

Міністерство освіти і науки України  
Українська асоціація з прикладної геометрії  
Мелітопольський державний педагогічний університет  
імені Богдана Хмельницького  
Мелітопольська школа прикладної геометрії

---

# СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ



---

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ  
Випуск 13



Міністерство освіти і науки України  
Українська асоціація з прикладної геометрії  
Мелітопольський державний педагогічний університет  
імені Богдана Хмельницького  
Мелітопольська школа прикладної геометрії



**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ  
МОДЕЛЮВАННЯ**  
ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

**Випуск 13**

Наукове фахове видання

Мелітополь – 2018 р.

УДК 514.18

### СПОСОБИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРИТТЯ ОПУКЛИМИ БАГАТОКУТНИКАМИ ЗАДАНОЇ МНОЖИНИ З ДИСКРЕТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Соболь О.М., д.т.н.,

Кравців С.Я.\*

Національний університет цивільного захисту України  
(Харків, Україна)

*Актуальність даної роботи зумовлюється реформуванням Державної служби України з надзвичайних ситуацій. Відповідно до Стратегії реформування системи Державної служби з надзвичайних ситуацій однією з найважливіших задач є визначення необхідної кількості пожежно-рятувальних підрозділів (пожежних частин) місцевої і добровільної пожежної охорони в об'єднаних територіальних громадах, їх чисельності, місць дислокації з урахуванням часу прибуття до місця виклику.*

*Слід відзначити, що задача створення місцевої і добровільної пожежної охорони в об'єднаних територіальних громадах може бути розглянута як задача оптимального покриття заданої множини з дискретними елементами (територіальні громади та інші населені пункти) опуклими та неопуклими багатокутниками (районами виїзду оперативних підрозділів). У зв'язку з цим виникає проблема щодо розвитку моделей та методів оптимального покриття заданих множин з урахуванням заданих цільових функцій та обмежень задачі (наприклад, зазначені моделі та методи мають враховувати дискретні елементи, які повинні належати області перетину кількох об'єктів покриття тощо). Однією із задач, що сприятиме вирішенню вищенаведеної проблеми, є задача оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої множини з дискретними елементами.*

*В даній роботі було розроблено способи оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої множини з дискретними елементами. Наведено чисельну реалізацію одного із способів на прикладі задачі оптимального розподілу оперативних підрозділів за рівнем інтегрального пожежного ризику.*

*Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку моделей та методів оптимального покриття заданих областей з урахуванням дискретних елементів, які повинні належати області перетину кількох об'єктів покриття.*

*Ключові слова: оптимальне покриття, способи, опуклі багатокутники, дискретні елементи.*

**Постановка проблеми.** До класу задач оптимізаційного проектування у своїх постановках можуть бути зведені важливі задачі у багатьох сферах господарювання. Прикладами таких задач у сфері цивільного захисту є задачі оптимального розміщення оперативно-рятувальних підрозділів, територіального розподілу захисних споруд, побудови оптимальних шляхів евакуації тощо. Більш того, відповідно до Стратегії реформування системи Державної служби з надзвичайних ситуацій однією з найважливіших задач є визначення необхідної кількості пожежно-рятувальних підрозділів (пожежних частин) місцевої і добровільної пожежної охорони в об'єднаних територіальних громадах, їх чисельності, місць дислокації з урахуванням часу прибуття до місця виклику (10 хвилин у місті та 20 хвилин у сільській місцевості), фінансово-економічного обґрунтування їх створення і утримання [1].

Слід відзначити, що задача створення місцевої і добровільної пожежної охорони в об'єднаних територіальних громадах може бути розглянута як задача оптимального покриття заданої множини з дискретними елементами (територіальні громади та інші населені пункти) опуклими та неопуклими багатокутниками (районами виїзду оперативних підрозділів). У зв'язку з цим виникає проблема щодо розвитку моделей та методів оптимального покриття заданих множин з урахуванням заданих цільових функцій та обмежень задачі (наприклад, зазначені моделі та методи мають враховувати дискретні елементи, які повинні належати області перетину кількох об'єктів покриття тощо). Однією з актуальних задач, що сприятиме вирішенню вищенаведеної проблеми, є задача оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої множини з дискретними елементами.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Розробці методів та способів розв'язання класу задач оптимального покриття присвячено, наприклад, роботи [2, 3]. В наукових публікаціях [4, 5] наведено моделі та методи оптимального покриття опуклими та неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами.

**Формулювання цілей статті.** В даній роботі необхідно розробити способи оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої множини з дискретними елементами.

**Основна частина.** Розглянемо задачу оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої множини з дискретними елементами на прикладі задачі оптимального розподілу оперативних підрозділів за рівнем інтегрального пожежного ризику [6].

Постановка даної задачі має наступний вигляд. Нехай задано

\* Науковий керівник – д.т.н., с.н.с. Соболь О.М.

певну адміністративно-територіальну одиницю  $S_0$  у вигляді багатокутника у глобальній системі координат. Область  $S_0$  має дискретні елементи  $V_k$ ,  $k=1, \dots, N_k$ , що являють собою населені пункти. Нехай  $G_l \subset V_k$ ,  $l=1, \dots, L$ ,  $L < N_k$ , – об'єднані територіальні громади (населені пункти), в яких є припустимим створення оперативно-рятувальних підрозділів. Населені пункти, в яких (поруч з якими) знаходяться потенційно небезпечні об'єкти та/або об'єкти підвищеної небезпеки, позначимо через  $S_d \subset G_l$ ,  $d=1, \dots, D$ ,  $D < L$ .

Необхідно здійснити покриття області  $S_0$  районами виїзду оперативно-рятувальних підрозділів  $P_i$ ,  $i=1, \dots, N$  (опуклі багатокутники), таким чином, щоб цільова функція (інтегральний пожежний ризик) була мінімальною і при цьому виконувалися такі обмеження:

– мінімум площі перетину районів виїзду оперативно-рятувальних підрозділів;

– належність районів виїзду оперативно-рятувальних підрозділів області  $S_0$ ;

– належність населених пунктів  $V_k$ ,  $k=1, \dots, N_k$ , а також населених пунктів  $S_d$ ,  $d=1, \dots, D$ , районам виїзду оперативно-рятувальних підрозділів;

– час прямування оперативно-рятувальних підрозділів до найвіддаленішої точки району виїзду  $P_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , має не перевищувати заданого  $T^*$ ;

– розміщення оперативно-рятувальних підрозділів здійснюється в об'єднаних територіальних громадах (населених пунктах)  $G_l$ ,  $l=1, \dots, L$ ;

– мінімум кількості оперативно-рятувальних підрозділів  $P_i$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Модель оптимального покриття (розподілу оперативно-рятувальних підрозділів) має наступний вигляд:

$$\min_{u \in W} R_3(\bar{\tau}_{\text{прям}}, \bar{\tau}_{\text{лок}}, \bar{\tau}_{\text{лікв}}, N_{\text{пож}}); u = \{m_i; v_i\}; i=1, \dots, N; \quad (1)$$

де  $W$ :

$$\omega(m_i, m_j, v_i, v_j) \rightarrow \min; \quad (2)$$

$$i=1, \dots, N; j=i+1, \dots, N;$$

$$\omega(m_i, m_{cS_0}, v_i, v_{cS_0}) \rightarrow \min; \quad (3)$$

$$i=1, \dots, N; S_0 \cup cS_0 = R^2;$$

$$V_k \in \{P_i\}; k \in \{1, \dots, N_k\}; i=1, \dots, N; \quad (4)$$

$$S_d \in \{P_i\}; d=1, \dots, D; i \in \{1, \dots, N\}; \quad (5)$$

$$\tau_{\text{прям}}(P_i) \leq T^*; i=1, \dots, N; \quad (6)$$

$$\bar{\tau}_{\text{прям}} = f(k_{\text{пож}}); \quad (7)$$

$$u = \{m_i; v_i\} \in \{G_l\}; G_l \in \{P_i\}; i=1, \dots, N; l=1, \dots, L; \quad (8)$$

$$N \rightarrow \min. \quad (9)$$

В моделі (1)÷(9) вираз (1) являє собою цільову функцію задачі, при цьому  $m_i$  – координати вершин багатокутників  $P_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , в локальній системі координат,  $v_i$  – параметри розміщення об'єктів  $P_i$  (положення локальної системи координат  $i$ -го об'єкта в глобальній системі координат); вираз (2) – умова мінімуму взаємного перетину об'єктів  $P_i$  та  $P_j$ , де  $\omega(\cdot)$  –  $\omega$ -функція, що являє собою площу перетину багатокутників  $P_i$  та  $P_j$ ; вираз (3) – умова мінімуму перетину об'єктів  $P_i$  з доповненням області  $S_0$  до евклідового простору  $R^2$ ; вираз (4) – умова належності населених пунктів  $V_k$ ,  $k=1, \dots, N_k$ , районам виїзду оперативно-рятувальних підрозділів  $P_i$ ; вираз (5) – умова належності населених пунктів  $S_d$ ,  $d=1, \dots, D$ , районам виїзду оперативно-рятувальних підрозділів  $P_i$ ; вираз (6) – умова щодо припустимого часу прямування оперативно-рятувальних підрозділів до місця виклику; вираз (7) – взаємозв'язок між середнім часом прямування оперативно-рятувальних підрозділів та коефіцієнтом покриття області  $S_0$ ; вираз (8) – умова розміщення оперативно-рятувальних підрозділів в об'єднаних територіальних громадах (населених пунктах)  $G_l$ ,  $l=1, \dots, L$ ; вираз (9) – умова мінімуму кількості оперативно-рятувальних підрозділів.

Розглянемо особливості моделі (1)÷(9):

1. При врахуванні місць розташування існуючих оперативно-

рятувальних підрозділів до моделі необхідно додати наступне обмеження:

$$\omega(m_i, m_q, v_i, v_q) \rightarrow \min; \quad (10)$$

$$i = 1, \dots, N; q = 1, \dots, N_q;$$

де  $N_q$  – кількість існуючих оперативно-рятувальних підрозділів.

2. Якщо задача (1)-(9) розв'язується з урахуванням обмежених ресурсів, то в моделі замість обмеження (9) необхідно використати наступний вираз:

$$Q_{pec}(N) \leq Q_{pec}^*; \quad (11)$$

де  $Q_{pec}(N)$  – ресурси, що необхідні для створення  $N$  оперативно-рятувальних підрозділів;

$Q_{pec}^*$  – ресурси, що виділяються на створення оперативно-рятувальних підрозділів.

3. Цільова функція задачі (інтегральний пожежний ризик) є лінійною, обмеження – лінійними, нелінійними та дискретними.

4. Вид оперативно-рятувальних підрозділів визначається в залежності від об'єктів захисту, що знаходяться в районі обслуговування.

Для врахування особливостей моделі (1)-(9) було розроблено наступні способи оптимального покриття опуклими багатокутниками (районами виїзду) заданої множини з дискретними елементами (адміністративно-територіальної одиниці).

*Спосіб 1.* Оперативно-рятувальні підрозділи мають обов'язково створюватись в об'єднаних територіальних громадах (населених пунктах)  $S_d$ ,  $d=1, \dots, D$ , в яких (поруч з якими) знаходяться потенційно небезпечні об'єкти та/або об'єкти підвищеної безпеки.

Даний спосіб представлено за допомогою структурно-логічної схеми, що наведена на рис. 1.

*Спосіб 2.* Оперативно-рятувальні підрозділи мають обов'язково створюватись в об'єднаних територіальних громадах (населених пунктах)  $S_d$ ,  $d=1, \dots, D$ , в яких (поруч з якими) знаходяться потенційно небезпечні об'єкти та/або об'єкти підвищеної безпеки. При цьому враховуються райони виїзду існуючих оперативно-рятувальних підрозділів.

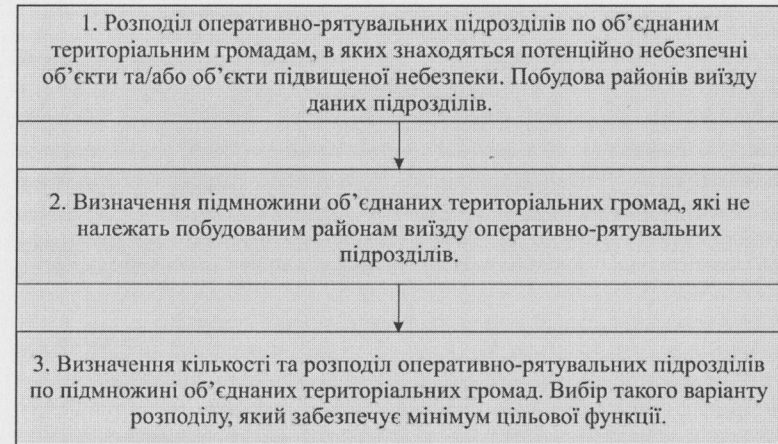


Рис. 1. Структурно-логічна схема для способу 1

Структурно-логічна схема для реалізації даного способу наведена на рис. 2.

Аналогічні структурно-логічні схеми було побудовано для реалізації таких способів:

*Спосіб 3.* Оперативно-рятувальні підрозділи мають обов'язково створюватись в об'єднаних територіальних громадах (населених пунктах)  $S_d$ ,  $d=1, \dots, D$ , в яких (поруч з якими) знаходяться потенційно небезпечні об'єкти та/або об'єкти підвищеної безпеки. При цьому враховуються обмежені ресурси на створення відповідних підрозділів.

*Спосіб 4.* Оперативно-рятувальні підрозділи мають обов'язково створюватись в об'єднаних територіальних громадах (населених пунктах)  $S_d$ ,  $d=1, \dots, D$ , в яких (поруч з якими) знаходяться потенційно небезпечні об'єкти та/або об'єкти підвищеної безпеки. При цьому враховуються райони виїзду існуючих оперативно-рятувальних підрозділів та обмежені ресурси на створення відповідних підрозділів.

На рис. 3 наведено результат оптимального покриття Близнюківського району Харківської області районами виїзду оперативно-рятувальних підрозділів за допомогою способу 2.

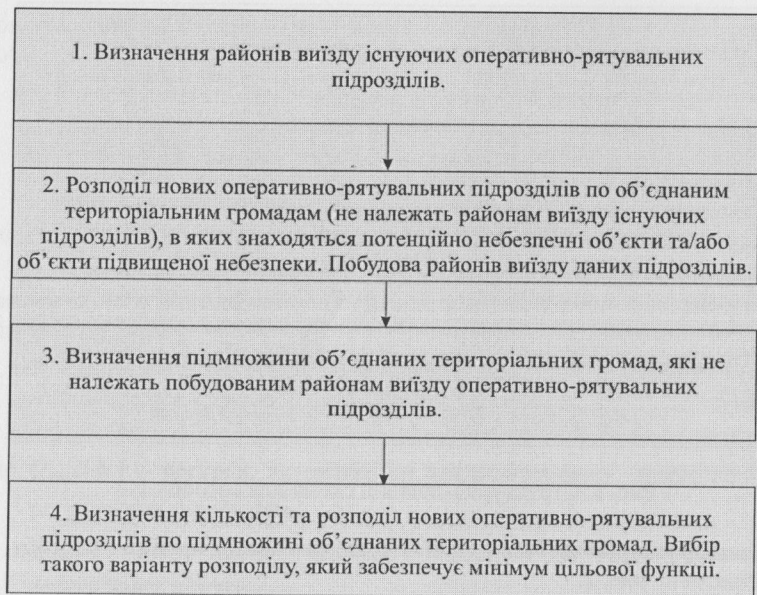


Рис. 2. Структурно-логічна схема для способу 2

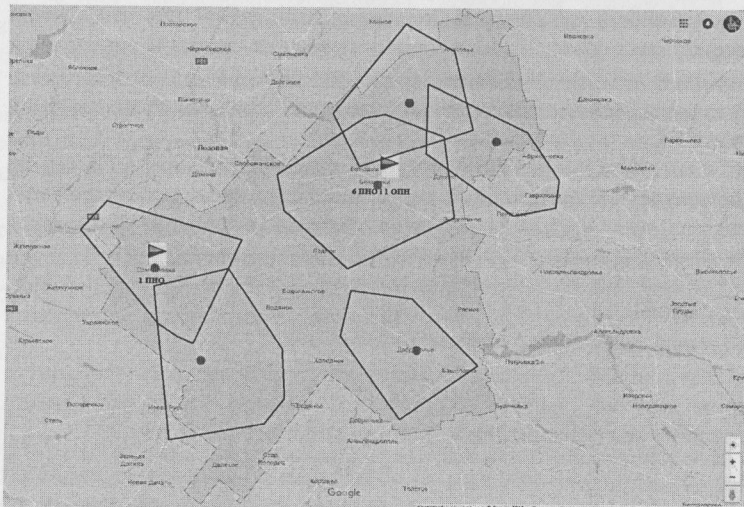


Рис. 3. Розподіл оперативно-рятувальних підрозділів по території Близнюківського району за допомогою способу 2

**Висновки.** В даній роботі було розроблено способи оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої множини з дискретними елементами. Наведено чисельну реалізацію одного із способів на прикладі задачі оптимального розподілу оперативних підрозділів за рівнем інтегрального пожежного ризику. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку моделей та методів оптимального покриття заданих областей з урахуванням дискретних елементів, які повинні належати області перетину кількох об'єктів покриття.

#### Література

1. Про схвалення Стратегії реформування системи Державної служби України з надзвичайних ситуацій [Електронний ресурс]: Розпорядження КМУ від 25.01.17 р. №61-р. – Режим доступу: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/61-2017-%D1%80>.
2. Комяк В.М. Оптимізація покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками / В.М. Комяк, О.М. Соболев, А.А. Лісняк, В.О. Собина // Монографія. – Х.: НУЦЗУ, 2013. – 124 с.
3. Собина В.О. Моделювання раціонального покриття об'єктів залізниці районами виїзду пожежно-рятувальних підрозділів / В.О. Собина // 36. наук. пр. Харківського університету Повітряних сил. – Харків: ХУПС, 2011. – Вип. 1(27). – С. 240-242.
4. Комяк В.М. Модель та метод оптимального покриття неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами / В.М. Комяк, О.М. Соболев, С.Я. Кравців // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2018. – Вип. 8, Т. 1. – С. 11-22.
5. Моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами / В.М. Комяк, О.М. Соболев, С.Я. Кравців, І.А. Чуб // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2018. – № 3(66). – Т. 2. – С. 147-152.
6. Соболев О.М. Математична модель управління інтегральним пожежним ризиком та її особливості / О.М. Соболев, С.Я. Кравців // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – № 3(62). – Т. 2. – С. 317-321.