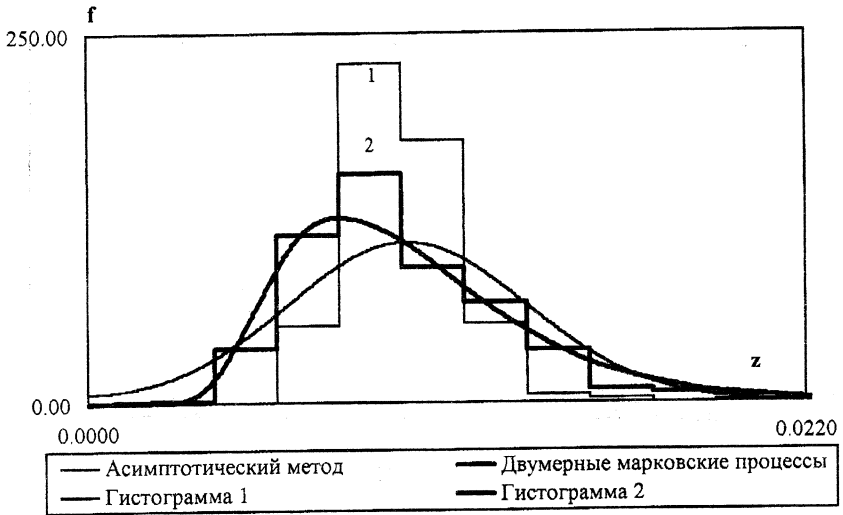


Рис. 4.5.

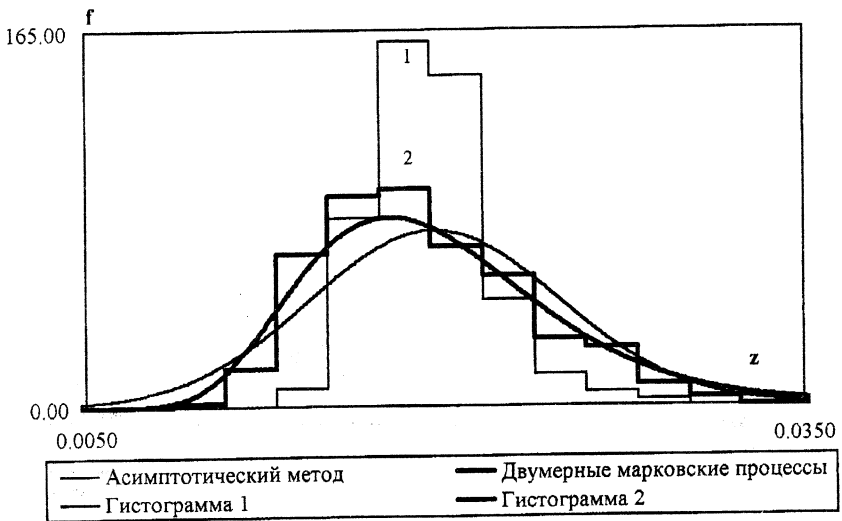


Рис. 4.6.

методом. Аналогичные результаты получены и при анализе результатов, представленных на рис. 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6.

4.2. Нелинейная модель

Рассмотренный в разделе 4.1 вариант метода характеристических функций обладает тем недостатком, что в предложенном виде применим только для линейных КУП типа (3.2), т.е. при независимости $A_2(\lambda)$ от меры повреждений. При использовании нелинейных КУП вида (3.3) и (3.4) аналогом уравнения (4.3) для функции $\theta(\lambda, \omega, t)$ является

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [A_1(\lambda)\theta] + i\omega \int_0^{\infty} A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) e^{i\omega z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [B(\lambda)\theta]. \quad (4.24)$$

Из сравнения уравнений (4.3) и (4.23) видно, что они имеют отличие правой части только во втором слагаемом. Для удобства решения задачи введем новую центрированную и нормированную переменную

$$\bar{z} = \frac{z - m_z}{\mu\sigma_z}, \quad (4.24)$$

где m_z и σ_z - соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение меры повреждений, $\mu\sigma_z$ - интервал, на котором плотность вероятности $f_y(z, t)$ отлична от нуля, $-0,5 \leq \bar{z} \leq 0,5$. В соответствии с введенным функциональным преобразованием (4.24) [65] процесс $\bar{z}(t)$ также является компонентой марковского процесса и описывается уравнением

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{1}{\mu\sigma_z} A_2(\lambda, \mu\sigma_z + m_z) - \frac{\bar{z}}{\sigma_z} \frac{d\sigma_z}{dt} - \frac{1}{\mu\sigma_z} \frac{dm_z}{dt} = F[\lambda, \bar{z}]. \quad (4.25)$$

С учетом введенных преобразований и обозначений уравнение (4.23) для нормированной характеристической функции $\theta_z(\lambda, \omega, t)$ относительно переменной $\bar{z}(t)$ можно представить

$$\frac{\partial \theta_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [A_1(\lambda)\theta_z] + i\omega \int_{-0,5}^{0,5} F[\lambda, \bar{z}] f(\lambda, \bar{z}, t) e^{i\omega \bar{z}} d\bar{z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [B(\lambda)\theta_z]. \quad (4.26)$$

Исходя из общих свойств плотности вероятности [64], ее можно представить через значения характеристической функции в узлах в виде ряда

$$f(\lambda, \bar{z}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_z(\lambda, \omega_m, t) e^{-i\omega_m \bar{z}}. \quad (4.27)$$

В данном выражении $\theta_z(\lambda, \omega_m, t)$ представляет характеристическую функцию по переменной \bar{z} в узлах $\omega_m = 2\pi m$ и плотность вероятности по переменной λ , которую, как и для линейной модели, можно записать в виде ряда (4.6)

$$\theta_z(\lambda, \omega_m, t) = P_S(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\omega_m, t) J_n(\lambda). \quad (4.28)$$

Используя соотношение $\omega_{-m} = -\omega_m$, выражение (4.27) представляется в виде

$$f(\lambda, \bar{z}, t) = \theta_z(\lambda, \omega_0 = 0, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \theta_z(\lambda, -\omega_m, t) e^{i\omega_m \bar{z}} + \theta_z(\lambda, \omega_m, t) e^{-i\omega_m \bar{z}} \right\}. \quad (4.29)$$

Исходя из свойств характеристической функции и соотношения (4.1) первое слагаемое в правой части (4.29) будет равно

$$\theta_z(\lambda, \omega_0 = 0, t) = \int_{-0,5}^{0,5} f(\lambda, \bar{z}, t) d\bar{z} = P_S(\lambda). \quad (4.30)$$

С учетом соотношений (4.29), (4.30) и свойства сопряженности $\theta_z(\lambda, \omega_m, t)$ ряд (4.29) можно записать

$$f(\lambda, \bar{z}, t) = P_S(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \theta_z^{\partial}(\lambda, \omega_m, t) (e^{-i\omega_m \bar{z}} + e^{i\omega_m \bar{z}}) + \theta_z^M(\lambda, \omega_m, t) (e^{-i\omega_m \bar{z}} - e^{i\omega_m \bar{z}}) \right\}. \quad (4.31)$$

Применяя алгоритм, описанный в разделе 4.1 для линейной модели, можно получить замкнутую СОДУ в комплексной форме относительно неизвестных коэффициентов $C_n^{\partial}(\omega_m, t)$ и $C_n^M(\omega_m, t)$

$$\begin{aligned} \frac{dC_n^\delta(\omega_l, t)}{dt} &= \sum_{k=0}^N \sum_m \left\{ C_k^\delta(\omega_m, t) u_{nk}^{(1)}(\omega_l, \omega_m, t) + C_k^M(\omega_m, t) u_{nk}^{(2)}(\omega_l, \omega_m, t) \right\} + f_{1n}(t) & (n = \overline{0, N}) \\ \frac{dC_n^M(\omega_l, t)}{dt} &= \sum_{k=0}^N \sum_m \left\{ C_k^\delta(\omega_m, t) u_{nk}^{(3)}(\omega_l, \omega_m, t) + C_k^M(\omega_m, t) u_{nk}^{(4)}(\omega_l, \omega_m, t) \right\} + f_{2n}(t) & (m, l = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.32)$$

При вычислении новых коэффициентов $u_{nk}^{(j)}(\omega_l, \omega_m, t)$, ($j = 1, 2, 3, 4$) используются выражения для коэффициентов u_{nk}^δ (4.13), полученные при проведении операций с первым и третьим слагаемыми в уравнении (4.26). В правой части системы (4.32) функции $u_{nk}^{(j)}(\omega_l, \omega_m, t)$, ($j = 1, 2, 3, 4$), $f_{1n}(t)$ и $f_{2n}(t)$ в общем случае зависят от m_z , σ_z , $\frac{dm_z}{dt}$, $\frac{d\sigma_z}{dt}$, что требует дополнения указанной системы уравнениями относительно математического ожидания и среднеквадратического отклонения меры повреждений.

После определения неизвестных коэффициентов $C_0^\delta(\omega_m, t)$ и $C_0^M(\omega_m, t)$, выражение для $f(\bar{z}, t)$ представляется в виде

$$f(\bar{z}, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_0^\delta(\omega_n, t) \cos \omega_n \bar{z} + C_0^M(\omega_n, t) \sin \omega_n \bar{z} \right\}. \quad (4.33)$$

Воспользовавшись функциональным преобразованием (4.24), можно получить выражение для плотности вероятности меры повреждений

$$f(z, t) = \frac{1}{\mu \sigma_z} f(\bar{z}, t) = \frac{1}{\mu \sigma_z} f\left(\frac{z - m_z}{\mu \sigma_z}, t\right), \quad (4.34)$$

по которому определяются основные показатели надежности (3.65), (3.66).

Для уравнения (3.3) математическое ожидание и дисперсия меры повреждения соответственно равны [64]

$$\begin{aligned} m_z(t) &= z_0 \exp\left\{m_1 + \sigma_1^2 / 2\right\} \\ \sigma_z^2(t) &= m_z^2(t) \left\{ \exp(\sigma_1^2 t) - 1 \right\}^2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $m_1 = M(\ln z)$, $\sigma_1^2 = D(\ln z)$. Входящий в соотношения (4.35) параметр z_0 определяет начальную повреждаемость.

Были проведены численные исследования для нелинейной модели накопления повреждений (3.37) и сравнение с результатами, полученными по методу статистического моделирования, изложенному в разделе 3.3, и асимптотическому методу [10]. Рассчитывалась плотность вероятности

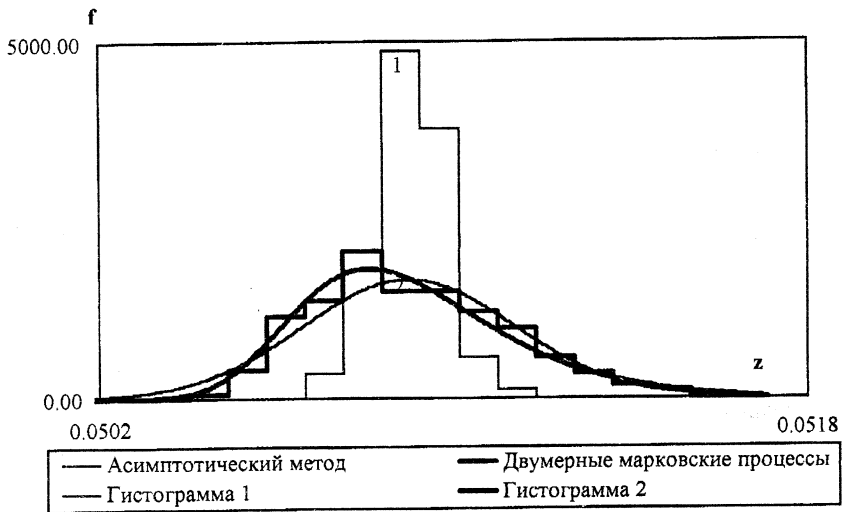


Рис. 4.7.

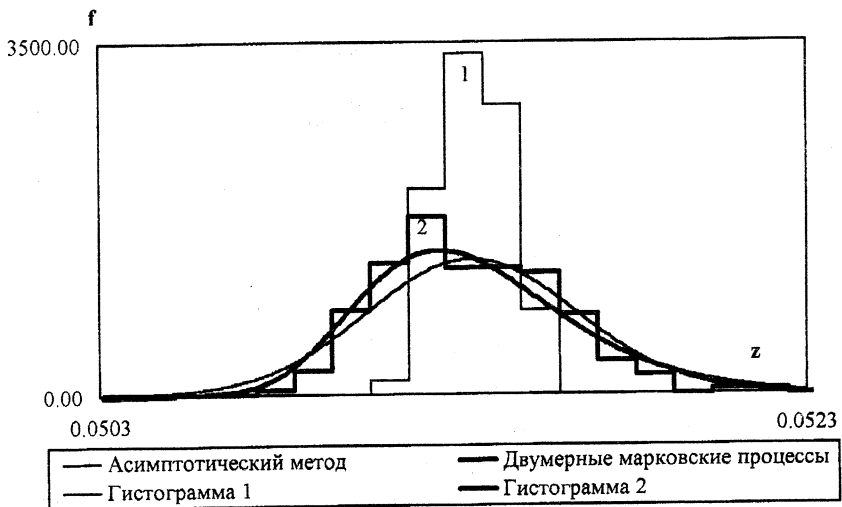


Рис.4.8.

меры усталостных повреждений в два различных момента времени t_i при следующих исходных данных:

- частота процесса $\omega = 200\pi$ и соответствующий период $T = 2\pi / \omega = 0,01$ сек;
- число моделируемых амплитуд (циклов) N для $t_1=1$ сек равнялось 100, для $t_2=2$ сек - 200;
- базовое число циклов $N_0=10^7$, показатель кривой усталости $r=4$;
- математическое ожидание десятичного логарифма предела выносливости $m_{lg\sigma_{-1}}=2,6989$;
- СКО десятичного логарифма предела выносливости $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,1$;
- параметр релейского распределения $\sigma_{\lambda}^2 = 10^8$ (МПа)²;
- начальная повреждаемость $z_0=0,05$.

Результаты статистического моделирования получены для 200 значений предела выносливости σ_{-1} и представлены на рис. 4.7, 4.8 в виде гистограмм для $N_j=200$ значений меры повреждений. Как и в предыдущем разделе, гистограмма 1 соответствует методу статистического моделирования без учета взаимного влияния значений амплитуд $\lambda(t)$ в различные моменты времени t_{i-1} и t_i , а гистограмма 2 - с учетом указанного влияния.

На рис. 4.7 и 4.8 представлены плотности вероятности меры повреждений, полученные с использованием теории двумерных марковских процессов и асимптотического метода (решением является лог-нормальный закон) для $t_1=1$ сек и $t_2=2$ сек. Степень совпадения эмпирического и теоретического распределения определялась по критерию согласия Пирсона χ^2 и статистике s^2 (4.22).

Проведенные исследования позволяют сделать выводы, аналогичные приведенным в разделе 4.1.

4.3. Учет различных факторов и результаты численных исследований

Методики, изложенные в разделах 4.1, 4.2, позволяют при решении задач надежности учитывать различные факторы, связанные с разбросом начального значения меры повреждений, вероятностным заданием кривых усталости, наличием средних напряжений, различными описаниями кривых усталости при много- и малоциклового усталости, нелинейным накоп-

лением повреждений, широкополосностью и нестационарностью процесса нагружения.

4.3.1. Разброс начального значения меры повреждений

В начальный момент времени мера повреждений z_{t_0} может быть отлична от нуля и иметь разброс, подчиняясь при этом некоторому закону распределения $f(z)=f(z_{t_0})$. Такая постановка типична для многих задач прогнозирования ресурса различных конструкций. Учет начального разброса меры повреждений в момент времени t_0 производится путем задания соответствующей начальной плотности вероятности $f(z)$ в начальных условиях для $C_n(\omega, t_0)$ в соотношении (4.8).

В работе в качестве возможных начальных плотностей $f(z)$ были использованы:

- дельта-функция

$$f(z) = \delta(z - z_0), \quad (4.36)$$

- равномерное распределение

$$f(z) = 1/(z_2 - z_1), \quad (4.37)$$

- нормальный закон

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z_0}} \exp\left\{-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma_{z_0}^2}\right\}, \quad (4.38)$$

где z_0 , $\sigma_{z_0}^2$ - математическое ожидание и дисперсия начальной повреждаемости при $t=0$.

Для этих плотностей одномерные характеристические функции переменной z соответственно равны [64]

$$\theta(\omega, t) = \exp(i\omega z_0); \quad (4.39)$$

$$\theta(\omega, t) = [\exp(i\omega z_2) - \exp(i\omega z_1)] / [i\omega(z_2 - z_1)]; \quad (4.40)$$

$$\theta(\omega, t) = \exp(i\omega z_0 - \sigma_{z_0}^2 \omega^2 / 2). \quad (4.41)$$

С учетом приведенных выражений (4.39-4.41) начальные условия для $C_n(\omega, t)$ соответственно принимают следующий вид:

$$C_0^{\phi} = \cos(\omega z_0); C_0^{\kappa} = \sin(\omega z_0); \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} C_0^{\beta} &= [\sin(\omega z_2) - \sin(\omega z_1)] / [\omega(z_2 - z_1)] \\ C_0^{\gamma} &= -[\cos(\omega z_2) - \cos(\omega z_1)] / [\omega(z_2 - z_1)] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} C_0^{\beta} &= \exp(-\sigma_{z_0}^2 \omega^2 / 2) \cos(\omega z_0) \\ C_0^{\gamma} &= -\exp(-\sigma_{z_0}^2 \omega^2 / 2) \sin(\omega z_0) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Для остальных коэффициентов $C_n = 0, (n = \overline{1, N})$.

На рис. 4.9 для различных моментов времени $\bar{t} = t / \tau_k$ приведены плотности вероятности меры повреждений с математическим ожиданием m_z , полученные численно с использованием двумерных марковских моделей при начальной плотности $f(z)$ - дельта-функции, и нормальный закон, соответствующий решению на основе асимптотического метода. На этом рисунке трем моментам времени соответствуют:

- 1) число циклов, при котором значение верхней границы аргумента плотности вероятности равно 1;
- 2) среднее число циклов до разрушения;
- 3) число циклов, при котором значение нижней границы аргумента плотности вероятности равно 1.

На рис. 4.10 приведены графики ВБР $P(t)$ (кривые 1) и ПВО $q(t)$ (кривые 2), соответствующие решениям, представленным на рис. 4.9.

Здесь и в дальнейших исследованиях процесс нормализации плотности вероятности меры повреждений будет анализироваться по значению параметра S , который представляет совместную площадь плотностей вероятности, полученных на основе указанных методов.

На рис. 4.11 для трех моментов времени приведены плотности вероятности меры повреждений при использовании в качестве начальной плотности равномерного распределения. На рисунке показаны нормальный закон и плотность, полученная численно на основе методики, изложенной в разделе 4.1. На рис. 4.12 приведены кривые, характеризующие процесс нормализации (зависимость S от безразмерного времени $\bar{t} = t / \tau_k$) при использовании различных начальных плотностей $f(z)$ - нормального

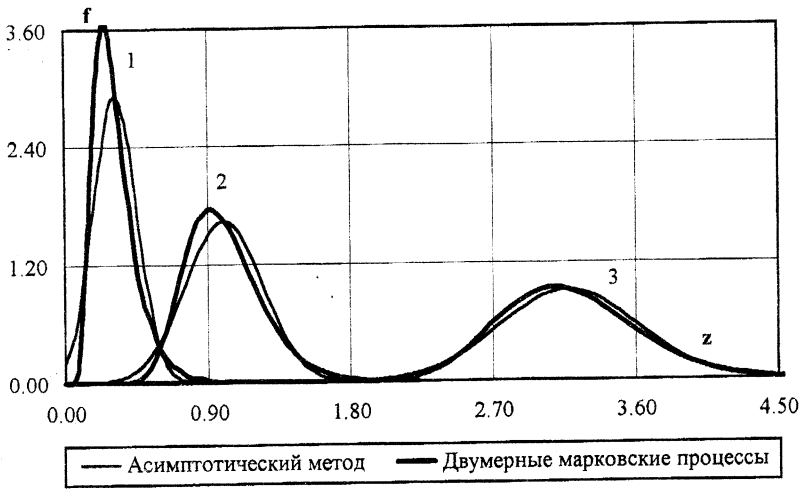


Рис. 4.9.

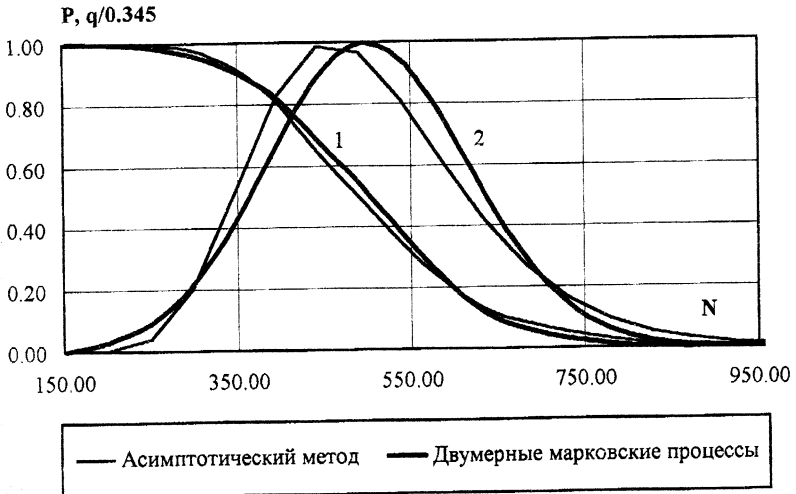


Рис. 4.10.

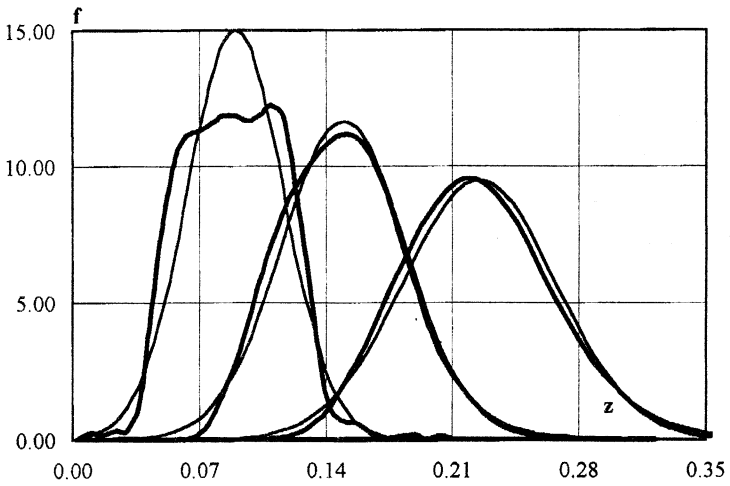


Рис. 4.11.

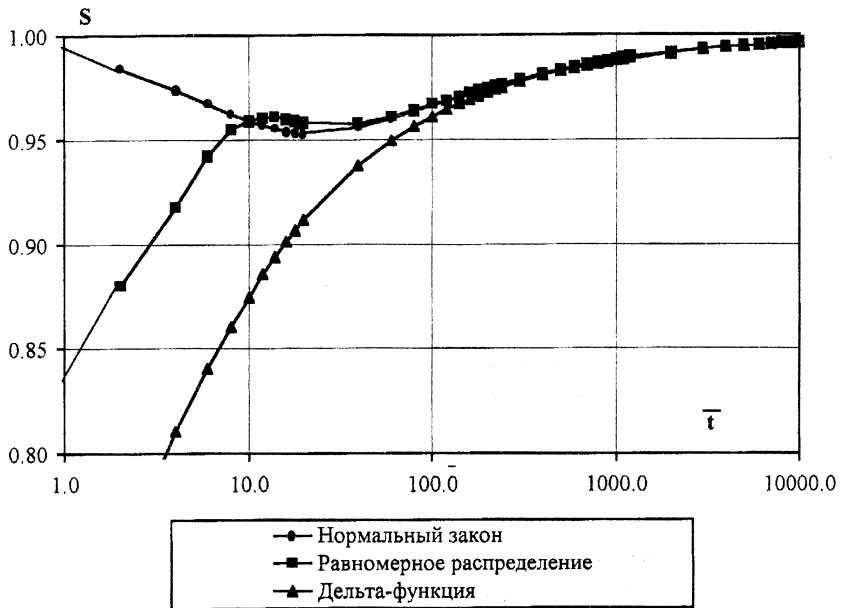


Рис. 4.12.

закона, равномерного распределения и дельта-функции. При анализе полученных результатов следует отметить:

- различный характер нормализации для плотностей $f(z)$ на временном интервале $\bar{t} < 10^3$;
- процесс разнормализации на временном интервале $\bar{t} < 2 \cdot 10^1$ при использовании нормального закона $f(z)$;
- совпадение процесса нормализации для плотностей $f(z)$ на временном интервале $\bar{t} > 10^3$.

4.3.2. Разброс предела выносливости

Рассматривается решение задачи надежности в случае, когда проводится совместный учет случайности внешнего воздействия на ЭК $X(t)$, вектора базовых зависимостей $\mathbf{R}(t)$, который рассматривается как векторная случайная величина с заданной плотностью вероятности. Математическая модель, описывающая изменение вектора $\mathbf{R}(t)$ во времени, представляется в достаточно общем виде. Для определенности исследуются постепенные отказы, происходящие в результате многоциклового усталости. В этом случае КУП можно представить в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{\omega_e}{2\pi N_0 \sigma_{-1k}^r} \lambda^r(t) = \frac{1}{T_0} \left(\frac{\lambda(t)}{\sigma_{-1k}} \right)^r, & \lambda(t) \geq \sigma_{-1k} \\ 0, & 0 \leq \lambda(t) < \sigma_{-1k} \end{cases} \quad (4.45)$$

Для уравнения (4.45) вектор параметров базовых зависимостей $\mathbf{R}(t)$ состоит из двух компонент - предела выносливости ЭК σ_{-1k} и соответствующего ему базового числа циклов $N_0 = T_0/T_e$ ($T_e = 2\pi/\omega_e$). Предположим, что T_0 представляет случайную величину с известной плотностью вероятности $f(t)$, а σ_{-1k} является нестационарной случайной функцией времени

$$\sigma_{-1k}(t) = \phi(t)\sigma_{-1}, \quad (4.46)$$

где $\phi(t)$ - убывающая детерминированная функция времени; σ_{-1} - случайная величина с заданной плотностью вероятности $f(\sigma_{-1})$.

Введем новые переменные

$$\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_{\max}; \quad \bar{\sigma}_{-1} = \sigma_{-1} / \lambda_{\max}; \quad x = \bar{\lambda} / \bar{\sigma}_{-1}; \quad \bar{z}(t) = z(t)T_0, \quad (4.47)$$

тогда уравнение (4.45) можно представить в виде

$$\frac{d\bar{z}(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{\phi(t)} \left(\frac{\lambda / \lambda_{\max}}{\sigma_{-1} / \lambda_{\max}} \right)^r = \frac{1}{\phi(t)} \left(\frac{\bar{\lambda}(t)}{\bar{\sigma}_{-1}} \right)^r = \frac{1}{\phi(t)} x^r(t), & x(t) \geq 1 \\ 0, & x(t) < 1 \end{cases}. \quad (4.48)$$

Для определения одномерной плотности вероятности $f(\bar{z}, t)$ по методикам, изложенным в разделах 4.1, 4.2, необходимо задать одномерную плотность вероятности $f(x)$ стационарного случайного процесса $X(t)$. В соответствии с формулами теории вероятности [21] для функционального преобразования (4.47) искомая плотность вероятности может быть определена через известные плотности вероятности переменных $\bar{\lambda}$ и $\bar{\sigma}_{-1}$

$$f(x) = \int_0^{\infty} f_{\bar{\sigma}_{-1}}(\bar{\sigma}_{-1}) f_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda} = x\bar{\sigma}_{-1}) \bar{\sigma}_{-1} d\bar{\sigma}_{-1}. \quad (4.49)$$

В общем случае распределения пределов выносливости могут аппроксимироваться различными двух- и трехпараметрическими законами - нормальным, лог-нормальным, Вейбулла, Гумбеля и др. [36, 38]. Рассмотрим случай, когда плотность вероятности нормированной амплитуды $\bar{\lambda}(t)$ подчиняется, как было показано в разделе 3.3, β -распределению

$$f(\bar{\lambda}) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q)\Gamma(p-q+1)} \bar{\lambda}^{q-1} (1-\bar{\lambda})^{p-q}, \quad (4.50)$$

а $\bar{\sigma}_{-1}$ имеет лог-нормальное распределение ($m = m_{\ln \sigma_{-1k}}$; $\sigma^2 = \sigma_{\ln \sigma_{-1k}}^2$)

$$f(\bar{\sigma}_{-1}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\ln(\bar{\sigma}_{-1}\lambda_{\max}) - m)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\bar{\sigma}_{-1}}, \quad (4.51)$$

Для плотностей вероятности (4.50) и (4.51) формула (4.49) примет вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\ln(\bar{\sigma}_{-1}\lambda_{\max}) - m)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q)\Gamma(p-q+1)} (x\bar{\sigma}_{-1})^{q-1} (1-x\bar{\sigma}_{-1})^{p-q} d\bar{\sigma}_{-1}. \quad (4.52)$$

По этой плотности находятся начальные моменты $M[x^n]$ и по методике, изложенной в разделе 3.4.1, определяются новые параметры p и q β -распределения.

По плотности вероятности $f(\bar{z}, t)$ находится искомая плотность вероятности меры повреждений $f(z, t)$ в соответствии с формулами теории вероятности для функционального преобразования (4.47)

$$f(z, t) = \int_0^{\infty} f_{T_0}(t_0) f_z(z = zt_0, t) t_0 dt_0. \quad (4.53)$$

Интегрирование в формулах (4.52) и (4.53), как правило, выполняется численно.

На рис. 4.13-15 для трех моментов времени представлены плотности вероятности меры повреждений, соответствующие трем значениям $\sigma_{lg\sigma_{-1}}$ - кривая 1 при $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,0$, кривая 2 при $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,05$ и кривая 3 при $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,1$ (время t_1 - для кривой 1 $m_z=0,2739$, $S=0,8780$, для кривой 2 $m_z=0,2809$, $S=0,8613$, для кривой 3 $m_z=0,3074$, $S=0,8388$; время t_2 - для кривой 1 $m_z=0,8217$, $S=0,9331$, для кривой 2 $m_z=0,8428$, $S=0,9223$, для кривой 3 $m_z=0,9224$, $S=0,9075$; время t_3 - для кривой 1 $m_z=2,4650$, $S=0,9625$, для кривой 2 $m_z=2,5285$, $S=0,9563$, для кривой 3 $m_z=2,7670$, $S=0,9478$). Как видно, с увеличением данного значения увеличивается математическое ожидание m_z и уменьшается значение S , что говорит о более повреждающем процессе и замедлении процесса нормализации. На рис. 4.16 представлены зависимости значений параметра S от безразмерного времени $t = t/\tau_p$ (точечные кривые 1, 2, 3) для соответственно $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,0$, $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,05$, $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,1$.

Влияние величины τ_k на нормализацию вполне объяснимо, т.к. именно она стоит в правой части неравенства (3.77) и соотношение с ней позволяет судить о правомерности применения нормального закона при решении данных задач. Анализ проведенных исследований показывает, что разброс предела выносливости также существенно влияет на нормализацию плотности вероятности меры повреждения.

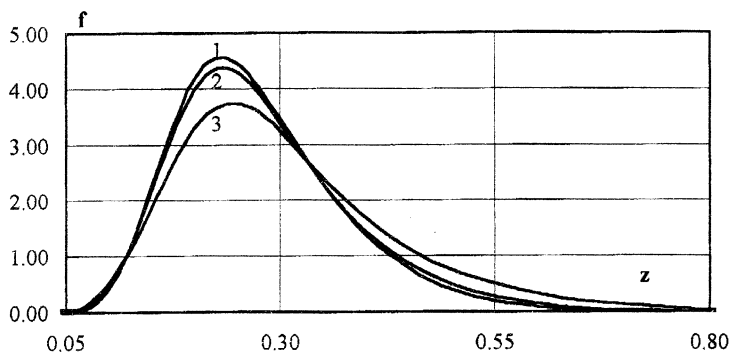


Рис. 4.13.

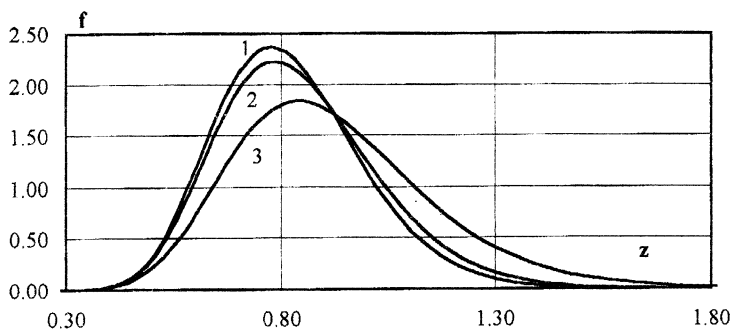


Рис. 4.14

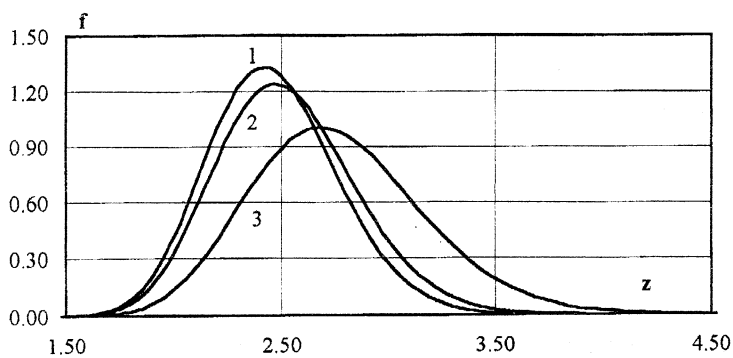


Рис. 4.15.

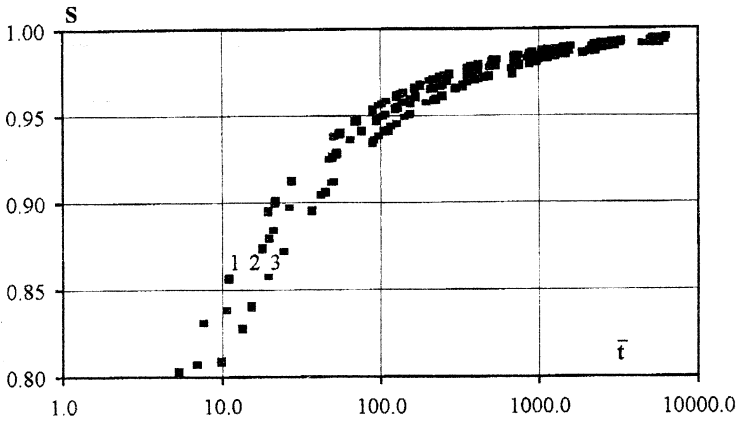


Рис. 4.16.

4.3.3. Широкополосность внешнего воздействия

На основе изложенной в разделе 3.2 теории, позволяющей производить расчет показателей надежности при усталостных отказах для широкополосного случайного нагружения, в данном разделе рассматривается модель широкополосного случайного процесса нагружения, представляющего сумму двух стохастически независимых узкополосных случайных процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ с дисперсиями σ_1^2 , σ_2^2 и частотами ω_1 , ω_2 . Исследовалось влияние коэффициента широкополосности χ на процесс нормализации плотности вероятности меры повреждений. Используя обозначения $\omega_2 / \omega_1 = \theta$, $\sigma_2 / \sigma_1 = \gamma$, определим коэффициент широкополосности χ как [9]

$$\chi = \frac{[(\gamma^2 \theta^4 + 1)(\gamma^2 + 1)]^{1/2}}{\gamma^2 \theta^2 + 1}. \quad (4.54)$$

Для $\chi=1$ процесс $y_2(t)$ отсутствует, тогда суммарная дисперсия $\sigma_\Sigma^2 = \sigma_1^2$, эффективная частота $\omega_e = \omega_1$ и процесс нагружения является узкополосным. Для удобства принимаем $\sigma_\Sigma^2 = 1$, $\omega_e = 1$ для различных χ и рассматриваем следующие значения исследуемых параметров:

$$1) \chi=1,25- \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 0,99725 / 0,00275; \quad \omega_1 / \omega_2 = 0,979 / 3,917.$$

2) $\chi=1,75$ - $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 0,98638 / 0,01362$; $\omega_1 / \omega_2 = 0,911 / 3,643$.
 Таким образом, при приведении широкополосного процесса к эквивалентному узкополосному суммарная дисперсия и эффективная частота последнего для различных χ совпадают.

На рис. 4.17 - 4.19 для трех моментов времени представлены плотности вероятности меры повреждений, соответствующие трем значениям χ . (время t_1 - для $\chi=1$ $m_z=0,2809$, $S=0,8613$, для $\chi=1,25$ $m_z=0,2170$, $S=0,8423$, для $\chi=1,75$ $m_z=0,1512$, $S=0,8191$; время t_2 - для $\chi=1$ $m_z=0,8428$, $S=0,9223$, для $\chi=1,25$ $m_z=0,6509$, $S=0,9107$, для $\chi=1,75$ $m_z=0,4536$, $S=0,8907$; время t_3 - для $\chi=1$ $m_z=2,5284$, $S=0,9563$, для $\chi=1,25$ $m_z=1,9526$, $S=0,9497$, для $\chi=1,75$ $m_z=1,3608$, $S=0,9423$). Как видно, с увеличением значения χ уменьшается математическое ожидание m_z и уменьшается значение S , что говорит о замедлении процесса нормализации.

На рис. 4.20 - 4.22 приведены графики ВБР $P(t)$ (кривые 1) и ПВО $q(t)$ (кривые 2), соответствующие решениям, полученным с использованием двух указанных методов. На рис. 4.23 и 4.24 представлены графики $P(t)$ и $q(t)$ в одном временном масштабе $\bar{t} = t / \tau_x$ для $\chi = 1, \chi = 1,25, \chi = 1,75$. На рис. 4.25 представлены зависимости значений параметра S от безразмерного времени $\bar{t} = t / \tau_x$ (точечные кривые 1, 2, 3) для соответственно $\chi = 1, \chi = 1,25, \chi = 1,75$. Анализ показывает влияние данного коэффициента (замедление с увеличением χ) на процесс нормализации.

4.3.4. Нестационарность внешнего воздействия

При рассмотрении нестационарного случайного процесса нагружения вида $y_n(t) = y(t)\phi(t)$, где $\phi(t)$ - некоторая детерминированная функция, уравнение повреждаемости записывается

$$dz(t) / dt = C[\phi(t)\lambda(t)]^r. \quad (4.55)$$

В системе (4.12) коэффициенты u_{nk} явно зависят от времени, вследствие чего для ее решения используется метод Рунге-Кутты. Следует отметить, что на вид функции $\phi(t)$ не накладывается никаких ограничений.

При исследовании влияния нестационарности внешнего воздействия на процесс нормализации использовалась периодическая функция $\phi(t)$,

различные варианты которой на одном периоде представлены на рис. 4.26. Следует отметить, что для рассмотренных вариантов

$$\int_0^{t_i} \phi(t_i) dt_i = const. \quad (4.56)$$

Исследования, проведенные для 1-го варианта, соответствуют решению задачи для стационарного случая с пределом выносливости $\sigma_{-1}^* = \sigma_{-1} / \phi(t)$. В проведенных расчетах варьировалась степень кривой усталости и дисперсия стационарной составляющей напряжений. На рис. 4.27 для относительного времени $\bar{t} = t / \tau_x$ приведены точечные кривые, отображающие процесс нормализации (номер соответствует типу нестационарности на рис. 4.26).

Таким образом, проведенные исследования показали:

- необходимость учета взаимного влияния значений амплитуд напряжений $\lambda(t)$ в различные моменты времени t_{i-1} и t_i при использовании метода статистического моделирования для решения задач надежности при усталостных отказах;
- лучшее совпадение результатов, полученных на основе теории двумерных марковских процессов и метода статистического моделирования, предложенного в работе, по сравнению с асимптотическим методом, при этом, численная оценка степени совпадения рассматриваемых решений проведена на основе двух различных статистик;
- наиболее существенные факторы, влияющие на нормализацию плотности вероятности меры повреждений: соотношение между временем, в которое определяется плотность вероятности, и временем корреляции процесса нагружения; разброс предела выносливости материала конструкции; нелинейность накопления повреждений; широкоплоскость и нестационарность случайного процесса нагружения. Проведенная численная оценка данного эффекта для различных временных интервалов позволяет установить строгие границы применимости асимптотического метода, и, следовательно, показать эффективность использования двумерных марковских процессов для решения задач надежности.

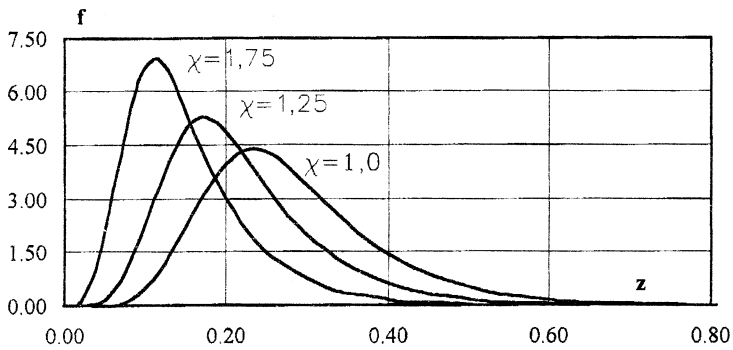


Рис. 4.17.

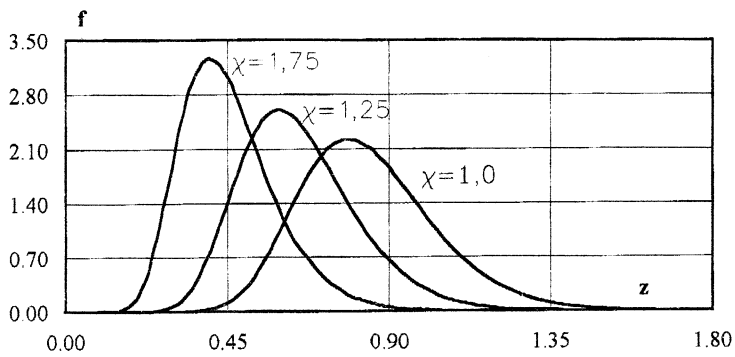


Рис. 4.18.

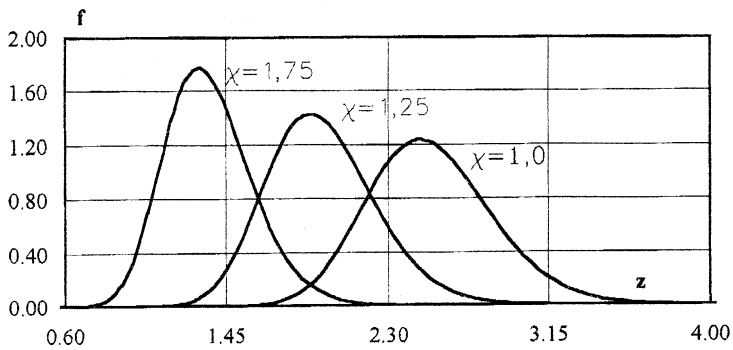


Рис. 4.19.

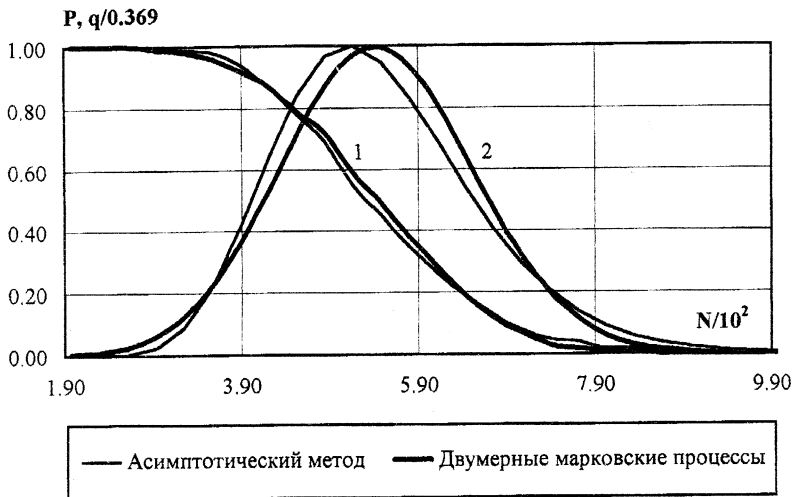


Рис. 4.20.

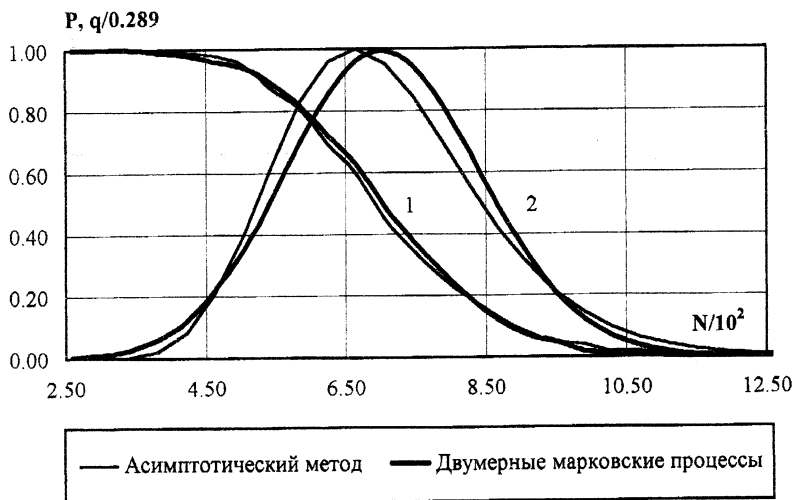


Рис. 4.21.

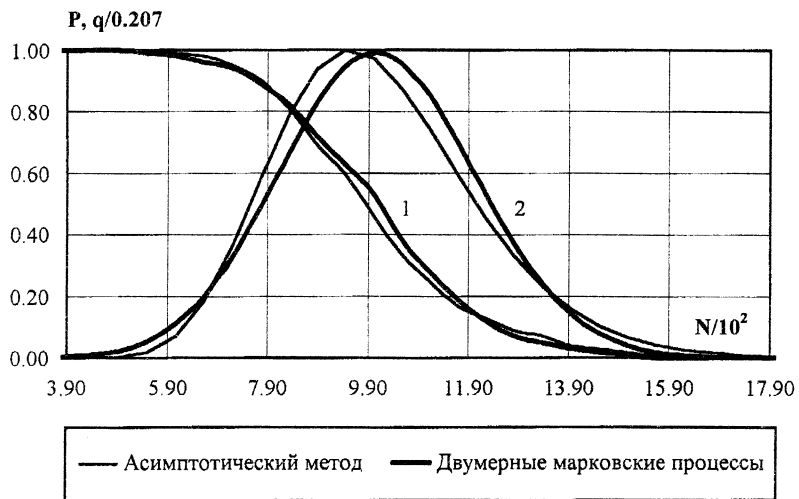


Рис. 4.22.

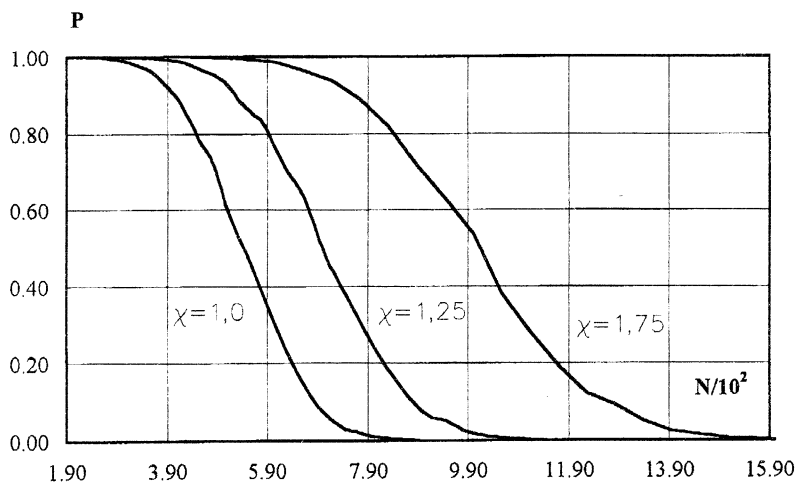


Рис. 4.23.

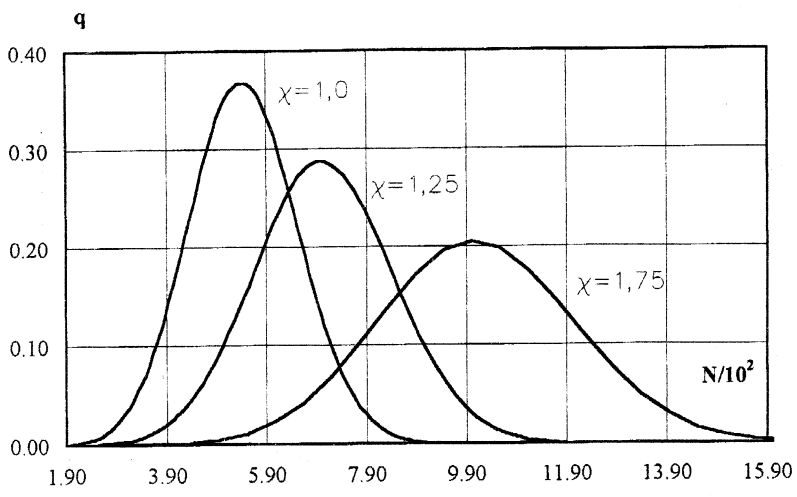


Рис. 4.24.

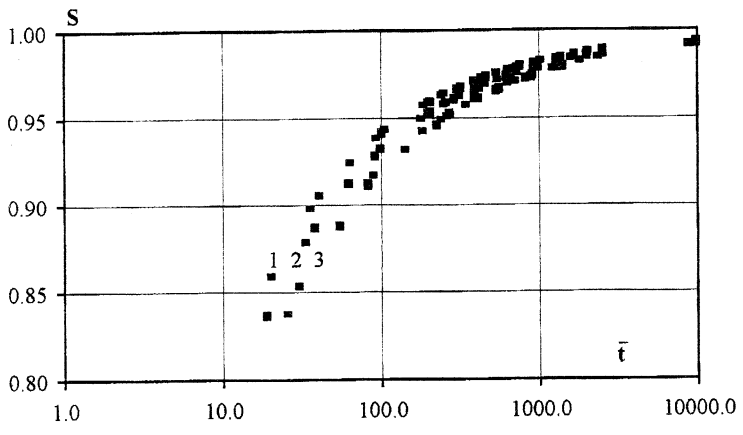


Рис. 4.25.

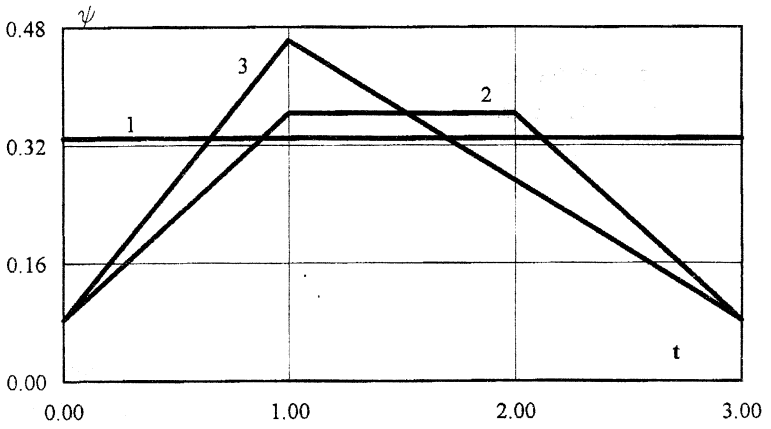


Рис. 4.26.

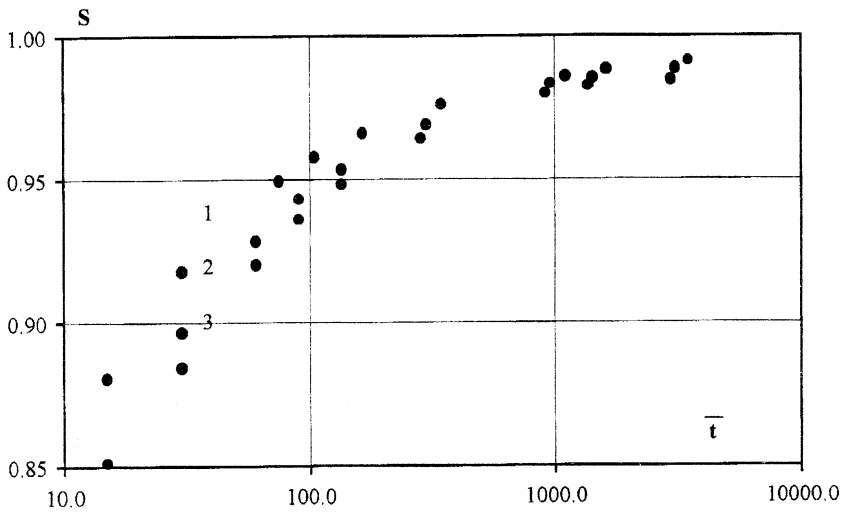


Рис. 4.27.

5. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УСТАЛОСТНЫХ ОТКАЗАХ И СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ

На основе методик, изложенных в предыдущих разделах, разработан комплекс программ на языке Turbo-PASCAL для расчета собственных и вынужденных случайных колебаний и показателей надежности при усталостных отказах различных ЭК.

5.1. Трубопроводные системы

Трубопроводы являются широко распространенными элементами оборудования, используемого в авиации, энергетике, машиностроении, нефтехимической промышленности, и обладают целым рядом таких конструктивных особенностей, как наличие промежуточных упругих опор и сосредоточенных масс, большого числа ответвлений, произвольно ориентированных в пространстве, и др. Характерной особенностью большинства трубопроводных систем является случайный характер нагружения [29] который приводит к повышенным случайным вибрациям и отказам, которые в большинстве случаев происходят по причине накопления усталостных повреждений. Интенсивное случайное воздействие приводит к возникновению локальных пластических деформаций, которые могут оказывать существенное влияние как на динамику, так и на ресурс работы этих систем. Трубопроводы, в силу своей малой жесткости, являются весьма чувствительными к возможным технологическим отклонениям, которые возникают при их изготовлении и монтаже, и носят также случайный характер. Несмотря на указанные обстоятельства, в настоящее время отсутствуют работы, посвященные расчету надежности трубопроводных систем с учетом случайного нагружения и случайного разброса параметров самой конструкции при отказах в результате много- или малоциклового усталости. Существуют работы [30], посвященные расчету колебаний трубопроводных систем на основе МКЭ, в которых отмечается эффективность применения данного метода, поскольку он позволяет учесть все основные конструктивные особенности данных систем.

В данном разделе на основе вышеразработанных подходов, решается задача прогнозирования надежности трубопроводных систем, рассматриваемых как разветвленные пространственные стержневые системы, с учетом случайного нагружения и случайного разброса компонент вектора параметров объекта, возникновения локальных пластических деформаций и отказов, происходящих в результате много- и малоциклового усталости.

5.1.1. Системы со случайными параметрами

Проведены численные исследования случайных колебаний и надежности сложного разветвленного пространственного трубопровода, эскиз которого представлен на рис. 5.1 - элемента системы управления летательного аппарата (ЛА).

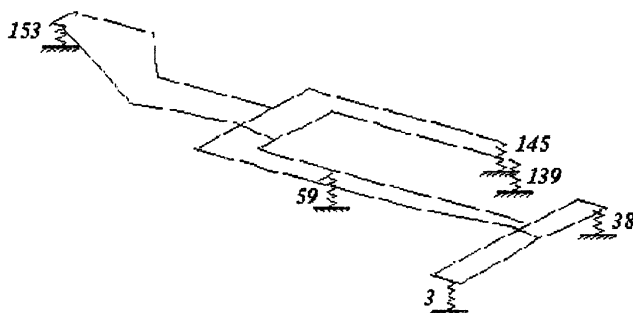


Рис. 5.1.

Система разбивалась на 155 конечных элементов, число узлов - 153. Узлы нумеровались с таким расчетом, чтобы минимизировать ширину ленты матриц жесткости и масс. Характеристики трубопровода: модуль упругости $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность материала $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, наружный диаметр стержней $D = 1,6 \cdot 10^{-2}$ м, внутренний диаметр $d = 1,4 \cdot 10^{-2}$ м. Трубопровод наполнен жидкостью с плотностью $\rho_{ж} = 10^3$ кг/м³. Закрепление - с помощью шести упругих опор в узлах 3, 38, 59, 139, 145, 153. Экспериментальные исследования реальных узлов закреп-

пления трубопровода показали, что можно учитывать только линейную жесткость в вертикальном направлении и угловую крутильную жесткость, а остальные 4 компоненты упругого шарнира считать равными бесконечности (абсолютно жесткая заделка). Линейные и угловые жесткости являются случайными величинами со средними значениями $m_c = 933,45$ кН/м, $m_\varphi = 0,27293$ кН·м.

Случайные колебания трубопровода возбуждаются через упругие опоры. Предполагается, что внешнее кинематическое воздействие представляет стационарный нормальный случайный процесс со спектральной плотностью в диапазоне 0..2000 Гц, график которой представлен на рис. 5.2. Все шесть опор двигаются по одинаковому закону.

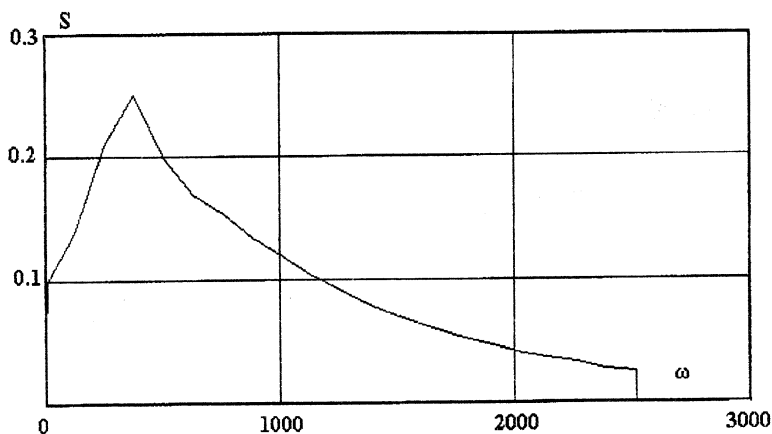


Рис. 5.2.

Как показали расчеты, спектр внешнего воздействия охватывает первые 10 собственных частот системы. На рис. 5.3-5.4 показаны формы колебаний системы на первых двух частотах - $\omega_1=608,3$ 1/с, $\omega_2=960,9$ 1/с. Анализ чувствительности собственных частот к изменению случайных параметров системы (таблица 5.1) показывает, что наиболее сильно на собственные частоты влияет параметр № 7 - линейная жесткость в вертикальном направлении в узле 59. Поэтому более подробные расчеты проводились именно для этого случайного параметра. На рис. 5.5 и 5.6 приведены нор-

мированные корреляционные функции и спектральные плотности 1-й обобщенной координаты. Среднеквадратическое отклонение параметра C_7 : $\sigma_{C_7} = 392$ кН/м. На рисунках кривая 1 соответствует детерминированным параметрам, а кривая 2 - случайным, наибольшие дисперсии интенсивностей напряжений появляются на 1-й собственной частоте. Высшие частоты практически не влияют на дисперсии напряжений. На 1-й частоте были получены следующие значения дисперсий напряжений: $\sigma_d^2 = 1354,2$ (МПа)² (без учета случайного параметра); $\sigma_r^2 = 1355,3$ (МПа)² (с учетом случайного параметра).

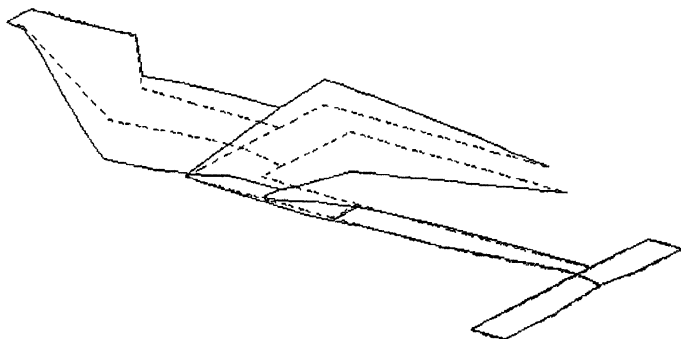


Рис. 5.3.

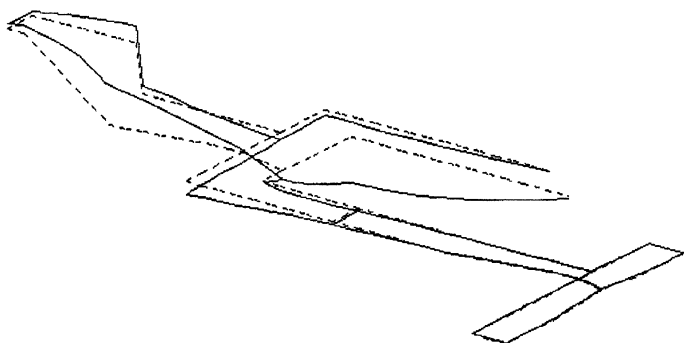


Рис. 5.4.

Таблица 5.1

Производные от собственных частот по варьируемым параметрам	$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_k}$	$\frac{\partial \omega_2}{\partial s_k}$	$\frac{\partial \omega_3}{\partial s_k}$	$\frac{\partial \omega_4}{\partial s_k}$	$\frac{\partial \omega_5}{\partial s_k}$
лин. жесткость в узле № 153	$4,815 \cdot 10^{-3}$	$1,455 \cdot 10^{-3}$	$2,569 \cdot 10^{-2}$	$2,726 \cdot 10^{-9}$	$1,346 \cdot 10^{-3}$
угл. жесткость в узле № 153	$7,590 \cdot 10^{-3}$	$6,392 \cdot 10^{-4}$	$4,663 \cdot 10^{-3}$	$1,483 \cdot 10^{-9}$	$5,026 \cdot 10^{-4}$
лин. жесткость в узле № 145	$1,344 \cdot 10^{-3}$	$1,381 \cdot 10^{-3}$	$5,689 \cdot 10^{-4}$	$1,442 \cdot 10^{-8}$	$8,965 \cdot 10^{-3}$
угл. жесткость в узле № 145	$7,731 \cdot 10^{-3}$	$3,068 \cdot 10^{-3}$	$2,375 \cdot 10^{-4}$	$8,986 \cdot 10^{-9}$	$4,611 \cdot 10^{-3}$
лин. жесткость в узле № 139	$2,351 \cdot 10^{-5}$	$6,994 \cdot 10^{-4}$	$1,367 \cdot 10^{-2}$	$5,644 \cdot 10^{-9}$	$1,092 \cdot 10^{-3}$
угл. жесткость в узле № 139	$1,110 \cdot 10^{-3}$	$5,308 \cdot 10^{-3}$	$9,890 \cdot 10^{-3}$	$5,371 \cdot 10^{-9}$	$8,948 \cdot 10^{-4}$
лин. жесткость в узле № 59	$1,890 \cdot 10^{-2}$	$1,936 \cdot 10^{-2}$	$1,165 \cdot 10^{-2}$	$3,158 \cdot 10^{-10}$	$6,288 \cdot 10^{-4}$
угл. жесткость в узле № 59	$2,135 \cdot 10^{-3}$	$1,049 \cdot 10^{-3}$	$1,952 \cdot 10^{-4}$	$1,584 \cdot 10^{-8}$	$4,894 \cdot 10^{-3}$
лин. жесткость в узле № 38	$7,136 \cdot 10^{-4}$	$4,605 \cdot 10^{-4}$	$1,019 \cdot 10^{-4}$	$3,279 \cdot 10^{-7}$	$4,999 \cdot 10^{-2}$
угл. жесткость в узле № 38	$3,408 \cdot 10^{-5}$	$2,090 \cdot 10^{-5}$	$5,021 \cdot 10^{-6}$	$2,273 \cdot 10^{-8}$	$1,992 \cdot 10^{-3}$
лин. жесткость в узле № 3	$2,832 \cdot 10^{-4}$	$1,817 \cdot 10^{-4}$	$6,697 \cdot 10^{-5}$	$5,899 \cdot 10^{-7}$	$3,062 \cdot 10^{-2}$
угл. жесткость в узле № 3	$4,367 \cdot 10^{-5}$	$2,623 \cdot 10^{-5}$	$6,754 \cdot 10^{-6}$	$3,377 \cdot 10^{-8}$	$2,788 \cdot 10^{-3}$

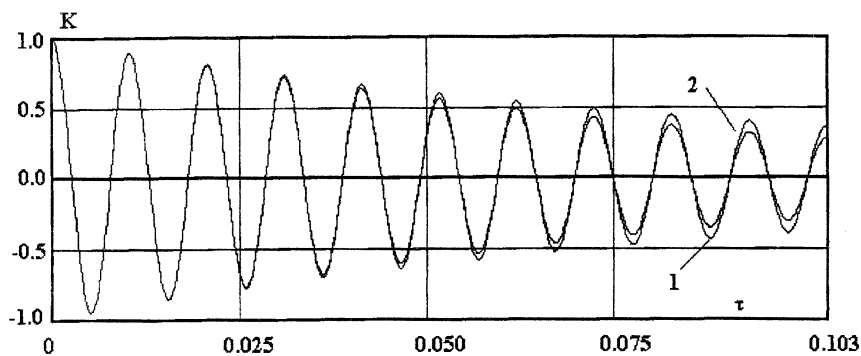


Рис. 5.5.

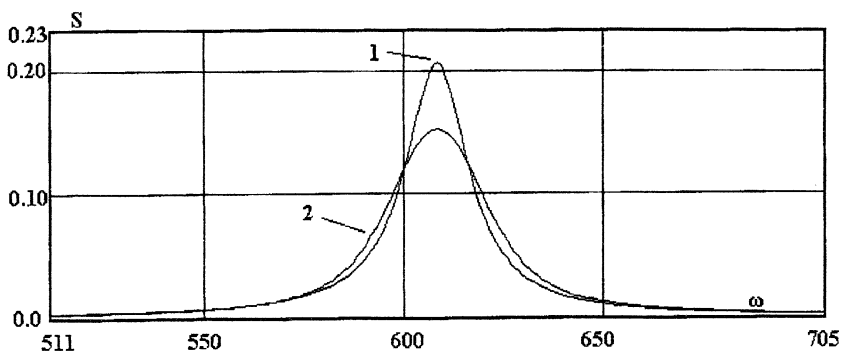


Рис. 5.6.

Задача определения показателей надежности решалась при следующих значениях постоянных материала: предел выносливости $\sigma_{-1} = 33$ МПа, степень кривой усталости $r_1=8$ при $10^5 < N < 10^7$ и $r_2=2$ при $N < 10^5$. На рис. 5.7 представлены графики ВБР $P(t)$ (кривые 1) и ПВО $q(t)$ (кривые 2).

Проведенные расчеты свидетельствуют о нечувствительности моментных характеристик (в частности, дисперсий) параметров НДС к случайному разбросу значений параметров конструкций и о существенном его влиянии на следующие вероятностные характеристики: корреляционная функция и спектральная плотность; ВБР и ПВО.

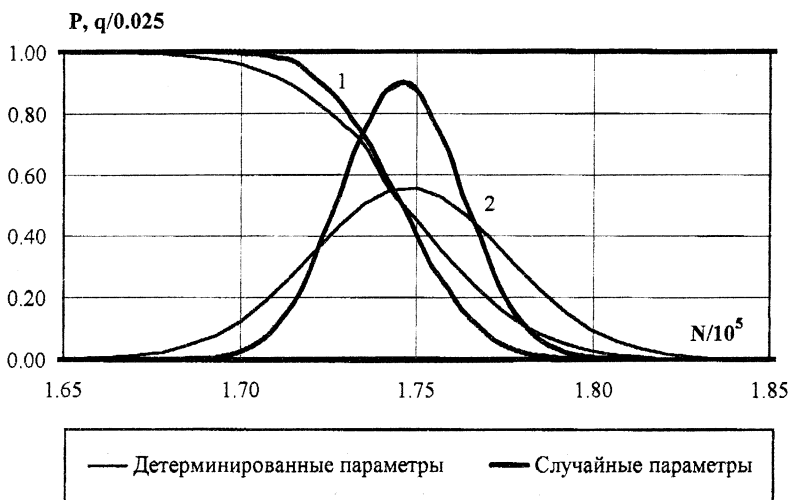


Рис. 5.7.

5.1.2. Уруго-пластические системы

Проведено численное исследование собственных колебаний, вынужденных случайных колебаний, показателей надежности при малоциклового усталости пространственных стержневых систем с учетом пластического деформирования материала конструкции. Выполнены тестовые расчеты и расчет элемента маслопровода турбинной установки (К-550-6.5).

На рис. 5.37, 5.40 приведены графики плотности вероятности амплитуды обобщенной координаты $f(\lambda)$ стержня прямоугольного поперечного сечения, имеющего шарнирные опоры на краях и нагруженного равномерно распределенной по пространственной координате и случайной (типа «белого шума») по временной координате нагрузкой. Характеристики стержня: размеры поперечного сечения $b=h=0,02$ м, длина $L=0,3$ м, погонная масса $q=3,12$ кг/м, $E_1=2,01 \cdot 10^5$ МПа. На рис. 5.37 приведены сравнительные графики плотностей $f(\lambda)$, полученных на основе рассмотрения системы с распределенными параметрами и конечноэлементной системы при разбивке стержня на 12 элементов для $\varepsilon_1=2,5 \cdot 10^{-3}$ и $E_1/E_2=10$. Как видно из рисунка, приведенное конечноэлементное разбиение дает хорошее сов-

падение результатов для двух рассматриваемых моделей. На рис. 5.40 решения получены для предела текучести $\varepsilon_1=9,5 \cdot 10^{-4}$ и различных соотношений модулей упругости E_1/E_2 . Плотности вероятности амплитуд деформаций в заданных точках определяются путем введения масштабного множителя, получаемого из линейной зависимости между амплитудами деформаций и обобщенной координаты. На рисунках кривая 3 соответствует упругому деформированию материала конструкции, а 1 и 2 - упруго-пластическому.

Были получены плотности вероятности амплитуд деформаций маслопровода в пределах напорных маслобаков турбинной установки К-550-6.5 при случайном кинематическом воздействии в виде белого шума. Длина маслопровода 3,61 м, диаметр сечения 0,219 м, толщина стенки 0,009 м, погонная масса 7,96 кг/м. На рис 5.45-5.46 представлены графики ВБР $P(t)$ (кривые 1) и ПВО $q(t)$ (кривые 2) в случае много- и малоциклового усталости ($m_1=2$, $m_2=4$, $N_T=10^5$, $\varepsilon_1=2,5 \cdot 10^{-3}$, $E_1/E_2=10$) для детерминированной кривой усталости при различных декрементах колебаний $G=5 \cdot 10^{-2}$ (рис. 5.45) и $G=5 \cdot 10^{-3}$ (рис. 5.46). На рис. 5.47 и 5.48 представлены аналогичные показатели надежности для вероятностной кривой усталости с лог-нормальной плотностью вероятности предела выносливости, СКО которого равно $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,05$ и $\sigma_{lg\sigma_{-1}}=0,1$. На рис 5.49 представлены графики ВБР $P(t)$ и ПВО $q(t)$ для детерминированных кривых усталости с учетом пластических деформаций (кривая 3) и без учета (кривые 1 и 2). Кривая 1 получена для интенсивности внешнего воздействия в 2 раза большей, чем для кривых 2 и 3.

Проведенные численные исследования свидетельствуют о том, что учет пластических свойств материала рассматриваемых конструкций существенно влияет на вероятностные характеристики параметров НДС и показатели надежности. Уменьшение максимальных амплитуд деформаций (напряжений) по сравнению с упругим деформированием чувствительно к характеристикам кривой циклического деформирования. Разработанный подход решения задач статистической динамики стержневых систем на основе МКЭ дает хорошее совпадение вероятностных характеристик параметров НДС, полученных для конечноэлементных моделей и систем с распределенными параметрами.

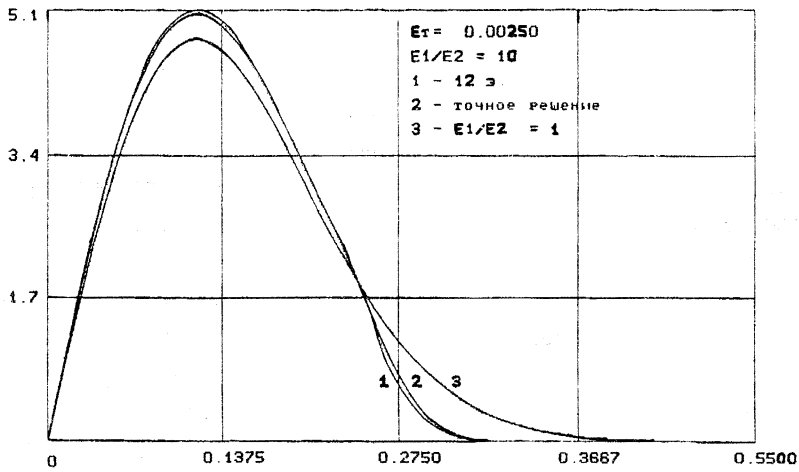


Рис. 5.8.

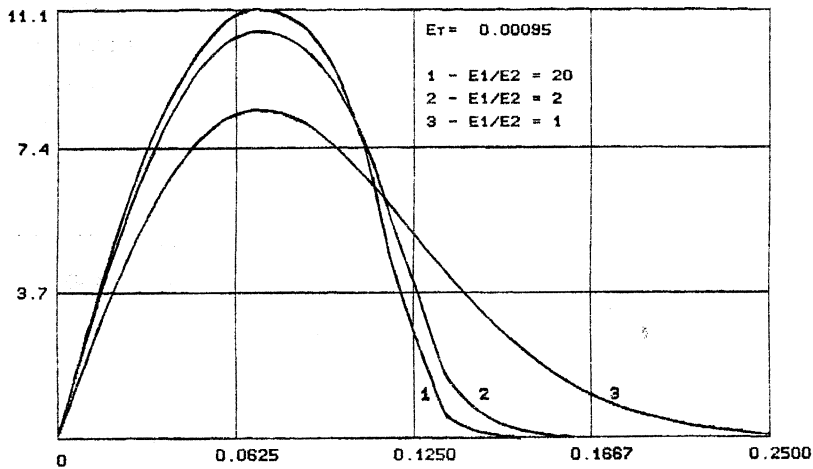


Рис. 5.9.

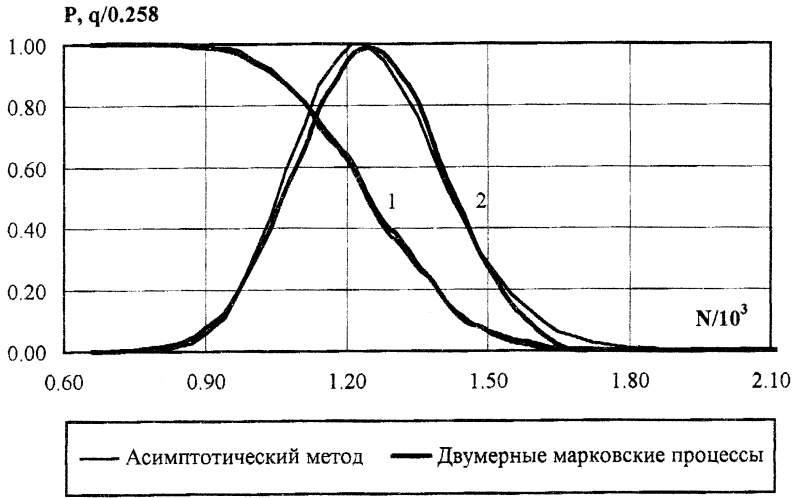


Рис. 5.10.

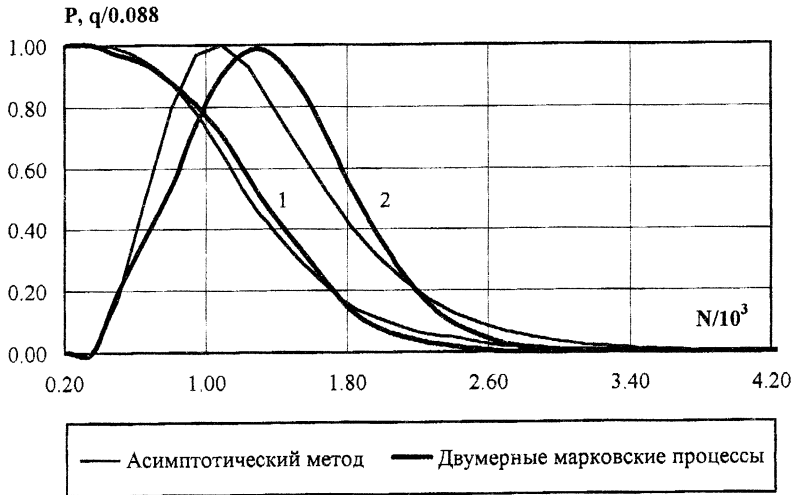


Рис. 5.11.

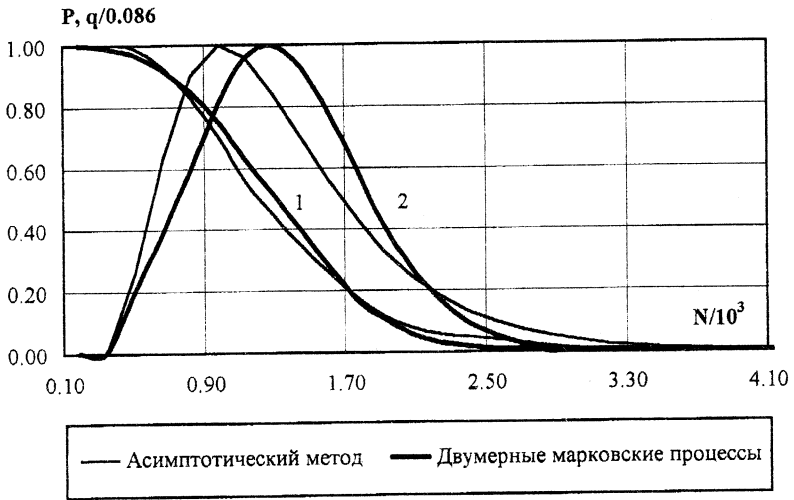


Рис. 5.12.

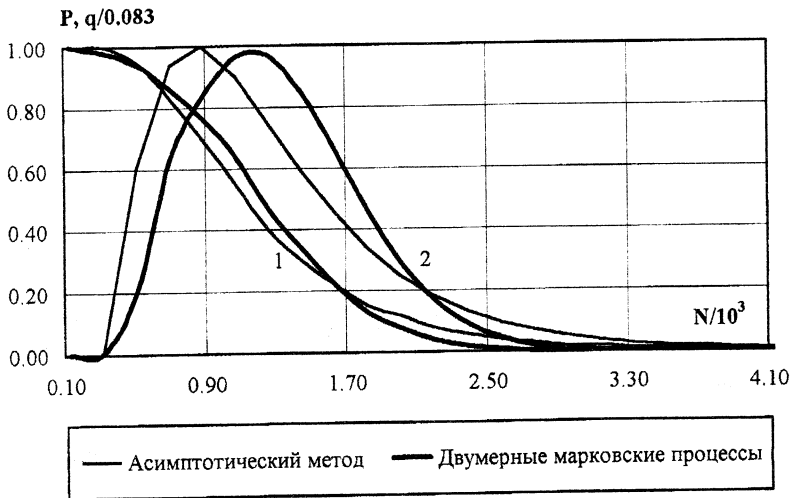


Рис. 5.13.

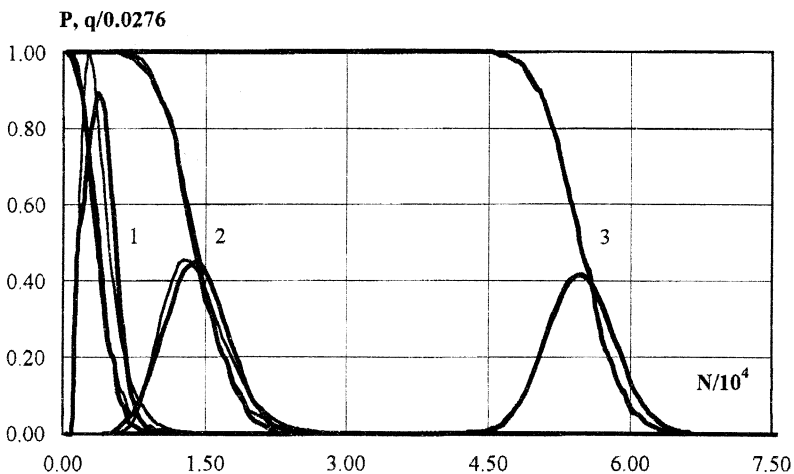


Рис. 5.14.

5.2. Клепаные панели обшивки летательного аппарата

Силовые схемы современных конструкций ЛА состоят из неоднородных тонкостенных элементов (пластин, оболочек, стержней), которые являются очень восприимчивыми к акустическим воздействиям, представляющим случайное поле. Высокие уровни этих воздействий, которые особенно характерны для космических ЛА [1, 14, 62] приводят к интенсивным вибрациям элементов панелей и во многом определяют усталостную прочность рассматриваемых конструкций. Известны разрушения участков обшивки под действием акустического давления, причем уровень акустической нагрузки, превышающий 150 Дб, был признан опасным для прочности панелей обшивки ЛА [14]. К настоящему времени уровень акустических воздействий может превосходить 170 Дб, а в ближнем акустическом поле зарегистрированы давления до 180 Дб.

Для клепаных панелей ЛА в наиболее неблагоприятных с точки зрения усталостной прочности находятся компенсаторы (рис. 5.15), соединяющие обшивку с несущими элементами и испытывающие сложное на-

гружение, которое формируется в результате деформации всей панели при одновременном действии акустических давлений и статических усилий. В работах [1, 14, 59] указывается на эффективность применения МКЭ и МСЭ для решения задач статики и динамики данных конструкций. Поскольку для прогнозирования надежности панелей при усталостных отказах необходимо рассчитывать вероятностные характеристики параметров НДС отдельных элементов с высокой степенью точности, то для этого понадобилась бы очень мелкая сетка разбиения на конечные элементы. Для избежания этого рассматриваются многоуровневые модели: модель первого уровня представляет всю панель, которая рассматривается как коробчатая конструкция в виде набора пластин, модель второго уровня - компенсаторы, которые представляют пластинчатую конструкцию, состоящую из горизонтальной полки и вертикальной стенки. Исходные данные для расчета модели второго уровня определяются из решения задачи статистической динамики модели первого уровня, для которой вероятностные характеристики внешнего акустического и статического воздействия считаются заданными. По результатам расчета вероятностных характеристик параметров НДС модели второго уровня и вероятностным характеристикам сопротивления усталости, получаемым экспериментально, на основе разработанной в четвертой главе методики осуществляется прогноз надежности при усталостных отказах клепаных панелей ЛА.

Предполагается, что панель находится при комплексном внешнем воздействии, которое включает:

- статическую нагрузку, представляющую распределенные усилия в срединной поверхности и распределенное давление отрыва внешней обшивки;
- акустическое воздействие, представляющее случайное по пространственным координатам и времени поле пульсаций давления звукового диапазона частот.

Случайное поле считается стационарным по времени и однородным по пространственным координатам.

Задача статистической динамики клепаной панели решается в два этапа. На первом этапе решается задача статики и случайных колебаний в рамках корреляционной теории для всей панели (модель первого уровня).

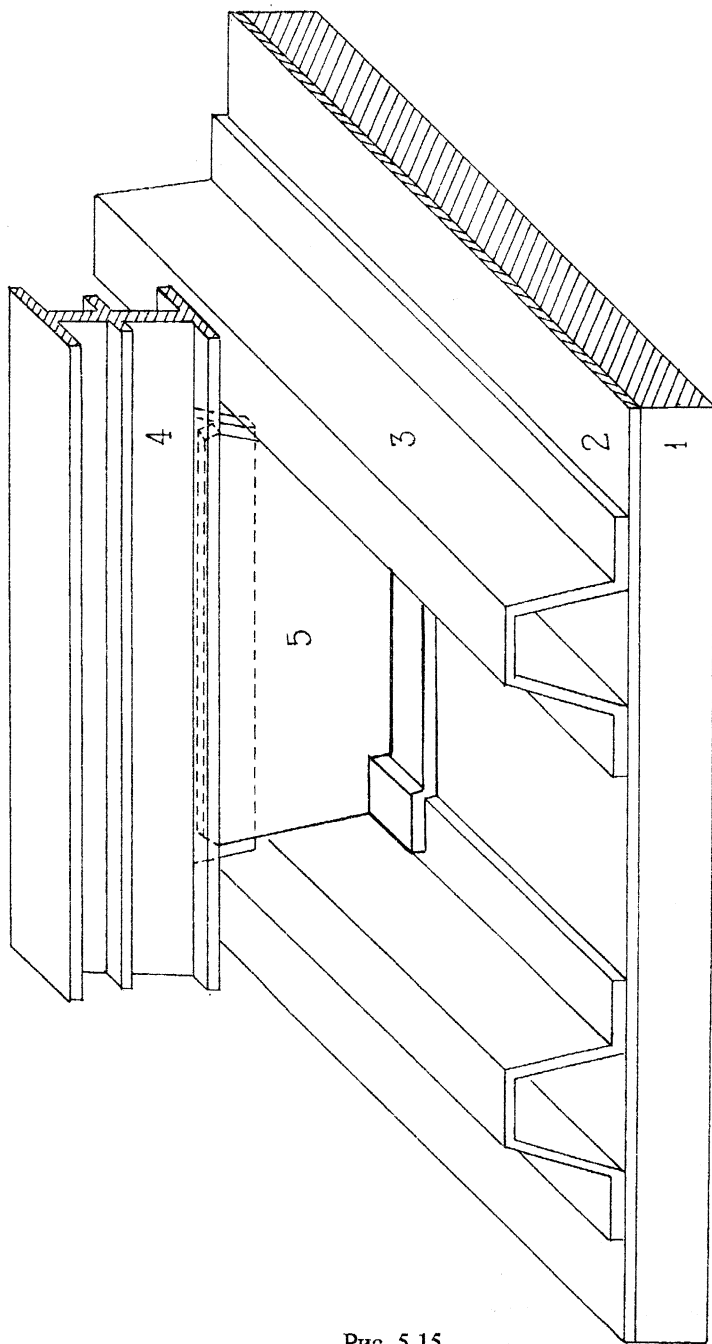


Рис. 5.15.

двух осей симметрии в конструкции позволяет рассматривать ее четвертую часть. Закрепление панели по контуру имитируется с помощью пружин конечной жесткости, расположенных вдоль осей координат в трех направлениях. Значения жесткостей пружин определяются из условия совпадения низших собственных частот, полученных экспериментально. Для определения параметров НДС панели при статической нагрузке и их вероятностных характеристик при случайном воздействии применялся МСЭ, в соответствии с которым исследуемая конструкция представляется в виде набора прямоугольных конечных элементов, учитывающих деформации растяжения-сжатия, изгиба, и различным образом расположенных в пространстве. В каждом из четырех узлов конечного элемента шесть степеней свободы - три перемещения и три угла поворота. Общее число конечных элементов - 240, количество разновидностей в зависимости от линейных размеров и расположения в пространстве - 38, общее число узлов - 241.

При расчете вероятностных характеристик параметров НДС панели применялся МСЭ, позволяющий более эффективно по сравнению с МКЭ решать статические и динамические задачи для конструкций сложной структуры с большим числом степеней свободы. После исключения внутренних, с точки зрения МСЭ, узлов, остается 141 узел с 431 степенью свободы. Учет внешнего теплоизоляционного покрытия производился путем введения дополнительных сосредоточенных масс в узлах.

На втором этапе по исходным данным, полученным в результате решения соответствующей задачи первого уровня, проводился уточненный расчет НДС отдельных, наиболее напряженных элементов конструкции (модель второго уровня). В качестве таких элементов рассматривались компенсаторы (см. рис. 5.15), которые рассматривались как составная пластинчатая конструкция, состоящая из горизонтальной полки и вертикальной стенки. Для расчета компенсаторов применялся МКЭ в форме перемещений. В качестве конечного элемента использовался тонкий, произвольно ориентированный в пространстве плоский треугольник, учитывающий растяжение-сжатие и изгиб. В каждом из трех узлов конечного элемента шесть степеней свободы - три перемещения и три угла поворота. Динамическая задача для компенсатора решалась в квазистатической постановке. Внешнее воздействие на компенсатор может быть как силовым (распределенные и сосредоточенные усилия), так и кинематическим (перемещения и углы поворота). В данном случае реализован вариант, когда в

качестве исходных данных взяты узловые перемещения, полученные в результате расчета панели на первом этапе. При этом перемещения, рассчитанные для всей панели, во внутренних узлах, совпадающих с узлами компенсатора, задавались в качестве исходного кинематического воздействия при расчете отдельного компенсатора. Всего таких точек, в которых задаются перемещения и которые совпадают с узлами панели - 12 (9 на полке и 3 на верхней грани стенки). Так как сетка разбиения компенсатора мельче сетки разбиения панели, то перемещения промежуточных узлов задавались в соответствии с функциями перемещений - на прямой между двумя заданными узловыми перемещениями проводилась линейная интерполяция, а при трех заданных узловых перемещениях - квадратичная.

По полученным узловым перемещениям компенсатора определяются вероятностные характеристики деформаций и компонент напряжений в центре конечных элементов σ_x , σ_y , τ_{xy} на обеих его поверхностях, то есть при $z=\pm h/2$. Затем в соответствии с методикой, изложенной в разделе 3.2, определялись вероятностные характеристики интенсивностей напряжений

$$\sigma_i = \left(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2 \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

На всех рисунках, приведенных в дальнейшем и относящихся к компенсатору, представлена максимальная из четырех величин интенсивностей напряжений - при $z=\pm h/2$ в двух соседних треугольных элементах, на которые был разбит четырехугольный элемент.

На основе методики, изложенной в четвертой главе, решается задача определения показателей надежности клепаной панели при статическом и акустическом нагружении и отказах, происходящих в результате многоциклового усталости. Использовалось кинетическое уравнение для описания меры повреждений (3.2), что соответствует линейной гипотезе суммирования повреждений. В качестве параметра $\lambda(t)$, характеризующего НДС в заданной точке конструкции, берется максимальная амплитуда интенсивности напряжений $\sigma_i(t)$ с учетом ее статической составляющей σ_m

$$\lambda(t) = \sigma_i(t) + \phi \sigma_m, \quad (5.2)$$

где $\sigma_i(t)$ - амплитуда динамической составляющей интенсивности напряжений; σ_m - статическая составляющая интенсивности напряжений; ϕ - коэффициент чувствительности к асимметрии цикла.

Вероятностные характеристики $\sigma_i(t)$ и значение σ_m определялись в результате решения задачи статистической динамики в соответствии с алгоритмом, изложенном в предыдущем разделе, для моделей первого и второго уровней. В качестве расчетных брались интенсивности напряжений в наиболее нагруженных областях панели ЛА.

Рассматривалось вероятностное значение кривой усталости в виде нормального закона распределения десятичного логарифма предела выносливости σ_1 в виде (3.49).

В соответствии с вышеизложенными методиками и разработанным на их основе программным обеспечением для ПЭВМ были проведены численные исследования по определению вероятностных характеристик параметров НДС и показателей надежности клепаной панели ЛА с учетом статической и акустической нагрузок и усталостных отказов.

Первая серия расчетов относится к исследованию собственных колебаний клепаной панели как модели первого уровня. Определялись две собственные частоты, соответствующие первой и второй симметричным формам колебаний панели, при различных жесткостях опор. Для идентификации параметров рассматриваемой модели клепаной панели ЛА и оценки точности результатов расчетных исследований проводились экспериментальные исследования на испытательном комплексе, который включает электродинамический вибростенд ВЭДС-1500 и аппаратуру для испытания на случайную нагрузку "Тапир". Были проведены исследования по определению собственных частот и вероятностных характеристик параметров НДС панели. Из сопоставления найденных собственных частот с результатами эксперимента можно определить действительную жесткость упругих опор.

На рис. 5.16, 5.17 показаны первая и вторая формы колебаний двух (№ 1 и № 2) наиболее нагруженных компенсаторов, рассматриваемых в рамках модели первого уровня (число конечных элементов равно 6), в местной системе координат. Из рисунков следует, что компенсаторы деформируются сложным образом, испытывая одновременно изгиб, кручение, растяжение-сжатие и довольно трудно выделить преобладающий вид деформирования.

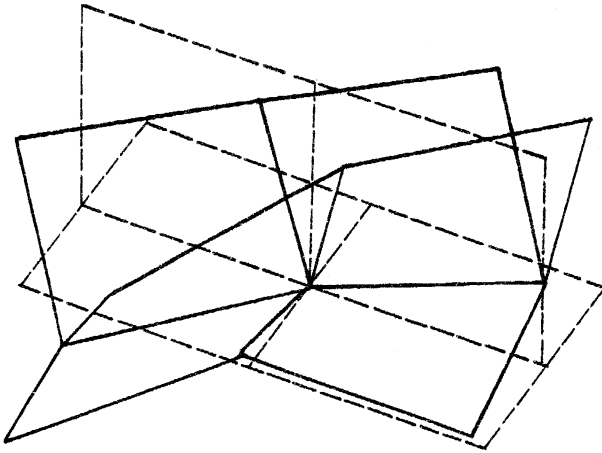
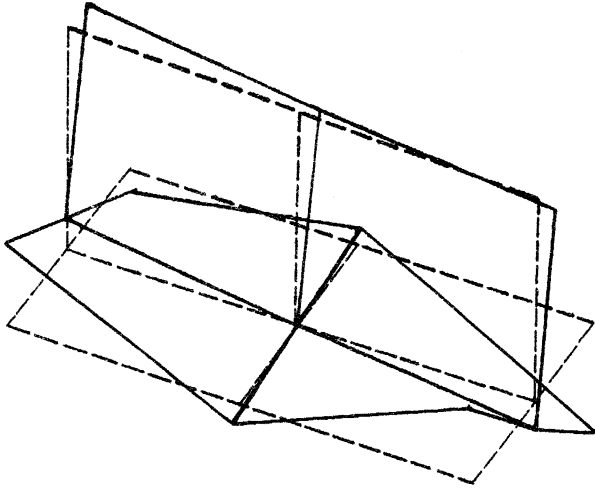


Рис. 5.16.

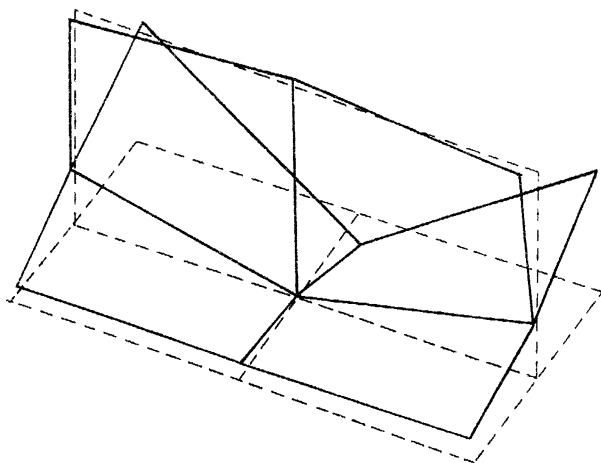
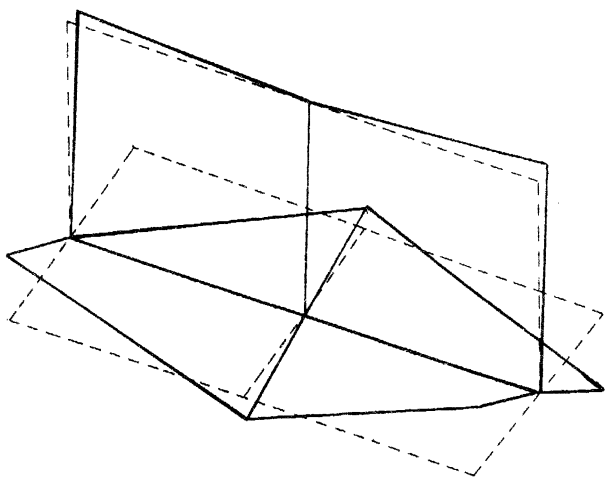


Рис. 5.17.

Результаты расчета максимальных интенсивностей напряжений, выраженных в МПа, компенсатора № 1 (полка и стенка) от действия статической нагрузки, представляющей распределенные усилия в срединной поверхности с интенсивностью 100 МПа и давление отрыва внешней обшивки с интенсивностью 0.002 МПа, представлены на рис. 5.18 и 5.19. В указанном компенсаторе наблюдаются наибольшие значения интенсивностей напряжений. Форма перемещений панели при статическом нагружении качественно совпадает с ее первой формой собственных колебаний. На рисунках приведены максимальные интенсивности напряжений, полученные с использованием так называемой стандартной расчетной схемы (152 элемента, 94 узла). Были проведены расчеты с различными сетками разбиения для модельного нагружения: стандартная сетка разбиения; сетка разбиения - 160 элементов, 100 узлов; сетка разбиения - 254 элемента, 143 узла. Сравнение результатов численных исследований показало их удовлетворительное совпадение, что позволяет использовать крупную (стандартную) сетку разбиения для проводимых исследований. Проведенные расчеты свидетельствуют, что для всех компенсаторов наиболее напряженной является полка, а наиболее напряженным местом в компенсаторах является область перегиба полки, прилегающая к границе. Однако необходимо учитывать, что приведенные выводы справедливы для номинальных напряжений и возможно повышение напряжений вследствие концентрации в областях сопряжения полки и стенки.

На рис. 5.20 приведены максимальные СКО интенсивностей напряжений, выраженных в МПа, в компенсаторе № 1 для полки (соответственно: результаты расчета для логарифмического декремента колебаний $G = 0.02$ и $G = 0.08$), а на рис.5.21 для стенки (результаты расчета для $G = 0.02$ и $G = 0.08$) с учетом только первой формы колебаний. Аналогичные расчеты были проведены для второй осесимметричной формы колебаний для тех же значений логарифмического декремента. Из проведенных численных исследований следует, что влияние второй осесимметричной формы на НДС компенсатора № 1 незначительное, а для компенсаторов № 2 влияние двух форм соизмеримо и при расчете ресурса и надежности этих элементов необходимо учитывать вклад каждой формы в повреждаемость.

Характер распределения максимальных СКО интенсивностей напряжений при акустическом воздействии аналогичен статическому нагружению.

Наиболее напряженными областями стенки для всех компенсаторов при любом типе нагрузок являются наружные области, прилегающие к полке. Абсолютные значения характеристик НДС стенки при всех типах нагружения меньше аналогичных характеристик для полки.

Проведенные численные исследования свидетельствуют о том, что для расчета ресурса и надежности компенсаторов недостаточно рассматривать случайные колебания только по первой форме, необходимо учитывать и высшие формы колебаний.

Проведена серия численных исследований показателей надежности при усталостных отказах с использованием результатов статических и динамических расчетов наиболее нагруженного элемента клепаной панели (компенсатор № 1) с учетом статической составляющей и статистического разброса пределов выносливости кривых усталости. Наиболее нагруженные области компенсаторов, полученные расчетным путем, совпадают с областями возникновения усталостных трещин, которые возникали при экспериментальных исследованиях компенсаторов на усталостную прочность.

На рис. 5.22 и 5.23 представлены ВБР $P(t)$ (кривые 1) и ПВО $q(t)$ (кривые 2) для 1-го компенсатора - $\sigma_i = 92$ МПа (1 форма, $\omega_1 = 103$ Гц); $\sigma_i = 14$ МПа (2 форма, $\omega_2 = 192$ Гц) с учетом вероятностной кривой усталости с лог-нормальным законом предела выносливости при СКО, соответственно равно $\sigma_{lg\sigma_{-1}} = 0,05$ и $\sigma_{lg\sigma_{-1}} = 0,1$. На рис. 5.24 и 5.25 изображены аналогичные показатели надежности при увеличенной в 2 раза интенсивности внешнего воздействия при соответственно $\sigma_{lg\sigma_{-1}} = 0,05$ и $\sigma_{lg\sigma_{-1}} = 0,1$.

Проведенные расчеты свидетельствуют о возможности применения нормального закона для описания меры повреждения для интересующих ресурсов работы. Полученные значения показателей надежности согласуются с нормами, действующими на этапе конструкторско-технологической доводки рассматриваемых ЛА.

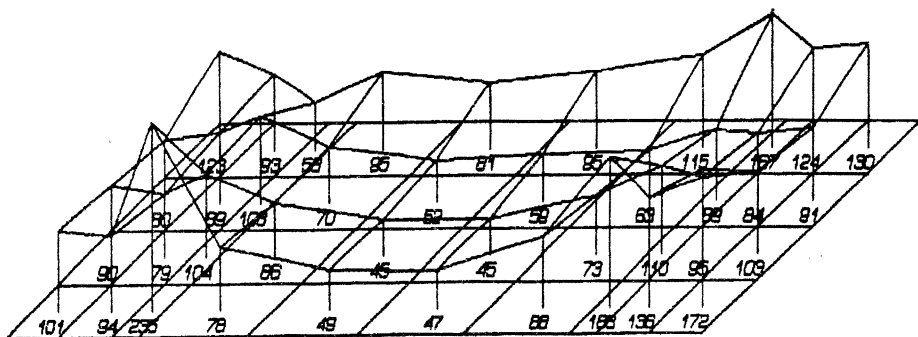


Рис. 5.18.

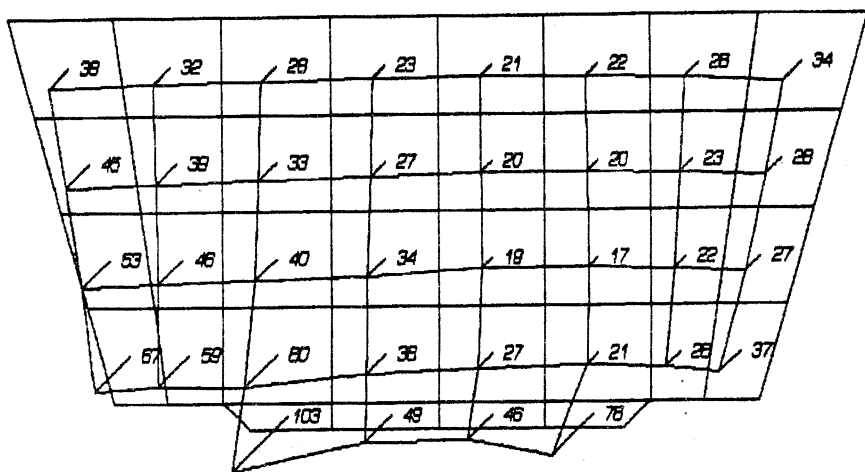


Рис. 5.19.

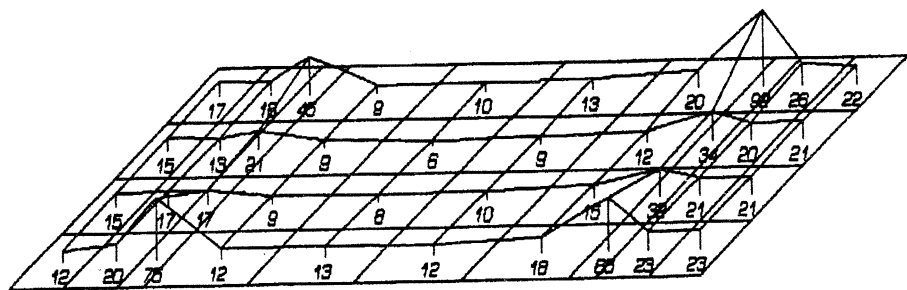
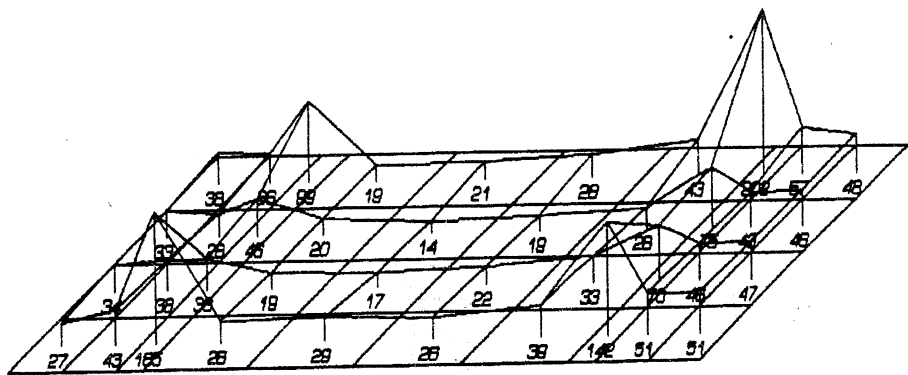


Рис. 5.20.

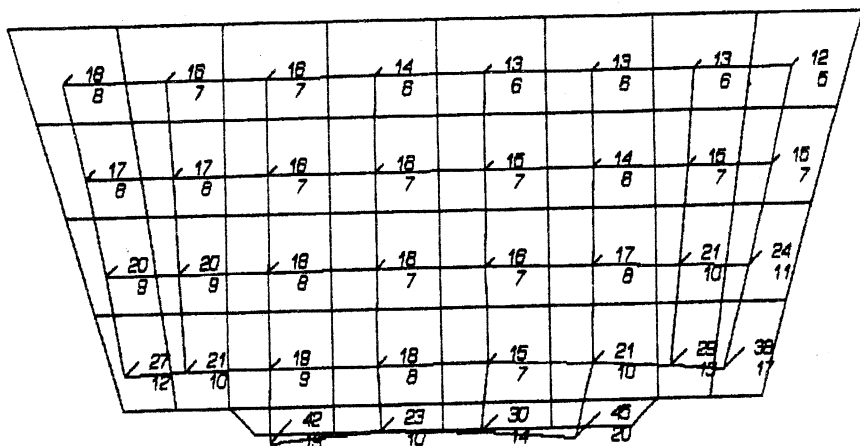


Рис. 5.21.

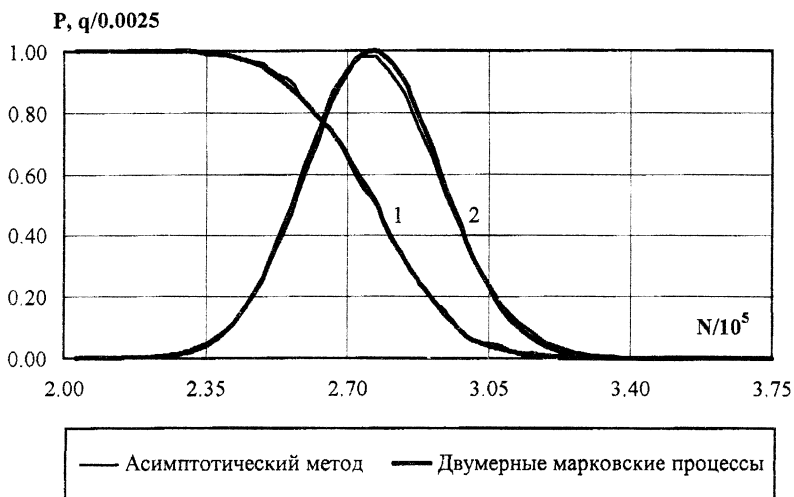


Рис. 5.22.

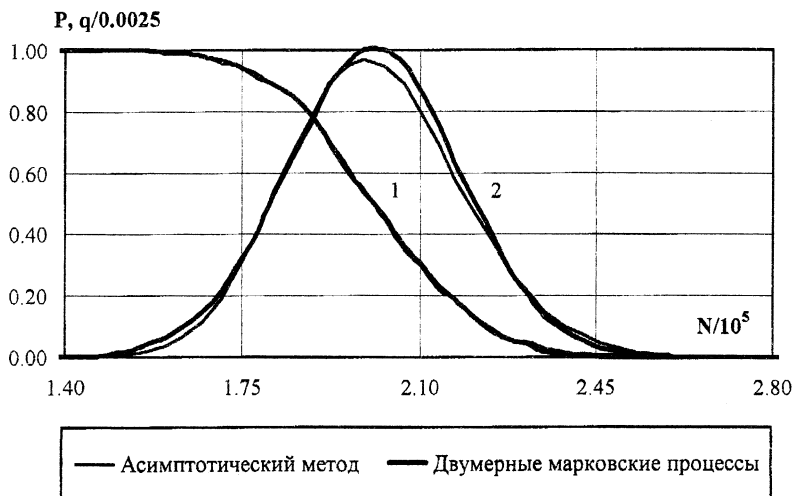


Рис. 5.23.

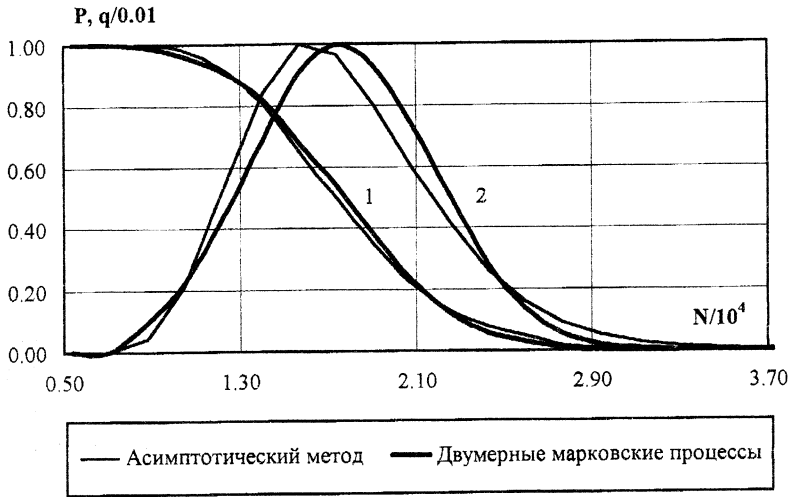


Рис. 5.24.

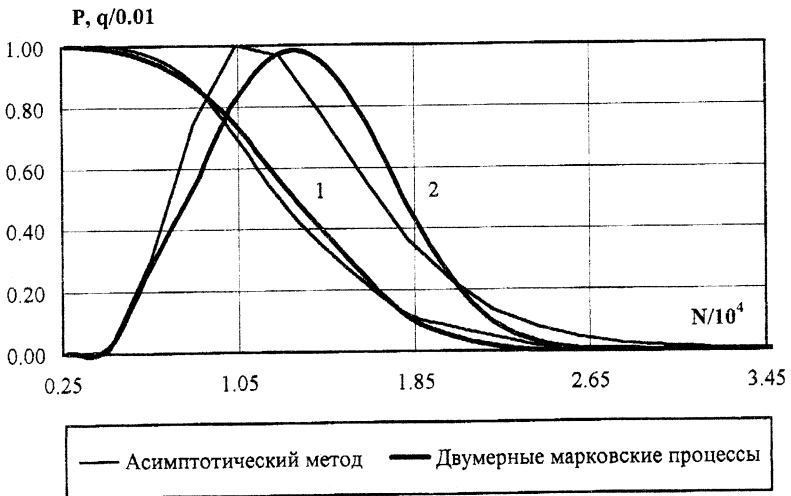


Рис. 5.25.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов В.П., Вронский Г.В., Ильичев В.Д., Стрелин А.В. Исследование напряженного состояния и усталостной прочности пространственных подкрепленных оболочечных конструкций при внешнем аэродинамическом воздействии акустического типа // Сб. работ.-М.: ЦАГИ, 1982.-С. 12-37.-(Тр. Центр. аэрогидродин. ин-та им. Н.Е.Жуковского; Вып. 2123).
2. Анілович В.Я., Грінченко О.С., Карабін В.В. Міцність та надійність машин.-К.: Урожай, 1996.-288 с.
3. Анилович В.Я. и др. Прогнозирование надежности тракторов / Анилович В.Я., Гринченко А.С., Литвиненко В.Л., Чернявский И.Ш. Под общ. ред. Аниловича В.Я.-М.: Машиностроение, 1986.-220 с.
4. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ.-М.: Мир, 1982.-488 с.
5. Биргер И.А. Детерминированные и статистические модели усталостной прочности // Проблемы прочности.-1982.-№ 4.-С. 24-28.
6. Биргер И.А. Применение теории случайных процессов для описания разрушения // Прочность материалов и конструкций.-К.: Наукова думка, 1975.-С. 297-314.
7. Благовещенский Ю.Н. Анализ некоторых моделей усталостных повреждений с единой точки зрения // Заводская лаборатория.-1972.-№ 3.-С. 311-318.
8. Бойцов Б.В. Прогнозирование долговечности напряженных конструкций: Комплексное исследование шасси самолета.-М.: Машиностроение, 1985.-232 с.
9. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.-М.: Стройиздат, 1971.-312 с.
10. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций.-М.: Машиностроение, 1984.-312 с.
11. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем.-М.: Наука, 1979.-335 с.
12. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций.-М.: Машиностроение, 1990.-448 с.
13. Болотин В.В., Ермоленко А.Ф. Исследование моделей накопления усталостных повреждений // Расчеты на прочность: Сб. ст.-М.: Машиностроение.-1979.-Вып. 20.-С. 3-29.
14. Валяев В.И. О влиянии акустического воздействия на колебания отсека крыла самолета // Сб. работ.-М.: ЦАГИ, 1982.-С. 3-11.-(Тр. Центр. аэрогидродин. ин-та им. Н.Е.Жуковского; Вып. 2123).
15. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа.-М.: Наука, 1976.-416 с.
16. Воробьев Ю.С., Кабанов А.Ф., Хан В.В. Исследование надежности рабочих лопаток паровых турбин // Динамика и прочность машин: Респ. междувед. науч.-техн. сб.-Харьков, 1988.-Вып. 48.-С. 62-69.
17. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы.-М.: Мир, 1984.-428 с.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.-М.: Наука, 1988.-552 с.
19. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках.-М.: Мир, 1986.-528 с.
20. Гладкий В.Ф. Вероятностные методы проектирования конструкций летательного аппарата.-М.: Наука, 1982.-272 с.
21. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики.-М.: Высшая школа, 1971.-328 с.

22. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках.-М.: Машиностроение, 1989.-248 с.
23. Гусев А.С., Светлицкий В.А. Расчет конструкций при случайных воздействиях.-М.: Машиностроение, 1984.-240 с.
24. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.-М.: Наука, 1980.-368 с.
25. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ.-М.: Наука, 1987.-240 с.
26. Жовдак В.А., Кириллова Н.А. Решение задачи статистической динамики на основе модифицированного метода неканонического разложения // Динамика и прочность машин: Респ. междувед. науч.-техн. сб.-Харьков, 1982.-Вып. 36.-С. 93-97.
27. Жовдак В.А., Мищенко И.В. Применение двумерных марковских моделей к решению задач надежности при узкополосном случайном нагружении // Динамика и прочность машин: Респ. междувед. науч.-техн. сб.-Харьков, 1993.-Вып. 53.-С. 161-172.
28. Жовдак В.А., Мищенко И.В. Решение задачи надежности элементов конструкций при случайном воздействии с учетом различных факторов // Динамика и прочность машин: Респ. междувед. науч.-техн. сб.-Харьков, 1993.-Вып. 55.-С. 169-181.
29. Жовдак В.А., Трубаев А.И. Решение задачи статистической динамики трубопроводов при сейсмическом воздействии // Динамика и прочность машин: Респ. междувед. науч.-техн. сб.-Харьков, 1986.-Вып. 44.-С. 90-94.
30. Жовдак В.А., Трубаев А.И. Прогнозирование ресурса трубопроводов при случайном возбуждении // Известия ВУЗов: Машиностроение.-М., 1987.-Вып. 6.-С. 24-28.
31. Казаков И.Е. Статистические методы проектирования систем управления.-М.: Машиностроение, 1969.-262 с.
32. Катт Т.В., Биник М.П. Оценка накопления повреждений и долговечности при усталости // Аэрокосмическая техника.-1988.-№ 12.-С. 186-195.
33. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени.-М.: Машиностроение, 1977.-232 с.
34. Когаев В.П., Дроздов Ю.Н. Прочность и износостойкость деталей машин.-М.: Высшая школа, 1991.-318 с.
35. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П.. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность.-М.: Машиностроение, 1985.-224 с.
36. Козлов Л.А., Балашов Б.Ф. Вероятностная оценка характеристик сопротивления усталости и действующих напряжений в деталях машин в связи с расчетом на прочность при малоцикловом нагружении // Проблемы прочности.-1983.-№ 5.-С. 59-64.
37. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение.-М.: Мир, 1984.-624 с.
38. Кузьменко В.А., Васинюк И.М., Крук Б.З. Многоцикловая усталость при переменных амплитудах напряжения.-К.: Наукова думка, 1986.-264 с.
39. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.-М.: Радио и связь, 1989.-656 с.
40. Лукинский В.С., Зайцев Е.И. Прогнозирование надежности автомобилей.-Л.: Политехника, 1991.-224 с.
41. Макаров Б.П. Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов.-М.: Машиностроение, 1983.-262 с.

42. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность.-М.: Машиностроение, 1981.-272 с.
43. Механика малоциклового разрушения / Махутов Н.А., Бурак М.И., Гаденин М.М. и др.-М.: Наука, 1986.-264 с.
44. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.-М.: Наука, 1974.-503 с.
45. Николаенко Н.А., Ульянов С.В. Статистическая динамика машиностроительных конструкций.-М.: Машиностроение, 1977.-368 с.
46. Оболенский Е.П., Сахаров Б.И., Стрекозов Н.П. Прочность агрегатов оборудования и элементов систем жизнеобеспечения ЛА.-М.: Машиностроение, 1989.-248 с.
47. Павлов П.А. Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность.-Л.: Машиностроение, Ленингр. отд.-1988.-252 с.
48. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Ковчик С.Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов.-К.: Наукова думка, 1977.-277 с.
49. Переверзев Е.С. Надежность и испытания технических систем.-К.: Наукова думка, 1990.-328 с.
50. Переверзев Е.С., Чумаков Л.Д. Параметрические модели отказов и методы оценки надежности технических систем. -К.: Наукова думка, 1989.-184 с.
51. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии.-К.: Наукова думка, 1976.-415 с.
52. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов.-К.: Наукова думка, 1988.-736 с.
53. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.-Л.: Судостроение, 1974.-344 с.
54. Проников А.С. Надежность машин.-М.: Машиностроение, 1978.-592 с.
55. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем.-М.: Машиностроение, 1991.-320 с.
56. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность.-М.: Машиностроение, 1983.-232 с.
57. Симбирский Д.Ф. Оптимальный выбор измеряемых параметров при идентификации ГТД // Известия ВУЗов:Авиационная техника.-М., 1990.-Вып. 1.-С. 57-62.
58. Слепян Л.И., Троянкина Л.В. К теории роста трещины при циклических нагрузках // Механика твердого тела.-№ 5.-1983.-С. 113-126.
59. Случайные колебания панелей летательных аппаратов / Жовдак В.А., Иглин С.П., Мищенко И.В. и др. // Динамика и прочность машин: Респ. межвед. науч.-техн. сб.-Харьков, 1993.-Вып. 54.-С.175-182.
60. Статистические методы для ЭВМ / Под ред. К.Энслейна, Э.Рэлстона. Г.С.Уилфа.-М.: Наука, 1986.-464 с.
61. Стрельников В.П. Приложение теории марковских процессов к исследованию усталостной долговечности // Проблемы прочности.-1986.-№ 2.-С. 13-17.
62. Тейлор Д. Нагрузки, действующие на самолет.-М.: Машиностроение, 1971.-372 с.
63. Тимашев С.А. Надежность больших механических систем.-М.: Наука, 1982.-184 с.
64. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника.-М.: Радио и связь, 1982.-624 с.
65. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы.-М.: Сов. радио, 1977.-488 с.

66. Трощенко В.Т. Прочность металлов при переменных нагрузках.-К.: Наукова думка.-1978.-176 с.
67. Трощенко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. Трещиностойкость металлов при циклической нагрузке.-К.: Наукова думка.-1987.-256 с.
68. Трощенко В.Т. Трещиностойкость металлов при многоцикловом нагружении // Надежность и долговечность машин и сооружений: Респ. межвед. сб. науч. тр.-К., 1988.-Вып. 13.-С. 24-34.
69. Федоров Д.И., Бондарович Б.А. Надежность рабочего оборудования землеройных машин.-М.: Машиностроение, 1981.-280 с.
70. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций.-М.: Мир, 1988.-428 с.
71. Шульженко Н.Г., Воробьев Ю.С. Численный анализ колебаний системы турбоагрегат-фундамент.-К.: Наукова думка, 1991.-232 с.
72. Янг И.Н., Трэпп В.И. Анализ надежности конструкций самолетов при воздействии случайных нагрузок и при периодическом обследовании // Ракетная техника и космонавтика.-1974.-Том 12.-№ 12.-С. 10-20.
73. Ярема С.Я., Мельничок Л.С., Попов Б.Д. Вероятностные аспекты роста усталостной трещины и его аналитическое описание / Физ.-мех. ин-т. АН УССР: Препр.-1986.-№ 109.-55 с.
74. Ярема С.Я., Микитишин С.И. Аналитическое описание диаграммы усталостного разрушения материалов // Физ.-хим. механика материалов.-1975.-№ 6.-С. 47-54.
75. Crandall S.H. Non-Gaussian closure for random vibration of non-linear oscillators // J. Non-Linear Mechanics.-1980.-Vol. 15.-P. 303-313.
76. Crandall S.H., Zhu W.Q. Random vibration: A survey of recent developments // J. Appl. Mech.-1983.-Vol. 50.-P.953-962.
77. Iwan W.D. A generalization of the concept of equivalent linearization // Int. J. Nonlin. Mech.-1973.-№ 8.-P. 279-287.
78. Lin Y.K. Probabilistic theory of structural dynamics // Robert E. Krieger Publ. Comp., Huntiglon, New York, USA.-1976.
79. Lin Y.K., Kozin F., Wen Y.K. Methods of stochastic structural dynamics // Struct. Safety.-1986.-3.-P. 167-194.
80. Ming-Hwa R. Jen. Modelling of cumulative fatigue damage in titanium 6Al-4V alloy // Modelling, Simulation & Control, B, AMSE Press.-1988.-Vol. 14, № 3.-P. 11-19.
81. Orringer O. Rapid estimation of spectrum crack-growth life based on the Palmgren-Miner rule // Computers and Structures.-1984.-Vol.19, № 1-2.-P. 149-153.
82. Schuller G.I., Pradlwarter H.J., Bucher C.G. Efficient computational procedures for reliability estimates of MDOF systems // J. Nonlinear Mechanics.-1991.-Vol.26.-№ 6.-P. 961-974.
83. Shinozuka M. Fatigue analysis of highway bridges // Proceedings of Japanese Society of Civil Engineering, No. 28, 1972, P. 137-148.
84. Zhovdak V.A., Iglin S.P., Mishchenko I.V. The reliability prediction of structures with random parameters subjected to stationary stochastic input // Technische Mechanik.-1997.-Heft 1.- Band 17.-S.51-66.
85. Zhovdak V.A., Marchenko T.N. Random vibrations of elastic-plastic structures // Technische Mechanik.-1996.-Heft 2.- Band 16.-S.131-138.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
1. Общая постановка задачи прогнозирования надежности элементов конструкций с учетом технологических и эксплуатационных факторов.....	6
1.1. Основные понятия и определения.....	6
1.2. Основные этапы прогнозирования надежности механических объектов.....	10
2. Решение на основе метода конечных элементов задачи статистической динамики элементов конструкций при стационарном и нестационарном однородном случайном поле внешних воздействий.....	16
2.1. Упругие детерминированные системы.....	16
2.2. Упругие детерминированные системы при нестационарном поле воздействий.....	22
2.3. Упругие системы со случайными параметрами.....	25
2.4. Упруго-пластические системы.....	28
3. Решение задачи надежности при постепенных отказах.....	34
3.1. Описание кинетических уравнений для меры повреждений.....	35
3.2. Построение вектора определяющих параметров.....	39
3.3. Применение метода статистического моделирования.....	45
3.4. Применение теории двумерных марковских процессов.....	50
3.4.1. Синтез формирующих фильтров на основе системы распределений Пирсона.....	50
3.4.2. Математическая постановка задачи.....	56
4. Численное решение на основе метода характеристических функций уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для различных моделей накопления повреждений.....	59
4.1. Линейная модель.....	59
4.2. Нелинейная модель.....	69
4.3. Учет различных факторов и результаты численных исследований.....	73
4.3.1. Разброс начального значения меры повреждения.....	74
4.3.2. Разброс предела выносливости.....	78
4.3.3. Широкополосность внешнего воздействия.....	82
4.3.4. Нестационарность внешнего воздействия.....	83
5. Прогнозирование надежности элементов конструкций при усталостных отказах и случайном нагружении.....	90
5.1. Трубопроводные системы.....	90
5.1.1. Системы со случайными параметрами.....	91
5.1.2. Упруго-пластические системы.....	96
5.2. Клепаные панели обшивки летательного аппарата.....	101
Список литературы.....	115

Наукове видання

Жовдак Валерій Олексійович
Міщенко Ігор Вікторович

**ПРОГНОЗУВАННЯ НАДІЙНОСТІ
ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З
УРАХУВАННЯМ ТЕХНОЛОГІЧНИХ
ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ФАКТОРІВ**

Підп. до друку 14.12.1999 р. Формат 60x84/16. Папір CopyRex.
Ум. друк. арк. 7.6. Обл. вид. арк. 7.85. Тираж 200. Зам. 148-10.

Надруковано на ризографі ХДПУ.
61002, м.Харків, вул. Фрунзе, 21.