СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР

начальник кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент Олександр ДЕРЕВ’ЯНКО

( вступ, розділи 1, 2, 3, 4)

24.11.19

Відповідальний виконавець

доцент кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент Михайло МУРІН

( вступ, розділи 1, 2, 3, 4)

24.11.19

Виконавці:

Доцент кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент Сергій БОНДАРЕНКО

(розділи 1, 2)

24.11.19

Заступник начальника кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент Валерій ХРИСТИЧ

(розділи 1, 2)

24.11.19

Доцент кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент В’ячеслав ДУРЄЄВ

(розділи 2, 3)

24.11.19

Доцент кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент Олександр ЛИТВЯК

(розділи 3, 4)

24.11.19

Викладач кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій Олексій АНТОШКІН

(розділи 3, 4)

24.11.19

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР : 130 с., 2 табл., 18 рис., 1 дод., 219 джерел.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ , МЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ, СЕПАРАБЕЛЬНІ ФУНКЦІЇ-ОБМЕЖЕННЯ, ТОЧНІСТЬ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ, ЄКЗОГЕННИЙ ПАРАМЕТР.

**Об'єкт дослідження** - процес моделювання нерегулярного розміщення прямокутних геометричних об'єктів різної фізичної природи із змінними метричними характеристиками в ізотропної області розміщення.

**Предмет дослідження** - математичні моделі і методи розв'язання оптимізаційних задач розміщення прямокутних геометричних об'єктів різної фізичної природи із змінними метричними характеристиками.

**Методи дослідження**. При побудові та аналізі моделі основної оптимізаційної задачі в роботі використана методологія математичного моделювання складних систем, теорія дослідження операцій і багатокритеріальної оптимізації, теорія геометричного проектування. При вирішенні задачі прямокутного розміщення використані чисельні методи лінійного та нелінійного програмування, оптимізаційні методи теорії геометричного проектування.

Результати науково-дослідної роботи представлені у вигляді моделі, методів та алгоритму розв'язання оптимізаційних задач розміщення прямокутних об'єктів зі змінними метричними характеристиками, а також задач оптимального розподілу ресурсів, математична модель і методи розв'язання якої інспіровані завданням прямокутного розміщення, що розглядаються в НДР, використані при розробці проекту системи раннього виявлення пожежі складських приміщень ПрАТ «Філіп Морріс Україна» (м. Харків), ( Додаток).

ПЕРЕДМОВА

Проведені дослідження за темою НДР «ОПТИМАЛЬНЕ ПЛАНУВАННЯ РЕСУРСІВ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ СИСТЕМ РАННЬОГО ВИЯВЛЕННЯ ПОЖЕЖІ»

Замовник – НУЦЗУ

Виконавець – кафедра автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій НУЦЗ України

Термін початку роботи – січень 2017 року, термін закінчення роботи – грудень 2019 року.

Підставою для виконання є програма НДР.

Звіт розглянуто та схвалено на засіданні кафедри «Автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій», протокол № від 2019 р.

Звіт затверджено на засіданні вченої ради НУЦЗ України, протокол №

від 2019 р.

ЗМІСТ

ВСТУП 7

РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ВИБІР НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕННЯ 10

* 1. Оптимізаційна задача прямокутного розміщення: постановка і

властивості 10

1.2 Задача оптимального розподілу обмежених ресурсів 14

1.3 Задача розміщення прямокутних геометричних об'єктів з постійними метричними характеристиками 16

1.3.1 Аналіз засобів моделювання 2D задач розміщення прямокутних

об'єктів 16

1.3.1.1 Методи пошуку наближеного рішення задачі прямокутного розміщення 19

1.3.1.2 Точні методи розв'язання задачі прямокутного розміщення 21

1.4 Особливості постановки задач розміщення прямокутників 23

1.5 Методи вирішення задач оптимального планування 24

1.6 Моделювання задач планування ресурсів в рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування 29

1.6.1.Аналіз задач розміщення геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками 30

1.7 Постановка задачі дослідження 32

1.8 Висновки по розділу 1 33

РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ІЗ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ 34

2.1 Математична модель основної задачі дослідження і її особливості 34

2.2 Аналітичний опис області допустимих рішень задачі 36

2.3 Конструктивні властивості математичної моделі (2.11) - (2.12) 40

2.4. Подання завдання дослідження як задачі сепарабельного

програмування 44

2.4.1 Кусково-лінійна апроксимація сепарабельном функції 45

2.5 Метод глобальної кусочно-лінійної апроксимації сепарабельних функцій обмежень задачі (2.11) - (2.12) 52

2.5.1 Алгоритм обчислення початкової оцінки апроксимації ε 54

2.6 Висновки по розділу 2 58

РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ ІЗ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ 60

3.1 Особливості області допустимих рішень задачі (2.11) - (2.12), що визначають вибір методу рішення 60

3.2 Метод пошуку локального мінімуму функції мети задачі розміщення 62

3.2.1 Модифікація методу локальної оптимізації лінеаризованної задачі 64

3.3 Точні методи глобальної оптимізації 72

3.3.1 Реалізація 1-го підходу. Оцінка обчислювальної складності 72

3.3.2 Реалізація 2-го підходу. Оцінка обчислювальної складності 73

3.4. Модифікація наближеного методу розв'язання задачі 75

3.5 Висновки по розділу 3 79

РОЗДІЛ 4 РІШЕННЯ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ОБМЕЖЕНИХ РЕСУРСІВ ЯК

ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ ІЗ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ 80

4.1 Постановка задачі, побудова моделі операції 80

4.2 Аналітичний опис основних обмежень задачі (4.3-4.8) 84

4.3 Техніко-організаційна характеристика об'єкта 86

4.4 Визначення оптимальної структури продукту інвестиційно-будівельного проекту 90

4.5 Концептуальна модель інформаційно-аналітичної системи як програмного середовища підтримки прийняття рішень 94

4.6 Структурна і параметрична ідентифікація завдання оптимального розподілу ресурсів 97

4.7 Висновки по розділу 4 103

ВИСНОВКИ 104

Перелік джерел посилання 106

Додаток 128

ВСТУП

Актуальність дослідження. В умовах сучасного швидко мінливого світу, посилення процесів глобалізації, що ведуть до загострення проблеми конкуренції і зростання очікувань споживачів, збільшується тиск на виробників, змушених в умовах жорстких обмежень на всі види наявних ресурсів підвищувати якість продукції та ефективність виробництва, координувати глобальний попит і пропозицію, враховувати жорсткі вимоги інвесторів. У зв'язку з цим підвищується важливість конструктивних засобів моделювання і рішення задач оптимального розподілу обмежених ресурсів різної фізичної природи: фінансових, часових, кадрових, матеріальних і т.д., виникають у багатьох областях практичної діяльності. До даного класу задач відносяться як власне завдання оптимального розміщення геометричних об'єктів різної фізичної природи: розкрій промислових матеріалів, завдання упаковки, компонований синтез блоків радіоелектронної апаратури, так і пов'язані з ними завдання оптимального розподілу ресурсів, енергозбереження, календарного планування та ін. При цьому розрізняють завдання планування ресурсів підприємства [1], де умови унікальності дій, що вимагають певного набору ресурсів та обмеженості часового ресурсу, відсутність про обхідних або не є критичними, а також завдання управління ресурсами проекту [2] як кінцевого безлічі операцій, на якому введено відношення часткової впорядкованості. Крім очевидної прикладної цінності ці завдання мають і теоретичне значення як окремий клас екстремальних задач теорії дослідження операцій.

Спільними властивостями таких задач є незв'язність і багатовимірність, неопуклої області допустимих рішень задачі, багатоекстремальність, багатокритеріальність і, в загальному випадку, нелінійність функцій обмежень завдання. Математичне моделювання і рішення задач даного класу сьогодні істотно спирається на фундаментальні результати [3-16], отримані науковими школами академіка В.С. Михалевича [3,11], академіка НАН України І.В. Сергієнко [4-6], академіка НАН України Н.З. Шора [3,11,13], академіка НАН України Б.М. Пшеничного [8], академіка НАН України В.Л. Рвачева [9], академіка НАН України Ю.М. Ермольева [12], члена-кореспондента НАН України Ю.Г. Стояна [16], Л.Ф. Гуляницького [10], П.І. Стецюка [15] та інших відомих українських вчених.

Розглянуті задачі належать до класу NP-повних [17]. Концептуальною задачею розміщення є задача розміщення прямокутних геометричних об'єктів різної фізичної природи. У різні роки в даному напрямку були отримані блискучі результати Л.В. Канторовичем [18], В.А. Залгаллером [19], Ю.Г. Стояном [21], P. Gilmorе, R. Gomory [22], Е.А. Мухачева [23], P. Toth, S. Martello [24], Н.І. Гілем [25, 26], В.М. Комяк [27], М.В. Новожилова [28-29], І.Г. Гребенніков [30], K. Dowsland [31].

У переважній більшості публікацій розглядаються задачі, в яких об'єкти розміщення мають фіксовані метричні характеристики і просторову форму. Однак деякі задачі розкрою промислових матеріалів, задачі розподілу обмежених ресурсів і ін., зводяться до оптимізаційних задач розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками і просторової формою. Як показує аналіз вітчизняних і зарубіжних наукових публікацій, математичні моделі таких задач є недостатньо вивченими.

Питання постановки і рішення задач оптимального планування як задач розміщення відповідної розмірності останнім часом вельми цікавить дослідників. У публікаціях, що недавно з'явилися, [32, 33] вивчаються можливі підходи до реалізації цієї ідеї. Однак автори розглядають в якості об'єктів розміщення прямокутники з фіксованими метричними характеристиками, що істотно обмежує область практичного застосування і збіднює модель.

Складність аналітичного опису області допустимих рішень ускладнює застосування класичних методів умовної оптимізації. Тому виділення додаткових властивостей області допустимих рішень основної задачі дослідження - задача прямокутного розміщення за умови, що об'єкти, які розміщуються, мають змінні метричні характеристики, і розробка інструментальних засобів моделювання основних геометричних обмежень з сепарабельними функціями на основі їх лінеаризації за умови, що точність апроксимації є екзогенним параметром, є актуальним завданням.

Таким чином, з урахуванням широкого спектра практичних застосувань і недостатній мірі розвитку теоретичного апарату розробка математичних моделей, оптимізаційних методів вирішення та створення на цій базі сучасного програмного забезпечення задач розміщення прямокутних геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками як теоретичного фундаменту вирішення множини задач оптимального планування обмежених ресурсів є актуальною науковою задачею.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ВИБІР НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

В даному розділі проведено аналіз і класифікація оптимізаційних задач планування ресурсів, безпосередньо що стали або приводяться до задач нерегулярного розміщення прямокутних геометричних об'єктів. Розглянуто класифікацію підходів до математичного моделювання задач розміщення двовимірних геометричних об'єктів, зокрема, оптимізаційних задач розміщення прямокутних об'єктів зі змінними метричними характеристиками. На підставі вивчення літературних джерел здійснено аналітичний огляд сучасного арсеналу засобів моделювання та обчислювальних методів рішення оптимізаційних завдань прямокутного розміщення.

Обрані напрямки досліджень.

1.1 Оптимізаційна задача прямокутного розміщення: постановка і властивості

У практичній діяльності часто зустрічаються задачі, що зводяться до оптимізації розміщення об'єктів різної фізичної природи. До них відносяться завдання розкрою на заготовки заданої форми листового і рулонного матеріалу [46, 47], завдання компонування обладнання в цехах і відсіках [48-53], завдання проектування міської забудови [54], завдання розміщення джерел фізичних полів [55, 56] , завдання оптимального розподілу ресурсів [57, 58] та багато інших.

Для формалізації вихідної інформації про об'єкти та області розміщення в роботах [16, 59] введено поняття геометричної інформації. Розглянемо об'єкт розміщення Ti. Тоді геометрична інформація gi про об'єкт Tі має вигляд:

gi=( {si}, {mi}, {ui} ), (1.1)

де {sі} - сукупність просторових форм, що складають об'єкт Tі; {Mі} - набір метричних характеристик, які визначають розміри точкових множин, що мають просторову форму {sі}; {ui} - параметри розміщення об'єкта Ti в області розміщення.

Параметри розміщення uі задають положення полюса Оі об'єкта Ті - центру власної системи координат (ВСК) об'єкта, причому Оi ∈ clТi, де clТі - замикання точкового безлічі Ті.

Далі в роботі під оптимизационной завданням розміщення будемо розуміти наступне завдання.

Нехай є кінцевий набір Ti,, об'єктів розміщення і область розміщення Т0. Необхідно розмістити множину об'єктів розміщення у області Т0. без взаємних перетинів так, щоб критерій якості Ψ(u) досягав екстремального значення, тобто знайти:

 (1.2)

где u=(u1, u2, …, uN),

D - область допустимих рішень, яка визначається обмеженнями виду

Ti (ui) ⊂ Т0., (1.3)

int Ti(ui) ∩ int Tj (uj) =∅, . (1.4)

Зауваження 1.1. Розмірність К простору EK, в якому задана область D, прямо пропорційна добутку Nm, де m - топологічна розмірність об'єкта Tі.

Зауваження 1.2. Критерій (1.2) може бути векторним.

Детальний аналіз сучасного стану в області моделювання і рішення задач розміщення, або, іншими словами, упаковки і розкрою - Сutting and Packing problems (C & P) - проведено в роботі [60]. Наслідуючи традиції попередніх досліджень [61-62], в [60] наводиться укрупненная класифікація задач розглянутого класу. Найбільш репрезентативними завданнями з безлічі 2D C & P завдань, з точки зору авторів, є завдання прямокутного розкрою [63-66]. У роботах [67-70] та ін. Розглядаються завдання зазначених класів разом з їх практичними додатками. Однак все цитовані огляди містять інформацію виключно про англомовних публікаціях.

Класична задача прямокутного розкрою є завдання виду (1.2) - (1.4) за умови, що об'єкти розміщення Ti,, є прямокутниками, а область розміщення Т0 - прямокутник або напівнескінченної смуга.

Іншими словами, об'єкти розміщення та область розміщення мають кусково-постійний кордон.

Розглянемо основні властивості області допустимих рішень D завдання (1.2 – 1.4), інваріантні до просторової формі розміщуються об'єктів.

*Властивість 1.1*. Багатогранна область D є незв'язним замкнутим і при N> 1 неопуклого точковим безліччю. Компоненти зв'язності області допустимих рішень D неопуклі, в загальному випадку багатозв'язкові безлічі. Кордон області Γ = FrD - кусочно-лінійна.

*Властивість 1.2*. Область D може бути представлена у вигляді об'єднання кінцевого числа опуклих підмножин:

 (1.5)

де Dq ⊂ ЕK - багатогранне опукле безліч, K > 2N+1, Q = 4N(N−1)/2.

Аналіз наукової літератури з тематики дослідження показує, що основна увага приділяється завданням розміщення, в яких просторова форма sі і метричні характеристики mі об'єкта розміщення Tі не змінюються в процесі розміщення.

Однак існує ряд задач розміщення (і прилеглих до них задач покриття), а також клас задач оптимального планування обмежених ресурсів, які можуть бути зведені до задач розміщення, при розгляді яких необхідно враховувати, що метричні характеристики об'єктів розміщення і, в загальному випадку, їх просторова форма можуть (і повинні) змінюватися в процесі розміщення.

За характером зміни метричних характеристик такі задачі можуть володіти такими особливостями:

• метричні характеристики mі об'єктів Ti, , можуть змінюватися незалежно один від одного в деяких заданих діапазонах, залишаючи об'єкти в класі початкових просторових форм (інтервальний аналіз, нечіткі множини, м'які обчислення);

• метричні характеристики mі об'єктів Ti, , пов'язані функціональними залежностями;

• зміна метричних характеристик mі виводить об'єкти Ti, , з класу початкових просторових форм [71].

На мал. 1.1 подано класифікацію задач розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками.

Виділені класи завдань відрізняються як в постановочному плані, так і в плані набору застосовуваних підходів до моделювання і вирішення.

Параметри uі об'єктів розміщення також є важливими характеристиками завдань розміщення.

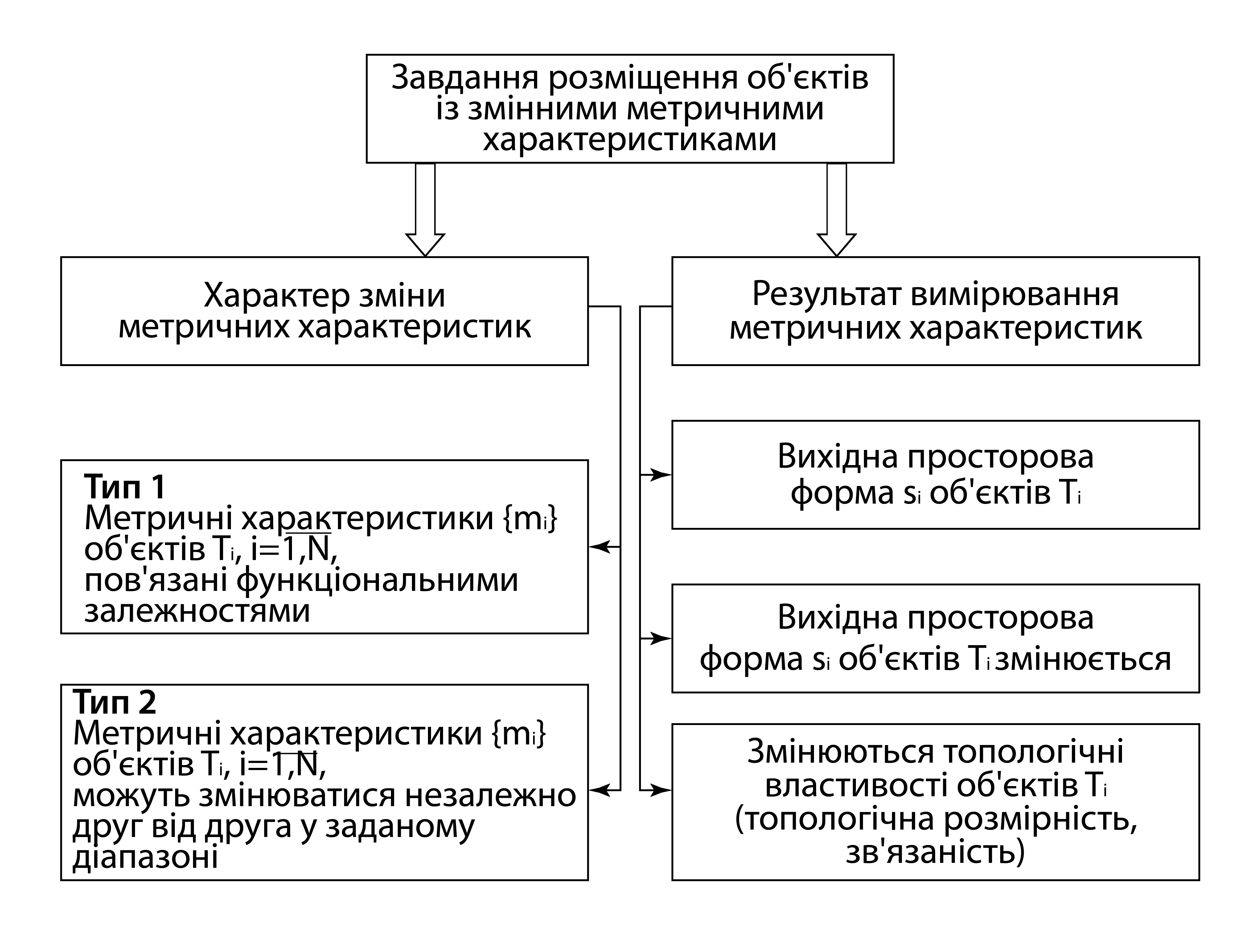


Рисунок 1.1 Класифікація задач розміщення об'єктів із змінними метричними характеристиками.

*Зауваження 1.3.* Будемо далі вважати, що об'єкти розміщення є орієнтованими, тобто над об'єктами розміщення допустимі тільки перетворення трансляції.

1.2 Завдання оптимального розподілу обмежених ресурсів

Розглянемо наступну постановку оптимізаційної задачі, яка не є класичною задачею розміщення геометричних об'єктів, однак може бути сформульована (і вирішена) як задача розміщення.

Визначення 1.1. Проект - це кінцева послідовність робіт, підпорядкована єдиній меті, що має чітко визначений початок і термін завершення і володіє властивістю унікальності [72].

Практичні завдання управління ресурсами, що виникають на різних стадіях інвестиційно-будівельного проекту, включаючи проект реконструкції інженерних комунікацій, допускають таку постановку.

Завдання 3. Нехай деякий проект Т є безліч {Тi}, , робіт (операцій). На виконання кожної роботи Тi необхідна певна кількість ресурсів, де tі - час виконання роботи. На проект в цілому в кожен момент часу виділено ресурсів. На безлічі робіт Т задана умова часткової впорядкованості виду, певне конкретної послідовністю виконання робіт (робота Тj безпосередньо слід за роботою Ті). Відзначимо у своїй, що визначення послідовності робіт передбачає участь ОПР (менеджера проекту), так як в практичних завданнях таких послідовностей може бути кілька. Завдання полягає у визначенні такого розподілу робіт у часі, при якому величина ресурсів кожного k-го виду на виконання робіт була мінімальною.

Робота Ti може бути інтерпретована як гіперпаралелепіпед в просторі ресурсів , обмеження  в даному просторі виділяють область Т0 розміщення.

Отже, дана задача може бути поставлена як багатокритеріальна задача розміщення множини об'єктів Т виду:

 (1.6)

де область допустимих рішень виділена умовами виду (1.3) - (1.4), а також умовами часткової впорядкованості безлічі T робіт та іншими специфічними обмеженнями.

Відзначимо, що завдання (1.6) є багатокритеріальної завданням дослідження операцій.

1.3. Моделювання і рішення задач розміщення прямокутних геометричних об'єктів з постійними метричними характеристиками.

У задачах одновимірного розміщення об'єкти що розміщуються мають одну метричну характеристику (довжину).

Історично першою роботою, присвяченій вивченню математичних моделей і методів розміщення геометричних об'єктів з урахуванням їх розмірів (але без урахування їх просторової форми), була фундаментальна монографія [19]. Академік Л.В. Канторович і професор В.А. Залгаллер застосували для вирішення задачі одновимірного розміщення (розкрою) метод розрішаючих множників, розроблений академіком Л. В. Канторовичем [18] і який склав основу лінійного програмування. Таким чином, задача одновимірного розміщення допускають формулювання у вигляді задач лінійного програмування [73].

Серед множени точних методів побудови оптимальних планів одновимірного розміщення поширені підходи, які використовують метод відсікань для вирішення відповідних завдань цілочисельного лінійного програмування, методи, засновані на вирішенні ряду допоміжних завдань лінійного програмування або реалізують переборні алгоритми на основі методу гілок і меж [23, 74-82] . Окремо слід відзначити підхід, заснований на теорії та методах евклідової комбінаторної оптимізації, що розвивається в рамках наукової школи професора О.А. Ємця [83].

Надзвичайно розвинені евристичні методи, використовувані для вирішення завдань одновимірного розкрою [84-88].

1.3.1. Аналіз засобів моделювання 2D задач розміщення прямокутних об'єктів

Задача прямокутного розміщення, в яких необхідно враховувати просторову форму розміщуваних об'єктів при формалізації обмежень виду (1.3) - (1.4) на область допустимих рішень, в свою чергу, можуть бути розбиті на два класи: гільйотинного і негільотінного розміщення.

Серед дослідників, що займаються завданнями гільйотини і негільотінного прямокутного розміщення необхідно виділити члена-кореспондента НАН України, професора Ю.Г.Стояна і його учнів [16, 89, 90].

Серед закордонних вчених відзначимо K.Dowsland, B.Dowsland (Великобританія) [91] проф. Е.А.Мухачеву із учнями (Росія, Уфа) [36, 92-95], проф. В.В.Бухвалову (Санкт-Петербург) [96] та інших вчених.

Концептуально важливим кроком вперед, який забезпечив побудову аналітичного опису об'єктів складної геометричної форми та використання математичного апарату класичного аналізу для їх дослідження, було створення академіком НАН України В.Л.Рвачевим теорії R-функцій [9]. На базі R-функцій були розроблені аналітичні методи дослідження різних геометричних об'єктів і побудови умов їх взаємного неперетинання.

Апарат моделювання основних геометричних обмежень різних завдань розміщення протягом ряду років послідовно розвивався чл.-кор. НАН України, професором Ю.Г.Стояном і його учнями в рамках створеної теорії оптимізаційного геометричного проектування. Так для опису умови торкання об'єктів в кінці шестидесятих років минулого століття в [97] введено поняття годографа функції щільного розміщення, яке пізніше розвинене в роботах [21, 98]. В роботі Heckman R., Lengauer T. [99], написаної значно пізніше, в контексті рішення двовимірної задачі розміщення геометричних об'єктів різної форми в прямокутної області також розглядається проблема опису умови торкання об'єктів, причому використовується поняття годографа, яке ідентичне поняттю годографа функції щільного розміщення .

У цікавій роботі [31] розглядаються підходи до вирішення 2D завдання розміщення набору прямокутних об'єктів в прямокутних контейнерах більшого розміру з метою мінімізації відходів. Обговорюються такі постановки: постановка P. Gilmore and R. Gomory [22], заснована на перерахування всіх підмножин розміщуваних об'єктів і побудові матриці А коефіцієнтів обмежень завдання такої, що елемент aij матриці A дорівнює одиниці, якщо прямокутник i стосується прямокутника j, і дорівнює нулю , якщо це не так. Для вирішення завдання застосовується методика динамічного програмування для генерації стовпців матриці коефіцієнтів. В роботі J. E. Beasley [100] завдання розміщення представлена як задача цілочисельного лінійного програмування на підставі дискретного представлення області розміщення та введення цілочисельних змінних xipq, рівних одиниці, якщо лівий нижній кут прямокутника и знаходиться в точці області розміщення з координатами (p, q). Завдання вирішується із застосуванням верхніх оцінок на основі Лагранжіевой релаксації і субградієнтного оптимізації.

S. P. Fekete і J. Schepers [101] використовували теоретико-графові уявлення упаковки багатьох прямокутників в контейнер. Вершинами графа служать об'єкти, а ребра між вершинами з'являються в разі, якщо проекції об'єктів на горизонтальну і вертикальну осі перетинаються. всі ці моделі мають неполіноміальное число змінних.

У роботі А. Lodi [102] запропонований підхід на підставі формування так званих рівнів. Перший рівень - це нижня межа контейнера. Наступний рівень формується за висотою найвищого об'єкта попереднього рівня, і так далі.

Ще раз з жалем відзначимо, що у всіх що цитувалися раніше оглядах по тематиці моделювання і розв'язання оптимізаційних задач розміщення, в тому числі і в [31], відсутні згадки про роботи школи Ю.Г. Стояна, в рамках якої задачі прямокутного розміщення, де розміщуються об'єкти мають фіксовані метричні характеристики, успішно вирішуються вже понад 50 років. Більш того, немає посилань на роботи російських вчених, таких як відома школа Е.А.Мухачевой (Уфа) та інших

1.3.1.1 Методи пошуку наближеного рішення задачі прямокутного розміщення

Серед 2D C & P завдань клас задач розміщення прямокутників c постійними метричними характеристиками в прямокутної області є найбільш вивченим [103-125]. Для вирішення задач зазначеного класу пропонуються як точні, так і наближені методи. Однак, за рідкісним винятком, результати, опубліковані останнім часом в зарубіжній науковій періодиці, відносяться до розробки і використання евристичних процедур. Евристичні методи порівняно прості і отримати оптимальне рішення можна лише випадково, але для отримання практично прийнятних рішень потрібна невелика кількість обчислювальних ресурсів. Відзначимо, що задачі розміщення прямокутників є базовою і застосовується як допоміжний засіб для вирішення багатьох інших задач розміщення і приводяться до них, зокрема, задач управління ресурсами проекту [126] або завдань теорії розкладів.

Детальний огляд, присвячений моделям, нижнім оцінками, наближеним і точним алгоритмам, а також реалізацій метаеврістік для задач прямокутного розміщення орієнтованих об'єктів в смугу або в контейнери, міститься в [31].

Там же розглядаються також так звані off-line алгоритми. В роботі [127] запропонована модифікація двох відомих алгоритмів такого класу: the Next-fit Decreasing Height and First-fit Decreasing Height. Існує ціла безліч подібних апроксимаційних підходів, що відрізняються лише незначними деталями, наприклад, Bottom-Left algorithm [128].

Інші варіанти задач, коли допускаються повороти предметів на 90 градусів, а також обмеження на розміщення об'єктів, такі як гільйотинний розкрій, детально висвітлюються в [129-132].

В роботі [133] розглядається задача упаковки прямокутників в опуклу область, яка формулюється в термінах нелінійного програмування. У роботах [134, 135] пропонується генетичний алгоритм для вирішення задачі розміщення як орієнтованих, так і неорієнтовані прямокутників в смузі. В [136] для завдання прямокутного розміщення в смузі запропонований гіпереврістіческій алгоритм, який об'єднує в собі принципи декількох евристик. В [137] для вирішення завдання прямокутної упаковки в контейнер заданого розміру пропонується жадібний поліноміальний алгоритм, який автори також застосовують до задачі прямокутного розміщення в напівбіскінченної смузі.

Якщо розміщуються прямокутники є орієнтованими (повороти не допускаються), для такого завдання розміщення в смузі в роботах [138-141] пропонується метод GRASP. Відзначимо, що метод GRASP вписується в загальну схему методу вектора спаду [4-6], розробленого академіком НАН України І.В.Сергієнко в 1964 р як методу наближеного рішення задач дискретної оптимізації загального вигляду. Метод вектора спаду з успіхом застосовувався для пошуку наближених розв'язків задач геометричного проектування, зокрема, задач розбиття та покриття [142, 16].

В роботі [107] розглядається задача розміщення в вертикальної полубесконечной смузі одиничної ширини прямокутних об'єктів з шириною менше одиниці з метою мінімізації висоти смуги. У ній також дано огляд алгоритмів для вирішення задачі розміщення набору прямокутників в наборі прямокутних областей розміщення.

Досить докладно обговорюються різні метаеврістікі, такі як імітаційний отжиг (simulated annealing) [116], tabu search [143], генетичний алгоритм [112]. У роботах [92, 117] викладаються результати застосування методу пошуку з заборонами (tabu search algorithm) в задачах двовимірного прямокутного гільйотини розкрою.

В роботі [118] викладається методика рішення оптимізаційної задачі прямокутного розміщення, заснована на застосуванні евристичної методики імітаційного відпалу, який гарантує асимптотичну збіжність послідовності одержуваних рішень до глобального. Методика імітаційного відпалу досить широко використовується для вирішення різноманітних практичних завдань розміщення [145-148]. Відзначимо, що аналогічний підхід був запропонований в 1969 році чл.-кор. НАН України, проф. Ю.Г. Стояном у вигляді методу асимптотичного перебору локальних екстремумів [149]. Пізніше цей метод був розвинений в роботах [150, 25]. Асимптотична збіжність методу до точки глобального екстремуму функції мети в цитованих роботах доводиться інакше, а саме за допомогою центральної статистичної теореми.

У роботах [150, 151] і багатьох інших запропонований і реалізований метод наближеного розв'язання задачі розміщення не тільки прямокутників, але об'єктів довільної просторової форми. Цей метод, що отримав назву методу послідовно-одиночного розміщення, заснований на схемі методу оптимізації за групами змінних (метод Гаусса-Зейделя) і використовує кошти побудови годографа функції щільного розміщення [21, 27]. Метод призначений для отримання раціонального (допустимого рішення), яке є оптимальним для даної фіксованої перестановки номерів об'єктів. Подальший перебір перестановок може здійснюватися на основі методу звужуються околиць [152] або за допомогою методу вектора спаду.

Широко застосовуються для вирішення зазначеного класу задач також алгоритми мурашиної колонії (аnt colony algorithm) [95, 153-155]. При цьому слід зазначити роботу професора Л.Ф. Гуляницького [155], в якій наводиться детальний аналіз різних модифікацій алгоритмів мурашиної колонії, а також їх використання для вирішення багатьох практичних завдань розміщення.

1.3.1.2. Точні методи рішення задач прямоугольного розмішення.

Розвитку точних методів в зарубіжній і вітчизняній літературі присвячено значно меншу кількість публікацій [100, 156-160]. Це пояснюється складністю завдання, приналежністю її до класу NP-повних [17, 161]. Взагалі кажучи, термін «точний алгоритм» в англомовних публікаціях може зовсім не означати алгоритм, що забезпечує отримання глобально-оптимального рішення.

У різні роки це завдання вивчали і розробляли точні підходи до її вирішення І.В.Романовскій [162], А.І. Липовецький [105], В.В.Бухвалова [96], S.Martello, D.Vigo [163, 164], В. Мартинов [165], J.E.Beasley [100], Mitsutoshi Kenmochi [166]. D. Pisinger [167, 168].

Вивчення властивостей області допустимих рішень задачі, її континуально-дискретної структури, дозволило адаптувати схему методу послідовного аналізу варіантів [3] для задач даного класу і розробити ефективні схеми точного рішення задачі.

У роботах С.Л.Магаса [169, 170] пропонується методика точного рішення задачі розміщення заданого набору прямокутників в полубесконечной смузі. Отримання рішення передбачає перебір опуклих подобластей області допустимих рішень D, яка визначається обмеженнями виду (1.3), (1.4), і рішення на кожній з таких підгалузей завдання лінійного програмування.

У роботах М.В.Новожіловой [28,171] розроблений альтернативний підхід до вирішення даного завдання. Відмінність від попереднього полягає в реалізації ідеї перебору вершин області припустимих рішень D і рішення відповідних систем лінійних рівнянь.

Модифікація даного підходу запропонована в статті [172].

Завдання розміщення прямокутних об'єктів виключно важлива для розвитку теорії складності алгоритмів [173], тому продовження її дослідження і доказ нових властивостей, що дозволяють поліпшити оцінку обчислювальної складності алгоритму рішення, є актуальним завданням.

1.4. Особливості постановки задач розміщення прямокутників

Основними особливостями постановки задачі розміщення орієнтованих прямокутників, стримуючими розробку ефективних методів локальної та глобальної оптимізації, є:

• суттєва вирожденність області допустимих рішень;

• незв'язність області допустимих рішень задачі.

Перша особливість означає, що точка локального (глобального) мінімуму функції мети завдання розміщення прямокутників може бути аналітично описана більш, ніж однієї спільної системою рівнянь рангу К (див. Зауваження 1.2), відповідного розмірності простору ЕK, якому належить область допустимих рішень задачі.

Друга особливість означає необхідність здійснення монотонного переходу від однієї неопуклого подобласти області допустимих рішень, описуваної системою нелінійних нерівностей, до іншої в разі пошуку локального мінімуму функції мети завдання, або організації повного перебору набору таких подобластей, що містять область D.

Більш того, облік можливості безперервної зміни метричних характеристик розміщуваних об'єктів означає, що функції обмежень області припустимих рішень задачі в загальному випадку стають нелінійними.

Одним з ефективних і елегантних методів вирішення спільних завдань математичного програмування є метод лінеаризації [174], розроблений академіком НАН України Б.Н.Пшеничний. При цьому головною вимогою до функцій, які описують оптимізаційні задачі, є їх гладкість. Однак ідеї, покладені в основу методу лінеаризації, успішно використовуються при вирішенні багатьох інших завдань, наприклад при вирішенні деяких мінімаксний задач.

Для вирішення загального завдання опуклого програмування в [175] розроблений комбінований метод, заснований на ідеях трьох методів: лінеаризації, відсікання і точних штрафних функцій. Комбінований метод дозволяє оцінити множники Лагранжа.

Ще одним класом негладких оптимізаційних задач є задачі назад-опуклого програмування. В роботі [176] запропонована ефективна модифікація методу лінеаризації для пошуку локальних екстремумів завдання назад-опуклого програмування. У загальну схему завдання назад-опуклого програмування укладаються багато математичні моделі задач упаковки і розміщення різних об'єктів в просторі Еn. На відміну від традиційних методів класичної математики [177], при чисельному розв'язанні з'являється можливість значно збільшувати розмірності задач і знімати багато обмежень на форми і розміри об'єктів.

Слід відзначити роботу [178], в якій розглядаються дві модифікації застосування методу лінеаризації до вирішення негладких оптимізаційних задач. У даній роботі використовується підхід, заснований на формулюванні проблеми упаковки у вигляді загальної оптимізаційної задачі назад-опуклого програмування та вирішенні її модифікованим методом лінеаризації, запропонованим в [174]. Наведено розрахунки множини конкретних завдань упаковки та розміщення об'єктів, що демонструють ефективність роботи описаної модифікації методу лінеаризації і розробленого на його основі пакета прикладних програм Packing [179].

Окремо виділимо цикл робіт Новожилової М.В., Чуба І.А. [180-184], присвячених побудові лінійної апроксимації області допустимих рішень в задачі розміщення неорієнтованих багатокутників в смузі.

1.5. Методи вирішення задач оптимального планування

У науковій літературі завдання оптимального планування обмежених ресурсів зводяться до оптимального розподілу одного або двох окремо взятих ресурсів, хоча в практиці планування постійно виникають ситуації, які потребують одночасному оптимальному розподілі декількох (безперервних або дискретних) обмежених ресурсів (наприклад, крім часу - фінансів, обладнання , людський ресурс і т.д.).

До методів, які використовують для вирішення завдань розподілу обмежених ресурсів відносять метод гілок і меж, який надає можливість отримати точне рішення задачі, а також генетичні алгоритми, які разом з теорією графів дозволяють моделювати і вирішувати завдання розподілу ресурсів при обмеженому фінансуванні і обмежених термінах виконання проекту .

До традиційних моделей календарного планування відносять лінійні графіки Ганта [185,186], які використовуються для графічного представлення відображення динаміки виробничих процесів. у вигляді календарного плану. Однак жорстка детермінованість і одноваріантного лінійних графіків не дає можливість використовувати їх в якості технологічних моделей для вирішення задач планування і управління в сучасних умовах динамічно мінливого зовнішнього середовища. Графіки Ганта не можуть оцінювати значення кожної роботи для досягнення кінцевої мети або виявляти її резерви часу.

Лінійні моделі [185,186] є деяким узагальненням графіків Ганта. На відміну від графіків Ганта, терміни виконання робіт в цьому типі моделей можуть бути не тільки фіксованими, але на них також можуть бути накладені односторонні обмеження виду: **. Перша умова означає, що і-я робота може початися не раніше моменту , а друге обмеження показує, що і -я робота повинна бути виконана не пізніше моменту .

Мережеві моделі [72], на відміну від лінійних, можуть описувати взаємозв'язки між роботами. Відносна простота і наочність мережевих моделей дозволяє широко використовувати їх в практиці управління обмеженими ресурсами. Основна перевага мережевих моделей дозволяє відображати реальні відносини впорядкованості між роботами. У мережевих моделях розглядаються наступні зв'язку між двома роботами де - момент (час) початку наступної роботи В, - момент (час) закінчення попередньої роботи А.

Рішення задач оптимального розподілу ресурсів на мережі призводить до необхідності знаходження критичного шляху для кожного варіанта розподілу ресурсів і вибору оптимального. Універсальних точних методів розв'язання задач розподілу ресурсів на мережах не існує, розглянуті лише окремі випадки.

Досвід застосування мережевих моделей дозволив показати ряд їх недоліків. У мережевих моделях використовується тільки один вид зв'язку між залежними роботами. У реальних процесах існують набагато більш складні зв'язки між залежними роботами. У мережній моделі можна виводити на екран умова безперервності виконання однієї або декількох робіт, неможливо описати таку технологічну ситуацію, коли необхідно вказати інтервал часу, більше якого, наприклад, не можна робити перерву між роботами або тривалість роботи. Мережеві моделі, відображаючи одноваріантного технологію і організацію робіт, мають низьку "стійкість" до змін, які мають місце в об'єкті моделювання в процесі будівництва.

Удосконалення технологічних моделей дозволило створити узагальнені мережеві моделі (УСМ), запропоновані групою вчених на чолі з Воропаєвім [185]. Принципова відмінність УСМ від розглянутих вище моделей заключається в тому, що в них розглядаються два типи зв'язку між залежними роботами - "не раніше" і "пізніше" і аналогічні обмеження термінів початку і завершення робіт. УСМ дозволяють підвищити ступінь адекватності при моделюванні складних технологічних процесів, але не дозволяють оперувати іншими характеристиками робіт проекту крім тривалості.

У роботах [187,188] розглянуті підходи до вирішення завдання розподілу обмежених ресурсів проекту, так звані Resource Constrained Project Scheduling Problems (RCPSP), що використовують точні і наближені методики рішення. Так, в роботах [189,190] пропонується генетичний алгоритм вирішення як однокритерійним, так і багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту. В роботі [191] вивчаються PERT / CPM мережеві технології в припущенні, що всі необхідні ресурси є доступними. У статті [192] описана інноваційна автоматична система побудови календарного плану проекту, який доставляє оптимальний час виконання проекту в цілому.

Величезний внесок у розвиток математичних моделей і методів вирішення завдань оптимального планування, цінність якого ще належить усвідомити, внесли вчені Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова. Конструктивні засоби моделювання і рішення задач оптимального проектування шляхів [193, 194], електричних і газових мереж [195], при визначенні найкоротших шляхів на мережах [196] і критичних шляхів у мережевих графіках, вирішенні завдань розміщення виробництва [194], теорії розкладів і календарного планування [197] в дискретної постановці, а також ряду інших дискретних задач [198] були запропоновані академіком В. С.Міхалевічем і його учнями. Розвинена В.С. Михалевичем теорія послідовних статистичних рішень, застосована до вирішення детермінованих різноманітних завдань, отримала назву "схема послідовного аналізу варіантів" [3].

Формально схема послідовного аналізу варіантів зводиться до повторення такої послідовності дій: - розбиття множин можливих варіантів вирішення задачі на сімейство підмножин, кожне з яких має додаткові специфічні властивості;

- використання цих властивостей для пошуку логічних суперечностей в описі окремих підмножин;

- виключення з подальшого розгляду підмножин, в описі яких є логічні розбіжності.

Оскільки при відсівання безперспективних частин варіантів відсівається відповідно всі їхні збори продовжень, то відбувається значна економія в обчислювальної процедури.

Для пошуку критичних шляхів застосовувався алгоритм (автор програми – Г.А. Донець), близький до алгоритму пошуку найкоротших шляхів на мережі [17], який базувався на ідеях послідовного аналізу варіантів.

В.В.Шкурба розвинув ідею послідовного аналізу варіантів для вирішення завдань упорядкування, результатом чого стала класична монографія [199]. В роботі [199] досліджений предмет теорії розкладів, здійснено класифікацію завдань, розроблені точні методи вирішення деяких спеціальних завдань теорії розкладів і наближені методи розв'язання загальної задачі формування календарних планів.

Зауважимо, що точні методи вирішення завдань теорії розкладів ефективні лише для деяких спеціальних класів задач, що визначається характером обмежень, які стосуються способу виконання елементарних операцій і можливостей використання ресурсів, число яких не перевищує трьох. При зростанні кількості ресурсів математична складність завдань теорії розкладів істотно зростає. Основний підхід до їх вирішення  розробка наближених методів, заснованих на інформаційному моделюванні виробничих процесів з широким використанням різних евристичних прийомів. Ефективні засоби рішення оптимізаційних задач календарного планування на виробництві, які базуються на використанні евристичних алгоритмів, вивчені в монографії [200]. Тут вперше систематизовані та запропоновано оригінальні підходи до проблеми оцінки ефективності евристичних алгоритмів.

Розвиток ідей календарного планування, моделювання виробничих процесів і управління великим сучасним промисловим підприємством представлено в роботі [201].

В [202] вперше був вивчений клас задач календарного планування, які виникають при автоматизації складних виробничих процесів. У роботах [203, 204] запропоновані підходи до формалізації таких завдань, методи їх вирішення і відповідне програмне забезпечення.

Ряд теоретичних результатів, пов'язаних з кількісним аналізом складності методів послідовного аналізу варіантів, головним чином для мережевих завдань розподілу обмежених ресурсів, складання розкладів і близьких завдань був опублікований в монографії [205].

1.6 Теорія оптимізаційного геометричного проектування як інструментальний засіб моделювання задачі планування ресурсів

У роботах [206, 207] запропоновані математичні моделі та оптимізаційні методи розв'язання задач управління проектами на стадії розподілу ресурсів, створені в рамках теорії оптимізаційного геометричного проектування [16]. Підхід, який розвивається в даних роботах, дозволяє представляти деякі властивості досліджуваних об'єктів, (тривалість в часі, вартість, і т.п.) як геометричні характеристики; умови часткової впорядкованості робіт представляти як умови розміщення об'єктів; здійснювати безперервне ведення робіт; задавати тривалість кожної окремої роботи як довжину об'єкта; враховувати інтервали часу між виконанням робіт як відстані (які можуть змінюватися) між об'єктами, що дозволяє мати багато варіантів технологічного виконання робіт і розраховувати кращої варіант при досягненні глобального мінімуму цільової функції.

Для багатьох класів задач оптимального розміщення геометричних об'єктів розроблені ефективні методи визначення глобального мінімуму - а саме метод гілок і меж, і методи пошуку локального мінімуму - методи, засновані на застосуванні лінійного програмування або методах набору активних нерівностей [208].

Вважається, що об'єкти розміщення в таких завданнях мають незмінні метричні характеристики і що змінюватися можуть тільки метричні параметри області розміщення. Однак така постановка досить звужує спектр прикладних задач, які можна ставити і вирішувати методами оптимізаційного геометричного проектування. Інакше кажучи, існує значний клас практичних задач, до яких належить оптимізаційна задача розподілу ресурсів проекту, де необхідно передбачити можливість зміни топологічних і метричних характеристик об'єктів розміщення.

Отже, однією з проблем при моделюванні задач розподілу ресурсів проекту, яку можна уявити як вищезгадану задачу розміщення об'єктів, саме і є проблема обліку змін метричних характеристик об'єктів.

1.6.1. Особливості математичних моделей оптимізаційних задач розподілу обмежених ресурсів проектів

Специфіка задач першого класу вимагає оптимального розподілу ресурсів проекту на множені складових його робіт (операцій) з можливістю зміни характеристик робіт і жорсткими обмеженнями на використання ресурсів і тривалість робіт. Теорія оптимізаційного геометричного проектування дозволяє представляти роботи проекту як об'єкти розміщення, необхідні ресурси – як метричні характеристики (розміри) об'єктів, послідовність і умови часткової впорядкованості робіт - як умови розміщення. Зазначені задачі розглядаються в багатовимірному просторі ресурсів і можуть бути сформульовані як задачі оптимізаційного геометричного проектування, а саме як завдання оптимального розміщення геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками і просторової формою в заданій області. Відзначимо наступні особливості цих задач, що дозволяють виділити їх в особливий клас задач розміщення:

• можливу зміну кількості одного або декількох ресурсів тягне за собою зміну необхідної кількості інших ресурсів, і вартість роботи проекту в умовах інфляції залежить від моменту часу її виконання [209]. У термінах задач геометричного проектування це відповідає зміні метричних характеристик об'єктів розміщення;

• об'єкти розміщення можуть піддаватися афінних перетворень гомотетии [210], при якому можлива зміна гомотопічні типу об'єкта. Крім того, в деяких випадках допустимо розбиття роботи на кілька робіт, рознесені в часі, що приводить до зміни зв'язності вихідного об'єкта;

• при моделюванні багатьох практичних завдань розподілу ресурсів виявляється необхідною обробка інформації про геометричні об'єктах з порожньою начинкою Ø, (але непорожній відносної начинкою [210]), які не є ϕ-об'єктами.

З нечисленних публікацій з даної тематики відзначимо наступні роботи.

Робота [211] присвячена моделюванню багатовимірної задачі календарного планування (завдання оптимального розподілу багатьох ресурсів проекту). Вихідна задача зведена до оптимізації розміщення гіперпаралелепіпед, що моделюють многоресурсні операції (роботи) проекту. Запропоновано підхід до її вирішення, заснований на схемі методу гілок і меж.

В роботі [212] розглядається двовимірна задача розподілу обмежених ресурсів проекту в умовах, коли роботи проекту мають дві характеристики - вартість і час виконання і допускається їх розбиття за часом. Задача зведена до оптимізації розміщення прямокутників із змінними розмірами в смузі з мінімізацією її довжини (загального часу виконання проекту). Для вирішення завдання розроблена модифікація методу гілок і меж. Аналогічне завдання в тривимірній постановці досліджується в роботі [213]. Побудовано математичну модель, яка зводиться до задачі оптимального розміщення паралелепіпедів.

У роботах [214, 215] розглянута і реалізована ідеологія інтервального геометрії при побудові математичної моделі задачі розподілу ресурсів в умовах невизначеності як задачі оптимізаційного геометричного проектування Метричні характеристики об'єктів розміщення, що моделюють роботи проекту, можуть змінюватися незалежно один від одного в деяких діапазонах значень.

1.7 Постановка задачі дослідження

Виконаний в розділі короткий огляд існуючих підходів до моделювання і вирішення завдань прямокутного розміщення, і ідеологічно близьких до них завдань оптимального планування обмежених ресурсів демонструє стійкий інтерес сучасної теорії дослідження операцій до розробки ефективних методів вирішення завдань такого типу.

Аналіз публікацій показав, що, незважаючи на очевидну практичну важливість, клас задач розміщення геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками вивчений в меншій мірі в порівнянні з оптимізаційними задачами розміщення об'єктів з фіксованими метричними характеристиками, хоча даний клас задач є базовим для моделювання і вирішення багатьох завдань оптимального планування ресурсів.

Таким чином, метою дослідження є розробка математичної моделі, точного і наближеного методів розв'язання оптимізаційної задачі розміщення прямокутних геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками на основі стратегії апріорної лінійної апроксимації сепарабельних функцій-обмежень задачі за умови, що точність представлення є екзогенним параметром.

1.8. Висновки по розділу 1

1. У розділі наведено системологічний аналіз сучасного стану основних досягнень наукової думки у напрямку даної роботи.

2. Обґрунтовано актуальність вирішення сформульованої задачі дослідження. Поведемо порівняння наявних підходів до вирішення власне завдання прямокутного розміщення з фіксованими і / або змінними метричними характеристиками об'єктів розміщення, так і пов'язаний з нею завдань оптимального планування ресурсів.

3. Визначено напрямки досліджень.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ІЗ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

У розділі проведено побудова і аналіз математичної моделі задачі розміщення прямокутників з змінюваними метричними характеристиками, за умови, що метричні характеристики пов'язані функціональними залежностями. Побудовано аналітичний опис основних обмежень завдання, виділені додаткові конструктивні властивості області допустимих рішень задачі. Основне завдання дослідження в даній постановці є множина сепарабельних задач математичного програмування. Запропоновано метод лінеаризації обмежень області припустимих рішень задачі, за умови, що точність завдання є екзогенним параметром.

2.1 Математична модель основної задачі дослідження і її особливості

Нехай задана область розміщення - напівнескінченної смуга - T0⊂ E2, геометрична інформація g0(s0, m0, u0) про яку має вигляд:

**s**0 = «прямоугольник»,

**m0 =** (W, Z), причем W – const, Z – var,

**u0**  = (0,0).

При цьому Е2 - арифметичне евклідова простір розмірності 2.

Нехай також заданий кінцевий набір T = {Ti},  об'єктів розміщення. Кожен об'єкт Ti задається кортежем геометричній інформації gi(si, mi, ui) виду

**s**i = «прямокутник», mi**=** (ai, bi), ui  = (xi, yi).

Зв'яжемо з кожним об'єктом Ti власну систему координат ХiОiYi, започаткована ще збігаються з лівої нижньої вершиною Ti – полюсом об'єкта.

Координати ui=(хi, уi) полюсів об'єктів Ti в загальній системі координат ХОY, пов'язаної з областю T0, – це параметри розміщення об'єкта Ti в E2 (мал.2.1). Будемо далі вважати записи Ti и Ti (хi, уi) еквівалентними.

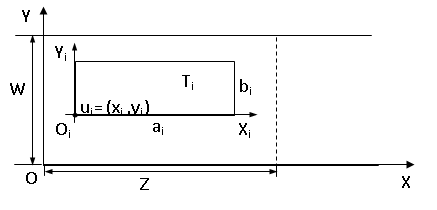


Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація об'єкта, що розміщується

Нехай метричні характеристики (ai,bi), , задовольняють умові:

ai∈[ai min, ai max] bi∈[bi min, bi max], ai  min > 0, bi  min > 0. (2.1)

Нехай також площа Si об'єкта Ti при зміні метричних характеристик (ai, bi) залишається незмінною:

Si = ai min × bi max= ai max × bi min. , тобто bi =S / ai. (2.2)

Іншими словами, маємо перший тип характеру зміни метричних характеристик об'єкта, що розміщується (див. мал. 1.1).

Тоді вектор незалежних змінних задачі має вигляд:

.

Необхідно розмістити набір об'єктів T в полубесконечной смузі T0 без накладень один на одного так, щоб величина Z - довжина зайнятої частини смуги T0 була мінімальною.

Отже, необхідно визначити

, (2.3)

де область допустимих рішень D =D1 ∩ D2 визначається умовами виду

D1: intТi (хi, уi, аi) ∩ intТj (хj, уj, аj) = ∅, , i≠j, (2.4)

D2: Тi (хi, уi, аi) ⊂ Т, . (2.5)

2.2 Аналітичний опис області допустимих рішень задачі

Аналітичний опис умов (2.4) взаємного попарного неперетинання об'єктів розміщення, а також їх приналежність заданої області розміщення (2.5) здійснюється за допомогою апарату Ф-функцій, введених член-кореспондентом НАН України Ю. Г. Стояном.

Наведемо визначення Ф-функції, слідуючи, наприклад, [16] для пари об'єктів (Тi(ui), Тj(uj)) з наступними характеристиками: Тi(ui) ⊂ Е2 і Тj(uj)  ⊂ Е2 – --об'єкти (int Тi(ui) ≠ ∅), метричні характеристики об'єктів Тi (ui) и Тj(uj) постійні.

Визначення 2.1. Довільна, усюди певна і безперервна функція в Е4, що має таке характеристичне властивість:

ij (ui,uj) > 0, если clТi(ui) clТj(uj) = ; (2.6)

ij (ui,uj) = 0, если clТi(ui)  clТj(uj)  и

intТi(ui)  intТj(uj) = ; (2.7)

ij (ui,uj) < 0, если intТi(ui) intТj(uj)  , (2.8)

називається Ф-функцією.

Характеристичні властивісті ij(ui,uj)-функції задає неперетинання (2.6), дотик (2.7) і перетин (2.8) замкнутих -об'єктів Тi(ui) и Тj(uj), де ui=(хi, yi), uj=(хj, yj) - параметри трансляції полюса -об'єктів Тi(ui) і Тj(uj)при цьому Тi(ui), Тj(uj) ⊂ Е2.

Поверхня ij (ui,uj) = 0 являє собою 0-рівень Ф-функції.

На підставі наведеного Визначення 2.1 розглянемо процедуру побудови Фij(ωi, ωj)-функції, яка задає умову (2.4) і -функції, відповідної умові (2.5).

При виконанні умови (2.2) досить розглядати  (рис. 2.2 а).

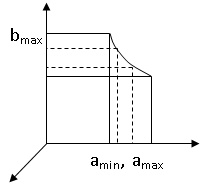
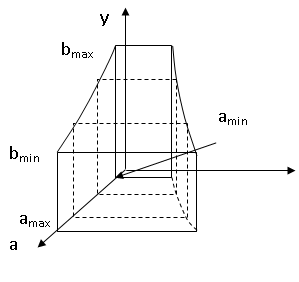


Рисунок 2.2 - Представлення прямокутника із змінними метричними характеристиками

а) в просторі Е3 ендогенних параметрів завдання

б) перетину точкового безлічі площиною

Будь-яке перетин даного безлічі (рис.2.2 б) площиною ,  має просторову форму прямокутник.

Тоді Ф-функція, що задає умову взаємного неперетинання об'єктів Тi(ωi) і Тi(ωj), має вигляд:



Таким чином , -функція в даному випадку визначається виразом:



і описується системою  (N-1) N наборів нелінійних нерівностей виду

,  (2.9)

де, ,,

,,.

Тут набір нерівностей – це таке аналітичне засіб опису неопуклого точкового безлічі, що координати будь-якої точки цієї множини задовольняють хоча б одній нерівності даного набору.

 – функція, аналітично описує обмеження на розміщення об'єкта Ti в смузі, задається наступним чином:



Аналітичне подання області D2⊂E3N+1 є система нелінійних нерівностей виду:

, , (2.10)

де , , , 

Якщо метричні характеристики об'єктів пов'язані відповідними функціональними залежностями виду (2.1), то  -функція, що описує умови взаємного неперетинання розглянутої пари об'єктів із змінними метричними характеристиками належить простору Е6 , а її рівні є кусочно-гладкими гіперповерхні.

В результаті проведеного аналізу оптимізаційна задача (2.3-2.5) формулюється таким чином:

Знайти

, (2.11)

де область допустимих рішень  представляється у вигляді набору нерівностей

,  (2.12)

2.3. Конструктивні властивості математичної моделі (2.11) - (2.12)

Відзначимо основні властивості оптимізаційної задачі (2.11) - (2.12), що випливають з її математичної постановки.

Властивість 2.1. Функція мети Z є лінійною. При цьому

.

Властивість 2.2. Простір параметрів, в якому визначається екстремум функції мети, має розмірність 3N + 1, де N - число розміщуються об'єктів.

Властивість 2.3. Число обмежень, що описують область D допустимих рішень задачі (2.11) - (2.12), квадратично залежить від числа розміщуваних об'єктів і так само

2N(N – 1) + 6N.

Властивість 2.4. Область  неопуклого, недоладне обмежене точкове безліч, що має кусочно-гладку кордон , . Кожна компонента зв'язності області допустимих рішень є многосвязной.

Властивість 2.5. Область  допускає подання до вигляді об'єднання кінцевого числа зв'язкових подобластей виду

,  (2.13)

При цьому підобласть  описується системою N систем нелінійних нерівностей виду (2.10) і  нерівностей - по одному з кожного набору нерівнестей виду  для кожної пари об'єктів.

Відзначимо, що специфіка області допустимих рішень D така, що не тільки подобласть Dg є зв'язковою множиною. Об'єднання кінцевого числа (не всіх) підмножин Dg також може бути зв'язковим.

Властивість 2.6. Функція виду  і   є випуклими.

Доказ.

Очевидно, розглядаємі функціі  і   є диференційованими.

Скористаємося наступним критерієм опуклості функції що диференціюється [216]:

Нехай − опукла множена, , тоді для опуклості функції  на множені  необхідно и достатньо, щоб

, (2.14)

Розглянемо функцію . Для спрощення подальшого розгляду покладемо Yji=yj – yi. Тоді має місце запис .

Розглянемо 0-рівень даної функції: .

Отже, можна записати 

В даному випадку безліч  представляє собою відрізок

U = [amin, amax].

Припустимо , . Тоді різниця

.

Похідна розглянутої функції буде дорівнювати . Відповідно, .

Отже, скалярний твір  у пропонованій нотації має вигляд

 .

Розглянемо можливі три випадки:

Випадок 1..

Очевидно, в целому вираз 

*Випадок 2.*

 і

. При цьому .

Отже, в цьому випадку умова (2.14) також виконується.

*Випадок 3.* .

Як що , то .

Таким чином, умова даної властивості виконується для всіх значень .

Перехід до початкового стану функції  не становить труднощів, так як функція  є лінійною комбінацією опуклою і лінійної функцій, і тому також є опуклою.

Для функції другого виду доказ проводиться аналогічно.

Для подальших міркувань скористаємося наступним визначенням і теоремою [216].

Визначення 2.2 [216]. Надграфік функції I, визначеної на множині називається множиною

.

Теорема [216].Для того щоб функція, певна на опуклій множені, була опуклою, необхідно і достатньо, щоб її надграфік був опуклою множиною.

Наступне властивість 2.7 сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2.1. Область  є опуклою підобластю області .

Доведення. Область  задається системою лінійних і нелінійних нерівностей. Тому опуклість або неопуклого області  залежить від характеристик функцій-обмежень завдання. Ці функції або лінійні або є гіперболічними.

Згідно теореми [216], надграфік опуклих функцій

 и  (=  и  відповідно також є опуклими множинами.

Таким чином, область , яка надається як перетин опуклих підмножин, в свою чергу є опуклою множиною.

Слідство 2.1. Функції , є опуклими.

Доказ цього слідства проводиться аналогічно доказу властивості 2.6.

Властивості 2.8. Покриття (2.13) не є розбиттям, тому для деяких точок області D (в тому числі граничних точок) має місце таке співвідношення

 (2.16)

2.4. Подання завдання дослідження як завдання сепарабельного програмування

Визначення 2.3 [216]. Функція  називається сепарабельною, якщо вона може бути представлена у вигляді суми функцій, кожна з яких є функцією однієї змінної, тобто якщо

. (2.17)

В рамках сепарабельного програмування розроблений підхід до перетворення нелінійних задач оптимізації певного типу, а саме містять функції виду (2.17), до задачі, що містить тільки лінійні функції. При цьому в подальшому в процесі вирішення такої модифікованої задачі використовується спеціальна модифікація симплекс-алгоритму.

Обгрунтуванням методу є та обставина, що в якості гарного наближення нелінійної функції на великому відрізку можна використовувати її кусково-лінійну апроксимацію.

2.4.1 Кусочно-линейная аппроксимация сепарабельной функции

Класичний метод кусочно-лінійної апроксимації передбачає наступний підхід.

Нехай змінна  функції  виду (2.17) приймає значення з проміжку. Проміжок  розбивають на  проміжків зазвичай рівної довжини за допомогою  точок так, що ,. Для нелінійної функції однієї змінної ілюстрація підходу наведена на рис. 2.3. Тоді кусочно-лінійна апроксимація функції  виду (2.17) така

, (2.18)

Де

, , ,  (2.19)

для всіх  і і, причому не більше двох чисел  можуть бути позитивними і повинні бути сусідніми.

Зауваження 2.1. Точність рішення прямо пропорційно залежить від точності апроксимації (кількості проміжків ) сепарабельних функцій обмежень.

Зауваження 2.2. Розмірність простору змінних задачі зростає в залежності точності апроксимації сепарабельних функцій обмежень (за рахунок додавання нових змінних).

На мал. 2.3 наведено приклад лінійної апроксимації одновимірної нелінійної функції .

Рівняння прямої, що проходить через дві точки ( x(k), f (k) ) и ( x(k+1), f (k+1) ), має вигляд

.

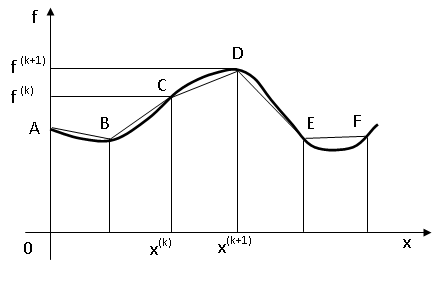


Рисунок 2.3 - Геометрична інтерпретація лінійної апроксимації одновимірної нелінійної функції

Сукупність розглянутих лінійних функцій записують в загальному вигляді, враховуючи, що будь-яке значення аргументу х в інтервалі

x (k) ≤ x ≤ x (k+1),

можна записати як

х = λ(к) х(к) + λ(к+1) х(к+1),

де λ(к), λ (k+1) - невід’ємні числа, сума яких дорівнює 1.

Аналогічно записуються відповідні значення функцій.

Відзначимо наступну важливу властивість завдання (2.11) - (2.12).

Властивість 2.9*.* Завдання (2.11) - (2.12) належить до класу задач сепарабельного програмування.

Ця властивість дійсно справедлива, так як функція мети і всі функції обмежень (2.12) є лінійними, крім функцій, , , , які задовольняють умові (2.17).

Якщо цільова функція і функції обмежень є сепарабельними, то наближене рішення такого завдання можна знайти з використанням методу кусково-лінійної апроксимації (2.18, 2.19).

Іншими словами, необхідно виконати перетворення  виду

, (2.20)

яке продукує область  як результат застосування методу кусково-лінійної апроксимації (перетворення ) до нелінійним обмеженням області.

Для даної задачі метод кусочно-лінійної апроксимації необхідно застосовувати для функцій обмежень задачі

, , .

Функція  представляється у вигляді , при цьому, ,, і тільки одна функція –  – є нелінійної.

Функції обмежень  представляються у вигляді,  з нелінійної функцією .

Зауваження 2.3. Кількість обмежень линеаризованної завдання зростає в залежності від кількості обмежень, що містять сепарабельном функції.

Тоді задача (2.11) - (2.12) перетвориться до виду

, (2.21)

 (2.22)

Зауваження 2.4. Оцінка точності побудови апроксимації виду (2.22) не відома.

Очевидно, що точність рішення задач лінійного програмування, які можуть бути побудовані на основі даного підходу до лінійної апроксимації функцій обмежень не перевищить точності апроксимації виду (2.22).

Розглянемо наступний

**Пример 2.1**.

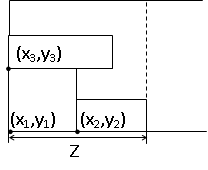
Задано безліч об'єктів розміщення: . Метричні характеристики (ai, bi), i=1,2,3, об'єктів Ti змінюються в діапазоні



При цьому .

Область розміщення - напівнескінченної смуга T0=(x,y| 0 ≤ x≤ z, 0≤y≤8).

Початкове розміщення (мал 2.4) характеризується вектором ендогенних параметрів u0= (0, 0, 4, 4, 0, 4).



Ртсунок 2.4 − Початкове розміщення об'єктів примеру 2.1

Вектор початкових значень метричних характеристик **mi** має вид:

(a1max, b1min, a2max, b2min, a3max, b3min)=(4, 4, 4, 2, 6,2).

Система нелінійних обмежень, що описує опуклу підобласть  області допустимих рішень D даної задачі, що містить точку u0, має вигляд

 (2.23)

Система обмежень (2.23) містить 21 нерівність, як лівих частин двох останніх обмежень виступають сепарабельні функції.

Функція виду.

,

де , містить тільки одну нелінійну функцію: . Так як змінна , положим .

Значення функції .

Використовуючи формули (2.18 - 2.19), отримуєм

, (2.24)

.

Відповідно, функції , де

 містить тільки одну нелінійну

функцію: . Так як змінна , положим  . Значення функції   . Використовуючи формули (2.19), визначаєм

, (2.25)

.

Підставивши отримані вирази для лінеаризованих функцій ,  из (2.24), (2.25) в систему обмежень (2.23),

отримаєм

 (2.26)

Після проведення даного перетворення число обмежень системи (2.26), яка описує багатогранну підобласть  лінеаризованної області допустимих рішень даної задачі, дорівнює 29.

2.5. Метод глобальної кусочно-лінійної апроксимації сепарабельних функцій обмежень завдання (2.11) - (2.12)

Розглянемо інший підхід до побудови перетворення  виду (2.20), яке назвемо перетворенням :

. (2.27)

Метод рішення задачі (2.11-2.12), представлений нижче, дозволяє провести апроксимацію завдання з будь-який заздалегідь заданою точністю без збільшення розмірності простору змінних, якому належить область допустимих рішень задачі.

Розглянемо функцію  нерівності  з (2.9).

Рівняння  гіперболічної поверхні може бути представлено у вигляді:

.

Положим . У просторі змінних  поверхність  має вид гіперболи  (рис. 2.5), яка проходить через точки , 

Назвемо дані точки крайніми точками гіперболи .

Лінеарізуемо функцію .

Зауваження 2.5. Приймемо в розгляд тільки ту ділянку гіперболи , який розташований між крайніми точками гіперболи, так як тільки ця ділянка формує частину кордону.

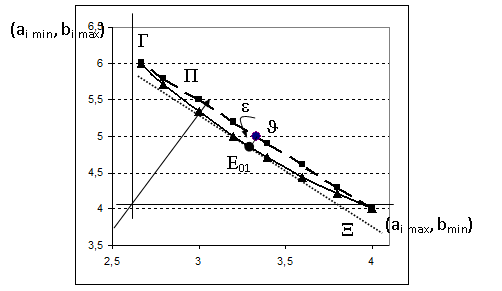


Рисунок 2.5 – Початкова аппроксимація

області допустимих рішень задачі .

Перш за все, побудуємо рівняння прямої, що проходить через крайні точки гіперболи Г.

Рівняння прямої П має вигляд:

,

або

, (2.27)

де , , .

У нормальному вигляді рівняння (2.27) набуває форму:

, (2.28)

де , , , .

Назвемо похибкою лінеаризації  величину виду

, (2.29)

де  − відстань від точки  кривої  до прямої .

Проведемо оцінку похибки лінеаризації . Дану задачу можна розглядати як задачу умовної мінімізації двовимірної функції  на множені Г виду:

. (2.30)

Однак завдання (2.30) допускає природне геометричне тлумачення і для визначення її точного рішення може бути запропонований наступний метод.

2.5.1. Алгоритм обчислення оцінки апроксимації ε

Визначимо величину початкової оцінки  точності лінійної апроксимації. Для цього:

1. Побудуємо дотичну  до кривої Г таку, що . Рівняння прямої має вигляд:

.

2. Визначимо координати  точки дотику  (рис.2.5):

.

Координати  точки  задовольняють системі рівнянь виду:

 (2.31)

Висловлюючи, наприклад, змінну  з першого рівняння системи (2.31) і підставляючи в друге, отримаємо квадратне рівняння виду

, або . (2.32)

Рівняння (2.32) має єдине рішення, якщо його дискримінант

який дорівнює нулю.

Іншими словами, якщо параметр  має вид:

,

то система нелінійных рівнянь (2.31) має єдине рішення, а саме, координати точки .

3. Побудемо перпендикуляр  з точки  на пряму П. Відстань  є шуканої (рис 2.5) похибкою апроксимації: .

Кількість K лінійних обмежень, що моделюють вихідне нелінійне обмеження, визначається екзогенної точністю ε уявлення: .

Так, для обмеження  таке уявлення має вигляд

, (2.33)

де функція.

Коефіцієнти  визначаються за допомогою наступного ітераційного алгоритму.

Ітерація 1 (І\_1). Покладемо . На першій ітерації безліч точок апроксимації містить дві точки: {e0, e1}, через які проходить гіпербола Г виду ,.

І\_1.1.Побудова апроксимаційної прямий П:,

,

І\_1.2. Визначення точності лінеаризації  як рішення задачі умовної мінімізації двовимірної функції :

, (2.34)

де − відстань від точки∈ до прямої, {e0, ek} ∈ П.

Для цього застосовується алгоритм, розглянутий вище і який передбачає побудову рівняння дотичної  до кривої Г виду



Показано, що початкова точність апроксимації .

І\_1.3.Визначення координат  точки дотику : .

І\_1.4. Якщо ε ≥ ξ01, то апроксимаційний алгоритм закінчений.

Якщо точність ε не досягнута (ε < ξ01), то Е01 поповнює множену апроксимаційних точок.

Ітерація 2. . Впорядкування безлічі точок апроксимації так, що {e0, e1=Е01, e2}.

Проведення операцій І\_2.1. – І\_2.4.для кажного із сегментів [e0, e1], [e1,e2], аналогічних відповідним операціям попереднього кроку, визначення нових значень ξ01  (ξ12 ) і порівняння з заданою ε.

Якщо ε > ξ01, алгоритм продовжує діяти з знову впорядкованим безліччю точок апроксимації. Подальші ітерації виконуються аналогічно до виконання умови щодо точності лінеаризованого представлення функцій обмежень завдання.

Таким чином, на μ-й ітерації алгоритма розглядається послідовність {e0, e1, е2,…, eμ}.

Зауваження 2.6*.* Після проведення перетворення  (2.27) опукла лінійна підобласть  належить тому ж простору, що і вихідна підобласть.

Нехай точність початкової апроксимації ξ01 задовольняє дослідника.

Тоді досить замінити функцію  на її лінійну апроксимацію .

Зауваження 2.7. Одноразове застосування перетворення  (2.27) не збільшує кількості обмежень завдання.

**Пример 2.2.**

Розглянемо одноразову линеаризацию функції  примеру 2.1. Метричні характеристики (a1, b1) об’єкту Т1 зміняються у діапазоні . При цьому .

Тоді коефіцієнт βi1 дорівнює 0,447. Відповідно, величина = − 5,34992.

Коефіцієнт  початкового приближення (пряма П на рис. 2.5) дорівнює 5,36656.

Таким чином, похибка апроксимації:  в даному випадку становить 0,0166.

Координати  точки  задовольняють системі рівнянь виду:



Вирішуючи чисельно дану систему, отримаємо наступні координати (3,957, 4,09).

Зауваження 2.8*.* Процедура уточнення початкової апроксимації може виконуватися динамічно в процесі виконання завдання, так як висока точність апроксимації необхідна тільки для активних обмежень завдання, тобто тих обмежень, які формують актуальне підмножина  линеаризованной області допустимих рішень .

Зауваження 2.9. Кусково-лінійна апроксимація  функцій обмежень системи нерівностей (2.15), яка задає умови розміщення в області, і обмеження  проводиться аналогично.

2.6. Висновки по розділу 2

1. Проведено побудову та аналіз математичної моделі задачі розміщення прямокутників з змінюваними метричними характеристиками, за умови, що метричні характеристики пов'язані функціональними залежностями.

2. Побудовано аналітичний опис основних обмежень задачі розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками.

3. Виділено додаткові конструктивні властивості області допустимих рішень задачі. Доведено опуклість нелінійних обмежень завдання.

4. Проведено класифікацію основного завдання дослідження в даній постановці як кінцевої множени сепарабельних задач математичного програмування.

5. Запропоновано метод лінеаризації обмежень області припустимих рішень задачі, за умови, що точність задання є екзогенним параметром.

6. На основі властивості сепарабельном функцій обмежень основної задачі дослідження обґрунтована можливість їх лінеаризації з апріорі заданою точністю ε, яка може бути менше точність завдання вихідних даних.

7. Проведено порівняння запропонованого методу лінеаризації основних обмежень задачі з відомими раніше підходами.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАВДАННЯ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ ІЗ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

У розділі представлені оптимізаційні методи розв'язання задачі розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками. Властивості 2.4, 2.5 області допустимих рішень, розглянутої задачі обумовлюють її багатоекстремального. Тому для вирішення завдання в залежності від її розмірності в розділі докладно розглянуті як точні, так і наближені методи локальної та глобальної оптимізації.

Представлений наближений метод рішення, так званий decoding algorithm, побудований на основі загального методу оптимізації за групами змінних, але враховує специфіку завдання і змінність метричних характеристик об'єктів розміщення. Крім того, розглянута модифікація методу пошуку глобального мінімуму функції мети даної задачі розміщення, заснована на побудові дерева рішень, що упорядковує перебір опуклих підмножин області допустимих рішень задачі.

3.1 Особливості області допустимих рішень задачі (2.11) - (2.12), що визначають вибір методу рішення

В силу виділених в розд. 2.3 Властивостей 2.1-2.8 функції мети і області допустимих рішень завдання (2.11) - (2.12) зводиться до вирішення кінцевої множини задач опуклого програмування виду:

, (3.1)

,

,  (3.2)

де функції обмеження (3.2) мають вид (2.9), (2.10).

Іншими словами, підмножина  описується системой N систем нелінійних рівнянь виду (2.10) и  нерівностей - по одному з кожного набору нелінійних нерівностей виду  (2.10) для кожної пари об’єктів розміщення.

Згідно [10] існує теоретична можливість визначення глобального мінімуму функції мети завдання (3.1) - (3.2) опуклого програмування, яка є її локальним мінімумом.

*Зауваження 3.1.* Для визначення глобального мінімуму функції мети необхідно вирішити задач опуклого програмування виду (3.1) - (3.2).

Має місце

*Ствердження 3.1.* Глобальний мінімум функції мети завдання (3.1) - (3.2) досягається в крайній точці області допустимих рішень Dg.

Доведення. На підставі властивості 2.1 (розд. 2.3) можна зробити висновок, що екстремум функції мети завдання (3.1) - (3.2) досягається на кордоні (Fr Dg) області допустимих рішень Dg.

Розглянемо процедуру оптимізації функції мети Z на деякій гіперповерхні ξ нелінійного різноманіття Fr Dg.

Це задача виду

,

розглядаєма у просторі розмірності на одиницю меншою в порівнянні з задачею (3.1). Обмеження задачі (3.1)-(3.2) є в основному лінійними, а нелінійні функції , =  пуклих обмежень в розглянутому діапазоні є однозначними функціями. Тому оптимальне значення функції мети Z на гиперповерхні ξ буде досягнуто на множені Fr ξ.

Продовжуючи ці міркування, послідовно прийдемо до множини заходів 0, на якому досягається оптимальне значення функції мети задачі (3.1) - (3.2) - це крайня точка.

3.2 Метод пошуку локального мінімуму функції мети задачі розміщення

Розглянемо задачу пошуку локального мінімуму функції мети задачі (3.1)-(3.2) на множені  виду:

, (3.3)

 ч

Метод локальної оптимізації, що розглядається далі, діє на компоненті зв'язності , такий, що множена .

Кожна ітерація методу складається з двох етапів:

Етап 1. Визначення екстремуму функції мети Z \*, який досягається деякою крайній точці  поточного безлічі .

Етап 2. Організація переходу від поточної подобласті  до суміжної області , такий, що .

Розглянемо особливості Етапу 1.

Процес визначення рішення задачі опуклого програмування з допомогою кусочно-лінійної апроксимації нелінійних обмежень області припустимих рішень включає наступні завдання:

Крок 1.1. Кусково-лінійна апроксимація виду (2.27):  кожної з сепарабельних функцій обмежень:

,

.

Крок 1.2. Побудова відповідної задачі лінійного програмування виду:

. (3.4)

Крок 1.3. Рішення задачі лінійного програмування симплекс-методом або методом активного набору [208].

Реалізація кроку 1.1. процесу визначення рішення задачі опуклого програмування полягає у виконанні наступних дій.

Крок 1.1.1 Завдання точності апроксимації , яка в даному підході є екзогенною величиною.

Крок 1.1.2. Проведення лінеаризації  (2.27) обмежень задачі при забезпеченні умови , де .

Одноразове застосування даного перетворення при n = 1 не збільшує кількості обмежень задачі. При цьому лінійна апроксимація набору,  нелінійних обмежень з (2.9) набуває вигляду

, . (3.5)

*Зауваження 3.2.* У загальному випадку можлива лінійна апроксимація виду

, . (3.6)

тобто змінною величиною (ендогенних параметром) є інша метрична характеристика - величина bi. Тоді вираз (2.1) (див. розд. 2.1) набуде вигляду:

Si = ai min × bi max= ai max × bi min. , то есть ai =S / bi. (3.7)

Уявлення (3.5) і (3.6) умов взаємного неперетинання об'єктів є еквівалентними.

3.2.1 Модифікація методу локальної оптимізації линеаризованної задачі

Лінеаризована задача на підмножині  має вигляд (3.4)

,

де область  задаеться системою  лінійних обмежень,

компонентами вектора  є нулі і величини {,,,,}.

Наведемо важливі для подальшого розгляду властивості області линеаризованной області допустимих рішень .

*Властивість 3.1.* Оптимальне значення функції мети лінеалізованной завдання (3.5) досягається в вершині ωL\* області .

*Властивість 3.2.* У загальному випадку оптимальне рішення ω\* задачі визначається системою  лінійних рівнянь з лінеаризованої системи  виду (3.2). Ранг I системи  дорівнює розмірності простору Е3N+1, в якому розглядається задача розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками.

Обмеження системи , яка описує поточну точку ωm, яка є вершиною області , в тому числі оптимальну вершину ω\*, називають робочим списком [208].

*Властивість 3.3*. Для точки ω\* може мати місце співвідношення.

Іншими словами, оптимальна на підмножині  точка ω\* – вершина області  – може бути внутрішньою або граничною точкою іншої, суміжної подобласти  області D.

Ті обмеження завдання, які звертаються в поточній точці u в рівності, називають активним набором. Позначимо розмірність активного набору через J.

Відзначимо, що з властивості 3.2 слід, що для даної задачі характерним є те, що розмірність J активного набору більше величини I. Іншими словами, в вершині ω\* звертається в рівності значно більше нерівностей з линеаризованной системи обмежень, що описують область допустимих рішень , ніж розмірність простору, якому належить ця область.

Рішення завдання (3.5) проводиться на основі методу активного набору. Розглянемо реалізацію схеми активного набору, (m + 1) -я ітерація якого має вигляд

, (3.8)

де - значення змінних на попередній ітерації; - крок, pm - напрямок спуску.

У точці um визначаються знаки компонент вектора множників Лагранжа  як рішення невироджених системи лінійних рівнянь

. (3.9)

де F - матриця коефіцієнтів обмежень робочого списку в даній точці, **с** - вектор коефіцієнтів функції мети, в даному випадку це вектор виду (0, 0, ..., 0, 1).

В силу особливостей вектора з вектор множників Лагранжа λ є 3N-й стовпець матриці .

Якщо всі компоненти вектора множників Лагранжа , то um є рішення задачі (3.4). Якщо деякий множник , то напрямок рh визначається як рішення лінійної системи виду

, (3.10)

де  позначено s-й стовпець одиничної матриці, тобто р - s-й стовпець матриці  (s-й рядок матриці ).

Для множени V всіх обмежень завдання (3.6) поза робочим списку на m-ой ітерації методу, обчислюється верхня оцінка .

 (3.11)

кроку , що реалізує рівність , де v - індекс неактивного обмеження.

Наявність *Властивості 3.3* лінеаризованої області допустимих рішень означає, що вектор um може одночасно задовольняти два нерівності набору (3.5), наприклад, перше і друге. В такому випадку в якості неактивного обмеження виступає то, для якого оцінка кроку  більше. Таким чином, здійснюється перехід з однієї опуклою підобласти  лінеаризованної області допустимих рішень  в іншу: .

Іншими словами, здійснюється вибір обмеження, яке увійде в робочий список на наступній ітерації алгоритму рішення з одночасним переходом в іншу опуклу подобласть, тобто рух відбувається, взагалі кажучи, по неопуклої області.

Розглянемо наступний

**Пример 3.1.**

Задано безліч об'єктів розміщення: . Метричні характеристики (ai, bi), i=1,2, об'єктів змінюються в діапазоні

. При цьому .

Область розміщення - напівнескінченна смуга T0=(x,y| 0 ≤ x ≤ Z, 0 ≤y≤ 6).

Погляньмо на цей пример, вважаючи змінними метричні характеристики b1, b2 об'єктів розміщення. Тоді початкове розміщення (рис 3.1) характеризується вектором ендогенних параметрів

ω0= (0, 0, 6, 6, 0, 2).



Рис. 3.1 – Початкове розміщення об'єктів для Примеру 3.1

Вектор початкових значень метричних характеристик **mi** має вигляд:

(a1max, b1min, a2max, b2min)=(6, 4, 7, 2).

Система обмежень, що описує опуклу подобласть  області допустимих рішень D даного завдання, яка містить точку ω0, має вигляд:



Система обмежень містить 13 нерівностей, остання нерівність містить сепарабельном функцію.

Провівши одну ітерацію процесу лінеаризації, отримаємо наступний опис апроксимаційного поліедральної множени 



Після проведення даного перетворення кількість обмежень линеаризованной системи, яка описує апроксимаційну подобласть , не змінилося.

Таким чином, розглядається задача

Знайти: ,

де вектор коефіцієнтів функції мети с=(0,0,0,0,0,0,1).

У початковій точці ω0 рабочого списоку складають рівняння системи  виду

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x1 | y1 | b1 | x2 | y2 | b2 | Z |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 2 | 1 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |

 з матрицей F0 :

Визначимо знаки компонент вектора множників Лагранжа  з системи лінійних рівнянь 

:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |

:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x1 | **y1** | b1 | x2 | y2 | b2 | **Z** |  |  | с | Вектор множиників Лагранжа |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 | **0** | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |  |  | 0 | 1 |
| pm |  | 0 | **0** | 1 | -1 | 0 | 0 | **-1** |  |  | 0 | **-1** |
|  |  | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1 | **0** | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |  |  | 0 | 1 |
|  |  | 0 | **0** | 0 | 0 | 1 | 0 | **0** |  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |  |  | 0 | 1 |
|  |  | 0 | **0** | 0 | 0 | 0 | 1 | **-2** |  |  | 1 | **-2** |

Вектор множників Лагранжа містить дві негативних компоненти, отже, з робочого списку на даній ітерації можна вилучено друге чи сьоме рівняння.

Виключимо з робочого списку друге рівняння. Вектор pm відтіняє в останній матриці сірим кольором – другий рядок матриці .

Для множени V всіх обмежень даної задачі поза робочим списку обчислимо верхню оцінку , використовуючи формулу (3.11).

Результати обчислень помістимо в таблицю (Табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Визначення кроку 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ω0 | Неактивні обмеження | Матриця коефіцієнтів неактивних обмежень | | | | | | | |  |  |  |  |
| 0 |  | x1 | y1 | b1 | x2 | y2 | b2 | z |  |  |  |  |  |
| 0 |  | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |  | 14 | 1 |  |  |
| 4 |  | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | -8 | -1 | -4 | 4 |
| 6 |  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  |  |
| 0 |  | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | -6 | -1 | -4 | 2 |
| 2 |  | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |  | -6 | 0 |  |  |
| 13 |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |  | -4 | 0 |  |  |

У першому столиці Табл. 3.1 міститься вектор поточних значень ендогенних змінних задачі, другий стовпець містить опис неактивних в точці ω0 обмежень системи , яка описує поліедральну множину , всього шість обмежень.

В останньому стовпці Табл. 3.1 поміщені допустимі значення кроку, відповідні неактивним обмеженням. Очевидно, вибору і введення в активний набір підлягає четверте обмеження.

Після переформування робочого списку і рішення відповідної системи рівнянь вектор ω1 має вигляд:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | y1 | b1 | x2 | y2 | b2 | Z |
| 0 | 0 | 6 | 4 | 0 | 2 | 11 |

З наведених вище міркувань безпосередньо випливає справедливість наступного твердження.

*Затвердження 3.2.* Точність лінеаризованого уявлення області допустимих рішень ε > 0 забезпечує виконання умови

||ω\* − ωL\* || < ε,

де ω\*, ωL\* - рішення задач (3.3) и (3.4) відповідно.

3.3. Точні методи глобальної оптимізації

На підставі властивості 2.4 (див. Розд. 2.3) завдання (2.11-2.12) належить до класу задач комбінаторної нелінійної оптимізації. Загальна ідеологія рішення таких задач полягає в побудові дерева рішень (назвемо його А), за яким упорядковується повний перебір підмножин області допустимих рішень задачі, що мають більш просту структуру, і на кожному такому підмножині визначається локально-оптимальне рішення задачі.

Можливі дві реалізації дерева рішень А.

3.3.1 Реалізація 1-го підходу. Оцінка обчислювальної складності

Дерево А1, яке будується на основі організації повного перебору опуклих підмножин  області допустимих рішень задачі (Властивість 2.5), см. розд. 2.3.

Дане дерево має N (N-1) / 2 рівень. Корінь дерева рішень  відповідає системі нерівностей  яка описує умови розміщення всього набору прямокутників в області розміщення.

На кожному наступному рівні дерева рішень А1 до системи лінійних нерівностей, сформованих на вершині  попереднього рівня може бути додано одне з чотирьох обмежень набору (3.5) або (3.6), або система обмежень, що представляють собою результат лінійної апроксимації сепарабельном функції, якщо того вимагає точність обчислень . Тут p (i, j) - номер пари (i, j), i <j. На останньому, (N (N-1) / 2) -му рівні дерева А1 будуть побудовані всі опуклі поліедральні підмножини  (Властивості 2.5, розд. 2.3). Таким чином, завдання пошуку глобального екстремуму зводиться до усеченного перебору і вирішення кінцевого безлічі завдань лінійного програмування з лінійною функцією цілі.

Зауваження 3.4. Підвищення точності лінійної апроксимації не збільшить кількості вершин дерева рішень А1. Опуклість нелінійних функцій обмежень згідно *Властивості 2.6* (розд. 2.3) означає наступне: навіть якщо точність апроксимації така, що є необхідність їх апроксимації більш ніж однієї лінійною функцією, то лінеаризоване опис даної ділянки кордону задається системою таких лінійних функцій і може бути повністю враховано при формуванні системи обмежень на одній вершині дерева рішень А1.

Іншими словами, змінність метричних характеристик прямокутників не впливає на кількість вершин дерева рішень А1..

Таким чином, дана задача зводиться до побудови дерева рішень, усеченному перебору і вирішення кінцевої множини =4N(N-1) задач (3.6) лінійного програмування. Оцінка  є оцінкою зверху, хоча і дуже завищеною (недосяжною).

3.3.2 Реалізація 2-го підходу. Оцінка обчислювальної складності

Реализация второго подхода предполагает построение дерева решений А2 – на основі формування множини систем рівнянь, містять систему .

У разі, якщо метричні характеристики розміщуються прямокутників є постійними, реалізація 2 дерева рішень А2 грунтується на можливості побудови на системі рівнянь  (Властивості 3.1, 3.2) бієкція  виду

; (3.10)

;



За деревом рішень А2 реалізуються всі можливі системи рівнянь, в тому числі система . Всього рівнів дерева А2 − 2N, кожен з яких відповідає деякому змінному параметру розміщення - xi або yi,, i=. На кожному наступному рівні до вершини , г (i) = {i \* 2, i \* 2 + 1} може бути додано одне з (N-1) обмежень з набору (3.10), яке стає активним. Верхня оцінка числа вершин на останньому, 2N-м рівні дерева А2 - в разі постійних метричних характеристик об'єктів - (2N)N.

У разі, якщо метричні характеристики (ai, bi) об'єктів розміщення стають змінюваними, побудова бієкція виду (3.10) ускладнюється.

По-перше, збільшується кількість рівнянь в системі , відповідно, збільшується кількість рівнів дерева А2 до -го, так як тепер необхідно брати до уваги змінні ai і Z.

По-друге, тільки одноразова линеаризация не збільшує кількість вершин, які можна додати на поточному рівні. Тоді оцінка числа вершин дерева - .

Якщо одноразової лінеаризації недостатньо, кількість вершин дерева рішень А2, доступних для обробки на поточному рівні дерева, зростає. Позначимо  – кількість лінійних сегментів апроксимаційної гиперплоскости, тоді як .

Тоді оцінка числа вершин дерева А2 для линеаризованної задачі має вигляд

.

Наведені оцінки, безумовно, є лише оцінками зверху, причому дуже завищеними. Але в будь-якому випадку розглянута задача є NP-повною.

3.4 Модифікація наближеного методу розв'язання задачі

Одним з найбільш цікавих наближених підходів є метод, заснований на оптимізації за групами змінних. Укрупнене етапи методу такі:

**Етап 1**. Визначення оптимального рішення задачі прямокутних геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками на базі модифікованого методу оптимізації за групами змінних - так званий decoding algorithm.

**Етап 2**. Перебір локальних екстремумів, заснований на перевизначенні послідовності розміщення об'єктів - coding algorithm.

Будемо вважати, що спосіб завдання порядку розміщення об'єктів, наприклад, метод звужуються околиць [152], генетичний алгоритм [112] або реалізація датчика випадкових чисел, відомий.

Загальна схема Етапу 1 методу оптимізації за групами змінних, така [150]:

1.1 Об'єкти розміщуються по одному відповідно до заданої послідовності номерів. Раніше розміщені об'єкти вважаються нерухомими.

1.2 Розміщення поточного об'єкта Ti проводиться з урахуванням вимоги мінімізації зайнятої частини області розміщення Т0.

Таким чином, на кожній i-ой ітерації методу оптимізації за групами змінних вирішується завдання виду

, (3.12)

де область  - тривимірне перетин подобласти  допустимих рішень D основного завдання, причому   , область сформована обмеженнями розміщення набору об'єктів  в області Т0 і умовами попарного взаємного неперетинання об'єктів виду (2.4), (2.5) (див. розд. 2.1).

Розглянемо особливості пошуку наближеного вирішення основного завдання в линеаризованной постановці.

Задача (3.12) Етапу 1 методу оптимізації за групами змінних, має дискретно-континуальну природу, внаслідок чого на кожній i-ой ітерації може бути представлена як кінцевий набір  завдань одновимірної безперервної оптимізації з ендогенних параметром bi.

Кількість таких завдань визначається числом вершин  вершин  області , яка очевидно, є неопуклою,тобто у загальному випадку =.

Розглянемо i-ю ітерацію алгоритму розв'язання задачі 3.12.

Крок 1. Покладемо k = 1, де k – номер поточної вершини  області .

Крок 2. Покладемо (xi, yi) рівними відповідним координатам вершини області .

Крок 3. Перевірка умов неперетинання об'єкта Ti з усіма раніше розміщеними об'єктами Тl  (рис. 3.2). На рис. 3.2 об'єкти Tj, Tn, Tl вважаються раніше розміщеними.

При цьому можливі наступні варіанти.

3.а. Умови взаємного неперетинання виконані (рис. 3.2 а).

3.б. Умови взаємного неперетинання не виконані (рис. 3.2 б, в).

Крок 4. У найпростішому випадку 3.а при виконанні всіх умов неперетинання вирішується завдання виду:

Ti

Tn

Tl

Tj

jk

jkk

j1

Ti

Ti

Tj

Tn

Tl

Тm

а) б)

jk

jkk

j1

Ti

Ti

Tj

Tn

Tl

в)

Рисунок 3.2 Ілюстрація наближеного методу рішення:

а) умови взаємного неперетинання поточного об'єкта Ti з об'єктами, розміщеними раніше, виконані,

б) умови взаємного неперетинання поточного об'єкта Ti з об'єктами, розміщеними раніше, не виконані - порушено утримує обмеження,

в) умови взаємного неперетинання поточного об'єкта Ti з об'єктами, розміщеними раніше, не виконані - порушене не утримує обмеження

bimod = min (bimax, { yl  | {( xl + al ) ∈ [xi, xi + S/(yl − yi)] } ∧ { yl>yi}}.(3.13)

Cлучай 3.б вимагає додаткових міркувань. Проведемо їх.

Отримане рішення (xi, yi, ai) = (,, ) порушує відразу два обмеження на взаємне неперетинання:

,

.

Уявімо всі неактивні обмеження завдання у вигляді двох непересічних підмножин: утримуючими і неутримуючими обмеження.

Якщо порушено утримує обмеження (рис. 3.2.б), то необхідно переходити до наступної вершини  області , тобто покласти k = k + 1, і йти до Кроку 2.

Якщо порушено неутримуючими обмеження (рис. 3.2.в), то вирішується завдання (3.13), і отриманий результат – точка (,, ) – перевіряється на приналежність області .

Якщо точка (,, ) є допустимою, то запам'ятати її і значення функції мети Z, досягнуте на ній, і перейти до наступної вершини області Di з побудованого списку.

Крок 5. Після перегляду всіх вершин області Di на безлічі допустимих вершин вибрати ту, яка доставляє мінімальне значення функції мети Z.

Таким чином, змінність метричних характеристик об'єктів розміщення дозволяє не тільки поліпшити значення функції мети, а й перейти з неприпустимою поточної точки до найближчої допустимої.

Відзначимо, що умови розміщення в області T0 завжди є утримують.

3.5. Висновки по розділу 3

1. NP-повнота основного завдання дослідження припускає наявність повного арсеналу конструктивних засобів її вирішення - від точних методів пошуку глобального мінімуму до наближених підходів, що забезпечують отримання хорошого раціонального рішення. Важливою умовою вибору того чи іншого способу розв'язання є розмірність завдання.

2. Розглянуто конструктивні особливості області допустимих рішень линеаризованной завдання розміщення, необхідні для побудови оптимізаційних методів вирішення.

3. Розглянуто метод пошуку локального мінімуму функції мети завдання розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками, заснований на стратегії активного набору і дозволяє здійснювати спуск по неопуклого компоненті лінійної зв'язності області допустимих рішень.

4. Розглянуто два підходи до отримання глобально-оптимального рішення, побудовані оцінки обчислювальної складності алгоритмів.

5. Розглянуто проблему обліку можливості завдання відносини часткового впорядкування на безлічі об'єктів розміщення.

6. Запропоновано модифікацію наближеного методу розв'язання задачі, побудованого на основі оптимізації за групами змінних.

РОЗДІЛ 4. РІШЕННЯ ЗАВДАННЯ РОЗПОДІЛУ ОБМЕЖЕНИХ РЕСУРСІВ ЯК ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАПДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИХ ІЗ ЗМІННИМИ МЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Розглянуто проблему управління обмеженими ресурсами як багатовимірна багатокритеріальна задача теорії дослідження операцій. Запропоновано підхід, заснований на використанні результатів такого розділу теорії оптимізаційного геометричного проектування як розміщення в обмеженій області прямокутних геометричних об'єктів із змінними метричними характеристиками.

Виділені і формалізовані приватні критерії якості рішення і набір обмежень на область допустимих рішень оптимізаційної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як завдання розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками, пов'язаними функціональними залежностями.

Розв'язана задача оптимального планування ресурсів при розробці проекту системи раннього виявлення пожежі складських приміщень ПрАТ «Філіп Морріс Україна» (м.Харків)

4.1. Постановка завдання, побудова моделі операції

Нехай є проект, що складається з робіт (операцій) . На множені робіт задана умова часткової впорядкованості виду , певне конкретної послідовністю виконання робіт (робота  безпосередньо слід за роботою ). Відзначимо при цьому, що визначення послідовності робіт передбачає участь ЛПР (менеджера проекту), так як в практичних завданнях таких послідовностей може бути кілька.

Для кожної роботи  відомий її обсяг , виражений в чол · год, . На проект в цілому в кожен момент часу може бути виділено не більше  (чол) безпосередніх виконавців робіт.

Необхідно скласти план виконання робіт проекту, оптимальний по ресурсам, який потрібен.

Розглянемо цю задачу як  задачу теорії оптимізаційного геометричного проектування, в рамках якої властивості досліджуваних об'єктів інтерпретуються як геометричні характеристики. Тоді ресурси проекту в цілому можна уявити як область  двовимірного простору , де по горизонтальній осі X відкладається час T виконання проекту, а по вертикальній осі Y - характеристика L необхідного обсягу трудових ресурсів, узгоджена з одиницями вимірювання T.

Кожна робота  може бути представлена як прямокутник у власній системі координат OiXiYi, причому aixbi=Vi, ai,bi – var. Характеристика ai означає тривалість, а характеристика bi - кількість виконавців роботи Ri в кожен момент часу. Момент початку виконання роботи Ri і її прив'язка до необхідної кількості трудових ресурсів визначаються параметрами vi=(xi, yi) розміщення роботи в просторі ресурсів OXY (рис. 4.1).

Зауваження 4.1. Обсяг Vi є константою для роботи .

Зауваження 4.2. На основі врахування технологічних характеристик для виконання кожної роботи Ri виділяються максимально і мінімально допустимі значення ресурсів. Іншими словами, метричні характеристики об'єкта Ri є елементи загальному випадку дискретних множин А і В:

bmax

bmin



aimin aimax

Рисунок 4.1 – Розміщення робіт в просторі ресурсів

TR

bj

Rj

aj

vj=(xj,yj)

Ri

bi

vi=(xi,yi)

L

ai

T

LR

amin, amax

Рисунок 4.2 – Подання роботи Rі при різних

значеннях метричних характеристик

ai ∈ Аi , bi∈ Bi, где Аi=[ai min, ai max], Bi = [bi min, bi max], ai  min >0, bi  min > 0. (4.1)

bi = Vi / ai. (4.2)

При дискретно характер завдання ресурсів можуть мати місце співвідношення:

Vi  ≤ ai min × bi max,

Vi  ≤ ai max × bi min.

Таким чином, при такій постановці для роботи Ri ендогенними є параметри μi = (xi, yi, ai). Далі вважаємо записи Ri = Ri(μi) еквівалентними.

Очевидно, множина робіт Rj, безпосередньо наступних за Ri, може складатися більш ніж з одного елемента: j ∈ {1,2,…,J}, 1 ≤ j ≤ N, i≠j. Позначимо безліч індексів таких робіт через .

Таким чином, задача оптимального розподілу ресурсів в представленій постановці є завдання розміщення N прямокутників без накладень один на одного в прямокутної області розміщення R0 так, щоб

, (4.3)

де LR, ТR – ширина і довжина прямокутної області розміщення R0 відповідно, μ=(μ1, μ2,…, μN), D⊂E3N – бласть допустимих рішень, що виділяється системою обмежень на розміщення робіт такого вигляду:

Ri ⊂ R0, (4.4)

, (4.5)

, , (4.6)

ai∈ Аi bi∈ Bi, (4.7)

bi = Vi / ai,  (4.8)

Обмеження (4.4) визначає розміщення набору об'єктів R в R0 (умова присутності кожної роботи в складі проекту), (4.5) є умова взаємного попарного неперетинання об'єктів (що забезпечує неможливість використання одного ресурсу двома роботами одночасно), (4.6) - умова часткової впорядкованості робіт, (4.7) - обмеження на величину ресурсів робіт, (4.8) - умова збереження обсягу роботи.

Задача по суті (і за загальноприйнятій методиці рішення) є двухкрітеріальной і може бути представлена у вигляді послідовності двох однокритеріальних задач виду

, (4.9)

, (4.10)

де подобласть D1 області допустимих рішень D в завданню (4.9) задається без обмеження на величину LR (або LR вважається досить великою), подобласть D2 виділяється обмеженнями виду (4.4 - 4.8) з фіксованими значеннями величини LR і параметрів розміщення множини об'єктів розміщення, що моделюють критичні [ 72] операції, які отримані в результаті рішення задачі (4.9), K – кількість некритичних операцій.

При вирішенні задач (4.9), (4.10) параметри ai, , фіксовані. При цьому критерій (4.10) може бути представлений у вигляді:

, (4.11)

де , (4.12)

що в термінах основної задачі дослідження є еквівалентним поданням.

Отже, в загальному випадку необхідно побудувати оптимальний календарний графік G(ТR, ΔLR) проекту R, де ТR - загальний час виконання проекту, .

Якщо параметри проекту, отримані в результаті рішення задач (4.9), (4.11), є такими, що на проект можливе виділення додаткових ресурсів за умови забезпечення якнайшвидшого виконання проекту, виникає третя задача виведення проекту на максимально інтенсивний режим виду

, (4.13)

причому метричні характеристики об'єктів, що моделюють критичні операції Rk, k = , є змінними, K + К1=N.

4.2 Аналітичний опис основних обмежень завдання (4.3-4.8)

Розглянемо аналітичний опис обмежень (4.4 – 4.6). Умова розміщення (4.4) набору об'єктів Ri,, в області R0 c урахуванням (4.7) задається системою , , нелінійних нерівностей з функціями лівих частин виду {} (4.14)

Умова взаємного неперетинання (4.5) задається набором нелінійних нерівностей з функціями лівих частин виду

={},

. (4.15)

Умова часткового упорядкування (4.6) представляється у вигляді системи лінійних нерівностей

, j ∈ ,  (4.16)

При цьому можливі (виходячи з практики календарного планування) два підходи. Якщо умова «робота Rj слід безпосередньо після роботи Ri», є обов'язковим, то в (4.16) відповідне обмеження є строгою рівністю, в іншому випадку умова (4.16) означає, що «робота Rj повинна бути виконана не раніше закінчення роботи Ri». Далі буде показано, що наявність або відсутність умови (4.13) і його більш жорсткого аналога у вигляді рівності значно впливає на оцінку обчислювальної складності алгоритму розв'язання задачі.

Для вирішення сформульованої задачі оптимального розподілу ресурсів були застосовані запропоновані в цій дисертації (розд. 2-3) інструментальні засоби моделювання і розв'язання задачі розміщення прямокутних геометричних проектів із змінними метричними характеристиками.

Вирішувалася наступна практична задача. Розглянутий об'єкт – прибудовані складські приміщення з автоматичною системою збору та паллетизацію коробів готової продукції ПрАТ "Філіп Морріс Україна", м.Харків. Здійснюваний проект - установка автоматичної системи пожежної сигналізації.

4.3. Техніко-організаційна характеристика об'єкта

Розглянутий будівельний об'єкт - ПрАТ "Філіп Морріс Україна" розташований в Харківському районі, Харківської області на південний захід від селища ім. Докучаєва на землях Роганського селищної ради в 3-х км від межі м Харкова уздовж окружної дороги.

Майданчик фабрики займає площу 31,5 га, має форму витягнутого прямокутника. Рельєф майданчики спокійний з ухилом на південний захід до балки Довгий Лог.

Фабрика складається з

– виробничої будівлі, що представляє собою єдину П-образну групу примикають один до одного одноповерхових виробничо-складських цехів і двоповерхових побутових і допоміжних приміщень тютюнового (первинного) і сигаретного (вторинного) виробництва загальною площею 32018м2 ;

– чотириповерхового адміністративного будинку загальною площею 4311,4 м2, до складу якого входять приміщення їдальні на 240 посадочних місць, розташоване на 1-му поверсі, офісні приміщення на 2-му і 3-му поверхах і приміщення інженерних служб, розташованих на 4-му поверсі ;

– різних окремо розташованих допоміжних будівель і споруд:

o двоповерхова технічна будівля (загальна площа 1539,8 м2);

o одноповерхова будівля головної прохідної з навісом (загальна площа 60,8 м2);

o насосна станція і резервуари води, лічильник води;

o насосна станція і резервуар дизельного палива;

o свердловина питної води;

o очисні споруди;

o будівлю ГРП і лічильника природного газу;

o будівлі сушильного відділення (прибудова до виробничого будинку);

o стоянки для вантажного та легкового транспорту та ін.

Основні несучі конструкції каркасу виробничих і складських приміщень виконані з металевих конструкцій.

Покриття складських частин виконано з кроквяних балок / ферм прольотом 20 ... 24 м, що спираються на колони і підкроквяні балки / ферми прольотом 18 м, що стоять по літерним осях. По верху балок / ферм укладається профнастил прольотом 6 м.

Конструкція покрівлі прийнята беспрогонная.

Конструкції складської частини відокремлюються від виробничої зони суцільної окремо стоїть протипожежною стіною, виконаною з армованої кладки з бетонних блоків з одночасним посиленням монолітними вертикальними і горизонтальними поясами.

Газопостачання фабрики здійснюється від ГРС-1 м Харкова. Від ГРС газ подається по трасі підземного газопроводу до майданчика фабрики, який повторно очищається в ГРП фабрики. Облік газу здійснюється газовим лічильником.

Для подачі води на територію фабрики від мереж міського водогону побудований водовід діаметром 200 мм, довжиною близько 6000 м. Діаметр водоводу прийнятий з урахуванням пропуску витрати води на заповнення пожежних резервуарів при одночасному витраті на господарсько-питні потреби.

Влаштовані: 2 резервуара ємністю 750 м³ кожний для забезпечення зберігання 3-х годинного запасу води на пожежогасіння, 2 резервуара по 150 м³ кожний для господарсько-питних і виробничих потреб і насосна станція, що блокується з резервуарами.

Для подачі води в мережу передбачена установка 3-х насосів (2 робочих, 1 резервний) продуктивністю 67м3 / год, напором 40 м в.ст.

Зазначене обладнання розміщено в насосній станції полузаглубленного типу спільно з протипожежними насосами.

Прийнята єдина система для зовнішнього, внутрішнього і автоматичного пожежогасіння.

У зв'язку з неможливістю отримання з джерел необхідної витрати води на пожежогасіння передбачено 2 резервуара запасу води.

Ємність резервуарів визначена за умови зберігання в них 3-х годинного запасу води на зовнішнє, внутрішнє та автоматичне пожежогасіння. Відновлення пожежного запасу передбачено з міського водопроводу і з артезіанської свердловини.

Подача води в мережу під час пожежі здійснюється дизельними насосами. До установці прийнято 2 насоса (1 робочий, 1 резервний).

Характеристики насоса: продуктивність 570 м3 / год (158 л / с); натиск 89 м в.ст .; потужність 275 к.с.

Постійний тиск в зовнішній і внутрішніх мережах підтримується насосом-жокеєм, продуктивністю 18 м3 / год (5 л / с), напором 89 м в.ст. При падінні тиску автоматично включається основне обладнання.

Діючі установки укомплектовані необхідними захисними засобами відповідно до норм.

У будівлях передбачено влаштування системи автоматичної пожежної сигналізації та оповіщення людей про пожежу (рис. 4.3).

Як концентратора пожежної сигналізації прийнята адресно-аналогова система. З огляду на призначення приміщень, ступінь пожежонебезпеки, для автоматичної пожежної сигналізації прийняті димові, теплові і ручні адресно-аналогові сповіщувачі.

Інформація від всіх сповіщувачів надходить на приймально-контрольний пульт, який встановлюється в приміщенні охорони з цілодобовим чергуванням.

При спрацьовуванні системи пожежної сигналізації формуються командні імпульси на відключення систем загальнообмінної вентиляції і включення системи димовидалення та системи оповіщення людей про пожежу.



Рисунок 4.3. – Загальна схема раннього виявлення пожежі:

ШС - шлейф сигналізації; БВШ - блок вхідних шлейфів;

БКИ - блок контроляіндикації; БВК - блок вихідних ключей;

ТК- телефонні коммуникації; ОИП – основне джерело живлення;

РИП – резервне джерело живлення; БКУ - блок контролю та кекрування;

ППНЦ - пульт пожежного центральногоспостереження; БР - блок реле;

АВР - автоматичне включення резервного джнрела.

4.4. Визначення оптимальної структури продукту інвестиційно-будівельного проекту

Задача визначення оптимальної структури продукту інвестиційно-будівельного проекту необхідно включає як здатність віполнять пряму функцію попередження пожежі та її гасіння на початковій стадії розвитку, так і облік впливу продукту проекту на навколишнє середовище, яке носить невизначений або імовірнісний характер.

Екологічна ефективність продукту ІБП як складної організаційно-технічної системи визначається здатністю цієї системи протистояти негативному впливу можливих надзвичайних ситуацій на об'єкті на навколишнє середовище і людей.

Неможливість побудови універсальної системи безпеки визначає необхідність розробки системи безпеки для кожного типу об'єкта і вирішення проблеми оптимального розподілу обмежених ресурсів.

Для різних видів комерційної нерухомості, в тому числі складські термінали, екологічна ефективність в значній мірі визначається пожежної ефективністю, так як основним чинником, що призводить до ускладнення екологічної обстановки в регіоні, є пожежі та техногенні аварії, які супроводжуються пожежами. Дана властивість об'єкта визначається ефективністю функціонування системи забезпечення пожежної безпеки (СЗПЛ).

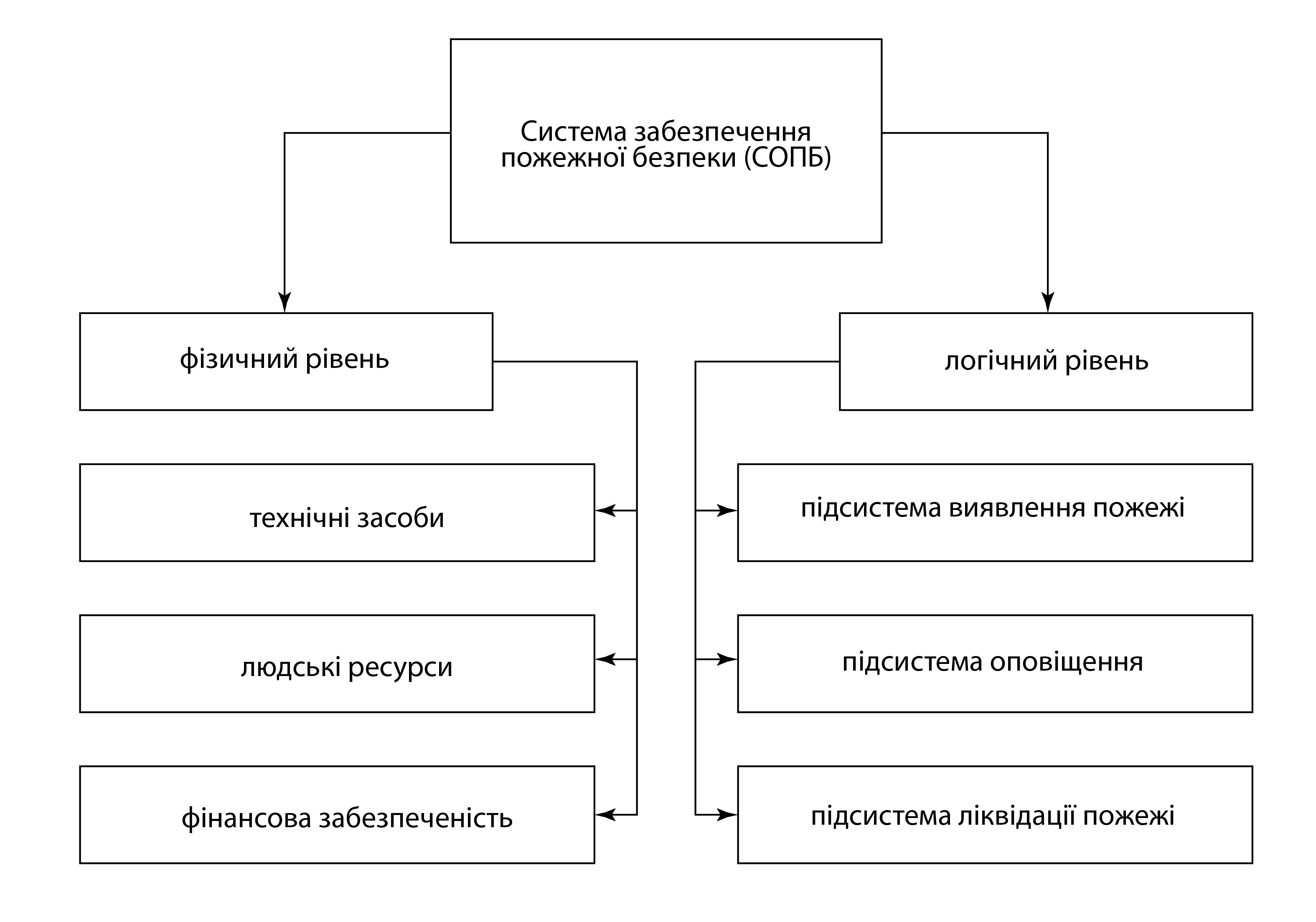


Рисунок 4.4 – Структура СОПЛ промислового об'єкта

Така компонента системи забезпечення пожежної безпеки, як «технічні засоби», в більшості практичних застосувань включає технічні засоби автоматичного попередження (пожежна сигналізація): безліч елементів МАПС={}k=1,2,…,K, і технічні засоби ліквідації пожежі (пожежна автоматика): множина елементів МСЛП={}g=1,2,…,G, (рис.4.5).

Нехай саме ці кошти складають множину М елементів {mi}i=1,2,…,I структури системи забезпечення пожежної безпеки, тобто

М= МСПС ∪ МСЛП, I=K+G.

Така компонента системи забезпечення пожежної безпеки, як «технічні засоби», в більшості практичних застосувань включає технічні засоби автоматичного попередження (пожежна сигналізація): безліч елементів МАПС={}k=1,2,…,K, і технічні засоби ліквідації пожежі (пожежна автоматика): множина елементів МСЛП={}g=1,2,…,G, (рис.4.5).

Нехай саме ці кошти складають безліч М елементів {mi}i=1,2,…,I структури системи забезпечення пожежної безпеки, тобто

М= МСПС ∪ МСЛП, I=K+G.

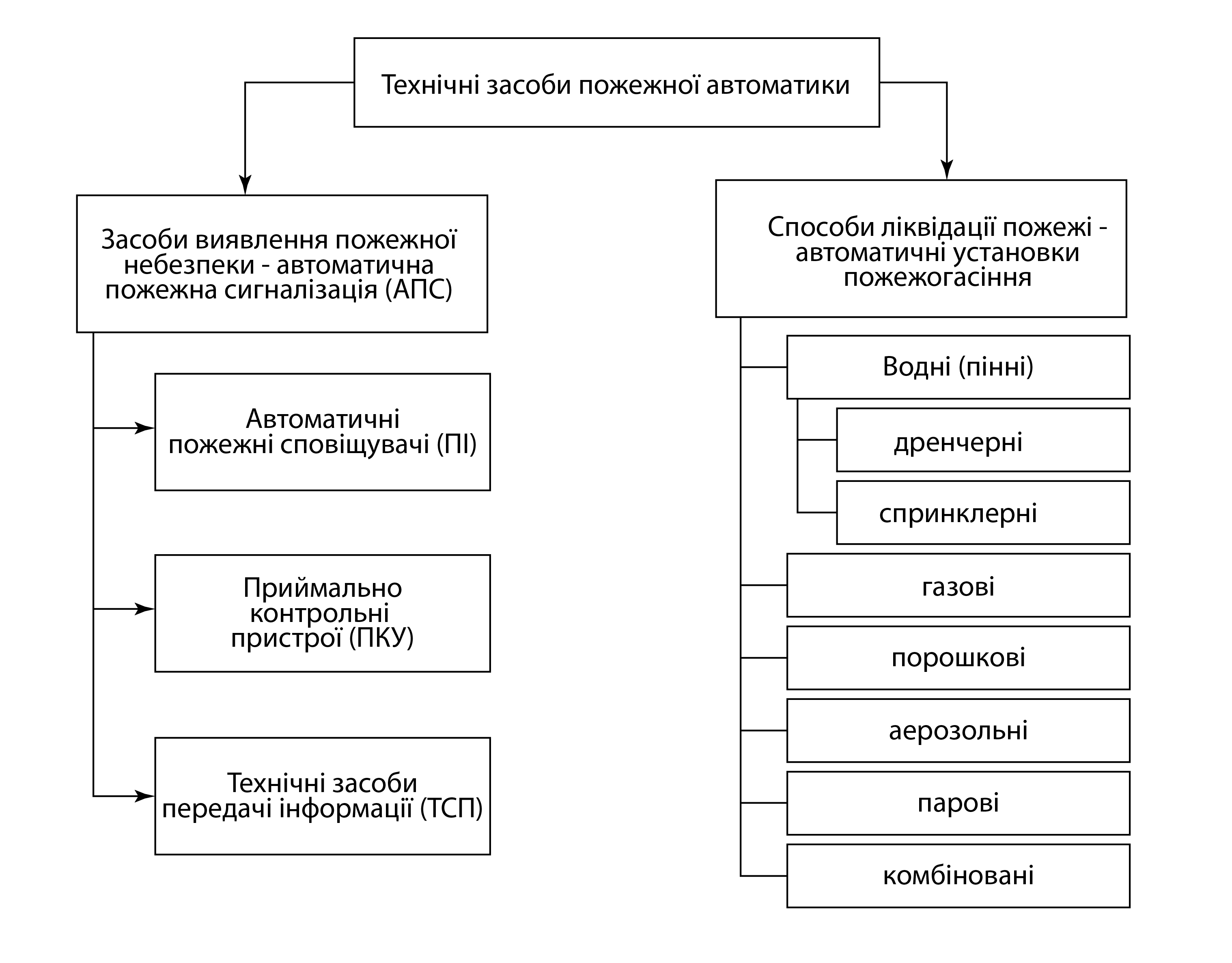
****

Рисунок 4.5 – Технічні засоби пожежної автоматики

Автоматична пожежна сигналізація (АПС) - це сукупність технічних засобів, призначених для виявлення пожежі, обробки і надання в заданому вигляді повідомлення про пожежу на об'єкті, що підлягає, спеціальної інформації, а також для видачі команд на включення автоматичних установок пожежогасіння і управління іншими технічними засобами.

Таким чином, множина елементів АПС має вигляд:

МАПС = МПС ∪ МПКП ∪ МТЗП.

Аналіз літературних джерел [217, 218] показав, що ефективність АПС визначається в основному ефективністю автоматичних пожежних сповіщувачів (ПС) - ефективністю елементів МПС.

Основні характеристики пожежних сповіщувачів, згідно [219], представлені на рис. 4.6.

В даний час на практиці застосовуються такі види ПС: теплові, димові (точкові), димові (лінійні), комбіновані, сповіщувачі полум'я.

Пріоритетними характеристиками ПС вважаються поріг виявлення 0С (чутливість, дБ/м) і інерційність спрацьовування. Ці характеристики є функціями часу, тому в якості інтегральної характеристики приладу приймемо час від моменту виникнення пожежі до моменту спрацьовування АПС.

Таким чином, матриця ефективності ЕАПС системи МАПС має блочну структуру і ненульові елементи в рядках, які містять інформацію про елементи безлічі МПС.

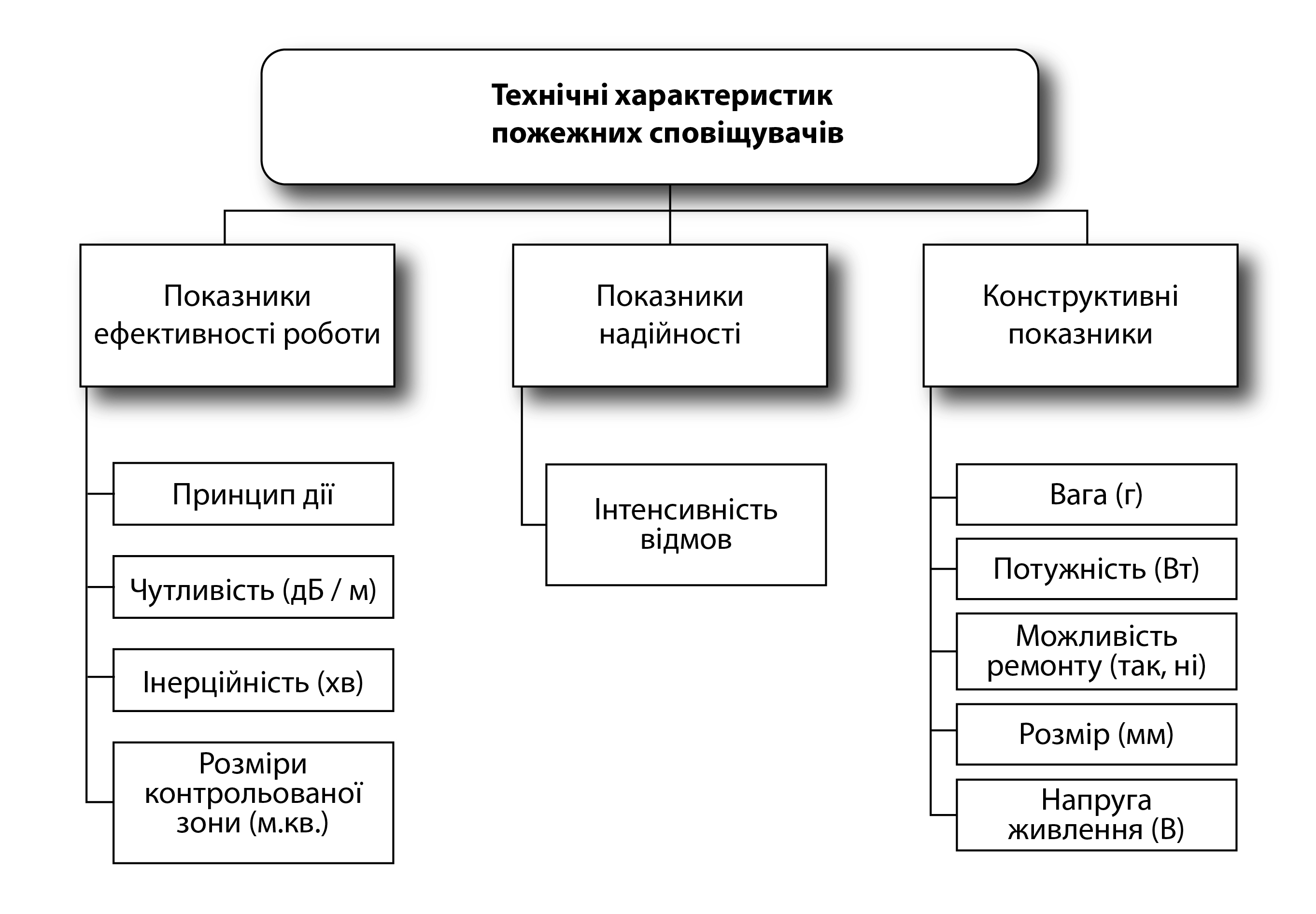
****

Рис. 4.6 Основні характеристики пожежних сповіщувачів

Рекомендації щодо вибору виду пожежних сповіщувачів для захисту конкретного об'єкта в залежності від типу приміщення, яке захищається, і виду пожежної навантаження, представлені в [219]. Цей нормативний документ визначає також схеми розміщення пожежних сповіщувачів в приміщеннях, які підлягають захисту, граничні значення контрольованої площі для різних видів сповіщувачів, з урахуванням їх принципу дії і кращою геометрії на місці їх розміщення

.

4.5. Концептуальна модель інформаційно-аналітичної системи як програмного середовища підтримки прийняття рішень

Концептуальна модель інформаційної системи підтримки прийняття інвестиційного рішення на основі оцінки ефективності інвестиційно-будівельного проекту для комерційної нерухомості, якою є склади на фазі його ініціації представлений на рис. 4.7.

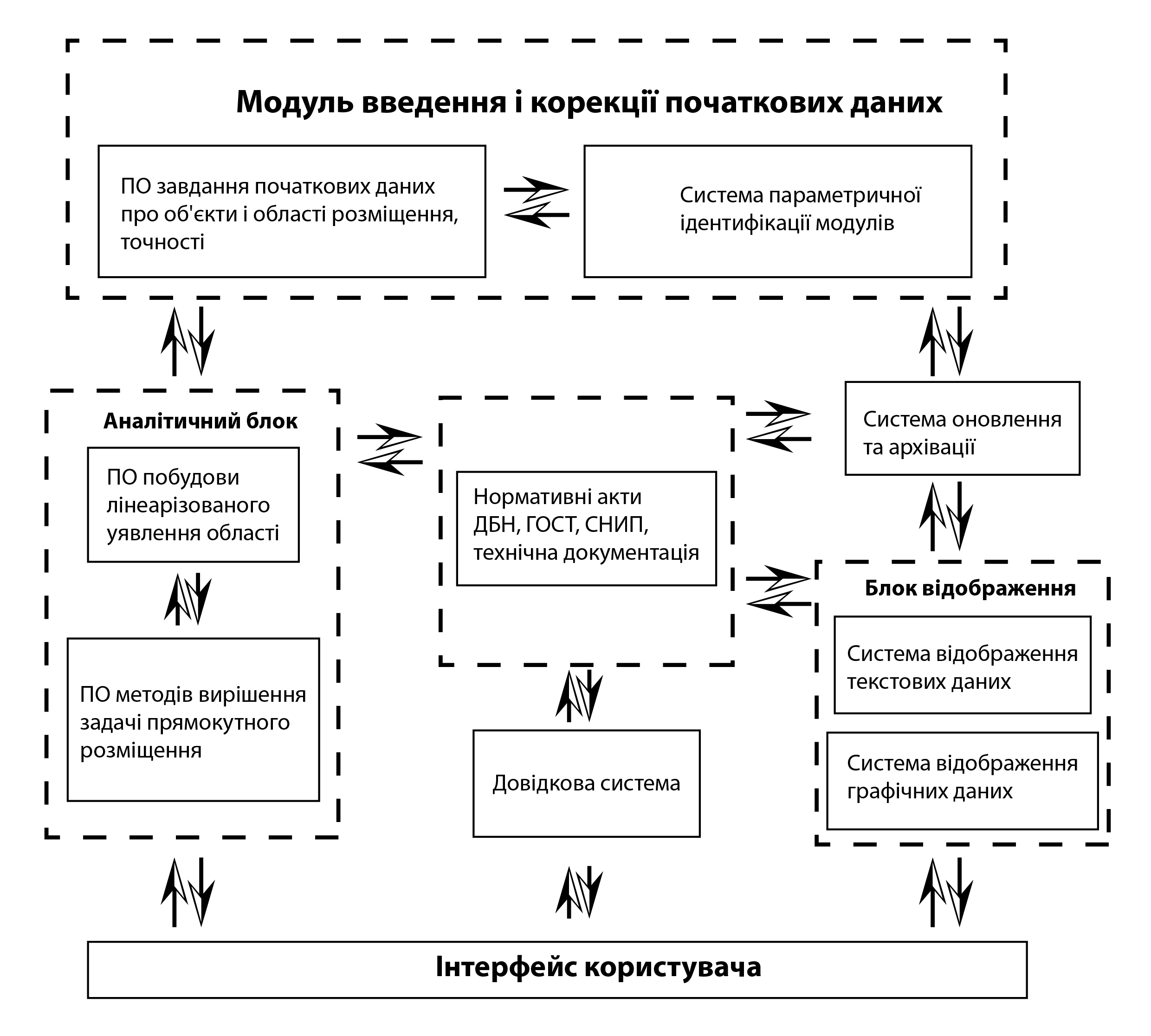


Рисунок 4.7 – Концептуальна модель информаційно-аналітичної системи як програмного середовища підтримки прийняття рішень

Концептуальна модель програмного продукту складається з системної та функціональної частин. Системна частина включає в себе блок введення даних з можливістю завдання і коригування показників і порядку виконання робіт, а також блок візуалізації і збереження отриманих результатів.

Функціональна частина включає як процедури побудови основних лінійних і нелінійних обмежень області припустимих рішень початкового завдання як блок побудови апроксимаційних функцій із заданою точністю, а також процедури реалізації точних і наближених методів вирішення задачі оптимального розподілу ресурсів протягом проекту.

Система також забезпечує доступ до повнотекстової документації, що містить ДБН В.2.5-56: 2014 «Системи протипожежний захисту»; ДБН А.2.2-1-2003 «Склад і зміст матеріалів оцінки впливів на навколишнє середовище (ОВНС) при проектуванні і будівництві підприємств, будівель і споруд»; ДНАОП 0.00-4.33-99 «Положення щодо розробки планів локалізації та ліквідації аварійних ситуацій і аварій»; ДСП 173-96 «Державні санітарні правила планування й забудови населених пунктів»; ГОСТ 4.188-85 «Система показників якості продукції. Засоби охоронної, пожежної та охоронно-пожежної сигналізації. Номенклатура показників »; офіційні каталоги Міжнародних виставкових форумів «Технології захисту» з 2012 по 2017 роки, Закони і Постанови КМУ, серед яких Закон України «Про охорону навколишнього середовища» від 25.06.1991 р .; Закон України «Про об'єкти підвіщеної небезпеки» від 18.01.2001 р .; Постанова КМУ № 956 від 11.07.2002 р «Про затвердження порядку декларування безпеки об'єктів підвіщеної небезпеки»; Закон України «Про екологічну експертизу» від 09.02.1995 г.і інші документи.

Система може працювати в двох режимах: режим адміністратора і режим користувача. Режим адміністратора передбачає функції оновлення та відновлення вмісту системи (як функціональної частини, так і блоку нормативної документації).

Програмна реалізація здійснена в середовищі візуального проектування Borland Delphi 7.0, мова програмування Object Pascal 6.0. Файли вихідних даних і нормативної документації створені в стандартному редакторі текстових документів Windows Notepad.exe.

4.6 Структурна і параметрична ідентифікація задачі оптимального розподілу ресурсів

Аналітичний блок інформаційної системи містить програмне забезпечення рішення оптимізаційних задач розподілу ресурсів проекту. Розглянемо застосування даного інструментального засобу для вирішення завдання побудови оптимального календарного графіка виконання робіт по монтажу автоматичної пожежної сигналізації в прибудованих складських приміщеннях ПрАТ "Філіп Морріс Україна".

Згідно ДСТУ Б EN 12845:2011 [219] по класу приміщення за пожежною небезпекою розвитку пожежі приміщення комплексу відносяться до ННS2.

Укрупнено монтаж і налагодження системи проводяться в такій послідовності:

• Підготовчі роботи: зведення лісів, підготовка кабелів і обладнання, підготовка робочих місць;

• прокладка вініпластових труб і кабелів;

• перевірка на герметичність з'єднань; надійність кріплення труб на опорних конструкціях;

• установка обладнання та приладів.

Здача системи пожежної сигналізації в експлуатацію оформляється відповідно до діючих нормативних документів.

Загальна вартість робіт згідно кошторису - 584,925 грн. Кошторисна трудомісткість - 9,036 тис. чел.-ч. Кошторисна заробітна плата - 147,613 тис. грн. Середній розряд робіт - 3,3.

На рис. 4.8 представлена мережева (графовая) модель часткового впорядкування робіт проекту, де стрілками позначені роботи, а гуртками - моменти початку і закінчення робіт.

Проект складається з 31 роботи. Список робіт з монтажу та налагодженя системи пожежної сигналізації представлено у табл. 4.1.

Таблиця 4.1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  п/п | Найменування робіт і витрат,  одиниця виміру | Кількість | Min  кількість людей | Max кількість людей | Витратти труда  робочих, чел.-год, | |
| на ед. | всего |
| 1 | Підготовчі роботи | 4 | 2 | 4 | 20 | 80 |
| 2 | Блок базовий концентратора ПС приймально-конт-рольного пускового на 20 променів (Integral-IP, Варта) | 3 | 3 | 6 | 72,96 | 219 |
| 3 | Прилад ПС на 1 шлейф (Модулі введення-виведення, комунікатори)шт | 19 | 4 | 6 | 11,52 | 219 |
| 4 | Блок кінцевий керуючий восьмілінейний (Модулі управління і інтерф.), шт | 5 | 4 | 6 | 49,92 | 250 |
| 5 | Пульти і робочі місця, маса до 0,03 т (ПК в зборі з моніторами),шт | 1 | 1 | 2 | 34,56 | 35 |
| 6 | Пристрій перемикання живлення УПП Sin-PRO, шт | 1 | 1 | 2 | 23,04 | 23 |
| 7 | Пульт або табло до 10 сигналів, шт | 2 | 1 | 2 | 13,44 | 27 |
| 8 | Прибор ПС на 4 луча (модулі кольцеві и тк), шт | 20 | 4 | 10 | 21,12 | 422 |
| 9 | Прибор ПС на 4 луча (модулі на 4-реле), шт | 8 | 2 | 8 | 21,12 | 169 |
| 10 | Установка внутрішніх інвентарних труб-чатих лісів при висоті приміщень до 6 м, 100м2 гп | 1 | 2 | 5 | 70 | 70 |
| 11 | Пробивання круглих отворів діаметром до 25 мм в цегляних стінах товщиною до 38 см, 100шт | 0,5 | 2 | 5 | 110,91 | 55 |
| 12 | Провід перший одножильний або багатожильний в загальній оплетке в прокладених трубах або металевих рукавах,100 м | 98 | 6 | 10 | 9,60 | 941 |
| 13 | Перемички заземлення, гнучкі для електроустаткування, шт | 5 | 1 | 1 | 0,06 | 3 |
| 14 | Провід, що прокладається в лотках, сумарний перетин до 70 мм2 [при роботі на висоті понад 2 до 8 м], 100 м | 57,7 | 3 | 8 | 6,05 | 349 |
| 15 | Прокладка вініпластових труб, 100м | 98 | 6 | 20 | 27,84 | 2728 |
| 16 | Введення трубою Д до 27 мм (прохід через стіну), введення | 10 | 1 | 2 | 1,07 | 11 |
| 17 | Коробка відгалужувальна на стіні, шт | 10 | 1 | 2 | 0,96 | 10 |
| 18 | Оброблення і включення кабелю або проводу однопарний високо-частотного або низькочастотного екранованого, 10концов | 5 | 2 | 4 | 9,60 | 48 |
| 19 | Висновок кабелю з каналізації на стіну без проходу через стіну, шт | 2 | 1 | 2 | 9,60 | 19 |
| 20 | Сповіщувач ПС автоматичний в нормальному виконанні димової фотоелектричний, радіо-ізотопний, світловий [на висоті від 5 до 15 м від рівня підлоги], шт | 564 | 10 | 20 | 4,22 | 2382 |
| 21 | Сповіщувач ПС автоматичний у вибухозахищеному виконанні теплової, димовий, світловий, шт | 17 | 3 | 6 | 4,22 | 72 |
| 22 | Сповіщувач пожежний ручний, шт | 41 | 3 | 6 | 1,92 | 79 |
| 23 | Монтаж блок-БИЗ, шт | 2 | 1 | 1 | 1,92 | 4 |
| 24 | Кнопка, що встановлюється на пультах і панелях, шт | 20 | 1 | 2 | 1,92 | 38 |
| 25 | Шафа настінна, корпусу і т.п., шт | 19 | 2 | 4 | 3,84 | 73 |
| 26 | Сирена потужна на кронштейні, потужність 1 кВт, шт | 53 | 2 | 5 | 2,88 | 153 |
| 27 | Світловий настінний покажчик з строблампамі, 100 шт | 0,53 | 3 | 5 | 157,44 | 83 |
| 28 | Введення кабелів сигналізації в кабельні ящики [1 кінець кабелю], число жил в кабелі до 14 (кабельні вводи ніпель ступінчасті), шт | 182 | 1 | 2 | 0,10 | 17 |
| 29 | Розбирання внутрішніх інвентарних трубчастих лісів при висоті приміщень до 6 м, 100м2 гп | 1 | 2 | 5 | 70 | 70 |
| 30 | Перевірка схем сигналізації, схема | 1 | 2 | 4 | 151,68 | 152 |
| 31 | Здача системи сигналізації в експлуатацію | 1 | 1 | 1 | 24 | 24 |

Задача була вирішена як послідовність двох однокритеріальних завдань виду (4.9) (рис.4.9) і (4.13) (рис.4.10).

Метричні характеристики робіт виду (4.2) визначалися таким чином. Множини Bi = [bi min, bi max] для кожної роботи Ri задавалися відповідно до інформації в шпальтах 4 і 5 табл. 4.1. Ця інформація отримана експертним шляхом.

На рис. 4.9 представлено рішення задачі (9) (критичні операції виділені більш темним кольором), на рис. 7 - рішення задачі (13).

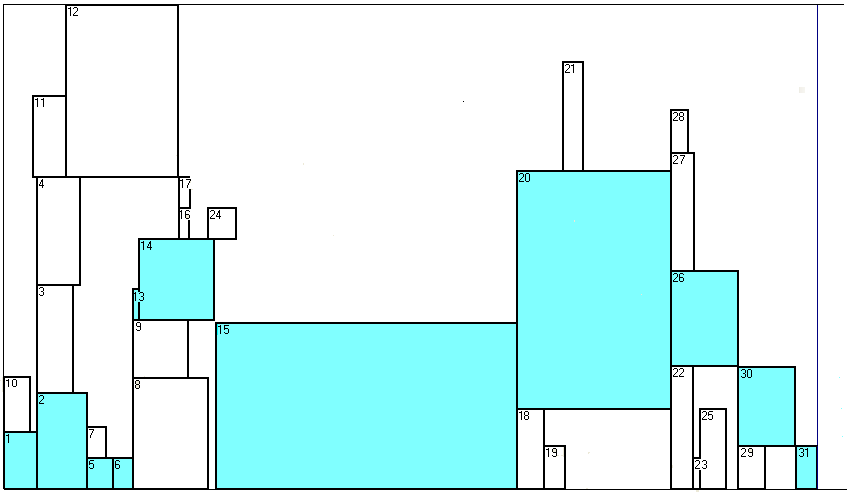


Рисунок 4.9 – Визначення критичного шляху проекту робіт з монтажу та налагодження системи

Метричні характеристики робіт виду (4.2) визначалися таким чином. Множини Bi = [bi min, bi max] для кожної роботи Ri задавалися відповідно до інформації в шпальтах 4 і 5 табл. 4.1. Ця інформація отримана експертним шляхом.

В результаті рішення задачі (4.10) була отримана оцінка необхідного числа технічних фахівців, які одночасно працюють на проекті - 18 осіб. Критичний шлях проекту склав 145 днів.

Критичні операції проекту, що визначають його критичний шлях, виділені більш темним кольором.

В результаті рішення задачі (4.13) за рахунок інтенсифікації виконання критичних робіт без зміни характеристик некритичних операцій і без збільшення кількості технічних фахівців загальний час виконання проекту скоротився і склав 81 день (Рис. 4.10).

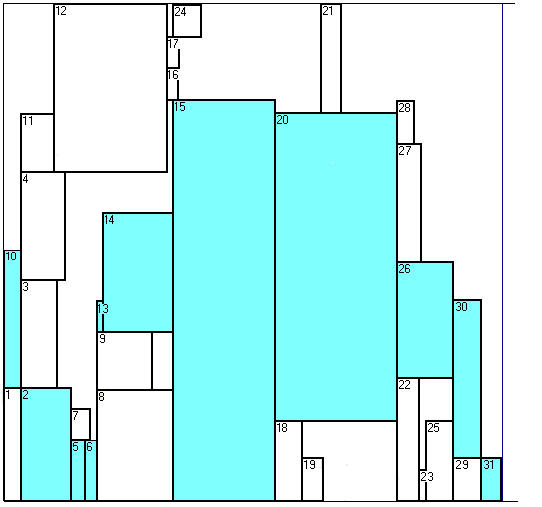


Рисунок 4.10 – Завдання оптимізації характеристик критичних операцій проекту

16

14

13

6

1

7

5

15

12

3

8

4

2

R1

R10

R4

R35

R26

R8

R9

R5

9

R6

R11

R12

R13

R14

R15

R16

17

R18

R23

18

R19

R17

19

R20

20

R21

21

R22

R25

R26

24

22

11

R24

23

R29

102

R78

R27

R28

R30

25

R31

Рисунок 4.8 – Мережева модель програми виконання робіт з монтажу та налагодження системи пожежної сигналізації

4.6. Висновки по розділу 4

1. Побудовано математичну модель багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як набору сепарабельних оптимізаційних задач розміщення кінцевого набору геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками.

2. Виділено основні властивості задачі, розглянуті точні і наближені методи її вирішення, проведена алгоритмічна і програмна реалізація запропонованих методів, а також проведено рішення практичної задачі визначення параметрів проекту установки автоматичної пожежної сигналізації.

ВИСНОВКИ

1. Обґрунтовано актуальність вирішення сформульованої задачі дослідження. Проведено порівняння наявних підходів до вирішення завдання прямокутного розміщення з фіксованими і змінними метричними характеристиками об'єктів розміщення і пов'язаних з нею завдань оптимального планування ресурсів.
2. Побудована і проаналізована математична модель задачі розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками за умови, що метричні характеристики пов'язані функціональними залежностями.
3. Проведена декомпозиція основної мети дослідження в даній постановці як кінцевої множини сепарабельних задач математичного програмування.
4. Побудовано аналітичний опис основних геометричних обмежень, які формують область допустимих рішень задачі розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками. Виділено додаткові властивості області допустимих рішень і доведена опуклість нелінійних обмежень завдання, а також показана приналежність нелінійних функцій обмежень до класу сепарабельних.
5. Запропоновано метод лінеаризації сепарабельних нелінійних обмежень області припустимих рішень задачі за умови, що точність завдання є екзогенним параметром. Проведено порівняння запропонованого методу лінеаризації основних обмежень завдання з відомими раніше підходами.
6. Розглянуто конструктивні особливості області допустимих рішень лінеаризованної задачі розміщення, необхідні для побудови як точних, так і наближених оптимізаційних методів вирішення.
7. Запропоновано метод пошуку локального мінімуму функції мети задачі розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками, заснований на стратегії активного набору і дозволяє здійснювати спуск по неопуклого компоненті лінійної зв'язності області допустимих рішень.
8. Проаналізовано два підходи до отримання глобально-оптимального рішення задачі розміщення прямокутних об'єктів із змінними метричними характеристиками, засновані на методі гілок і меж, побудовані оцінки обчислювальної складності алгоритмів, проведено їх порівняння.
9. Запропоновано модифікацію наближеного методу розв'язання задачі, побудованого на основі оптимізації за групами змінних.
10. На основі запропонованої математичної моделі і методів розв'язання оптимізаційних задач розміщення розроблено алгоритмічне і програмне забезпечення, яке використано при вирішенні практичної оптимізаційної задачі - оптимізації проекту виконання робіт по монтажу системи раннього виявлення пожежі складу готової продукції АТ «Філіп Морріс Україна», м Харків .

**Перелік джерел посилання**

1. Umble E. J. Enterprise resource planning: Implementation procedures and critical success factors / E. J. Umble, R. R. Haft, M. M. Umble // European Journal of Operational Research – 2003. – № 146. – pp. 241–257.
2. He Zh. Metaheuristics for multi-mode capital-constrained project payment scheduling // Zh. He, R. Liu, T. Jia // European Journal of Operational Research. – 2012. – № 223. – P. 605–613.
3. Михалевич В.С. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / В.С. Михалевич, Н.З. Шор, Л.А. Галустова и др.– К.: Наук. думка, 1977.– 178с.
4. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К.: Наук. думка, 1981. – 288с.
5. Сергієнко I.B. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності / I.B. Сергієнко. − К.: Академ, 2010. – 318с.
6. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. – К.: Наук, думка. 1988. – 472 с.
7. Combinatorial optimization / P. Toth, S. Martello / Edited by Nicos Christofides.– John Wiley & Sons, 1978.– 425 p.
8. Пшеничный Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. – М.: Физматгиз, 1975. – 319с.
9. Рвачев В.Л. Теория R–функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982.– 551с.
10. Сергиенко И.В. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации /И.В.Сергиенко, Л.Ф.Гуляницкий, С.И.Сиренко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №5. – С. 71–83.
11. Михалевич В.С. Оптимизационные задачи производственно–транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы / В.С. Михалевич, В.А. Трубин, Н.З. Шор. – М.: Наука, 1986.– 264с
12. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования / Ю.М. Ермольев. – М.: Наука, 1976.– 239с.
13. Шор Н.З. Методы оптимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор.– К.: Наук.думка, 1979.– 200с.
14. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В.В. Воеводин.– М.: Наука, 1986.– 296с.
15. Сергиенко И.В. О трех научных идеях Н.З. Шора / И.В. Сергиенко, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 1. – С. 4-22.
16. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев.– К.: Наук. думка, 1986.– 267 с.
17. Garey M.R. Computers and Intractability: A guide to the Theory of NP–Completeness / M.R. Garey, D.S. Johnson // San–Francisco, Freemau. 1979.
18. Канторович Л.В. Математические методы в организации и планировании производства / Л.В. Канторович. – Л.: ЛГУ, 1939. – 250c.
19. Канторович Л.В. Расчет рационального раскроя промышленных материалов / Л.В. Канторович, В.А. Залгаллер. – Л.: Лениздат, 1957.– 197с.
20. Берсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа / Д. Берсекас: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1987.– 348с.
21. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов / Ю.Г. Стоян. – К.: Наук. думка, 1975. – 239с.
22. Gilmore P. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions / P. Gilmore, R. Gomory // Operations Research. – 1965. – № 13. – P. 94-120.
23. Мухачева Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение в АСУ / Э.А. Мухачева. – М.: Машиностроение, 1984. – 176с.
24. Martello S., Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations // S. Martello, P. Toth. – Wiley, Chichester, 1990.
25. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н. И. Гиль. – К.: Наук. думка, 1976. – 247с.
26. Гиль Н.И. Построение математической модели и решение задачи размещения выпуклых n–мерных политопов в n–мерном параллелепипеде / Н.И. Гиль, М.С.Софронова // Доповіді Національної Академії наук України. – 2006. – №8. – С. 95–102.
27. Гиль Н.И. Об одном подходе к построению годографа вектор–функции плотного размещения плоских геометрических объектов, устойчивого к вычислительной погрешности / Н.И. Гиль, В.М. Комяк. – Харьков. – 1991. – 23 с. – (Препр. / АН Украины. Ин–т пробл. машиностроения; 350).
28. Новожилова М. В. Применение методологии множителей Лагранжа в комбинаторной задаче размещения прямоугольников / М. В. Новожилова, И.Е. Лазарева // Кибернетика и системный анализ.– 1999. – № 3.– С.141–147.
29. Новожилова М. В. Методологія розв’язання оптимізаційних нелiнiйних задач геометричного проектування/ М. В. Новожилова // Вiсник ЗДУ: Фiз.–мат. науки, бiологiчнi науки.–1999.–№ 1.–С. 79–82.
30. Гребенник И.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде/ И.В. Гребенник, А.В. Панкратов, А.М. Чугай, А.В. Баранов // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 5. – С. 122 – 131.
31. Dowsland K. Some experiments with simulated annealing techniques for packing problems / K. Dowsland // European Journal of Operational Research. – 1993. – N 68. – P. 389–399.
32. Castro Pedro M. Scheduling inspired models for two-dimensional packing problems / Pedro M. Castro, Josi F. Oliveira // European Journal of Operational Research. – 2011. – № 215. – С. 45–56.
33. Castro Pedro M. From time representation in scheduling to the solution of strip packing problems / Pedro M. Castro, Grossmann Ignacio E. // Computers and Chemical Engineering. – 2012 . – № 44. – С. 45– 57.
34. Мурин М.Н. Оптимизация распределения ограниченных ресурсов проекта / М.Н. Мурин // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2012. – Вып. 56. – С. 196-199.
35. Чуб I.A. Математическое обеспечение решения задачи размещения прямоугольников с изменяемыми метрическими характеристиками / И.А. Чуб, М.В. Новожилова, М.Н. Мурин // Системи обробки інформації. – 2012. – Вып. 7 (105). – С. 196-199.
36. Чуб I.A. Метод пошуку глобального мінімуму задач розміщення об’єктів зі змінними метричними характеристиками / І.А. Чуб, М.М. Мурін // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – 2009. – Вип 25. – С. 119-125.
37. Новожилова М.В. Учет влияния возможного пожара при построении векторного критерия эффективности проекта логистического комплекса / М.В. Новожилова, И.В.Беленченко, М.Н. Мурин // Проблемы пожарной безопасности. – 2009. – № 26. – С. 89-93.
38. Чуб И.А. Метод решения задачи размещения прямоугольников с переменными метрическими характеристиками / И.А. Чуб, М.В. Новожилова, М.Н. Мурин // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – C. 134-141.
39. Новожилова М.В. Формализация ограничений одной задачи распре-деления ресурсов проекта / М.В. Новожилова, И.А. Чуб, М.Н. Мурин // Науковий вісник будівництва.– 2007.– Вип. 43.– С. 229-232..
40. Антошкин А.А. Регулярные покрытия правильных объектов на примере оптимизации размещения пожарных извещателей / А.А. Антошкин, А.А. Деревянко, М.Н. Мурин, Т.Е. Романова // Проблемы пожарной безопасности. – 2006. – Вып. 20. – С. 8-11.
41. Мурин М.Н. Оптимальное распределение ресурсов проекта системы раннего обнаружения пожара / М.Н. Мурин // Пожарная безопасность: проблемы и перспективы: III Всероссийская наук.-практ. конф. с междунар. участием, 20 сентября 2012.: тез. докл. в 2 Ч. Ч. 1 – Воронеж: ВИ ГПС МЧС России, 2012. – С. 69-70.
42. Новожилова М.В. Розв’язання задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів як задачі розміщення геометричних об’єктів / М.В. Новожилова, І.А. Чуб, М.М. Мурін // Інформатика та системні науки. ISS-2012: наук.-практ. конф., 1-3 березня 2012 р.: тез. доп. – Полтава: ПУЕТ, 2012. – С. 331-334.
43. Чуб И.A. Особенности программной реализации нелинейных оптимизационных задач размещения геометрических объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова, И.В.  Беленченко, М.Н. Мурин // Современные информационные технологии и ИТ-образование: IV междунар. науч.-практ. конф., 14-16 декабря 2009 г.: тез. докл. – Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. – С. 21-25.
44. Чуб И.A. Математическое моделирование распределения ресурсов инвестиционно-строительного проекта / И.А. Чуб, М.Н. Мурин // Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем: міжнар. наук.-практ. конф., 9-10 квітня 2009 р.: тези доп. – Харків: ХНЕУ, 2009. – С. 141-144.
45. Новожилова М.В. Розв’язання оптимізаційної задачі розподілу ресурсів проекту / М.В. Новожилова, М.М. Мурін // Компютерна математика в інженерії, науці та освіті: III міжнар. наук-техн. конф., 1-31 жовтня 2009 р.: матер. конф. – Полтава: ПНТУ ім. Юрія Кондратюка, 2009. – С. 48.
46. Mukherjee I. A review of optimization techniques in metal cutting processes / I. Mukherjee, P. Ray // Computers and Industrial Engineering. – 2006. – Vol. 50(1). – P.15–34.
47. Чуб I.A. Конструктивні особливості задачі розміщення геометричних об’єктів в анізотропній області / І.А. Чуб // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2008. – Вип. 80. – С. 139–143.
48. Miao Y. Vehicle configuration design with a packing genetic algorithm/ Y. Miao, G. M. Fadel, V. B. Gantovnik //International Journal of Heavy Vehicle Systems. – 2008. – Vol.15(12). – P. 433–448.
49. Егоров С.Я. Автоматизация компоновки оборудования в цехах. Размещение технологического оборудования / С.Я. Егоров, В.А. Немчинов, М.С. Громов // Химическая промышленность. – 2003. – № 8. – С. 21-28.
50. Dong H. Vehicle component layout with shape morphing – an initial study / H. Dong, G.M. Fadel, V.Y. Blouin // ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2006. – Р. 112-115.
51. Комяк В.М. Модель размещения пожарных депо в условиях неоднородности характеристик сельской местности / В.М. Комяк, А.Г. Коссе // Проблемы пожарной безопасности. – 2010. – №28. – С. 106–114.
52. Комяк В.М. Моделирование компоновки оборудования специальной техники быстрого реагирования на чрезвычайные ситуации/ В.М. Комяк // Проблемы чрезвычайных ситуаций. – 2006. – Вып. 3. – С. 152–160.
53. Zhang B. Layout optimization of satellite module using soft computing techniques/ B. Zhang, H. Teng, Y. Shi // Applied Software Computing. – 2008. – №8(1). – Р. 507–521.
54. Нефедова А.Л. Система геометрического моделирования жилой застройки / А.Л. Нефедова, В.П. Лулаков // Науковий вiсник будiвництва. – 1998. – Вип. 2. – С. 168-171.
55. Стоян Ю.Г. Оптимизация технических систем с источниками физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Путятин. – К.: Наукова думка, 1988. – 189с.
56. Чуриков К.А. Математическая модель задачи оптимизации компоновочных решений при синтезе экологических и теплофизических систем с дискретными источниками: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. физ.– мат. наук: спец. 01.05.02 «Математическое моделирование и вычислительные методы» / К.А. Чуриков. – Харьков. – 2000. – 16с.
57. Новожилова М.В. Моделювання і розв’язання багаторесурсної задачі календарного планування як задачі оптимального розміщення гіперпаралелепіпедів / М.В. Новожилова // АСУ и приборы автоматики – 2001. – № 115 – С. 54–61.
58. Новожилова М.В. Математическая модель оптимального распределения нескольких ресурсов инвестиционно–строительного проекта / М.В. Новожилова, И.В. Беленченко // Науковий вісник будівництва. – 2007. – Вип. 43. – С. 236–239.
59. Стоян Ю.Г. Пространства геометрических информаций / Ю.Г. Стоян – Харьков, 1985. – 68с. – (Препринт АН УССР / Ин–т проблем машиностроения; 223).
60. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Haußner, H. Schumann // European Journal of Operational Research. – 2007. –Vol. 183. – Р. 1109–1130.
61. Dyckhoff H. A typology of cutting and packing problems / H. Dyckhoff. European Journal of Operational Research. – 1990. – Vol. 44(2). – P.  145–159.
62. Dykhoff H. Special issue: Cutting and Packing / H. Dyckhoff, G. Wascher // European Journal of Operational Research. – 1990. – Vol. 44(2). – P.  14–19.
63. Carlier J. New reduction procedures and lower bounds for the two-dimensional bin packing problem with fixed orientation / J.Carlier, F. Clautiaux, A. Moukrim // Computers & Operations Research – 2007. – №34(8). – Р. 2223–2250.
64. Мухачева А.С. Методы локального поиска оптимума прямоугольной упаковки с использованием двойственной схемы / А.С. Мухачева, Х.Л. Куреленков, М.А. Смагин, P.P.Ширгазин // Информационные технологии. – 2002. – №10. – С.26–31.
65. Wang P. Data set generation for rectangular placement problems/ P. Wang, L. Valenzeva // European Journal of Operational Research. – 2001. – № 134(2). – P.378–391.
66. Imahori S. Local search heuristics for the rectangle packing problem with general spatial costs / S. Imahori, M. Yaguira, T. Ibaraki // MIC'2001 – 4th Metaheuristics International conference. – 2001. – P. 471–476.
67. Drira A. Facility layout problems: A survey / A. Drira, H. Pierreval, S. Hajri-Gabouj // Annual Reviews in Control. – 2007. – Vol. 31(2). – P. 255–267.
68. Egeblad J. Placement techniques for VLSI layout using sequence–pair legalization: мaster’s thesis, Department of Computer Science, University of Copenhagen / J. Egeblad. – 2003. – 58р.
69. Cagan J. A survey of computational approaches to three–dimensional layout problems/ J.Cagan, K. Shimada, S. Yin // Computer-Aided Design. – 2002. – Vol. 34(8). – P. 597–611.
70. Puchinger J. Solving a real–world glass cutting problem / J. Puchinger, G. R. Raidl, G. Koller // Proceedings of the Fourth International Conference on Combinatorial Optimization (EvoCOP 2004), April 2004, Coimbra, Portugal. –Springer–Verlag, 2004. – Vol. 3004. – Р. 162–173.
71. Чуб І.A. Математичні моделі та оптимізаційні методи розв’язання задач розміщення неорієнтованих геометричних об’єктів і джерел фізичних полів: автореф. дис на здобут. наук. ступеня докт. техн. наук: спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / І.А. Чуб. – Київ. – 2012. – 40с.
72. Баркалов С.А. Математические основы управления проектами / С.А. Баркалов, В.И. Воропаев, Г.И. Секлетова и др. – М.: Высшая школа, 2005. – 423с.
73. Gilmore P.C. The cutting problem / P.C. Gilmore // Canadian Mathematical Bulletin. – 1966. – № 6. – P. 54–59.
74. Gilmore P.C. A linear programming approach to cutting–stock problem / P.C. Gilmore, R.E. Gomory // Operations Research. – 1961. – Vol. 9 (6). – P.849–859.
75. Mukhatcheva E. Numerical experiment with the evaluation method for linear and rectangular packing problems / E. Mukhatcheva, A. Mukhatcheva, V. Gabitov // 16th European conference on Operational Research.– Brussels, Belgium, 1998.– P.19.
76. Belov G. A cutting plane algorithm for the one–dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths / G. Belov, G.Scheithauer // European Journal of Operational Research. – 2002. – Vol. 141 (2). – P.274–294.
77. Fekete S.P. An exact algorithm for higher–dimensional orthogonal packing / S.P. Fekete, J. Schepers, J.C. van der Veen // Operations Research. – 2007. – Vol. 55, N 3. – P.569–587.
78. Carvalho J. M. Valerio Exact solution of cutting stock problems using column generation and branch–and–bound / J. M. Valerio Carvalho // International Transactions in Operational Research. – 1998. – № 5. – P.35–44.
79. Мухачева Э.А. Модифицированный метод ветвей и границ: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя / Э.А. Мухачева, В.М. Картак // Информационные технологии. – 2000. – № 9. – С. 15–22.
80. Nitsche C. Tighter relaxations for the cutting stock problems / C. Nitsche, G. Scheithauer, J. Terno // European Journal of Operation Research. – 1999. – № 112. – P. 654–663.
81. Scholl A. BISON: а fast hybrid procedure for exactly solving the one dimensional Bin Packing Problem / A. Scholl, R. Klein, G. Juergens // Computers and Operational Research.– 1997. – №24(7). – P.627–645.
82. Krichagina E.V. A dynamic stochastic stock–cutting problem / E.V. Krichagina, R. Rubio, M.I. Taksar, L.M. Wein // Operations Research. – 1999. – №46. – P. 690–701.
83. Стоян Ю.Г. Теорiя i метод евклiдовоi комбiнаторноi оптимiзацii / Ю.Г. Стоян, О.О. Емець.– К.: Iнститут системних дослiджень освiти, 1993. – 188с.
84. Мухачева Э.А. Метод последовательного уточнения оценок: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя / Э.А. Мухачева, А.С. Мухачева, Г.Н. Белов // Информационные технологии. – 2000 – №2. – С. 11–17.
85. Мухачева Э.А. Задача одномерной упаковки: рандомизированный метод динамического перебора и метод перебора с усечением / Э.А. Мухачева А.Ф. Валеева, И.Р. Гареев // Информационные технологии. –2003. – №2. – 25c.
86. Poldi K.C. Heuristics for the one–dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths / K.C. Poldi, M.N. Arenales //Computers & Operations Research. – 2009. – Vol. 36. – №6. – P.2074–2081.
87. Antonio J. The cutting stock problem with mixed objectives: Two heuristics based on dynamic programming / J. Antonio, F. Chauvet, C. Chu, J.–M. Proth // European Journal of Operational Research. – 1999. – № 114 (2).– P. 395–402.
88. Vasko F.J. A hierarhical approarch for one–dimensional cutting stock problems in the steel industry that maximizes yield and minimizes overgrading / F.J. Vasko, D.D. Newhart, L.S. Kenneth // European Journal of Operational Research. – 1999. – №114. – P. 72–82.
89. Stoyan Yu. Non guillotine Placement of Rectangles into a Strip of Given Width / Yu. Stoyan, M. Novozhilova // Pesquisa Operational. – 1999. – №19(2). – Р. 189–211.
90. Элементы теории геометрического проектирования / Гиль Н.И., Яковлев С.В., Новожилова М.В. и др.: Под ред. акад. НАН Украины Рвачева В.Л. – К.: Наук. думка, 1995.– 248с.
91. Dowsland K. A. Packing problems / K. A. Dowsland, W. B. Dowsland // European Journal of Operational Research. – 1992. – № 56. – P. 2–14.
92. Мухачева Э.А. Метод поиска минимума с запретами в задачах двумерного гильотинного раскроя / Э.А. Мухачева, А.И. Ермаченко, Т.М. Миразетдинов, А.О. Усманова // Информационные технологии. – 2001. – №6. – С.25–31.
93. Мухачева А.С. Развитие генетических алгоритмов на базе смешанных процедур локального поиска оптимального решения / А.В. Чиглинцев, М.А. Смагин, Э.А. Мухачева // Информационные технологии. 2001. – №9. – С.51–57.
94. Усманова А.М. Вероятностные жадные эвристики для задачи упаковки в контейнеры / А.М. Усманова. – СПб.: ОПТИМ, 2001. – С. 141–146.
95. Valeeva A. Using Ant Colony Algorithm for the 2D Bin Packing Problem / A. Valeeva, M. Agliullin // Precedings of the 3rd International Workshop. CSIT–2001. – Ufa, 2001. – P. 123–133.
96. Бухвалова В.В. Задача прямоугольного раскроя: метод зон и другие алгоритмы / В.В. Бухвалова. – СПб: С.-П.ГУ, 2001. – 352с.
97. Стоян Ю.Г. Об оптимальном размещении геометрических объектов: автореф. дис. на соиск. уч. степени докт. техн. наук: спец.: 01.05.13 «Математическая кибернетика» / Ю.Г. Стоян. – М. – 1970. – 32с.
98. Стоян Ю.Г. Свойства и способы реализации функции плотного размещения / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – К. – 1972. – 46 с. – (Препринт / АН Украины. Ин–т кибернетики; 18).
99. Heckman R. Computing closely matching upper and lower bounds on textile nesting problems. / R. Heckman, T. Lengauer // European Journal of Operational Research. – 1998. – №108. – P. 473–489.
100. Beasley J.E. An exact two–dimensional non–guillotine cutting tree search procedure / J.E. Beasley // Operational Research. – 1985. – Vol. 33 (1) – P. 49–65.
101. Fekete S.P. On more-dimensional packing I: Modeling / S.P. Fekete, J. Schepers // Technical paper ZPR97-288, Mathematisches Institut, Universitat zu Koln, 1997.
102. Lodi A. Models and bounds for two dimensional level packing problems/ A. Lodi, S. Martello, D. Vigo // Journal of Combinatorial Optimization, to appear. – 2003. – Vol. 31 (2) – P. 14–35.
103. Mukhacheva E.A. Decomposition method of two– and three–dimensional rectangular bin packing / E.A. Mukhacheva, L.I. Sheltman // Decision making under Conditions of Uncertainly (Cutting–Packing Problems). – 1997. – P. 155–172.
104. Ванштейн А.Д. Задачи об упаковке прямоугольников в полосу / А.Д. Ванштейн // Управляемые системы. – 1984. – Вып. 25. – С.27–31.
105. Липовецкий А.И. К оптимизации свободного размещения прямоугольников / А.И. Липовецкий // Автоматизация проектирования в машиностроении. – 1985. – С. 80–85.
106. Arenales M. Two–stages and constrained two–dimensional guillotine cutting problems / M. Arenales, M.C.N. Gramani // 16th European Conference on Operational Research. – Brussels, Belgium, 1998. – P. 29.
107. Coffman E.G. Approximation algorithms for bin–packing. Аn updated survey / E.G. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson // Algorithm Design for Computer System Design. – 1984. – P. 49–106.
108. Coffman E.G. Probabilistic analysis of packing and partitioning algorithms / E.G. Coffman, G.S. Lueker.– New York: Wiley and Sons, 1991. – 420 p.
109. Baker B.S. A 5/4 algorithm for two–dimensional packing / B.S. Baker, D.J. Brown, H.P. Katseff // Journal of Algorithms. – 1981. – № 2(4). – P. 348–368.
110. Bartholdi J.J. Expected performance of the shelf heuristic for two–dimensional packing / J.J. Bartholdi, J.H. Vande Vate, J. Zhang // Operations Research Letters. – 1980. – № 8. – P. 11–16.
111. Coffman E.G. Algorithms for packing squares: a probabilistic analysis / E.G. Coffman, J.C. Lagarias // SIAM Journal on Computing. – 1989. – № 18(1). –P. 166–185.
112. Jakobs S. On ic algorithms for the packing of polygons / S. Jakobs // European Journal of Operational Research. – 1996. – № 88. – P. 165–181.
113. Yanasse H.H.Y. Тwo–dimensional cutting stock with multiple stock sizes / H.H.Y Yanasse, A.S.I. Zinober, R.G. Harris // Journal of Operational Research Society. – 1991. – № 42 (8). – P. 113–123.
114. Israni S. Two–dimensional cutting stock problem research: A review and a new rectangular layout algorithm / S. Israni, J. Sanders // Journal of Manufacturing Systems. – 1982. – №1(169). – P 46–60.
115. Israni S. Performance testing of rectangular parts–nesting heuristics / S. Israni, J. Sanders // Internftional Journal of Production Research. – 1985. –№ 23. – P.  437–456.
116. Faina L. An Application of Simulated Annealing to the Cutting Stock Problem / L. Faina // European Journal of Operational Research. – 1999. –№ 114. – P. 542–556.
117. Lundy M. Convergence of an Annealing algorithms / M. Lundy, A. Mees // Mathematical programming. – 1986. –№ 34. – P. 111–124.
118. Forester H. Simulated Annealing for Order Spread Minimization in Sequencing Cutting Patterns / H. Forester, G. Waescher // European Journal of Operational Research. – 1998. – № 110. – P. 272–281.
119. Blazewicz J. A Local Search Approach for Two–dimensional Irregular Cutting / J. Blazewicz, R. Walkowiak // OR Spektrum. – 1995. – № 17.–P. 93–98.
120. Zhang, D.F. An improved heuristic recursive strategy based on genetic algorithm for the strip rectangular packing problem / D.F. Zhang, S.D. Chen, Y.J. Liu // Acta Automatica Sinica. – № 33(9). – 2007. – Р. 911–916.
121. Adamowicz M. A Solution of the rectangular cutting stock problem / M. Adamowicz, A. Albano // IFEF Transactions on Systems. Man and Cybernetics. − 1976. – № 6(4). – P. 302–310.
122. Hifi M. The DH/KD algorithm a hybrid for unconstrained two dimensional cutting problems/ M. Hifi // European Journal of Operational Research. − 1998. – № 108. – P 473–489.
123. Ferreira C. Packing Squares into squares/ C. Ferreira, F. Miyazawa, Y. Wakabayashi // Pesquisa Operational. − 1999. – № 19(2) – P. 223–239.
124. Falkenauer E. A hybrid Grouping Genetic Algorithm for Bin Packing/ E. Falkenauer // Journal of Heuristics. − 1998. – № 2(1). − P. 5–30.
125. Schwerin P. The Bin Packing Problem: a Problem Generator and Some Numerical Experiments with FFD Packing and MTP/ P. Schwerin, G. Wascher // International Transactions in Operational Research. − 1999. – № 113.− P 653–675.
126. Новожилова М.В. Розв’язання задачі оптимізації ресурсів проекту при точних вихідних даних/ М.В. Новожилова, Н.О. Попельнюх // Вісник ЖДТУ. – 2006. – № 4 (39). – С. 225–230.
127. Coffman E.G. Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms / E.G. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson, R.E. Tarjan // SIAM Journal on Computing. – №9 (1980). – Р. 801–826.
128. Chazelle B. The bottom-left bin packing heuristic: An efficient implementation / B. Chazelle // IEEE Transactions on Computers. – №32. – 1983. – Р. 697–707.
129. Lodi A. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two–dimensional bin packing problems/ A. Lodi, S. Martello, D.Vigo // INFORMS J. Computing. – 1999. – Vol. 11. – P. 345–357.
130. Lodi A. Recent advances on two–dimensional bin packing problems / A. Lodi, S. Martello, D. Vigo // Discrete Applied Mathematics. – 2002. – Vol. 123/124. – P. 373–380.
131. Lirov Y. Special issue: Geometric Resource Allocation / Y. Lirov // Mathematical and Computer Modelling. – 1995. – № 16(1). – Р. 112-132.
132. Morabito M. Staged and constrained two dimensional guillotine cutting problems: an and/or graph approach / M. Morabito, M. Arenales // European Journal of Operational Research. – 1996. – № 94. – P. 548-560.
133. Birgin E.G. Orthogonal packing of rectangular items within arbitrary convex regions by nonlinear optimization/ E.G. Birgin, J.M. Martinez, F.H. Nishihara, D.P. Roncony // Comput. Oper. Res. – 2006. –Vol. 33. – P. 3535–3548.
134. Bortfeldt A. A genetic algorithm for the two–dimensional strip packing problem with rectangular pieces / A. Bortfeldt // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 172. – №3. – P. 814–837.
135. Zhang D. F. An improved heuristic recursive strategy based on genetic algorithm for the strip rectangular packing problem / D. F. Zhang, S. D. Chen, Y. J. Liu // Automatica Sinica. – 2007. – Vol.33. – №9. – P. 911–916
136. Araya I. An efficient hyperheuristic for strip–packing problems/ I. Araya, B. Neveu, M. C. Riff // Studies in Computer Intelligence. – 2008. – Vol.136. – P. 61–76.
137. Huang W. A new heuristic algorithm for rectangle packing/ W. Huang, D. Chen, R. Xu // Comput. Oper. Res. – 2007. – Vol. 34. – P. 3270–3280.
138. Alvarez–Valdes R. Reactive GRASP for the strip packing problem/ R. Alvarez–Valdes, F. Parreno, J. M. Tamarit // Comput. Oper. Res. – 2008. – Vol. 35, № 4. – P. 1065–1083.
139. Alvarez–Valdes R. A GRASP algorithm for constrained two–dimensional non–guillotine cutting problems / R. Alvarez–Valdes, F.Parreño, J.M. Tamarit // Journal of the Operational Research Society. – 2005. – № 56(4).– Р.414–425.
140. Beltran J.D. GRASP/VNS hybrid for the strip packing Problem / J.D. Beltran, J.E. Calderon, R.J. Cabrera, J.A. Moreno–Perez, J.M. Moreno–Vega // Proceedings of the First International Workshop on Hybrid Metaheuristics. – Valencia, Spain. – 2004. – Р. 22–23.
141. Delorme X. GRASP for set packing problems / X. Delorme, X. Gandibleux, J. Rodriguez // European Journal of Operational Research. – 2003. – № 153(3). – Р. 564–580.
142. Рясная И.И. Решение методом вектора спада одной задачи разбиения системы объектов / И.И. Рясная. // В кн.: Математическое обеспечение пакетов прикладных программ и методы дискретной оптимизации. – К.: Ин–т кибернетики АН УССР, 1984. – С. 43–47.
143. Lodi A. Neighborhood search algorithm for the guillotine non-oriented two-dimensional bin packing problem / A. Lodi, S. Martello, D. Vigo // Meta-Heuristics: Advances and Trends in Local SearchParadigms for Optimization. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. – Р. 125–139.
144. Alvarez–Valdes R. A tabu search algorithm for large–scale guillotine constrained two–dimensional cutting problems / R. Alvarez–Valdes, A. Parajon, J.M. Tamarit // Computers & Operations Research. – 2002. – № 29. – С. 925–947.
145. Oliveira J.F.S. Algorithms for nesting problems / J.F.S. Oliveira, J.A.S. Ferreira // Applied Simulated Annealing. – Brussels, 1992. – Р. 255–275.
146. Dereli, T. A hybrid simulated annealing algorithm for 2D packing problems / T. Dereli, Das G.S. // Proceedings of 5th International Symposium on Intelligent Manufacturing Systems.– London, May 29–31, 2006.– Р. 959–966.
147. Lai K.K. Developing a simulated annealing algorithm for the cutting stock problem / K.K. Lai, J.W.M. Chan // Computers & Industrial Engineering. – 1997. – № 32. – Р. 115–127.
148. Leung T.W. Applications of genetic search and simulated annealing to the two–dimensional non–guillotine cutting stock problem / T.W. Leung, C.H. Yung, M.D. Troutt // Computers & Industrial Engineering. – 2001. – №40. – Р. 201–214.
149. Стоян Ю.Г. Об одном способе поиска наилучшего решения для одного класса многоэкстремальных задач / Ю.Г. Стоян // Управляемые системы.– 1969. – N 3. – C. 61–67.
150. Стоян Ю.Г. Метод асимптотического перебора локальных экстремумов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – Харьков, 1974. – 48с.– (Препринт/ АН УССР. Ин–т пробл. машиностроения; № 1).
151. Гиль Н. И. Об одном способе решения задачи прямоугольного раскроя / Н.И. Гиль, А.К. Пандорин. – Харьков – 1985. – 27с. – (Препр. / АН Украины. Ин–т пробл. машиностроения; 205).
152. Стоян Ю. Г., Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей / Ю.Г. Стоян, В. 3. Соколовский.– К.: Наук. думка. – 1980.– 205 с.
153. Levine J. Ant colony optimization and local search for bin packing and cutting stock problems / J. Levine, F. Ducatelle // Journal of the Operational Research Society. – 2004. – № 55(7). – Р. 705–716.
154. Dorigo M. The ant colony optimization metaheuristic: Algorithms, applications, and advances / M. Dorigo, T. Stützle // Handbook of Metaheuristics. – Hamburg: Kluwer Academic Publishers, 2003. – P. 156-164.
155. Гуляницкий Л.Ф. Гибридная метаэвристика, основанная на оптимизации муравьиными колониями и Н-методе / Л.Ф. Гуляницкий, С.И. Сиренко // Компьютерная математика – 2009. – № 1. – С. 142-151.
156. Christofides N. Optimal cutting of two dimensional rectangular plates / N. Christofides // Proc. International Conferensyh. “CAD-74”.– London, UK, 1974.– P. 1–10.
157. Christofides N., Whitlock C. An algorithm for two–imensional cutting problems/ N. Christofides, C. Whitlock // Operations Research.– 1977. – № 25.– P. 30–44.
158. Hifi M. A Best–first branch– and –bound algorithm for orthogonal rectangular packing problems/ M. Hifi, R. Ouafi // International Transactions in Operational Research.– 1998. – № 5/5. – P.345–356.
159. Bhattacharya S. An exact depth–first algorithm for pallet loading problem / S. Bhattacharya, R. Roy, S. Bhattacharya // European Journal оf Operational Research.– 1998. – № 100. – P. 610–625.
160. Feng Е. An algorithm of global optimization for solving layout problems / E. Feng, X. Wang, X. Wang, H. Teng // European Journal оf Operational Research. – 1999. – N 114 (2). – P. 430–436.
161. Fowler R. J. Optimal packing and covering in the plane are NP–complete / R. J. Fowler, M. Paterson, S. L. Tanimoto // Inf. Process. Lett. – 1981. – Vol. 12. – Р. 133–137
162. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач / И.В. Романовский. – М.: Наука. 1977. – 246 с.
163. Martello S. Exact solution of two dimensional finite bin packing problem. / S. Martello, D. Vigo // Management Science. – 1997. – № 35. – P. 64–68.
164. Martello S. An Exact Approach to the Strip–Packing Problem / S. Martello, M. Monaci, D. Vigo // Journal on Computing. – 2003. – Vol. 15(3). – P. 310–319.
165. Martynov V. Geometrical Objects Regular Placement onto a Stock Sheet or Strip./ V. Martynov // Pesquisa Operacional.– 1999.– № 35. – P. 211–223.
166. Kenmochi [M.](file:///C:\Author\10901002) [Exact algorithms for the two–dimensional strip packing problem with and without rotations](file:///C:\CHUB\дисс\ЛИТЕРАТУРА\4778688) / [M. Kenmochi](file:///C:\Author\10901002), [T. Imamichi](file:///C:\Author\3651568), [K. Nonobe](file:///C:\Author\889558), [M. Yagiura](file:///C:\Author\391158), [H. Nagamochi](file:///C:\Author\453019) // [European Journal of Operational Research. –](file:///C:\CHUB\дисс\Journal\828) 2009. – Vol. 198 (1). – P. 73–83.
167. Pisinger D. Using decomposition techniques and constraint programming for solving the two–dimensional bin packing problem / D. Pisinger, M. М. Sigurd // INFORMS Journal on Computing. – 2007. – № 19(1). – P.36–51.
168. Pisinger D. The two–dimensional bin packing problem with variable bin sizes and costs / D. Pisinger, M. М. Sigurd // Discrete Optimization. – 2005. – № 2. – Р.154–167.
169. Магас С.Л. Об оптимальном раскрое полосы прямоугольными заготовками / С.Л. Магас // Вычислительная математика в современном научно–техническом прогрессе:. ΙΙΙ респ. науч.–техн. конф.: тез. докл. – К.: ИК АН Украины. – 1982. – С. 92–93.
170. Магас С.Л. Определение и свойства структур линейных неравенств / С.Л. Магас // Автоматизация проектирования в машиностроении. – 1983. – Вып. 3. – С. 5–11.
171. Новожилова М. В. Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств / М. В. Новожилова // – Харьков, 1988. – 45 с. – (Препр. / АН УССР. Ин–т пробл. машиностроения; 292).
172. Чуб И.A. Конечный метод поиска глобального минимума задачи размещения прямоугольных объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Доповіді Національної Академії наук України. – 2011. – №11. – С. 56-61.
173. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М.: Мир, 1979.– 320с.
174. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации / Б.Н. Пшеничный – М.:Наука, 1983. – 136 с.
175. Пшеничный Б.Н. Комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования/ Б.Н. Пшеничный, Э.И. Ненахов, В.Н. Кузьменко // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 121–133.
176. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации для обратно–выпуклого программирования/ Б.Н. Пшеничный, Л.А. Соболенко // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 6. – С. 86–97.
177. Конвей Дж. Упаковка шаров, решетки и группы / Дж. Конвей, Н. Слоэн – М.: Мир, – 1990. – 791 с.
178. Ненахов Э.И. Метод линеаризации и негладкая оптимизация / Э.И. Ненахов, Л.А. Соболенко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 3. – С. 90–104
179. Соболенко Л.А. Комплекс программ Packing для решения задач упаковки и размещения объектов / Л.А. Соболенко // 13 міжнар. наук.– техн. конф., 25–28 вересня 2006 р., Вінниця: тези доп. – Вінниця: УНІВЕРСУМ. – 2006. – С. 362.
180. Чуб И.А. Линейная аппроксимация условий размещения неориентированных геометрических объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Системи обробки інформації. – 2009. – Вып. 4 (78). – С. 160–163.
181. Чуб И.А. Построение линейной аппроксимации области допустимых решений задачи размещения неориентированных геометрических объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Математичні машини і системи. – 2010. – № 2. – С. 99–107.
182. Чуб И.А. Определение направления спуска в линеаризованной задаче размещения неориентированных геометрических объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. –2010 – № 2(23). – С. 94–100.
183. Чуб I.A. Лінеаризація геометричних обмежень задачі розміщення опуклих багатокутників в анізотропній області / І.А. Чуб // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2010. – Вип. 3(54).– С. 122–127.
184. Чуб И.А. Метод решения линеаризованной задачи размещения неориентированных геометрических объектов / И.А. Чуб, М.В. Новожилова // Управляющие машины и системы. – 2011. – № 3. – С.
185. Разу М.Л. Управление программами и проектами / М.Л. Разу, В.И. Воропаев, Ю.В. Якутин. – М.: Инфра-М, 2000. – 364 с.
186. Мазур И.И. Девелопмент / И.И. Мазур, В.Д. Шапиро, Н.Г. Ольдерроге. – М.: Экономика, 2004. – 521с.
187. Icmeli-Tukel О. Rom Ensuring quality in resource constrained project scheduling / O. Icmeli-Tukel, О. Walter // European Journal of Operational Research. – 1997. – Vol. 103, Issue 3. – P. 483-496.
188. Neumann K. Procedures for resource leveling and net present value problems in project scheduling with general temporal and resource constraints / K. Neumann, J. Zimmermann // European Journal of Operational Research. – 2000. – V. 127, Issue 2. – P. 425-443.
189. Mendes J.J.M. A random key based genetic algorithm for the resource constrained project scheduling problem / J.J.M. Mendes J.F. Gonçalves, M.G.C. Resende // Computers & Operations Research. – 2009. – V. 36, Issue 1. – P. 92-109.
190. Long L. D. A genetic algorithm-based method for scheduling repetitive construction projects / L. D. Long, A. Ohsato // Automation in Construction. – 2009. – V. 18, Issue 4. – P. 499-511.
191. Kastor A. The effectiveness of resource levelling tools for Resource Constraint Project Scheduling Problem / A. Kastor, К. Sirakoulis // International Journal of Project Management. – 2009. – V. 27, Issue 5. – P. 493-500.
192. Lu M. Resource-constrained critical path analysis based on discrete event simulation and particle swarm optimization / M. Lu, H.-C. Lam, F. Dai // Automation in Construction, 2008. – V. 17, Issue 6. – P. 670-681.
193. Глушков В.М. Применение ЭЦВМ при проектировании железных дорог / В.М. Глушков, В.С.Михалевич, А.Н. Сибирко и др. // Тр. ЦНИИС и ИК АН УССР. 1964. – Вып. 51. – 93 с.
194. Михалевич В.С. Математические основы решения задач выбора оптимального очертания продольного профиля / В.С. Михалевич, Н.З. Шор // Труды ВНИИ трансп. строит. – 1964. – С. 22-28.
195. Михалевич В.С. Математические методы выбора оптимального варианта сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газа / В.С. Михалевич, Н.З. Шор, Л.М. Бидулина // Экономическая кибернетика и исследование операций. – 1967. – С. 57-59.
196. Бакаев О.О.Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів / О.О.Бакаев, С.В. Брановицька, В.С. Михалевич, Н.З. Шор // Доп. АН УРСР. – 1962. – 44. – С. 472-474.
197. Михалевич В.С. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ / В.С. Михалевич, В.В. Шкурба // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 34-40.
198. Михалевич В.С. Численные решения многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов / В.С. Михалевич, Н.З. Шор // Науч.-метод, материалы экон.-мат. семинара. – 1962. – Вып. 1. – С. 15-42. – (Ротапр. / АН СССР. ЛЭМИ).
199. Емеличев В.А. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации / В.А. Емеличев, В.И. Комлик. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
200. Подчасова Т.П. Эвристические методы календарного планирования / Т.П. Подчасова, В.М. Португал, В.А. Латаров, В.В.Шкурба – К.: Техніка, 1980. – 140 с.
201. Подчасова Т.П. Управление в иерархических производственных структурах / Т.П. Подчасова, А.Л. Лагода, В.Ф. Рудницкий. – К.: Наук. думка, 1989. – 183 с.
202. Сергієнко І.В. До питання про абстрактну постановку однієї задачі / І.В. Сергієнко // Доп. АН УРСР. – 1965. – № 2. – С. 177-179.
203. Сергієнко І.В. Про один метод відшукання екстремальних розв'язків в одному класі задач / І.В. Сергієнко // Доп. АН УРСР. – 1965. – № 3. – С. 296-299.
204. Сергиенко И.В. О методе решения одной специальной за­дачи теории расписаний / И.В. Сергиенко // Алгоритмические языки и авто­матизация программирования. – К.: Наук, думка, 1965. – С. 54-62.
205. Михалевич В.С. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов / В.С. Михалевич, А.И. Кукса. – М.: Наука, 1983. – 208с.
206. Чуб И.A. Решение задачи распределения ресурсов проекта как оптимизационной задачи размещения геометрических объектов с изменяемыми метрическими характеристиками / И.А. Чуб, А.С. Иванилов, М.В. Новожилова // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 13. – № 5. – С. 56–66.
207. Чуб I.A. Математична модель та розв’язок оптимізаційної задачі розподілу ресурсів проекту /І.А. Чуб, М.В. Новожилова, І.В. Беленченко // Системи обробки інформації. – 2011. – Вип. 2 (92). – С.  291–294.
208. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл,  У.Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 509с.
209. Чуб И.А. Оценка ресурсов инвестиционных проектов как составная часть технологии банковского кредитования. Фінансово–кредитна діяльність: проблеми теорії та практики/ И.А. Чуб, М.В. Новожилова // − 2007. − № 4 − С. 45–49.
210. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 469с.
211. Новожилова М.В. Моделювання і розв’язання багаторесурсної задачі календарного планування як задачі оптимального розміщення гіперпаралелепіпедів / М.В. Новожилова // АСУ и приборы автоматики – 2001. – № 115 – С. 54–61.
212. Новожилова М.В. Решение оптимизационной задачи размещения прямоугольников в полосе с учетом возможности их разбиения / М.В. Новожилова, Н.А. Попельнюх, И.В. Беленченко // Системи обробки інформації – 2006. – № 8 – С. 67–73.
213. Новожилова М.В. Математическая модель оптимального распределения нескольких ресурсов инвестиционно–строительного проекта / М.В. Новожилова, И.В. Беленченко // Науковий вісник будівництва. – 2007. – Вип. 43. – С. 236–239.
214. Попельнюх Н.О. Математичне моделювання задачі управління ресурсами проекту в умовах невизначеності задавання вихідних даних та в умовах повного детермінізму / Н.О. Попельнюх, М.В. Новожилова // Управління проектами: стан та перспективи: міжнар. наук.–практ. конф.: тези доп. – Миколаїв. – 2005. – С. 113–114.
215. Новожилова М.В. Оптимизационная задача управления ресурсами с учетом погрешностей исходных данных / М.В. Новожилова, Н.A. Попельнюх // Геометричне та комп'ютерне моделювання – 2006. – Вип.15. – С. 64–73.
216. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации / С.В. Лутманов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 368 с.

217. Омельчук А.М. Интеграция систем безопасности и нелинейность матрицы угроз / А.М. Омельчук // Системы безопасности – 2001. – № 41.– С. 20-21

218. Тютюник В.В., Шевченко Р.І. Формування критерію «ефективність» – «інтегральна ціна» як основи принципу комплектування технічними засобами інтегральної системи безпеки / В.В. Тютюник, Р.І. Шевченко // Проблеми пожежної безпеки. – Харків: УЦЗУ, 2008. – № 23. – С. 202-216.

219. ДБН В.2.5-56:2014 «Системи протипожежного захисту». – К.: Мінрегіон України. – 2015. – 127 с.

**ДОДАТОК**